

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**(ФГБОУ ВО «АмГУ»)**

Факультет математики и информатики  
Кафедра математического анализа и моделирования  
Направление подготовки – 01.03.02 Прикладная математика и информатика

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ  
И.о. зав. кафедрой  
\_\_\_\_\_ Н.Н. Максимова  
« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2021 г.

**БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА**

на тему: Моделирование нарушений ритма работы сердца

Исполнитель  
студент группы 752об

\_\_\_\_\_

(подпись, дата)

М.О. Дудич

Руководитель  
доцент, канд. физ.-мат. наук

\_\_\_\_\_

(подпись, дата)

В.В. Сельвинский

Нормоконтроль  
доцент, канд. физ.-мат. наук

\_\_\_\_\_

(подпись, дата)

Е.М. Веселова

Благовещенск 2021

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**(ФГБОУ ВО «АмГУ»)**

Факультет математики и информатики  
Кафедра математического анализа и моделирования

УТВЕРЖДАЮ  
И.о. зав. кафедрой  
\_\_\_\_\_ Н.Н. Максимова  
« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2021 г.

**ЗАДАНИЕ**

К бакалаврской работе студента: Дудича Михаила Олеговича

1. Тема бакалаврской работы: Моделирование нарушений ритма работы сердца(утверждена приказом от 23.04.2021 № 812-уч)
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 23.06.2021 г.
3. Исходные данные к бакалаврской работе: отчет по преддипломной практике, научные статьи, учебно-методические работы
4. Содержание бакалаврской работы (перечень подлежащих разработке вопросов): моделирование нарушений ритма работы сердца в пакете Mathcad.
5. Перечень материалов приложения: листинг программы сердцебиения, листинг программы нервного импульса
6. Консультанты по бакалаврской работе: нормоконтроль – Веселова Е.М., доцент, канд. физ.-мат. наук.
7. Дата выдачи задания: 07.05.2021 г.

Руководитель бакалаврской работы: Сельвинский Владимир Владимирович, доцент, канд. физ.-мат. наук, доцент

Задание принял к исполнению (07.05.2021): \_\_\_\_\_ Дудич М.О.

## РЕФЕРАТ

Бакалаврская работа содержит 51 с., 18 рисунков, 2 приложения, 1 источник.

### СИСТЕМА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В бакалаврской работе приведена постановка задачи о нарушениях ритма работы сердца и передачи нервных импульсов, исследуемых в выпускной квалификационной работе, обоснован выбор программных средств, продемонстрирован пример реализации данной модели.

Представлены результаты вычислительных экспериментов при варьировании параметров модели. Приведены идеи для развития исследования данной модели.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1 Математическое моделирование динамических процессов	7
1.1 Определение и свойства динамических систем	7
1.2 Элементы качественной теории динамических систем	9
1.3 Динамические процессы в биологии и других областях	10
2 Средства и методы исследования динамических систем	15
2.1 Элементы теории дифференциальных систем	15
2.2 Программные средства пакета Mathcad для исследования динамических систем	21
2.3 Программные средства пакета Matlab для исследования динамических систем	22
3 Модели сердечных сокращений и передачи нервных импульсов	25
3.1 Модель сердечных сокращений	25
3.2 Исследование модели сердечных сокращений в математическом пакете Mathcad	30
3.3 Математическая модель процесса передачи нервных импульсов	35
Заключение	39
Библиографический список	40
Приложение А Листинг программного модуля сердцебиения	42
Приложение Б Листинг программного модуля передачи нервного импульса	47

## ВВЕДЕНИЕ

Рядом со словом биология всё чаще и чаще стали появляться слова «математика», «кибернетика», «электронная вычислительная машина». В биологию, которая по сути своей была экспериментально-описательной наукой, проникли неведомые ей ранее методы абстрактного анализа, отвлечённых умозрительных рассуждений, методы, связанные с точным расчётом и громоздкими математическими выкладками. Специалисты предсказывали рождение новой биологии – столь же точной и непререкаемой науки, как, например, физика. Это новое лицо биологии и привлекло к ней внимание учёных, а затем и учащейся молодёжи.

Число математических работ в биологии непрерывно увеличивалось. Помимо небольших статей в специальных журналах, стали появляться объёмистые монографии. Авторы этих трудов с поразительной ясностью объясняли суть многих биологических явлений. Более того, иногда они предсказывали новые биологические факты, и их предсказания блестяще подтверждались проведёнными экспериментами. С новой биологией, несмотря на её недостатки, приходилось считаться.

