

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

Институт компьютерных и инженерных наук
Кафедра математического анализа и моделирования
Направление подготовки – 01.03.02 Прикладная математика и информатика
Направленность (профиль) образовательной программы – Прикладная
математика и информатика

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
И.о. зав. кафедрой
_____ Н.Н. Максимова
« _____ » _____ 2025 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему: Математическое моделирование диффузионных процессов в активной
среде с размножением

Исполнитель
студент группы 1101об

(подпись, дата)

И.А. Кенев

Руководитель
доцент, канд. физ.-мат. наук

(подпись, дата)

Т.В. Труфанова

Нормоконтроль

(подпись, дата)

В.О. Салмиянов

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

Институт компьютерных и инженерных наук
Кафедра математического анализа и моделирования

УТВЕРЖДАЮ
И.о. зав. кафедрой
_____ Н.Н. Максимова
« _____ » _____ 2025 г.

З А Д А Н И Е

К бакалаврской работе студента Кенева Ивана Алексеевича

1. Тема бакалаврской работы: Математическое моделирование диффузионных процессов в активной среде с размножением (утверждена приказом от 03.04.2025 № 849-уч)
2. Срок сдачи студентом законченной работы (проекта) 26.06.2025 г.
3. Исходные данные к бакалаврской работе: формулировка темы ВКР, литературные источники, среда разработки ППП Python.
4. Содержание бакалаврской работы: математические модели диффузионных процессов; численные методы решения уравнений параболического типа, реализация математического моделирования процесса диффузии в ППП Python.
5. Перечень материалов приложения: листинг компьютерных программ, сертификат участия в XXXIV научной конференции АмГУ «День науки»
6. Консультанты по бакалаврской работе: нормоконтроль – Салмиянов В.О., ассистент
7. Дата выдачи задания: 03.04.2025 г.

Руководитель бакалаврской работы: Труфанова Татьяна Вениаминовна, доцент, канд. тех. наук

Задание принял к исполнению (03.04.2025): _____ Кенев И.А.

РЕФЕРАТ

Бакалаврская работа содержит 69 с., 13 рисунков, 8 приложений, 27 источников, 1 таблицу

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИФФУЗИЯ, МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ, РАЗНОСТНАЯ СХЕМА, PYTHON, МОДЕЛЬ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ.

Бакалаврская работа посвящена математическому моделированию нестационарных диффузионных процессов.

В бакалаврской работе рассмотрены теоретические основы диффузионных процессов, проведено их математическое моделирование.

Представлено конечное аналитическое решение задач по диффузии в однородной пластине, параллелепипеде и шаре, представлена реализация математической модели концентрации нейтронов.

Для каждой из задач были найдены графики аналитического решения. Реализация математических моделей основана на применении численного метода конечных разностей. Моделирование производилось в ППП Python. Представлены результаты вычислительных экспериментов при варьировании параметров модели.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	7
1 Математические модели диффузии нейтронов	10
1.1 Постановка задачи моделирования нестационарной диффузии нейтронов	10
1.2 Постановка задачи моделирования диффузионного процесса в активной среде с размножением	11
1.3 Вклад ученых в изучение диффузионных процессов	13
1.4 Математическая модель цепной реакции	15
1.5 Критические параметры системы	16
1.6 Численные методы решения уравнений диффузии	16
1.7 Диффузия нейтронов	16
1.8 Модель популяционной динамики	18
2.1 Аналитический метод решения краевой задачи в однородной пластине	20
2.1.1 Концептуальная постановка задачи	20
2.1.2 Математическая постановка задачи	20
2.1.3 Аналитическое решение задачи	20
2.2 Аналитический метод решения краевой задачи в шаре	22
2.2.1 Концептуальная постановка задачи.	22
2.2.2 Математическая постановка задачи	22
2.3 Аналитический метод решения краевой задачи в кубе	29
2.3.1 Концептуальная постановка задачи	29
2.3.2 Математическая постановка задачи	29
2.3.3 Аналитическое решение задачи	30

3 Численные методы и обзор программных продуктов для решения поставленных задач	34
3.1 Обзор языка программирования Python	34
3.2 Краткая характеристика возможностей Python	34
3.3 Метод конечных разностей	35
3.3.1 Явная разностная схема	35
3.3.2 Неявная разностная схема	37
4 Реализация моделирования процесса диффузии	39
4.1 Реализации численного метода решения краевой задачи в шаре	39
4.2 Реализация модели динамики популяции частиц в активной среде.	42
Заключение	46
Библиографический список	47
Приложение А Листинг программы построения графика динамики популяции	50
Приложение Б Листинг программы построения графика аналитического решения задачи в шаре	52
Приложение В Листинг программы построения графика аналитического решения задачи в параллелепипеде	55
Приложение Г Листинг программы построения графика аналитического решения задачи в однородной пластине	58
Приложение Д Листинг программы построения графика аналитического решения задачи в параллелепипеде	60
Приложение Е Листинг программы моделирования нестационарного процесса диффузии в шаре	62
Приложение Ж Листинг программы построения графика аналитического решения	67

ВВЕДЕНИЕ

Диффузия нейтронов – это процесс, который играет ключевую роль в ядерной физике и инженерии, особенно в контексте ядерных реакторов и радиационной безопасности [17]. Этот процесс описывает распространение нейтронов в среде, где они взаимодействуют с атомами и молекулами, что приводит к изменению их концентрации и распределения [19]. Понимание механизма диффузии нейтронов необходимо для оптимизации работы ядерных реакторов, разработки новых материалов и обеспечения безопасности в ядерной энергетике [21].

Процесс диффузии нейтронов можно охарактеризовать как случайное движение частиц, которое происходит в результате столкновений с другими частицами. Это явление можно наблюдать в различных средах, включая газовые, жидкие и твердые вещества. В зависимости от условий диффузия может быть стационарной или нестационарной. Стационарная диффузия характеризуется постоянным распределением нейтронов во времени, тогда как нестационарная диффузия подразумевает изменение концентрации нейтронов с течением времени.

Основным уравнением, описывающим процесс диффузии, является уравнение Фика, которое связывает поток частиц с градиентом их концентрации. Это уравнение позволяет предсказать, как нейтроны будут распространяться в среде, и является основой для математического моделирования диффузионных процессов [12].

Диффузия нейтронов имеет множество практических приложений, включая ядерные реакторы, медицинские технологии, а также в области радиационной защиты. Знание механизмов диффузии и их математического описания необходимо для разработки эффективных систем управления ядерными реакциями, а также для обеспечения безопасности и защиты окружающей среды.

Актуальность исследования диффузионных процессов в активной среде с размножением нейтронов обусловлена их значением для ядерной физики и безопасности. Понимание механизмов, лежащих в основе атомных взрывов, требует глубокого анализа поведения нейтронов в различных условиях. В условиях современных технологий и научных исследований, точное моделирование этих процессов становится необходимым для разработки эффективных методов контроля и управления ядерными реакциями [1].

Целью данной работы является изучение математических моделей, описывающей динамику концентрации нейтронов в активной среде, а также определение условий, при которых может возникнуть цепная реакция. Для достижения этой цели необходимо решить уравнение диффузии, учитывающее как перемещение нейтронов, так и их генерацию. Важным аспектом работы является установление начальных и граничных условий, которые определяют поведение системы во времени и пространстве.

Новизна данной работы заключается в применении комплексного подхода к исследованию диффузионных процессов, что позволит более точно предсказать поведение нейтронов в активной среде. Практическая значимость работы заключается в возможности использования полученных результатов для разработки более безопасных и эффективных технологий в области ядерной энергетики и ядерной безопасности.

Данная работа посвящена математическому моделированию процессов диффузии нейтронов. В первой главе рассматриваются теоретические основы диффузии, включая основные уравнения и методы их решения, а также примеры применения уравнений в частных производных, описывающих диффузионные процессы.

Во второй главе представлены аналитические методы решения уравнений, описывающих диффузию нейтронов, а также обсуждаются различные подходы к моделированию этих процессов.

В третьей главе работы рассматривается программный продукт, используемый для решения поставленных задач, и представляется численный

метод конечных разностей, применяемый для решения уравнений математической физики, связанных с диффузией.

В четвертой главе проводятся практические исследования, в ходе которых варьируются определенные параметры, влияющие на процесс диффузии.

1 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИФФУЗИИ НЕЙТРОНОВ

1.1 Постановка задачи моделирования нестационарной диффузии нейтронов

Изучение процессов, связанных с распространением нейтронов в активной среде, можно осуществить с помощью решения дифференциальных уравнений. Для этого применяются различные методы, позволяющие преобразовать уравнения с частными производными в более простые формы. Важно определить параметры, которые характеризуют рассматриваемый процесс. Поскольку дифференциальные уравнения имеют бесконечное множество решений, для выделения необходимого решения требуется задать дополнительные условия. В контексте нестационарной диффузии нейтронов необходимо учитывать начальные условия, описывающие состояние системы в начальный момент времени, а также граничные условия, определяющие поведение системы на границах области.

Таким образом, математическая модель нестационарного процесса диффузии нейтронов включает в себя дифференциальное уравнение, описывающее динамику концентрации нейтронов, а также начальные и граничные условия, необходимые для нахождения единственного решения задачи.

Общий вид уравнения, описывающего процесс диффузии нейтронов, можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + F(M, t), \quad (1.1)$$

где D – эффективный коэффициент диффузии нейтронов, $F(M, t)$ – объемная плотность внутренних источников нейтронов, $u(M, t)$ – концентрация нейтронов, а Δ – оператор Лапласа.

В случае, если в системе присутствуют источники и поглотители нейтронов, уравнение может быть дополнено следующим образом:

$$F = \alpha u - \beta u = \gamma u, \quad (1.2)$$

где α – коэффициент рождения нейтронов, β – коэффициент поглощения нейтронов, а $\gamma = \alpha - \beta$ – коэффициент размножения нейтронов. Если $\gamma > 0$, это указывает на преобладание процесса генерации нейтронов над их поглощением, что может привести к возникновению цепной реакции.

Подставляя выражение (1.2) в уравнение (1.1), получаем диффузионное уравнение, которое лежит в основе математической модели цепной реакции:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + \gamma u, \quad \gamma > 0 \quad (1.3)$$

Используя уравнение (1.3), можно описать процесс эволюции нейтронов в активной среде, представляющей собой шар радиуса r_0 , если начальное распределение нейтронов задано сферически симметричной функцией $u_0(r)$.

Для определения концентрации нейтронов $u(r, t)$ в любой момент времени формулируется задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \gamma u, \quad t > 0, \quad 0 < r < r_0. \quad (1.4)$$

Начальное условие:

$$u(r, 0) = u_0(r), \quad 0 < r < r_0; \quad (1.5)$$

Граничное условие:

$$u(r_0, t) = 0, \quad t > 0; \quad (1.6)$$

Граничное условие (1.6) соответствует предположению о быстром уходе нейтронов, вылетающих с поверхности шара, что позволяет считать концентрацию нейтронов на этой поверхности практически равной нулю в любой момент времени [5].

1.2 Постановка задачи моделирования диффузионного процесса в активной среде с размножением

Изучение процессов диффузии нейтронов в активной среде можно осуществить с помощью решения дифференциальных уравнений с частными производными. Для этого существуют методы, которые позволяют преобразовать уравнения с частными производными в более простые формы,

пригодные для численного решения. Однако прежде всего необходимо определить ключевые параметры, характеризующие рассматриваемый процесс. Поскольку дифференциальные уравнения имеют бесконечное множество решений, для выделения необходимого процесса требуется задать дополнительные условия.

При анализе нестационарного процесса диффузии нейтронов важно учитывать начальные условия, которые описывают распределение нейтронного потока в момент времени $t = 0$. Также необходимо определить границы исследуемой области, чтобы корректно решить уравнение. Для этого используются граничные условия, которые могут быть различного типа, в зависимости от физической ситуации.

Таким образом, математическая модель нестационарного диффузионного процесса включает в себя дифференциальное уравнение, описывающее динамику нейтронного потока, а также начальные и граничные условия, необходимые для нахождения единственного решения поставленной задачи [23].

Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными в общем случае имеют вид:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}).$$

Если уравнение линейно относительно u и её производных, то его можно записать в форме:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = F(x, y),$$

где коэффициенты A, B, C, a, b, c могут зависеть от x и t .

В зависимости от знака дискриминанта $D = B^2 - 4AC$ уравнение может быть:

параболическим ($D=0$) – описывает процессы диффузии;

гиперболическим ($D > 0$) – соответствует волновым процессам;

эллиптическим ($D < 0$) – описывает стационарные распределения [10].

Поскольку диффузия в активной среде относится к параболическому типу, основное внимание уделяется уравнениям вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u),$$

где:

D – коэффициент диффузии,

$f(u)$ – нелинейный член, описывающий размножение или гибель частиц

(например, логистический рост $f(u) = \alpha u \left(1 - \frac{u}{K}\right)$).

1.2.1 Типы уравнений и граничные условия

В зависимости от геометрии задачи рассматривают:

Одномерный случай (диффузия в стержне или канале):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Двумерный и трёхмерный случаи (распространение в плоскости или пространстве):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

1.3 Вклад ученых в изучение диффузионных процессов

Интерес представляют процессы, в которых происходит объемная генерация диффундирующего вещества с темпом, пропорциональным их концентрации. Особенно это заметно в реакциях деления тяжелых ядер, таких как уран-235 и плутоний-239. При взаимодействии с нейтронами некоторые из этих тяжелых ядер могут делиться на более легкие, при этом испуская несколько новых нейтронов и выделяя значительное количество ядерной энергии. В результате такого процесса количество нейтронов возрастает, и при определенных условиях можно ожидать, что процесс будет развиваться в форме цепной реакции взрывного типа. Важный вклад в теорию цепных реакций внесли исследования Н.Н. Семенова, Я.Б. Зельдовича и Ю.Б. Харитона.

Весной 1920 года Семёнов начал свою карьеру в Государственном физико-техническом рентгеновском институте (ГФТРИ) под руководством А.Ф. Иоффе, возглавив лабораторию электронных явлений. Он проявил не только научный интерес, но и организаторские способности, обеспечивая лабораторию всем необходимым для исследований. В его команде работали будущие выдающиеся ученые, такие как В.Н. Кондратьев, Ю.Б. Харитон и А.Ф. Вальтер. Основные направления работы Семёнова включали ионизацию атомов и молекул, а также вопросы электрификации, что имело важное практическое значение. В 1925 году он предложил Харитону провести эксперименты по окислению паров фосфора, что привело к открытию цепной реакции, способной высвобождать значительное количество энергии.

Семёнов, размышляя над результатами своих экспериментов, пришел к выводу, что цепная реакция может порождать не одну, а две активные частицы, что приводит к образованию двух цепочек, которые затем продолжают делиться. Эти идеи, сформулированные в 1927 году, стали основой для дальнейших исследований в области ядерной физики и цепных реакций.

Яков Борисович Зельдович, начиная с 1938 года, возглавил лабораторию в Институте химической физики, где занимался теорией горения и детонации. Его работы по объединению химической кинетики с анализом тепловых процессов и гидродинамики привели к созданию количественной теории горения. Эти исследования стали особенно актуальными во время Второй мировой войны, когда Зельдович занимался изучением горения порохов для реактивных снарядов, что позволило решить проблемы нестабильного горения в зимних условиях. В 1943 году он был награжден Сталинской премией за свои достижения в этой области.

Зельдович также начал заниматься ядерной физикой еще до войны, совместно с Ю.Б. Харитоном, выполнив цикл работ по урану. В 1939 году они впервые рассчитали возможность цепной реакции деления урана, что стало важным шагом к пониманию критической массы и размеров реакторов. Эти исследования оказали значительное влияние на развитие атомной энергетики.

Юрий Борисович Харитон, с 1921 по 1931 год, занимался молекулярной физикой и вопросами радиоактивности, что положило начало изучению цепных реакций в Советском Союзе. В 1931 году он возглавил лабораторию взрывчатых веществ в Институте химической физики, где занимался теорией взрывов и детонации. В 1939–1941 годах Харитон и Зельдович впервые осуществили расчет цепной реакции деления урана в реакторе, предложив использовать тяжелую воду и углерод в качестве замедлителей нейтронов. Они также описали условия, при которых может возникнуть ядерный взрыв, и оценили его разрушительную силу.

В начале 1942 года Харитон был направлен в НИИ-6, где занимался проблемами боевого применения кумулятивных гранат. В 1943 году он был привлечен к работам по атомному проекту СССР, а в 1945 году вошел в состав Технического совета при Спецкомитете Государственного комитета обороны.

Работа Харитона в Лаборатории № 2 АН СССР с 1944 года была сосредоточена на проектировании атомной бомбы. В 1946 году он, Зельдович и другие ученые предложили использовать термоядерные реакции для создания водородной бомбы. Под его руководством был организован филиал Лаборатории № 2, который позже стал самостоятельным КБ-11, первым отечественным центром по разработке ядерного оружия.

Таким образом, работы Семёнова, Зельдовича и Харитона стали основой для дальнейших исследований в области ядерной физики и разработки атомного оружия. Их вклад в изучение цепных реакций и ядерных процессов оказал значительное влияние на развитие науки и технологий в Советском Союзе и за его пределами.

1.4 Математическая модель цепной реакции

Для более глубокого понимания процесса цепной реакции в активной среде, необходимо рассмотреть уравнение, описывающее динамику концентрации нейтронов. В случае, когда активное вещество занимает произвольную область W , ограниченную поверхностью S , уравнение может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\partial u(M, t)}{\partial t} = D\Delta u(M, t) + \gamma u(M, t), \quad M \in W, \quad (1.7)$$

где D – коэффициент диффузии, Δ – оператор Лапласа, а γ – коэффициент размножения нейтронов. Условия, при которых происходит цепная реакция, можно выразить через собственные значения и функции, что позволяет определить критические параметры системы [16].

1.5 Критические параметры системы

Для определения условий, при которых цепная реакция может протекать, необходимо учитывать критические значения, такие как критический радиус $r_{кр}$ и критическая масса $m_{кр}$. Эти параметры можно выразить через коэффициенты диффузии и размножения:

$$r_{кр} = \pi \sqrt{\frac{D}{\gamma}}; \quad (1.8)$$

$$m_{кр} = \rho \frac{4}{3} \pi r_{кр}^3; \quad (1.9)$$

где ρ – плотность активного вещества. Эти формулы позволяют оценить, при каких условиях активное вещество будет способствовать возникновению цепной реакции [4,18].

1.6 Численные методы решения уравнений диффузии

Для решения уравнений, описывающих диффузионные процессы, часто применяются численные методы. Одним из наиболее распространенных является метод конечных разностей, который позволяет аппроксимировать производные и решать уравнения на дискретной сетке. Также используются методы конечных элементов, которые позволяют более гибко подходить к решению задач со сложной геометрией. Эти методы обеспечивают возможность получения численных решений для различных условий и параметров, что критически важно для практического применения теоретических моделей [26].

1.7 Диффузия нейтронов

Нейтроны, взаимодействуя с веществом, рассеиваются или поглощаются ядрами. Вещества, которые преимущественно рассеивают и мало поглощают

нейтроны, называют рассеивающими. Вещества с сечением поглощения называют поглощающими. Подразделение веществ на рассеивающие и поглощающие условно. Одно и то же вещество в одной энергетической области может быть рассеивающим, а в другой поглощающим. Например, бор является хорошим поглотителем медленных нейтронов и слабо поглощает быстрые нейтроны [26].

Траектория отдельного нейтрона в рассеивающем веществе представляет собой зигзагообразную линию изображенную на рисунке 1

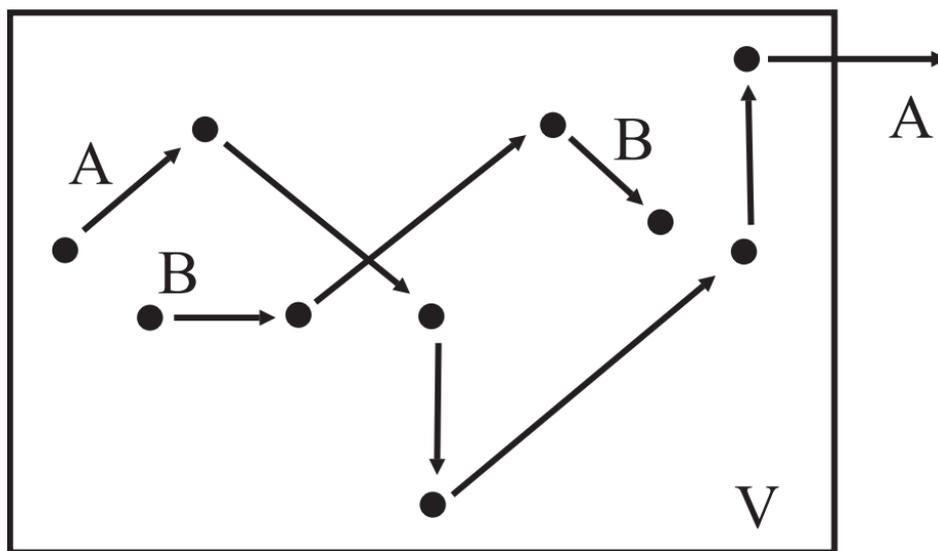


Рисунок 1 – Траектория нейтронов в рассеивающей среде

Это линия, состоящая из прямолинейных отрезков, по которым нейтрон движется от столкновения к столкновению. Расстояние, которое нейтрон проходит между двумя последовательными столкновениями с рассеиванием, называется длиной свободного пробега рассеяния. Эти длины могут варьироваться: в некоторых случаях нейтрон преодолевает короткое расстояние между столкновениями, в других – значительно большее.

После серии таких столкновений нейтрон может быть поглощен средой. Полное расстояние, которое нейтрон проходит в среде от момента своего рождения до момента поглощения, называется длиной свободного пробега поглощения (или длиной поглощения). Как и длина рассеяния, она также может различаться для разных нейтронов. Некоторые нейтроны поглощаются после

нескольких столкновений, в то время как для других это число может быть больше или меньше.

В поглощающих средах большинство нейтронов поглощается уже при первых столкновениях с ядрами. В таких средах перемещение нейтронов происходит на очень короткие расстояния.

В практических задачах больше интересует не поведение каждого отдельного нейтрона, а общее перемещение большого числа нейтронов в средах рассеивания. Это перемещение схоже с движением молекул в жидкостях и газах, которое описывается законами диффузии. Молекулы, сталкиваясь друг с другом, перемещаются из областей с высокой плотностью в области с низкой плотностью. Различие заключается в том, что диффузия нейтронов обуславливается рассеивающими столкновениями с ядрами среды [20,25].

1.8 Модель популяционной динамики

Также рассмотрим пример диффузионного процесса в активной среде с размножением в контексте распространения бактерий. В рамках данной работы были проведены численные эксперименты, использующие уравнение, описывающее диффузионный процесс с размножением, где основное внимание уделяется зависимости популяции от времени t и пространственных координат x . Уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru \left(1 - \frac{u}{K} \right),$$

где:

$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)$ – скорость изменения плотности популяции u во времени,

$\left(D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$ – член, описывающий диффузию, то есть распространение

популяции в пространстве,

$ru \left(1 - \frac{u}{K} \right)$ – член, описывающий логистический рост популяции, где:

r – скорость роста популяции,

K – ёмкость среды, то есть максимальная плотность популяции, которую может выдержать среда [2].

Ниже приведен пример динамики популяции в различные моменты времени. В данном на случае на рисунке 2 приведен пример в момент времени [0:10:50]

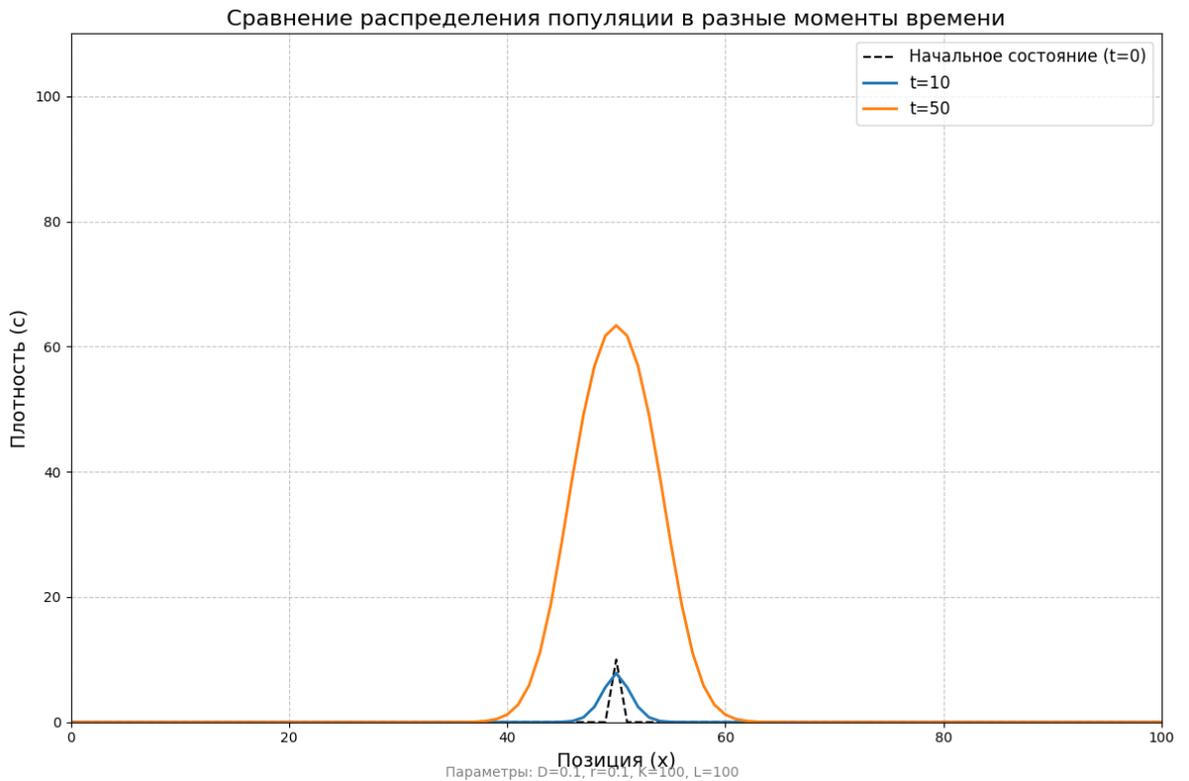


Рисунок 2 – Модель динамики популяции в моменты времени $t = [0,10,50]$

2 АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

2.1 Аналитический метод решения краевой задачи в однородной пластине

2.1.1 Концептуальная постановка задачи

В прямоугольной пластине происходит диффузионный процесс, связанный с эволюцией концентрации нейтронов, которые размножаются со скоростью, пропорциональной их концентрации. Необходимо определить распределение концентрации нейтронов в пластине при заданных условиях. На границах $x = 0$ и $y = s$ концентрация нейтронов поддерживается равной нулю, в то время как границы $y = 0$ и $x = p$ являются изолированными. Начальная концентрация нейтронов в пластине постоянна и равна U .

2.1.2 Математическая постановка задачи

Необходимо решить уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \gamma u, 0 < x < p, 0 < y < s, t > 0, \quad (2.1)$$

где $u(x, y, t)$ – концентрация нейтронов, D – эффективный коэффициент диффузии нейтронов, γ – коэффициент размножения нейтронов.