Математике всегда удавалось извлечь немалую пользу из своих взаимоотношений с развивающимися науками, причём каждое последующее взаимодействие существенно оживляет и улучшает эту область. Совершенно ясно, что одним из самых перспективных направлений развития математических приложений является биомедицина. Вопросы экологии и жизнеобеспечения требуют разработки все более новых и совершенных математических моделей, способных достаточно хорошо предсказывать возможное появление нарушений нормальной жизнедеятельности.

Целью работы является исследование математических моделей биологических процессов (сердцебиение, передача нервных импульсов), а также

определение дополнительных характеристик динамических систем с использованием математических пакетов Mathcad и Matlab.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1) изучить вопросы теории динамических систем применительно к процессам сердцебиения и передачи нервных импульсов в доступной учебной и научной литературе;

2) выполнить численный эксперимент для математических моделей процессов сердцебиения и передачи нервных импульсов на основе программных средств пакета Mathcad и Matlab;

3) произвести анализ соответствия моделей процессов сердцебиения и передачи нервных импульсов реальным процессам.

Работа состоит из введения, трех глав, заключения, библиографического списка и приложения. Первая глава посвящена основам теории динамических систем, здесь приведены основные понятия и определения. Во второй главе описаны возможности пакетов Mathcad и Matlab. В третьей главе отражена основная часть работы: исследование математических моделей Зимана сердцебиения и передачи нервных импульсов.

# 1 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

## 1.1 Определение и свойства динамических систем

При определении любой динамической системы необходимо иметь возможность описать ее состояние в любой момент времени, а также установить закон, по которому система переходит из одного состояния в другое.

Состояние объекта – это набор параметров, переменных, функций, характеризующих существование, поведение, изменение этого объекта или системы.

Для механических систем такими параметрами являются масса и ее распределение в пространстве, размеры объекта и расстояния, число степеней свободы, ограничения на движение и обобщенные координаты.

Для физических систем это могут быть характеристики электродинамики, термодинамики, теории поля.

В биологических системах также можно выбрать различные измеряемые величины: концентрации веществ, численность популяций, электрохимические потенциалы и т. д.

Изменение состояния системы с течением времени осуществляется переходом от одного состояния (текущего, стационарного или периодического) в другое. Параметры системы – это количественные характеристики, отличающие данную систему от ей подобной, определяющие условия протекания процессов в системе. Такими параметрами могут быть количество вещества, температура, пропускная способность сосудов, состав окружающей клетку среды, электрическая проводимость элементов организма, плотность питательной среды и др.

Под динамической системой понимают любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния как совокупности неко-

торых величин в данный момент времени и задан закон, который описывает изменение (эволюцию) начального состояния с течением времени. Этот закон позволяет по начальному состоянию прогнозировать будущее состояние динамической системы, его называют законом эволюции. Описания динамических систем для задания закона эволюции также разнообразны: с помощью дифференциальных уравнений, дискретных отображений и т.д. Выбор одного из способов описания задает конкретный вид математической модели соответствующей динамической системы.

Математическая модель динамической системы считается заданной, если введены параметры (координаты) системы, определяющие однозначно ее состояние, и указан закон эволюции. В зависимости от степени приближения одной и той же системе могут быть поставлены в соответствие различные математические модели.

Методология математического моделирования позволяет применить как качественные, так и приближенно-аналитические методы исследования характеристик динамических систем и сочетает в себе достоинства теоретических и экспериментальных исследований.

Можно дать следующую классификацию динамических систем, принятую у механиков и физиков. В зависимости от вида динамические системы можно разделить на три класса:

- системы с сосредоточенными параметрами;
- системы с отклоняющим аргументом;
- системы с распределенными параметрами.

Системы с сосредоточенными параметрами – это системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями с единственной независимой переменной – временем  $t$ . В частности, все механические системы с конечным числом степеней свободы – это сосредоточенные системы.

Системы с отклоняющим аргументом также описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, но искомые функции и их производные входят в уравнения при различных значениях аргумента.



Распределенные системы – это системы, описываемые уравнениями в частных производных.

В зависимости от характера поведения решений динамические системы разделяются на консервативные, диссипативные, автоколебательные и прочие.

Консервативные системы – это системы, в которых сохраняется полная энергия. Консервативные системы описываются, например, системой Гамильтона. Пример – обычный маятник в пренебрежении трением (сопротивлением среды).

Диссипативные системы – это системы, в которых любое движение заканчивается в одном из устойчивых состояний равновесия.