Уравнение должно удовлетворять следующим граничным условиям:

$$u(0, y, t) = u(p, y, t) = 0, \quad 0 < y < s, \quad t > 0; \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x,0,t)} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x,s,t)} = 0, 0 < x < p, t > 0, \quad (2.3)$$

и начальному условию:

$$u(x, y, 0) = U \sin\left(\frac{\pi x}{p}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{s}\right). \quad (2.4)$$

Где U – начальная амплитуда концентрации.

2.1.3 Аналитическое решение задачи

Решение будем искать методом разделения переменных в виде

$$u(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t) \neq 0, \quad (2.5)$$

Подставляем в (2.5) в уравнение (2.1):

$$XYT' = D(X''YT + XY''T) + \gamma XYT.$$

Разделяя переменные, получаем:

$$\frac{T'}{T} = D\left(\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}\right) + \gamma = -\lambda. \quad (2.6)$$

И делим на D

Для $X(x)$ получаем задачу Штурма - Лиувилля отыскания собственных значений и собственных функций:

$$X'' + \mu X = 0, X(0) = X(p) = 0, \quad (2.7)$$

решение будет иметь вид:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right), \mu_n = \left(\frac{n\pi}{p}\right)^2, n = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Для $Y(y)$:

$$Y'' + \left(\frac{\lambda + \gamma}{D} - \mu\right)Y = 0, Y'(0) = Y'(s) = 0, \quad (2.9)$$

решение будет иметь вид:

$$Y_m(y) = \cos\left(\frac{m\pi y}{s}\right), \nu_m = \left(\frac{m\pi}{s}\right)^2, m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

$$T' + \lambda_{nm}T = 0, \quad (2.11)$$

где

$$\lambda_{nm} = D\left(\frac{n^2\pi^2}{p^2} + \frac{m^2\pi^2}{s^2}\right) - \gamma. \quad (2.12)$$

решение будет иметь вид:

$$T_{nm}(t) = C_{nm} e^{-\lambda_{nm}t}. \quad (2.13)$$

Общее решение:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{s}\right) e^{-\lambda_{nm}t}. \quad (2.14)$$

Итоговое решение уравнения имеет вид:

$$u(x, y, t) = U \sin\left(\frac{\pi x}{p}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{s}\right) e^{(\gamma - D(\frac{\pi^2}{p^2} + \frac{\pi^2}{s^2}))t}. \quad (2.15)$$

Условия возникновения цепной реакции:

$$\gamma > D\left(\frac{\pi^2}{p^2} + \frac{\pi^2}{s^2}\right). \quad (2.16)$$

Критические размеры пластины:

Если $p=s=L$, то:

$$L_{кр} = \pi \sqrt{\frac{2D}{\gamma}}. \quad (2.17)$$

Таким образом, было найдено аналитическое решение задачи (2.1).

В моменты времени $t \in (0.0-1.0)$ с., график аналитического решения будет выглядеть следующим образом:

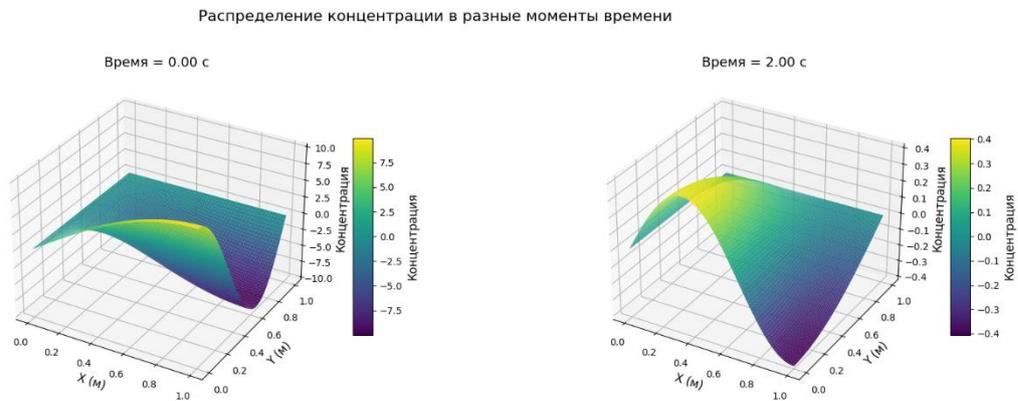


Рисунок 3 – график аналитического решения задачи (2.1)

2.2 Аналитический метод решения краевой задачи в шаре

2.2.1 Концептуальная постановка задачи.

В сферической области радиуса R происходит диффузионный процесс, связанный с эволюцией концентрации нейтронов, которые размножаются со скоростью, пропорциональной их концентрации. Требуется определить распределение концентрации нейтронов в шаре при заданных условиях. На поверхности шара $r = R$ концентрация нейтронов поддерживается равной нулю, что соответствует быстрому уходу с поверхности шара. Начальное распределение концентрации нейтронов задано функцией $u_0(r)$.

2.2.2 Математическая постановка задачи

Требуется решить уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \gamma u, \quad t > 0, \quad 0 < r < r_0, \quad (2.18)$$

где $u(r, t)$ – концентрация нейтронов, D – эффективный коэффициент диффузии и γ – коэффициент размножения нейтронов;

удовлетворяющее начальному условию:

$$u(r, 0) = u_0(r), \quad 0 < r < r_0, \quad (2.19)$$

и граничному условиям:

$$u(r_0, t) = 0, \quad t > 0. \quad (2.20)$$

Граничное условие (2.20) соответствует предположению о быстром уходе нейтронов, которые вылетели с поверхности шара, что позволяет считать концентрацию нейтронов на этой поверхности практически равной 0 в любой момент времени.

Далее преобразуем уравнение (2.18)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \gamma u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{D}{r^2} \left(2r \frac{\partial u}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) + \gamma u, \quad (2.21)$$

$$\frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\gamma}{D} u, \quad (2.22)$$

$$u(r, 0) = u_0(r), \quad 0 < r < r_0,$$

$$u(r_0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Решение уравнения (2.22) будем искать в виде:

$$u(r, t) = V(r, t) e^{\gamma t}, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} e^{\gamma t} + V(r, t) \gamma e^{\gamma t}, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial r} e^{\gamma t}, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} e^{\gamma t}. \quad (2.26)$$

После подстановки уравнений (2.23), (2.24), (2.25), (2.26) в уравнение (2.22) мы получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{D} \left(\frac{\partial V}{\partial t} e^{\gamma t} + V(r,t) \gamma e^{\gamma t} \right) = \\ & = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} e^{\gamma t} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} e^{\gamma t} + \frac{\gamma}{D} V(r,t) e^{\gamma t} \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{D} \frac{\partial V}{\partial t} e^{\gamma t} + V(r,t) \frac{\gamma}{D} e^{\gamma t} = \\ & = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} e^{\gamma t} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} e^{\gamma t} + \frac{\gamma}{D} V(r,t) e^{\gamma t}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

После того, как приводим подобные слагаемые в (2.28), получим:

$$\frac{1}{D} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r}. \quad (2.29)$$

Далее найдем начальные и граничные условия:

$$V(r,0) = \frac{u(r,0)}{e^{\gamma \cdot 0}} = u_0(r), \quad 0 < r < r_0; \quad (2.30)$$

$$V(r_0,0) = \frac{u(r_0,0)}{e^{\gamma \cdot 0}} = 0, \quad t > 0. \quad (2.31)$$

Получим краевую задачу для функции $V(r,t)$:

$$\frac{1}{D} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r},$$

$$V(r,0) = u_0(r), \quad 0 < r < r_0,$$

$$V(r_0,0) = 0, \quad t > 0.$$

$$\text{Введем замену: } \omega = rV \quad (2.32)$$

$$V = \frac{\omega}{r}. \quad (2.33)$$

Найдем производные, которые входят в уравнение (2.29):

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial t}; \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega}{r} \right) = \frac{r \frac{\partial \omega}{\partial r} - \omega}{r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r^2}; \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} &= \frac{r \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} - \frac{\partial \omega}{\partial r}}{r^2} - \frac{r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r} - 2r\omega}{r^4} = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} = \frac{2}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{2\omega}{r^3}.\end{aligned}\quad (2.36)$$

Подставим (2.34), (2.35), (2.36) в уравнение (2.29):

$$\begin{aligned}\frac{1}{D} \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{2\omega}{r^3} + \frac{2}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r^2} \right); \\ \frac{1}{D} \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{2\omega}{r^3} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{2\omega}{r^3}.\end{aligned}\quad (2.37)$$

Приводя подобные слагаемые в (2.37), получим:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2}.$$

Далее находим начальные и граничные условия:

$$\omega(r, 0) = rV(r, 0) = ru_0(r);$$

$$\omega(r_0, t) = rV(r_0, t) = 0;$$

Получим следующую краевую задачу для функции $\omega(r, t)$:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2}.\quad (2.38)$$

$$\omega(0, t) = \omega(r_0, 0) = 0, \quad t > 0;\quad (2.39)$$

$$\omega(r, 0) = ru_0(r), \quad 0 \leq r \leq r_0;\quad (2.40)$$

Решение будем искать в виде: $\omega(r, t) = W(r)T(t)$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = W(r)T'(t);\quad (2.41)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} = W''(r)T(t).\quad (2.42)$$

Подставим (2.41) и (2.42) в (2.38):

$$W(r)T'(t) = DW''(r)T(t);$$

$$\frac{T'(t)}{DT(t)} = \frac{W''(r)}{W(r)} = -\lambda^2. \quad (2.43)$$

Получаем систему двух уравнений:

$$W''(r) + \lambda^2 W(r) = 0; \quad (2.44)$$

$$T'(t) + \lambda^2 DT(t) = 0; \quad (2.45)$$

Сначала решаем уравнение (2.44):

$$W''(r) + \lambda^2 W(r) = 0;$$

$$W(r) = C_1 \cos \lambda r + C_2 \sin \lambda r. \quad (2.46)$$

Подставим граничные условия (2.39) в (2.46):

$$0 = C_1,$$

$$0 = C_1 \cos \lambda r_0 + C_2 \sin \lambda r_0,$$

$$C_2 \sin \lambda r = 0,$$

$$C_2 = 1; \sin \lambda r_0 = 0,$$

$$\lambda r_0 = n\pi;$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{r_0};$$

$$W_n(r) = \sin \frac{n\pi r}{r_0}. \quad (2.47)$$

После решим уравнение (2.45)

$$T'(t) + \lambda^2 DT(t) = 0,$$

$$T(t) = Ae^{-\lambda^2 Dt},$$

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{r_0}\right)^2 Dt}, \quad (2.48)$$

$$\omega(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{r_0}\right)^2 Dt} \sin \frac{n\pi r}{r_0}. \quad (2.49)$$

Для того, чтобы найти A_n , будем использовать граничное условие (2.40)

$$ru_0(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi r}{r_0}. \quad (2.50)$$

Раскладываем функцию $ru_0(r)$ в ряд Фурье:

$$ru_0(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n\pi r}{r_0}; \quad (2.51)$$

$$\beta_n = \frac{2}{r_0} \int_0^{r_0} ru_0(r) \sin \frac{n\pi r}{r_0}; \quad (2.52)$$

$$A_n = \beta_n.$$

Вернемся к замене $V = \frac{\omega}{r}$:

$$V(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{r_0}\right)^2 Dt} \right) \frac{\sin \frac{n\pi r}{r_0}}{r} \quad (2.53)$$

Также вернемся к замене $u(r,t) = V(r,t)e^{\gamma t}$:

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\gamma t} \left(A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{r_0}\right)^2 Dt} \right) \frac{\sin \frac{n\pi r}{r_0}}{r} \quad (2.54)$$

Преобразовываем выражение (2.54):

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{\left[\gamma - \left(\frac{n\pi}{r_0}\right)^2 D \right] t} \right) \frac{\sin \frac{n\pi r}{r_0}}{r} \quad (2.55)$$

При условии, если $\gamma < \frac{\pi^2 D}{r_0^2}$, то при любом начальном распределении

концентрации нейтронов в шаре число нейтронов в любой точке будет

уменьшаться, при это стремясь к 0 при t , который стремится к бесконечности. Цепная реакция в таком случае не протекает при любом начальном фоне нейтронов.

Для данных значений D и γ существует критический радиус шара и соответствующая критическая масса активного вещества, которые рассчитываются по формулам (1.8) и (1.9).

Решение задачи о цепной реакции в общем случае, когда активное вещество занимает некоторую произвольную по форме область Ω , которая ограничена некоторой поверхностью Σ , имеет вид:

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{[\gamma - \lambda_n D]t} v_n(M), M \in \bar{\Omega} \quad (2.56)$$

где λ_n и $v_n(M)$ – соответственно собственные значения и собственные функции

Исходя из (2.56) условие протекания цепной реакции будет следующим:

$$\gamma > \lambda_1 D. \quad (2.57)$$

где λ_1 – первое собственное значение, определяемое формой и размером области.

Согласно теории размерности, из условия (2.57) следует формула для определения характерного критического размера области:

$$L_{кр} = \delta \sqrt{\frac{D}{\gamma}}. \quad (2.58)$$

где δ – коэффициент, который зависит от формы области Ω [4,8].

На рисунке 4 представлено аналитическое решение задачи (2.18)

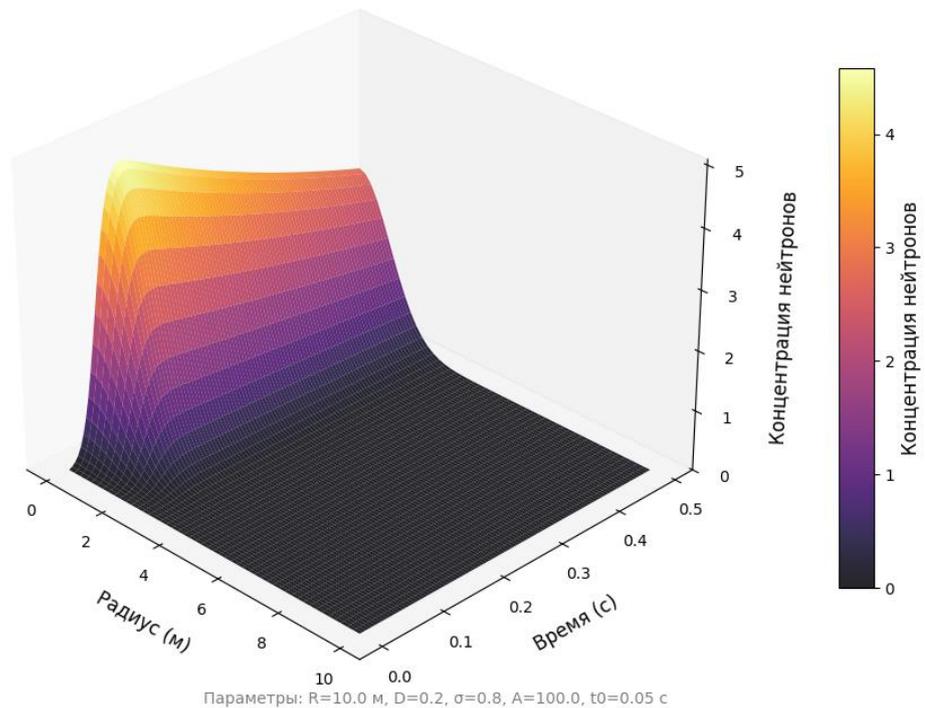


Рисунок 4 – график аналитическое решение задачи (2.18)

2.3 Аналитический метод решения краевой задачи в кубе

2.3.1 Концептуальная постановка задачи

В кубе $0 \leq x, y, z \leq l$ происходит в диффузионном приближении процесс эволюции нейтронов, частицы которого распадаются со скоростью, пропорциональной его концентрации. Определить критические размеры куба из активного вещества, если коэффициент размножения нейтронов $\gamma > 0$, а концентрация вещества на всех гранях поддерживается равной нулю. Начальная концентрация вещества в нем постоянна и равна U .

2.3.2 Математическая постановка задачи

Требуется найти решение уравнения

$$u_t = D(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \gamma u, \quad 0 < x, y, z < l, \quad t > 0, \quad (2.30)$$

где $u(M, t)$ – концентрация нейтронов, D – эффективный коэффициент диффузии нейтронов;

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, y, z, 0) = U, \quad 0 < x, y, z < l \quad (2.32)$$

и граничным условиям:

$$\begin{aligned} u(0, y, z, t) = u(l, y, z, t) = 0, \quad 0 < y, z < l, \quad t > 0, \\ u(x, 0, z, t) = u(x, l, z, t) = 0, \quad 0 < x, z < l, \quad t > 0, \\ u(x, y, 0, t) = u(x, y, l, t) = 0, \quad 0 < x, y < l, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Граничные условия (2.33) соответствуют предположению о быстром уходе нейтронов, вылетевших с поверхности куба.

2.3.3 Аналитическое решение задачи

Решение будем искать методом разделения переменных в виде

$$u(x, y, z, t) = T(t)v(x, y, z) \neq 0. \quad (2.34)$$

Подставляя предполагаемую форму решения (2.34) в (2.31) и разделяя переменные, получаем

$$T'(t)v(x, y, z) = DT(t)(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) + \gamma \cdot T \cdot V,$$

делим это выражение на $DT(t)v(x, y, z)$ получаем

$$\frac{T'(t)}{DT(t)} = \frac{\Delta v}{v} + \frac{\gamma}{D} = -\lambda, \quad (2.35)$$

где $\lambda > 0$ – постоянная разделения.

Отсюда следует, что функции $T(t)$ и $v(x, y, z)$ можно определить из решения обыкновенного дифференциального уравнения для $T(t)$ и уравнения в частных производных для $v(x, y, z)$ с граничными условиями.

$$\begin{cases} T'(t) + \lambda DT(t) = 0, \\ v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} = v \left(-\frac{\gamma}{D} - \lambda \right), \\ v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0, v|_{y=0} = v|_{y=l} = 0, v|_{z=0} = v|_{z=l} = 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

Решая первое обыкновенное дифференциальное уравнения системы (2.36), получаем

$$T(t) = C e^{-D\lambda t}.$$

Решение второго уравнения в частных производных ищем в виде:

$$v(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \neq 0. \quad (2.37)$$

Подставляя (2.37) во второе уравнение (2.36) и разделяя переменные, получаем

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\frac{\gamma}{D} - \lambda = \text{const},$$

откуда, с учетом граничных условий, приходим к трем задачам Штурма-Лиувилля на собственные значения

$$\begin{cases} X'' + \mu X = 0, & \begin{cases} Y'' + \eta Y = 0, & \begin{cases} Z'' + \omega Z = 0, \\ X(0) = X(l) = 0; & \begin{cases} Y(0) = Y(l) = 0; & \begin{cases} Z(0) = Z(l) = 0. \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Решая эти задачи, получаем следующие нетривиальные решения

$$\mu_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \|X_n\|^2 = \frac{l}{2}, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$\eta_m = \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2, \quad Y_m(y) = \sin \frac{m\pi y}{l}, \quad \|Y_m\|^2 = \frac{l}{2}, \quad m = 1, 2, \dots;$$

$$\omega_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad Z_k(z) = \sin \frac{k\pi z}{l}, \quad \|Z_k\|^2 = \frac{l}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

В итоге для функции $v(x, y, z)$ нашли собственные значения

$$\lambda_{nmk} + \frac{\gamma}{D} = \mu_n + \eta_m + \omega_k = \pi^2 \left(\frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{l^2} + \frac{k^2}{l^2} \right)$$

или

$$\lambda_{nmk} = -\frac{\gamma}{D} + \frac{\pi^2}{l^2} (n^2 + m^2 + k^2)$$

и соответствующие им собственные функции

$$v_{nmk}(x, y, z) = \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi y}{l} \sin \frac{k\pi z}{l}, \quad \|v_{nmk}\|^2 = \frac{l^3}{8}.$$

Собственные функции зависят от трех целочисленных параметров n, m, k , то функция $u(x, y, z, t)$ записывается в виде тройного тригонометрического ряда

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{nmk} e^{-\lambda_{nmk} D t} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi y}{l} \sin \frac{k\pi z}{l} \quad (2.38)$$

с коэффициентом

$$C_{nmk} = \frac{8}{l^3} \int_0^l \int_0^l \int_0^l U \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi y}{l} \sin \frac{k\pi z}{l} dx dy dz =$$

$$= \frac{64U}{\pi^3} \frac{1}{(2n+1)} \frac{1}{(2m+1)} \frac{1}{(2k+1)}. \quad (2.39)$$

$$\left| \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{l} \Big|_0^l = -\frac{l}{n\pi} [(-1)^n - 1] = \frac{2l}{\pi(2n+1)}, \right.$$

аналогично

$$\left| \int_0^l \sin \frac{m\pi y}{l} dy = \frac{2l}{\pi(2m+1)} \quad \text{и} \quad \int_0^l \sin \frac{k\pi z}{l} dz = \frac{2l}{\pi(2k+1)}. \right.$$

Подставляя найденные коэффициенты (2.39) в решение (2.38), окончательно получаем:

$$u(x, y, z, t) = \frac{64U}{\pi^3} \sum_{k,m,n=0}^{\infty} A_{kmn} e^{-W_{kmn}t} \sin \frac{(2k+1)\pi z}{l} \sin \frac{(2m+1)\pi y}{l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l},$$

где

$$A_{kmn} = [(2k+1)(2m+1)(2n+1)]^{-1}, W_{kmn} = -\gamma + \frac{D\pi^2}{l^2} [(2k+1)^2 + (2m+1)^2 + (2n+1)^2],$$

здесь $\gamma > 0$ – коэффициент размножения.

Определим критический размер куба. Приравнивая показатель экспоненты к нулю,

находим сторону куба:

$$l_{кр} = \pi \sqrt{\frac{3D}{\gamma}}.$$

На рисунке 5 представлен график аналитического решения задачи (2.30)

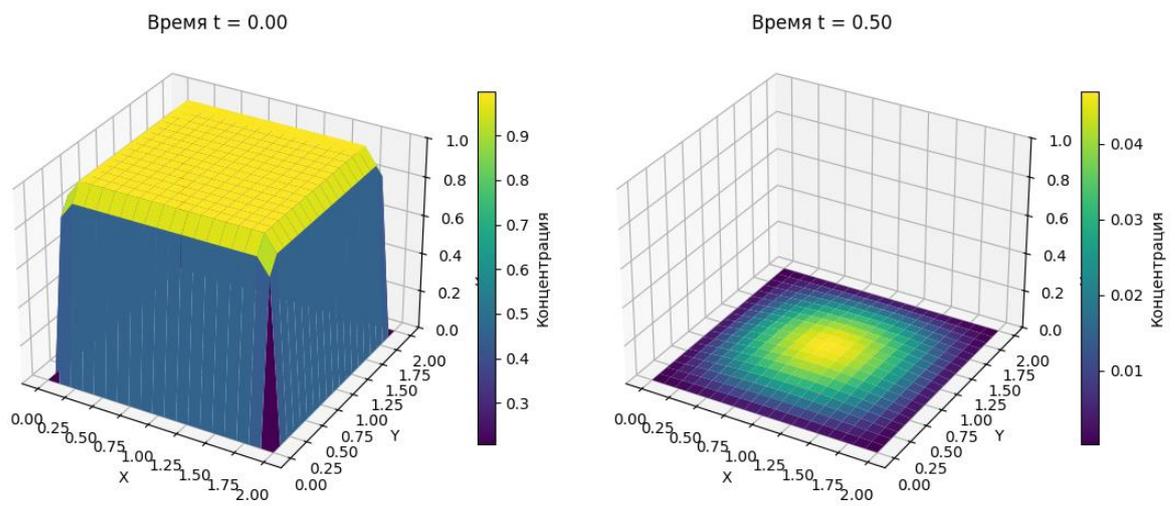


Рисунок 5 – график аналитического решения задачи (2.30)

3 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ОБЗОР ПРОГРАММНЫХ ПРОДУКТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

3.1 Обзор языка программирования Python

Python – это высокоуровневый язык программирования общего назначения, который широко используется в научных, инженерных и образовательных сферах. Он поддерживается на большинстве современных операционных систем и обладает простым и понятным синтаксисом, что делает его доступным для изучения.

Язык Python предлагает богатый набор встроенных функций и поддерживает различные парадигмы программирования, включая объектно-ориентированное, функциональное и процедурное программирование. Это позволяет разработчикам создавать гибкие и масштабируемые приложения, а также легко интегрировать Python с другими языками программирования и системами [27].

3.2 Краткая характеристика возможностей Python

Python особенно эффективен для выполнения научных расчетов и анализа данных благодаря множеству доступных библиотек, таких как NumPy, SciPy и Pandas. Эти библиотеки обеспечивают мощные инструменты для работы с многомерными массивами, статистическими вычислениями и манипуляцией данными, что делает Python идеальным выбором для решения сложных задач в области науки и техники [27].

Одним из значительных преимуществ Python является наличие библиотек для визуализации данных, таких как Matplotlib и Seaborn, которые позволяют создавать наглядные графики и диаграммы. Это особенно полезно при анализе результатов экспериментов и моделирования физических процессов, так как визуализация помогает лучше понять зависимости и закономерности.

Python также активно используется в области машинного обучения и искусственного интеллекта благодаря библиотекам, таким как TensorFlow и

scikit-learn. Это делает его универсальным инструментом для исследователей и разработчиков, работающих в различных областях науки и техники.

Предлагаемый практикум ориентирован на студентов, знакомых с основами Python и основными приемами работы в средах программирования, но не имеющих опыта работы с библиотеками, такими как Matplotlib, NumPy и Pandas. Последовательное выполнение заданий поможет развить навыки обработки и визуализации данных, а также численного и графического моделирования.

3.3 Метод конечных разностей

Для численного моделирования диффузионного процесса в активной среде с размножением удобно использовать метод конечных разностей, который можно реализовать в Python. Этот метод позволяет заменить исходное дифференциальное уравнение его дискретным аналогом (разностной схемой) и решить полученную систему алгебраических уравнений.

Метод конечных разностей основан на аппроксимации производных разностными отношениями на заданной сетке. Уравнение диффузии с учетом размножения частиц заменяется разностной схемой, а граничные и начальные условия также дискретизируются. В результате получается система уравнений, решение которой дает приближенные значения искомой функции в узлах сетки.

3.3.1 Явная разностная схема

Рассмотрим уравнение диффузии в активной среде с линейным членом размножения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (3.1)$$

где

$u(x, t)$ – концентрация частиц,

D – коэффициент диффузии,

α – коэффициент размножения.