Автоколебательные системы – это автономные системы, в которых устанавливается один и тот же периодический режим при любых начальных условиях из некоторого множества начальных условий. Пример – часовой механизм[9].

## **1.2 Элементы качественной теории динамических систем**

Исследование любого явления, проявляющего динамическое поведение, как правило, начинается с построения соответствующей математической модели динамической системы. Наличие модели в явном виде позволяет проследить эволюцию ее состояния при изменении  $t$ , поскольку исходные данные определяют единственное решение системы. Для полного изучения системы необходимо найти это решение, то есть «проинтегрировать» исходную систему.

«Интегрирование системы» подразумевает получение в качестве ее решения аналитического выражения. Однако данная цель достижима только для очень малого класса динамических систем: для систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами и для некоторых особых уравнений, которые можно проинтегрировать в квадратурах. Вместе с тем, даже в случае, когда решение представлено в аналитическом виде, координатные функции, определяющие решение, могут быть настолько сложны, что непосредствен-

ный анализ становится практически невозможным. Кроме того, задача нахождения решения в аналитическом виде не является главной целью нелинейной динамики, которая, в основном, затрагивает «качественные» свойства такие, как количество положений равновесия, устойчивость, существование периодических траекторий и т. д. Таким образом, при использовании метода Пуанкаре, вместо прямого интегрирования дифференциальных уравнений мы постараемся получить информацию о характере и виде функций, задаваемых этими уравнениями, из самих уравнений. В частности, мы попытаемся описать важные качественные особенности этих функций путем геометрического представления фазовых траекторий. Вот почему данный метод называется «качественным интегрированием».

На первом этапе качественного исследования определяются все возможные типы траекторий, имеющих определенное поведение и «формы». Второй этап состоит в описании для каждой группы качественно схожих систем. Для того чтобы дать полное описание, необходимо определить некоторые наиболее важные или «специальные» траектории. Но при этом возникает трудноразрешимая задача: «Какие свойства траектории необходимо определить для того, чтобы описать качественную структуру деления фазового пространства на траектории?»

### **1.3 Динамические процессы в биологии и других областях**

Математическая биология представляет собой быстро растущий, широко признанный, хотя и не вполне ясно определённый предмет и является наиболее интересной областью приложения математики. Сегодня, когда очень быстро развивается количественный аспект биологии, всё более обширное присутствие математики в этой науке становится неизбежным. Необходимость междисциплинарных взаимосвязей обуславливается сложностью биологических наук. Для математиков биология открывает совершенно новые потрясающие возможности, тогда как для биолога математическое моделирование становится дополнительным инструментом исследований, аналогичным новой мощной лабораторной методике, но исключительно при

надлежащем использовании и с учётом существующих ограничений. При этом нужно отметить, что самонадеянное применение математиками, мало что понимающими в настоящей биологии, своей эзотерической науки для решения биологических проблем вкупе с необоснованными притязаниями на важность подобных теорий мало способствует продвижению столь важных междисциплинарных взаимоотношений.

Существование математической биологии как самостоятельной науки неоспоримо. Одним из практических показателей этого является рост числа соответствующих должностей в научном секторе, медицинской сфере и промышленности. Другим – увеличение числа людей, состоящих в соответствующих научных обществах. Количество учёных, задействованных сегодня в этой сфере, измеряется тысячами. Математическое моделирование применяется во всех основных медико-биологических дисциплинах. Одной из неожиданных и удивительно удачных сфер применения является психология, в рамках которой занимаются моделированием взаимоотношений между людьми, например, прогнозирование разводов.

При внедрении количественных методов исследования в области медицины и биологии необходимо получение достаточно полных и обоснованных описаний процессов и явлений, даваемых на языке и в терминах, отвечающих специфике конкретных решаемых задач. Сложность здесь заключается, прежде всего, в выявлении и оценке множественных взаимозависимостей, так как анализ многомерных представлений на уровне их интуитивного понимания чрезвычайно затруднен, а в ряде случаев практически невозможен. Именно с такими сложными задачами сталкивается современная медицинская наука при анализе физиологических процессов в организме, при решении задач диагностики и лечения заболеваний. При решении некоторых частных задач с успехом применяются различные графические описания (графики, диаграммы, номограммы).[13]

В тех случаях, когда удастся получить достаточные количественные данные, используют более точные способы математического описания функ-

циональных зависимостей, то есть строят уравнения, связывающие между собой отдельные измеряемые (а в ряде случаев и неизмеряемые) переменные в организме. Примером могут служить вычисления ударного и минутного объема сердца по измеряемым данным частоты сердечных сокращений и формы кривой артериального давления. Построение таких зависимостей в условиях эксперимента производят на основе статистических методов, например, метода наименьших квадратов (Наименьших квадратов метод).