С начальными условиями:

$$u(x, 0) = f(x), \quad (3.2)$$

и граничными условиями:

$$\begin{aligned}u(0,t) &= \varphi(t), \\u(l,t) &= \psi(t).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Расчетная область разбивается на равномерную сетку с узлами:

$$\begin{aligned}x_i &= ih, i = 0, 1, \dots, N, \\t_j &= j\tau, j = 0, 1, \dots, M,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}h &= \frac{l}{N} \text{ – шаг по пространству,} \\ \tau &= \frac{T}{M} \text{ – шаг по времени.}\end{aligned}$$

Аппроксимируем исходное уравнение явной разностной схемой и получаем:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = D \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \alpha u_{i,j}.\tag{3.4}$$

Далее выразим значение на следующем временном слое:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \tau \left(D \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \alpha u_{i,j} \right).\tag{3.5}$$

Если в вычислении участвуют четыре соседних узла, реализуется так называемая явная схема, представленная на рисунке 6:

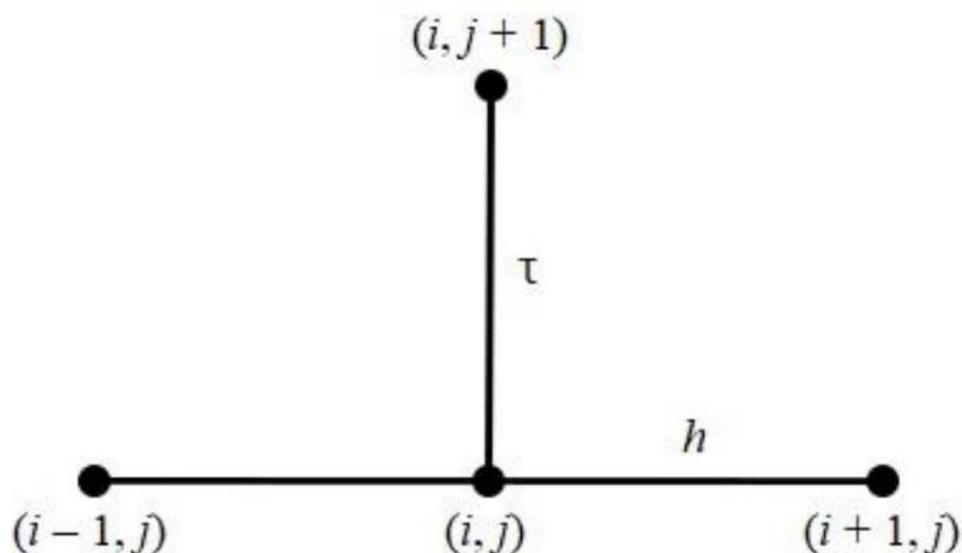


Рисунок 6 – Явная разностная схема

Явная схема условно устойчива. Для обеспечения устойчивости необходимо выполнение условия Куранта:

$$\tau \leq \frac{h^2}{2D}.$$

Схема имеет первый порядок аппроксимации по времени $O(\tau)$ и второй по пространству $O(h^2)$.

3.3.2 Неявная разностная схема

В отличие от явной схемы, неявная разностная схема использует для аппроксимации значения искомой функции не только на текущем временном слое j , но и на следующем ($j+1$). Это означает, что неизвестные величины $u_{i,j+1}$ определяются не явно, а через решение системы уравнений. Шаблон данной схемы представлен на рисунке 6.

Для уравнения диффузии с размножением:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = D \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \alpha u_{i,j+1}. \quad (3.6)$$

Перепишем уравнение в стандартной форме:

$$-\frac{D\tau}{h^2} u_{i-1,j+1} + \left(1 + \frac{2D\tau}{h^2} - \alpha\tau\right) u_{i,j+1} - \frac{D\tau}{h^2} u_{i+1,j+1} = u_{i,j} \quad (3.7)$$

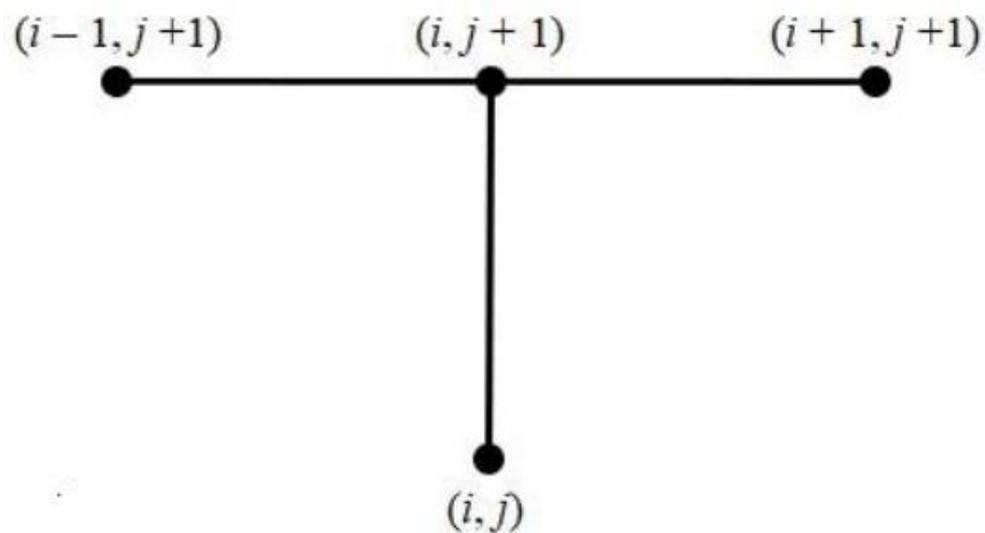


Рисунок 7 – Неявная разностная схема

Неявная разностная схема обладает свойством абсолютной устойчивости и имеет порядок аппроксимации $O(\tau)$ по времени и $O(h^2)$ по пространству. Таким образом, она, как и явная схема, аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение со вторым порядком точности по пространственной координате и первым порядком по времени.

4 РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ДИФФУЗИИ

4.1 Реализации численного метода решения краевой задачи в шаре

В данной главе рассматривается пример реализации численного метода для исследования диффузионных процессов с размножением нейтронов в активной среде. Для моделирования использовалось уравнение, описывающее динамику концентрации нейтронов, которое учитывает как диффузию, так и генерацию нейтронов.

Для реализации модели использовалось программное обеспечение Python с библиотеками NumPy и Matplotlib. В частности, для решения системы уравнений была применена разностная схема, основанная на разложении по собственным функциям, что обеспечило высокую точность расчетов.

Результатом реализации служат графики, демонстрирующие динамику концентрации нейтронов в активной среде. В таблице 1 представлены параметры, использованные в модели.

Таблица 1 – Параметры модели

Параметр модели	Значение
D – коэффициент диффузии	$(6.5 \cdot 10^2) \text{ м}^2/\text{с}$
	$(7.0 \cdot 10^2) \text{ м}^2/\text{с}$
	$(8.0 \cdot 10^2) \text{ м}^2/\text{с}$
γ – коэффициент размножения	$(0.7 \cdot 10^6) \text{ с}^{-1}$
	$(0.95 \cdot 10^6) \text{ с}^{-1}$
	$(1.2 \cdot 10^6) \text{ с}^{-1}$

Проведем ряд вычислительных экспериментов при варьировании параметров модели, включая коэффициент диффузии D , коэффициент

размножения нейтронов γ и амплитудой концентрации Initial_amplitude. Целью исследований является анализ динамики концентрации нейтронов в активной среде на заданном временном интервале $t \in [0, 2 \text{ мкс}]$. [13]

Вычислительный эксперимент №1. Проведем первое исследование при варьировании параметров: коэффициент диффузии D равный $6,5 \cdot 10^2 \text{ м}^2/\text{с}$, коэффициент размножения γ равный $1,2 \cdot 10^6 \text{ 1/с}$. Результат вычислительного эксперимента приведен на рисунке 8.

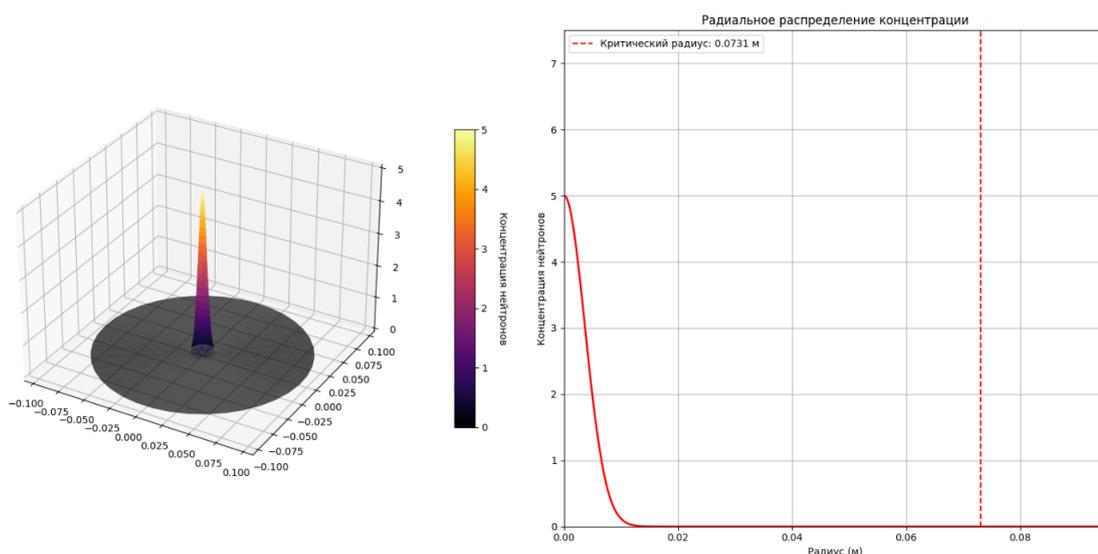


Рисунок 8 – Результаты моделирования вычислительного эксперимента №1

Вычислительный эксперимент №2. Проведем первое исследование при варьировании параметров: коэффициент диффузии D равный $8,0 \cdot 10^2 \text{ м}^2/\text{с}$, коэффициент размножения γ равный $0,7 \cdot 10^6 \text{ 1/с}$. Результат вычислительного эксперимента приведен на рисунке 2. Результаты вычислительного эксперимента приведены на рисунке 9.

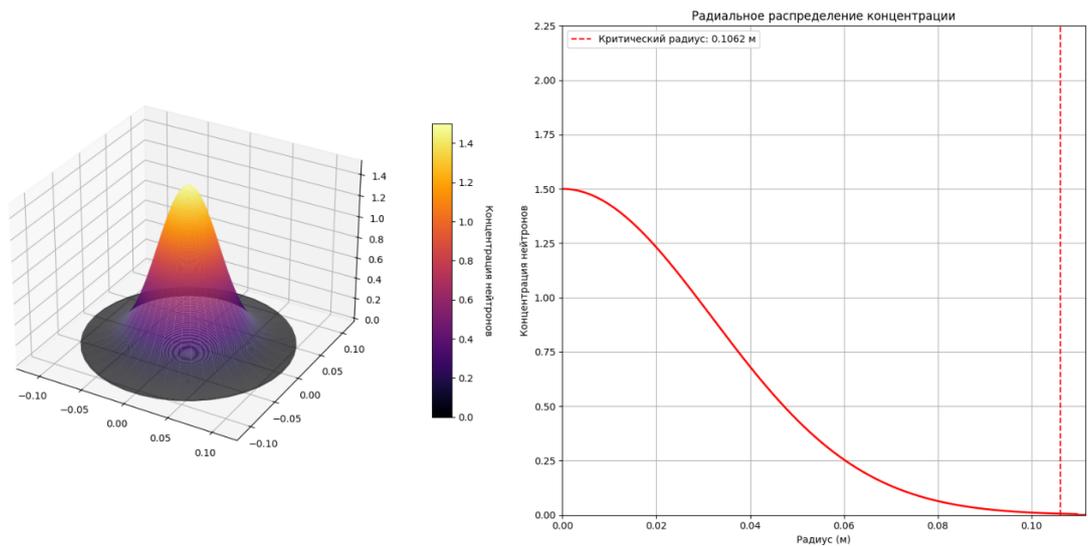


Рисунок 9 – Результаты моделирования вычислительного эксперимента №2

Вычислительный эксперимент №3. Проведем первое исследование при варьировании параметров: коэффициент диффузии D равный $7.0 \cdot 10^2$ м²/с, коэффициент размножения γ равный $0.95 \cdot 10^6$ 1/с. Результаты вычислительного эксперимента приведены на рисунке 10.

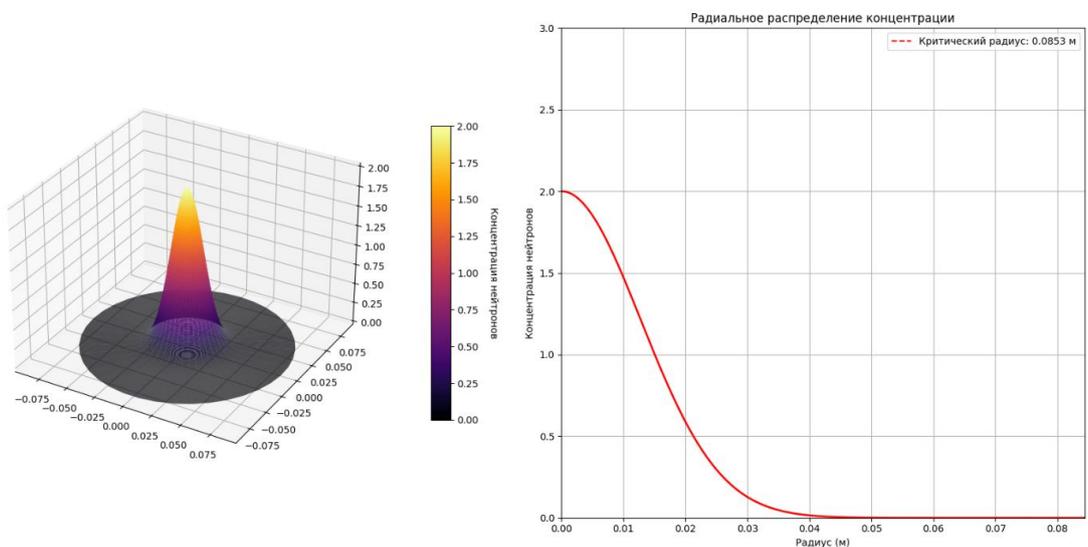


Рисунок 10 – Результаты моделирования вычислительного эксперимента №3

Вычислительный эксперимент №1: Умеренное размножение и высокая диффузия. Ожидается стабильное распределение нейтронов, возможно, с медленным увеличением концентрации.

Вычислительный эксперимент №2: Высокое размножение и низкая диффузия. Ожидается быстрое увеличение концентрации нейтронов, что может привести к цепной реакции, несмотря на замедленное распространение.

Вычислительный эксперимент №3: Низкое размножение и уменьшенный размер системы. Ожидается, что концентрация нейтронов будет снижаться, и вероятность возникновения цепной реакции крайне мала.

4.2 Реализация модели динамики популяции частиц в активной среде.

Возвращаясь к пункту [1.10], проведем моделирование диффузионного процесса в активной среде с возможностью размножения частиц.

Входные данные:

D – коэффициент диффузии.

r – скорость размножения.

K – ёмкость среды.

T – время моделирования.

Целевая переменная: Плотность популяции $u(x, t)$

Функция изменения плотности:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru \left(1 - \frac{u}{K} \right)$$

Оценка качества модели: Визуализация графиков плотности популяции в разные моменты времени.

В качестве основных параметров, которые существенно показывают изменение в графике, будем использовать переменные D – коэффициент диффузии, r – скорость размножения, K – ёмкость среды. u_0 – начальная плотность.

Пример значений переменной D :

Низкий: ($D = 0.01$) (медленное распространение)

Средний: ($D = 0.1$) (умеренное распространение)

Высокий: ($D = 1.0$) (быстрое распространение)

Переменной r :

Низкий: ($r = 0.01$) (медленный рост)

Средний: ($r = 0.1$) (умеренный рост)

Высокий: ($r = 0.5$) (быстрый рост)

Переменной K :

Низкий: ($K = 50$) (ограниченная среда)

Средний: ($K = 100$) (умеренная среда)

Высокий: ($K = 200$) (большая среда)

Переменной u_0 :

Низкий: ($u_0 = 1$) (низкая начальная плотность)

Средний: ($u_0 = 10$) (умеренная начальная плотность)

Высокий: ($u_0 = 50$) (высокая начальная плотность)

Пример 1:

$D = 1.0$; % Высокий коэффициент диффузии

$r = 0.5$; % Высокая скорость размножения

$K = 200$; % Большая емкость среды

$u(\text{round}(\text{length}(x)/2)) = 50$; % Высокая начальная плотность

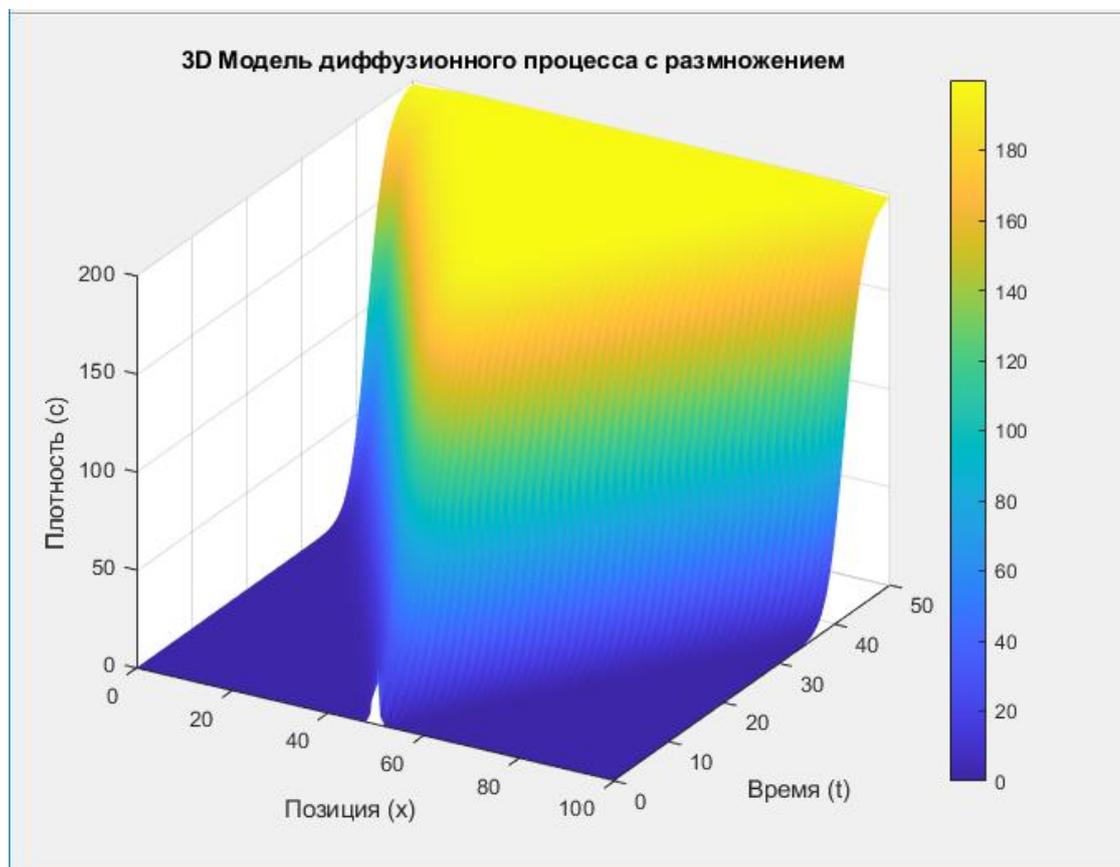


Рисунок 11 – Быстрое распространение и рост

Пример 2:

$D = 0.01$; % Низкий коэффициент диффузии

$r = 0.01$; % Низкая скорость размножения

$K = 50$; % Низкая емкость среды

$u(\text{round}(\text{length}(x)/2)) = 1$; % Низкая начальная плотность

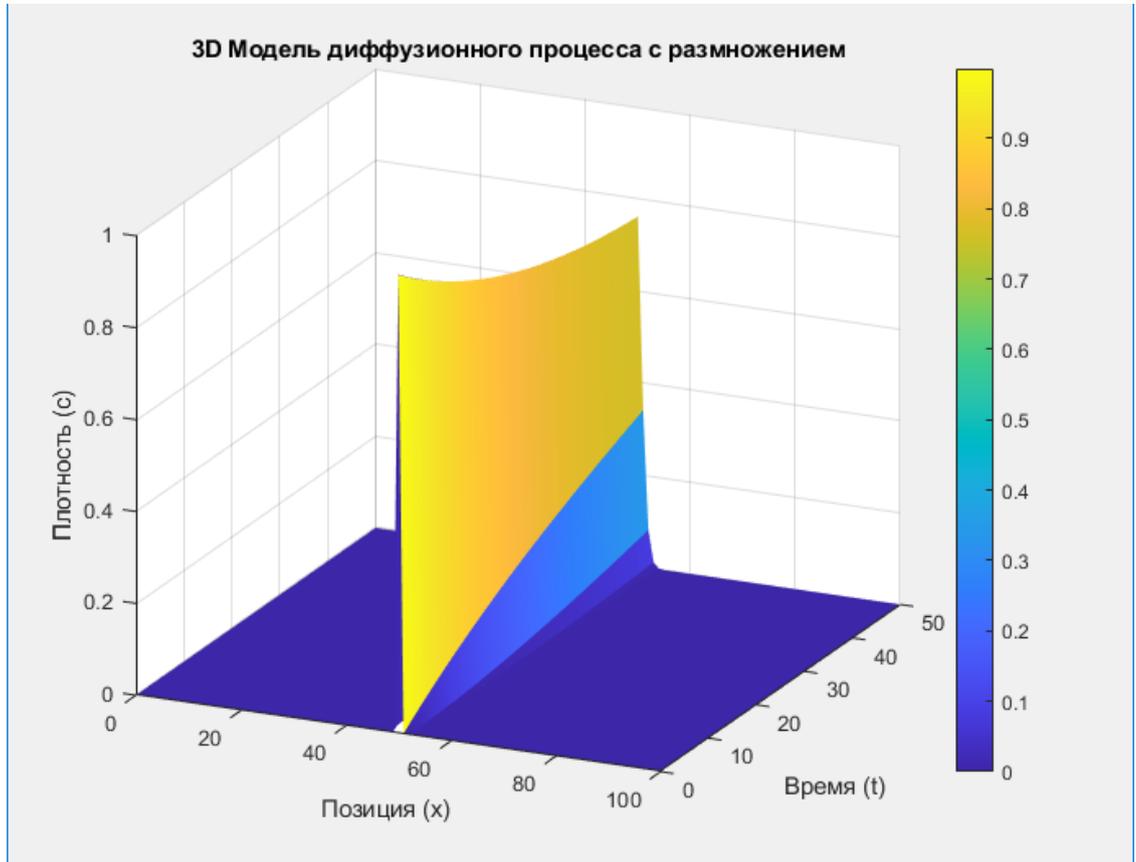


Рисунок 12 – Медленное распространение и рост

Пример 3:

$D = 0.1$; % Умеренный коэффициент диффузии

$r = 0.1$; % Умеренная скорость размножения

$K = 100$; % Умеренная емкость среды

$u(\text{round}(\text{length}(x)/2)) = 10$; % Умеренная начальная плотность

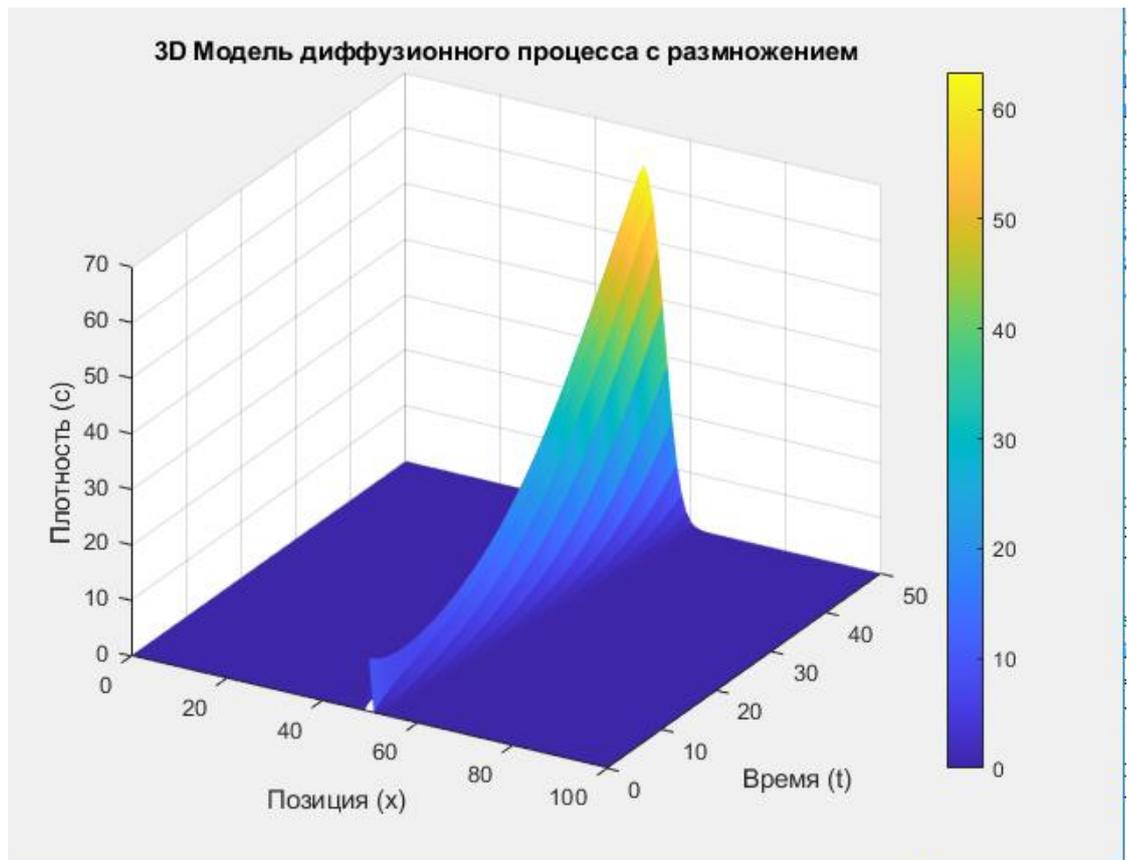


Рисунок 13 – Умеренные условия

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной бакалаврской работе исследованы различные модели процессов диффузии в активной среде, включая не только атомный взрыв, но и распространение бактерий. Рассмотрены ключевые уравнения, описывающие динамику концентрации частиц и их взаимодействие в условиях диффузии и размножения.

Были представлены основные методы решения уравнений, описывающих диффузионные процессы, с акцентом на использование метода конечных разностей. Моделирование проводилось для различных геометрий, включая сферические области, что позволяет более точно описать поведение системы в условиях взрыва [16].

Численное решение было реализовано с помощью метода конечных разностей, что обеспечило возможность анализа динамики концентрации частиц в зависимости от различных параметров, таких как коэффициенты диффузии и размножения, а также начальные условия. Визуализация результатов была выполнена с использованием графиков, которые демонстрируют изменения концентрации частиц во времени и пространстве.

Проведенный анализ результатов с помощью вычислительных экспериментов, в которых варьировались ключевые параметры, позволил выявить различные режимы поведения системы. В результате получены графические решения для каждой из исследуемых моделей, что подтверждает адекватность предложенной методологии и ее применимость для изучения процессов диффузии в активной среде.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кордюмов, Г.Д. Производные в среднем случайных процессов и диффузионные модели в экономике / Г.Д. Кордюмов // Вестник Южно-Уральского университета. Серия Математика. Механика. Физика. – 2021. – Т. 13. – №3. – С. 26–30.
2. Борисов, А.В. Численное моделирование популяционной $2D$ -динамики с нелокальным взаимодействием / А. В. Борисов, А. Ю. Трифонов, А. В. Шаповалов // Компьютерные исследования и моделирование. – 2010. – Т. 2. – № 1. – С. 33–40.
3. Саркисян, Г.П. Математическая модель для обработки данных диффузионного эксперимента / Г.П. Саркисян // Приволжский научный вестник. – 2015. – №8. – С. 117–121.
4. Мартинсон, Л.К. Дифференциальные уравнения математической физики: Учебное пособие для вузов. 2-е изд. / Л.К. Мартинсон, Ю.И. Малов // Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2002. – С. 182–186.
5. Борисов, А.В. Влияние диффузии и конвекции на динамику Хемостата / А. В. Борисов, Л. А. Краснобаева, А. В. Шаповалов // Компьютерные исследования и моделирование. – 2012. – Т. 4. – № 1. – С. 121–129.
6. Мусабаева, Л.И. Быстрые нейтроны в онкологии / Л.И. Мусабаева // Томск: Издательство НТЛ. – 2000. – С 88–92.
7. Борисов, А.В. Нелокальная реакционно-диффузионная динамика формирования крестообразных двумерных диссипативных структур / А.В. Борисов, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов // Известия томского политехнического университета – 2011. – Т. 318. – №2. – С. 48–52.
8. Назаров, А.В. Компьютерное моделирование взаимной диффузии двухкомпонентной среды / А.В. Назаров // Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования. – 2017. – №1. – С. 107–112.

9. Егоров, А.Ю. Моделирование процессов диффузии инноваций / А.Ю. Егоров, А.Г. Кадыров, С.М. Пястолов // Инновационная экономика: информация, аналитика, прогнозы. – 2011. – №1. – С. 32–35.
10. Давыдов, А.А. Существование оптимальных стационарных состояний распределенных популяций при смешанной эксплуатации / А.А. Давыдов, Е.В. Винников // Теория оптимального управления и приложения. – 2022. – С. 57–61.
11. Облакова, Т.В. Диффузионные процессы в курсах теории вероятностей и уравнений математической физики / Т.В. Облакова // Машиностроение и компьютерные технологии. – 2018. – №9. – С. 48–54.
12. Алвес, Е.В. Диффузионные процессы в неоднородных телах / Е.В. Алвес // Вестник российских университетов. Математика. – 2008. – №4. – С. 257–259.
13. Большаков, М. В., Масловская, А. Г. Имитационное моделирование формирования отклика системы "реакция - диффузия" на воздействие движущегося источника / М. В. Большаков, А. Г. Масловская. – 2017. – С. 4–11.
14. Полежаев, А.А. Пространственно-временные структуры в активной среде, вызванные диффузионной неустойчивостью / А.А. Полежаев, М.Ю. Борина // 2014. – №2. – С. 117–126.
15. Осипова, Л.Э. Исследование диффузии в многокомпонентных газовых смесях / Л.Э. Осипова, И.И. Низамов // Известия КазГАСУ. – 2012. – №4. – С. 224–230.
16. Ложкина, О. В. Анализ физико-математических моделей атмосферной диффузии применительно к оценкам воздействия автотранспорта на городскую среду / О. В. Ложкина, В. В. Попов, А. Д. Кузнецова. – Научно-аналитический журнал «Вестник Санкт-Петербургского университета Государственной противопожарной службы МЧС России». – 2012. – № 1. – С. 59–64.
17. Лебедев, В. А. Ядерные энергетические установки: учебное пособие / В. А. Лебедев, И. П. Федоров. – СПб.: Издательство «Лань», 2022. – С. 38–44.
18. Окунев, В. С. Нейтронно-физический расчет решетки ядерного реактора на основе газокинетической теории переноса / В. С. Окунев, И. С.

Лисицын; под ред. В. И. Солонина. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. – С.6–14.

19. Баранник, А. А. Лекции по курсу «Теория переноса нейтронов»: учебное пособие / А. А. Баранник, И. С. Лисицын. – М.: НИЯУ МИФИ, 2012. – С. 53–75.

20. Копосов, Е. Б. Кинетика ядерных реакторов: учебное пособие / Е. Б. Копосов, И. П. Федоров. – Москва: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. – С. 25–47.

21. Белозеров, В. И. Физика и эксплуатационные режимы реактора ВВЭР-1000: монография / В. И. Белозеров, М. М. Жук, Ю. А. Кузина. – М.: НИЯУ МИФИ, 2014. – С. 73–84.

22. Кадилин, В. В. Прикладная нейтронная физика: учебное пособие / В. В. Кадилин, Е. В. Рябева, В. Т. Самосадный. – М.: НИЯУ МИФИ, 2011. – С. 60–63.

23. Вейскопф, В. Диффузия нейтронов / В. Вейскопф. – Научные и технические основы ядерной энергетики: том 1 / К. Гудман. – 1948.– С 78–83.

24. Смирнов, В. Е. Диффузия и замедление нейтронов в неразмножающих средах: лабораторный практикум / В. Е. Смирнов. – М.: МИФИ, 2008. – 60 с.

25. Кострица, А. А. О диффузии нейтронов в движущейся среде / А. А. Кострица. – Атомная энергия, 1963. – №14. – С. 218.

26. Дегтярев А. А. Метод конечных разностей : учебное пособие / А. А. Дегтярев – Самара : Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет), 2011. – 83 с.

27. Русакова, М. С. Моделирование физических процессов и визуализация данных средствами Python: практикум / М. С. Русакова, Е. В. Рогачева. – Самара: Издательство Самарского университета, 2024. – 76 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Листинг программы построения графика динамики популяции

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Параметры модели
D = 0.1      # Коэффициент диффузии
r = 0.1      # Скорость размножения
K = 100      # Емкость среды (максимальная плотность популяции)
L = 100      # Длина области
T_total = 50  # Время моделирования
Dx = 1       # Шаг по пространству
Dt = 0.1     # Шаг по времени

# Инициализация
x = np.arange(0, L + Dx, Dx) # Пространственная сетка
c = np.zeros(len(x))         # Плотность популяции
c[len(x) // 2] = 10          # Начальная плотность в центре

# Сохраняем начальное состояние для графика
initial_state = c.copy()

# Сохраняем состояния для нужных моментов времени
target_times = [10, 50]
saveD_states = {t: None for t in target_times}

# Основной цикл по времени
for t in np.arange(0, T_total + Dt, Dt):
    c_new = c.copy() # Создаем копию для новых значений

    # Обновление плотности по пространству (исключая границы)
    for i in range(1, len(x)-1):
        # Член, описывающий диффузию
        Diffusion = D * (c[i+1] - 2*c[i] + c[i-1]) / Dx**2

        # Член, описывающий размножение
        growth = r * c[i] * (1 - c[i] / K)

        # Обновление плотности
        c_new[i] = c[i] + Dt * (Diffusion + growth)

    # Граничные условия (нулевая производная на границах)
    c_new[0] = c_new[1] # Левый край
    c_new[-1] = c_new[-2] # Правый край

    # Обновление плотности
    c = c_new
```

```

# Сохраняем состояние для целевых моментов времени
if any(abs(t - target) < Dt/2 for target in target_times):
    saveD_states[roundD(t)] = c.copy()

# Построение графика
plt.figure(figsize=(12, 8))

# Начальное состояние
plt.plot(x, initial_state, 'k--', linewidth=1.5, label='Начальное
состояние (t=0)')

# Состояния в целевые моменты времени
for time, state in saveD_states.items():
    if state is not None:
        plt.plot(x, state, linewidth=2, label=f't={time}')

# Настройка графика
plt.title('Сравнение распределения популяции в разные моменты
времени', fontsize=16)
plt.xlabel('Позиция (x)', fontsize=14)
plt.ylabel('Плотность (c)', fontsize=14)
plt.grid(True, linestyle='--', alpha=0.7)
plt.axis([0, L, 0, K*1.1]) # Небольшой запас по вертикали
plt.legend(fontsize=12)
plt.tight_layout()

# Добавление информационной аннотации
plt.figtext(0.5, 0.01,
            f'Параметры: D={D}, r={r}, K={K}, L={L}',
            ha='center', fontsize=10, color='gray')
plt.show()

```

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Листинг программы построения графика аналитического решения задачи в
шаре

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Параметры модели
R = 10.0      # Радиус шара (м)
T_total = 0.5 # Общее время моделирования (секунды)
N_r = 100    # Количество точек по радиусу
N_t = 500    # Количество временных шагов
D = 0.2      # Коэффициент диффузии нейтронов
sigma = 0.8  # Коэффициент поглощения нейтронов
A = 100.0    # Амплитуда взрыва
t0 = 0.05   # Время пика взрыва
s_r = 1.0    # Пространственная ширина взрыва
s_t = 0.02   # Временная ширина взрыва

# Создание сетки
r = np.linspace(0, R, N_r) # Радиальная сетка
t = np.linspace(0, T_total, N_t) # Временная сетка
dr = r[1] - r[0] # Шаг по радиусу
dt = t[1] - t[0] # Шаг по времени

# Инициализация концентрации нейтронов
u = np.zeros((N_r, N_t))

# Основной цикл моделирования
for j in range(N_t - 1):
    current_time = t[j]

    # Источник нейтронов (гауссов импульс в пространстве и времени)
    Q = A * np.exp(-r**2/(2*s_r**2)) * np.exp(-(current_time -
t0)**2/(2*s_t**2))

    # Обработка центра шара (r=0) - особый случай
    laplacian0 = 6 * (u[1, j] - u[0, j]) / dr**2
    u[0, j+1] = u[0, j] + dt * (D * laplacian0 + Q[0] - sigma * u[0, j])

    # Обработка внутренних точек (1 ≤ i ≤ N_r-2)
    for i in range(1, N_r - 1):
        # Сферический лапласиан
        term1 = (u[i+1, j] - 2*u[i, j] + u[i-1, j]) / dr**2
        term2 = (2 / r[i]) * (u[i+1, j] - u[i-1, j]) / (2*dr)
        laplacian = term1 + term2
```

```

        # Обновление концентрации
        u[i, j+1] = u[i, j] + dt * (D * laplacian + Q[i] - sigma * u[i,
j])

    # Граничное условие на поверхности шара
    u[-1, j+1] = 0 # Концентрация нейтронов на границе = 0

# Визуализация результатов
fig = plt.figure(figsize=(14, 10))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

# Создаем сетку для 3D поверхности
R_grid, T_grid = np.meshgrid(r, t)

# Уменьшаем количество точек для более плавной визуализации
plot_step_r = 2
plot_step_t = 5
r_plot = r[::plot_step_r]
t_plot = t[::plot_step_t]
R_plot, T_plot = np.meshgrid(r_plot, t_plot)
u_plot = u[::plot_step_r, ::plot_step_t].T

# Создаем поверхность
surf = ax.plot_surface(R_plot, T_plot, u_plot, cmap='inferno',
                      rstride=1, cstride=1, edgecolor='none',
                      alpha=0.85, antialiased=True)

# Настройка осей и заголовка
ax.set_xlabel('Радиус (м)', fontsize=12, labelpad=10)
ax.set_ylabel('Время (с)', fontsize=12, labelpad=10)
ax.set_zlabel('Концентрация нейтронов', fontsize=12, labelpad=10)
ax.set_title('Модель атомного взрыва в шаре', fontsize=16, pad=20)

# Настройка вида
ax.view_init(elev=30, azim=-45) # Угол обзора
ax.grid(False) # Отключаем сетку для лучшей видимости

# Цветовая шкала
cbar = fig.colorbar(surf, shrink=0.7, aspect=15, pad=0.1)
cbar.set_label('Концентрация нейтронов', fontsize=12)

# Настройка пределов для z-оси
max_conc = np.max(u) * 1.1
ax.set_zlim(0, max_conc)

# Добавление информационной аннотации
plt.figtext(0.5, 0.01,
           f'Параметры: R={R} м, D={D},  $\sigma$ ={sigma}, A={A}, t0={t0} с',
           ha='center', fontsize=10, color='gray')

plt.tight_layout()

```

```
plt.show()
```

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Листинг программы построения графика аналитического решения задачи в параллелепипеде

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Параметры модели
N = 20          # Количество узлов по каждому измерению
U = 1.0        # Начальная концентрация
a = 1.0        # Коэффициент диффузии
beta = 0.1     # Коэффициент поглощения
l = 2.0        # Длина ребра куба
T_total = 1.0  # Общее время моделирования

# Инициализация сетки
dx = dy = dz = 1 / (N - 1)
dt = 0.25 * dx**2 / (3 * a**2) # Начальный шаг по времени

# Проверка условия устойчивости (Куранта)
courant = a**2 * dt * (3 / dx**2)
if courant > 0.5:
    dt = 0.5 * dx**2 / (3 * a**2)

# Инициализация массива концентрации
u = np.ones((N, N, N)) * U
u[0, :, :] = u[-1, :, :] = 0
u[:, 0, :] = u[:, -1, :] = 0
u[:, :, 0] = u[:, :, -1] = 0

# Выбираем моменты времени для сохранения
time_points = [0.0, 0.5*T_total, T_total]
snapshots = []

# Численное решение
steps = int(T_total / dt)
for step in range(steps):
    u_prev = u.copy()
    for i in range(1, N-1):
        for j in range(1, N-1):
            for k in range(1, N-1):
                laplacian = (
                    (u_prev[i+1, j, k] - 2*u_prev[i, j, k] + u_prev[i-1,
j, k]) / dx**2 +
                    (u_prev[i, j+1, k] - 2*u_prev[i, j, k] + u_prev[i, j-
1, k]) / dy**2 +
```

```

        (u_prev[i, j, k+1] - 2*u_prev[i, j, k] + u_prev[i, j,
k-1]) / dz**2
    )
    u[i, j, k] = u_prev[i, j, k] + dt * (a**2 * laplacian -
beta * u_prev[i, j, k])

    # Сохраняем снимки в выбранные моменты времени
    current_time = step * dt
    for tp in time_points:
        if abs(current_time - tp) < dt/2 and len(snapshots) <
len(time_points):
            snapshots.append((current_time, u.copy()))

# Создаем сетку для визуализации
x = np.linspace(0, 1, N)
y = np.linspace(0, 1, N)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
z_slice = N // 2 # Срез по середине куба

# Визуализация
fig = plt.figure(figsize=(18, 6))

for i, (t, snapshot) in enumerate(snapshots):
    ax = fig.add_subplot(1, 3, i+1, projection='3d')

    # Визуализация среза
    Z = snapshot[:, :, z_slice]
    surf = ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap='viridis', rstride=1, cstride=1)

    # Настройки графика
    ax.set_zlim(0, U)
    ax.set_title(f'Время t = {t:.2f}')
    ax.set_xlabel('X')
    ax.set_ylabel('Y')
    ax.set_zlabel('Концентрация')

    # Добавляем цветовую шкалу
    fig.colorbar(surf, ax=ax, shrink=0.6, label='Концентрация')

plt.suptitle(f'Диффузия нейтронов в кубе (срез Z={z_slice*dx:.1f})',
y=1.05)
plt.tight_layout()

# Дополнительная информация
print(f"Параметры моделирования:")
print(f"Размер сетки: {N}x{N}x{N}")
print(f"Шаг по пространству: dx={dx:.3f}")
print(f"Шаг по времени: dt={dt:.3e}")
print(f"Число Куранта: {a**2 * dt * (3 / dx**2):.3f}")
print(f"Коэффициент поглощения:  $\beta$ ={beta}")

```

```
plt.show()
```

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Листинг программы построения графика аналитического решения задачи в
однородной пластине

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Параметры модели
a = 1
A = 10
B = 10
p = 1
s = 1
T_max = 2
T_array = [0, 1]

# Создание сетки
X, Y = np.meshgrid(np.arange(0, p + 0.01, 0.01), np.arange(0, s + 0.01,
0.01))

# Создаем фигуру с несколькими подграфиками
fig = plt.figure(figsize=(18, 6)) # Широкая фигура для 3 графиков

# Проходим по всем временным точкам
for i, t_fraction in enumerate(T_array):
    t = t_fraction * T_max

    # Вычисление концентрации
    u = B * np.exp(-a**2 * np.pi**2 / 4 * (1 / p**2 + 9 / s**2) * t) * \
        np.sin(np.pi * X / (2 * p)) * np.cos(3 * np.pi * Y / (2 * s))

    u += 4 * A / (a**2 * np.pi**2 * (9 / p**2 + 1 / s**2)) * \
        (1 - np.exp(-a**2 * np.pi**2 / 4 * (9 / p**2 + 1 / s**2) * t)) * \
        np.sin(3 * np.pi * X / (2 * p)) * np.cos(np.pi * Y / (2 * s))

    # Создаем подграфик
    ax = fig.add_subplot(1, len(T_array), i + 1, projection='3d') #
    Исправлено на add_subplot

    # Построение поверхности
    surf = ax.plot_surface(X, Y, u, cmap='viridis', rstride=1, cstride=1)
    # Исправлено на 'viridis'

    # Настройки графика
    ax.set_title(f'Время = {t:.2f} с', fontsize=14)
    ax.set_xlabel('X (м)', fontsize=12)
```

```
ax.set_ylabel('Y (м)', fontsize=12)
ax.set_zlabel('Концентрация', fontsize=12)

# Добавление цветовой шкалы
cbar = fig.colorbar(surf, ax=ax, shrink=0.6, aspect=10)
cbar.set_label('Концентрация', fontsize=12)

# Общий заголовок
plt.suptitle('Распределение концентрации в разные моменты времени',
            fontsize=16)

# Регулировка расстояний между графиками
plt.tight_layout(rect=[0, 0, 1, 0.95]) # Оставляем место для общего
заголовка
plt.show()
```

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Листинг программы построения графика аналитического решения задачи в параллелепипеде

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.animation import FuncAnimation
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Параметры модели
l = 1.0 # длина стороны куба
N = 20 # количество узлов по каждой оси
U = 1.1 # начальная концентрация
T_total = 2.0 # общее время
Dt = 0.01 # шаг по времени
a = 1.0 # коэффициент диффузии
beta = 0.1 # коэффициент потерь
save_every = 5 # частота сохранения

# Инициализация сетки
u = np.ones((N, N, N)) * U
u[0, :, :] = u[-1, :, :] = 0
u[:, 0, :] = u[:, -1, :] = 0
u[:, :, 0] = u[:, :, -1] = 0

# Шаги по пространству
Dx = Dy = Dz = 1 / (N - 1)

# История состояний для анимации
u_history = [u.copy()]

steps = int(T_total / Dt)
for step in range(steps):
    u_prev = u.copy()
    for i in range(1, N-1):
        for j in range(1, N-1):
            for k in range(1, N-1):
                laplacian = (
                    (u_prev[i+1, j, k] - 2*u_prev[i, j, k] + u_prev[i-1,
j, k]) / Dx**2 +
                    (u_prev[i, j+1, k] - 2*u_prev[i, j, k] + u_prev[i, j-
1, k]) / Dy**2 +
                    (u_prev[i, j, k+1] - 2*u_prev[i, j, k] + u_prev[i, j,
k-1]) / Dz**2
                )
                u[i, j, k] = u_prev[i, j, k] + Dt * (a**2 * laplacian -
beta * u_prev[i, j, k])
```

```

# Проверка условия устойчивости
courant = a**2 * Dt * (3 / Dx**2)
if courant > 0.5:
    Dt = 0.5 * Dx**2 / (3 * a**2)

# Сохранение кадров для анимации
if step % save_every == 0:
    u_history.append(u.copy()) # Исправлено на append

# Функция обновления анимации
def update(frame):
    ax.clear()
    ax.set_title(f"Диффузия с потерями (шаг {frame})")
    ax.set_xlabel('X')
    ax.set_ylabel('Y')
    ax.set_zlabel('Концентрация')

    # Отображение среза по z
    z_slice = N // 2
    X, Y = np.meshgrid(np.linspace(0, 1, N), np.linspace(0, 1, N)) #
Исправлено на meshgrid
    surf = ax.plot_surface(X, Y, u_history[frame][:, :, z_slice],
                           cmap='viridis', rstride=1, cstride=1) #
Исправлено на 'viridis'
    ax.set_zlim(0, U)
    return surf,

# Создание анимации
fig = plt.figure(figsize=(10, 6))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d') # Исправлено на add_subplot

ani = FuncAnimation(
    fig,
    update,
    frames=len(u_history),
    interval=50,
    blit=False
)

plt.tight_layout()
plt.show()

```

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Листинг программы моделирования нестационарного процесса диффузии в
шаре

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.animation import FuncAnimation
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from scipy.sparse import diags
from matplotlib import cm
from matplotlib.cm import ScalarMappable
from matplotlib.colors import Normalize
from scipy.interpolate import interp1d

# Вариант 1: Быстрый взрыв
# D = 6.5e2
# gamma = 1.2e6
# initial_amplitude = 5.0
# r_relative = 1.3
# sigma_factor = 0.05

# Вариант 2: Медленный рост
#D = 8.0e2
#gamma = 0.7e6
#initial_amplitude = 1.5
#r_relative = 1.05
#sigma_factor = 0.3

# Вариант 3: Пограничный случай
D = 7.0e2
gamma = 0.95e6
initial_amplitude = 2.0
r_relative = 0.99
sigma_factor = 0.15

# Расчет критических параметров
rho = 18.7e3
r_crit = np.pi * np.sqrt(D / gamma)
m_crit = (4/3) * np.pi * rho * r_crit**3

print(f"Критический радиус: {r_crit:.6f} м")
print(f"Критическая масса: {m_crit:.2f} кг")
```

```

print(f"Фактический радиус: {r_relative * r_crit:.6f} м")

# Размеры области моделирования
r_max = r_relative * r_crit
Dr = r_crit / 30
Dt = 3e-8
total_time = 2e-6

# Создаем пространственную сетку
r = np.arange(0, r_max, Dr)
n = len(r)

# Начальное распределение нейтронов
u0 = initial_amplitude * np.exp(-(r**2) / (2 * (sigma_factor *
r_crit)**2))

# Сглаживание начального распределения
interp_func = interp1d(r, u0, kind='cubic',
bounds_error=False, fill_value=0)
r_fine = np.linspace(0, r_max, 300)
u0_smooth = interp_func(r_fine)

# Матрица для оператора Лапласа
A = diags([np.ones(n-1), -2*np.ones(n), np.ones(n-1)], [-1, 0,
1]).toarray()

# Учет сферической геометрии
for i in range(1, n-1):
    A[i, i-1] = D * Dt / Dr**2 * (1 - Dr/r[i])
    A[i, i] = 1 + gamma * Dt - 2 * D * Dt / Dr**2
    A[i, i+1] = D * Dt / Dr**2 * (1 + Dr/r[i])

# Граничные условия
A[0, 0] = 1 + gamma * Dt - 2 * D * Dt / Dr**2
A[0, 1] = 2 * D * Dt / Dr**2
A[-1, -1] = 1

# Настройка фигуры
fig = plt.figure(figsize=(16, 8))

# Первый субплт - 3D поверхность
ax1 = fig.add_subplot(121, projection='3d')
theta = np.linspace(0, 2 * np.pi, 40)
theta_grid, r_grid = np.meshgrid(theta, r_fine)

```

```

X = r_grid * np.sin(theta_grid)
Y = r_grid * np.cos(theta_grid)

# Второй субплт - 2D график радиального распределения
ax2 = fig.add_subplot(122)
ax2.set_xlim([0, r_max])
ax2.set_ylim([0, initial_amplitude * 1.5])
ax2.set_xlabel('Радиус (м)')
ax2.set_ylabel('Концентрация нейтронов')
ax2.grid(True)
ax2.set_title('Радиальное распределение концентрации')
ax2.axvline(x=r_crit, color='r', linestyle='--',
label=f'Критический радиус: {r_crit:.4f} м')
ax2.legend()

# Инициализация графиков
u_plot = np.outer(u0_smooth, np.ones_like(theta))
surf = ax1.plot_surface(X, Y, u_plot, cmap='inferno',
rstride=1, cstride=1,
                        linewidth=0, antialiased=True,
alpha=0.9)

# Colorbar
mappable = ScalarMappable(cmap='inferno')
mappable.set_array(u_plot)
cbar = fig.colorbar(mappable, ax=ax1, shrink=0.6, aspect=15,
pad=0.1)
cbar.set_label('Концентрация нейтронов', rotation=270,
labelpad=20)

# Линия для 2D графика
line, = ax2.plot(r_fine, u0_smooth, 'r-', linewidth=2)

# Текст с информацией
time_text = ax2.text(0.02, 0.95, '', transform=ax2.transAxes,
fontsize=12,
                    bbox=dict(facecolor='white', alpha=0.7))

# Функция анимации
def update(frame):
    global u0

    # Несколько шагов расчета
    for _ in range(5):

```

```

    u_new = A.dot(u0)
    u0 = np.maximum(u_new, 0)

# Обновление 3D поверхности
u_plot = np.outer(u0, np.ones_like(theta))
ax1.clear()
surf = ax1.plot_surface(X, Y, u_plot, cmap='inferno',
rstride=1, cstride=1,
                        linewidth=0, antialiased=True,
alpha=0.9)

# Обновление 2D графика
line.set_ydata(u0)
current_max = np.max(u0)
ax2.set_ylim([0, max(initial_amplitude * 1.5, current_max
* 1.2)])

# Обновление информации о времени
current_time = frame * Dt * 5 * 1e6
status = "ВЗРЫВ" if r_relative > 1.0 else "ЗАТУХАНИЕ"
time_text.set_text(f'Время: {current_time:.2f} мкс\n'
                  f'Макс. концентрация:
{current_max:.3f}\n'
                  f'Статус: {status}\n'
                  f'R/Rкрит: {r_relative:.2f}')

# Настройки осей
ax1.set_xlim([-r_max, r_max])
ax1.set_ylim([-r_max, r_max])
z_max = max(initial_amplitude * 1.5, current_max * 1.2)
ax1.set_zlim([0, z_max])
ax1.set_xlabel('X (м)')
ax1.set_ylabel('Y (м)')
ax1.set_zlabel('Концентрация')
ax1.set_title(f'3D модель атомного
взрыва\n( $\gamma$ ={gamma/1e6:.1f} $\times 10^6$  1/с, D={D} м2/с)', pad=15)

return surf, line, time_text

# Создание анимации
frames = int(total_time / (Dt * 5))
ani = FuncAnimation(fig, update, frames=min(frames, 100),
                    interval=50, blit=False, repeat=False)

```

```
plt.tight_layout()  
plt.show()
```

ПРИЛОЖЕНИЕ Ж

Листинг программы построения графика аналитического решения

```
% Параметры модели
D = 0.1; % Коэффициент диффузии
r = 0.1; % Скорость размножения
K = 100; % Емкость среды (максимальная плотность популяции)
L = 100; % Длина области
T = 50; % Время моделирования
Dx = 1; % Шаг по пространству
Dt = 0.1; % Шаг по времени

% Инициализация
x = 0:Dx:L; % Пространственная сетка
c = zeros(length(x), 1); % Плотность популяции
c(round(length(x)/2)) = 10; % Начальная плотность в центре

% Подготовка для 3D визуализации
time_steps = 0:Dt:T; % Временные шаги
C = zeros(length(x), length(time_steps)); % Матрица для хранения
плотности

% Основной цикл по времени
for t_iDx = 1:length(time_steps)
    t = time_steps(t_iDx);
    c_new = c; % Создаем новый вектор для обновленных значений плотности

    % Обновление плотности по пространству
    for i = 2:length(x)-1
        % Член, описывающий диффузию
        Diffusion = D * (c(i+1) - 2*c(i) + c(i-1)) / Dx^2;

        % Член, описывающий размножение
        growth = r * c(i) * (1 - c(i) / K);

        % Обновление плотности
        c_new(i) = c(i) + Dt * (Diffusion + growth);
    end

    % Граничные условия
    c_new(1) = c_new(2); % Левый край
    c_new(end) = c_new(end-1); % Правый край

    % Обновление плотности
    c = c_new;

    C(:, t_iDx) = c;
end
```

```
% 3D визуализация
[X, T] = meshgrid(x, time_steps);
figure;
surf(X, T, C', 'EdgeColor', 'none');
xlabel('Позиция (x)');
ylabel('Время (t)');
zlabel('Плотность (c)');
title('3D Модель диффузионного процесса с размножением');
colorbar;
view(30, 30);
grid on;
```

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Сертификат участия в XXXIV научной конференции АмГУ «День науки»