Широкое распространение для описания переменных и процессов, изменяющихся во времени, получили дифференциальные уравнения, так что одно или несколько таких уравнений выражают соотношения между изменениями основных переменных.

Для строгого и адекватного описания биологических и медицинских объектов, характеризующихся значительными случайными колебаниями, используются вероятностные подходы, а для раскрытия смысла этих явлений — методы теории вероятностей. Для описания реальных явлений с помощью теории вероятностей пользуются термином вероятностная (статистическая) модель. Важным разделом теории вероятностей является математическая статистика, цель которой заключается в изучении соответствия между теоретической моделью и реальной действительностью и проверке адекватности вероятностной модели.

На этапе получения исходной информации о биологических и медицинских явлениях важна правильная постановка экспериментов с тем, чтобы они приводили к существенным выводам, к экономии времени, рабочей силы и материалов, могли бы быть легко и однозначно интерпретированы, давали бы ясные результаты. Раздел статистики, изучающий способы организации и проведения наблюдений в эксперименте, называется планированием экспериментов.

При решении задач планирования экспериментов широко используют методы факторного анализа, целью которого является определение того

вклада, который вносит в общую изменчивость результатов эксперимента каждый из факторов, влияющих на его исход.

Процесс математического моделирования включает следующие основные этапы: выбор структуры модели и формулировка законов, связывающих ее элементы; анализ полученного описания (верификация), то есть проверка близости процессов, получаемых на модели, и реальных процессов и определение области адекватности полученной модели; получение новых данных и модернизация модели. Особое значение при моделировании процессов в организме человека приобрели понятия и методы кибернетики и теории управления, такие как обратная связь, устойчивость, надежность, чувствительность. Эти понятия чрезвычайно важны для формального описания физиологических и медицинских концепций (гомеостаза организма, адаптации и компенсации, стресса) и количественного анализа процессов заболевания и лечения.

В медицину проникновение математических моделей происходит главным образом через статистику, биологическую и медицинскую кибернетику. При этом методы, используемые в биологической и медицинской кибернетике, во многом совпадают, а сами эти дисциплины неразрывно связаны между собой.

В целом адекватное использование математических моделей является перспективным методом анализа медицинских и биологических явлений; их использование в медицине способствует прогрессу в медико-экспериментальной и клинической областях и помогает врачу, увеличивая его творческие возможности.

В течение последних десятилетий наметился значительный прогресс в количественном (математическом) описании функций различных биосистем на различных уровнях организации жизни: молекулярном,

Современная теория динамических систем является собирательным названием для исследований, где широко используются и эффективным образом сочетаются методы из различных разделов математики: топологии и

алгебры, алгебраической геометрии и теории меры, теории дифференциальных форм, теории особенностей и катастроф.

Весьма тесно примыкает к таким современным разделам естествознания как неравновесная термодинамика, теория динамического хаоса, синергетика. Задачей качественной теории динамических систем является нахождение стационарных решений – особых точек и предельных циклов, исследование их устойчивости, выделение областей притяжения устойчивых стационарных режимов в фазовом пространстве. Таким образом, выясняется фазовый портрет системы при фиксированных значениях параметров.

Теоретическое исследование динамического поведения реального объекта требует создания его математической модели. Во многих случаях процедура разработки модели состоит в составлении математических уравнений на основе физических законов. Обычно эти законы формулируются на языке дифференциальных уравнений. В результате координаты состояния системы и ее параметры оказываются связанными между собой, что позволяет приступить к решению дифференциальных уравнений при различных начальных условиях и параметрах.

Главным критерием здесь является соответствие математической модели описываемым реальным процессам. Это определяется сравнением результатов теоретического расчета с результатами эксперимента на конкретном объекте. Модель заслуживает особого признания, если с ее помощью удастся теоретически обнаружить новые особенности поведения, которые затем подтверждаются экспериментально. Может оказаться, что математическая модель разработана специалистами по прикладным наукам, а новые явления в поведении этой модели (и соответствующей реальной системы) обнаружены специалистами по теории динамических систем. [15]

## 2СРЕДСТВА И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### 2.1 Элементы теории дифференциальных систем

Под динамической системой понимают любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния как совокупности некоторых величин в данный момент времени и задан закон, который описывает изменение (эволюцию) начального состояния с течением времени. Этот закон позволяет по начальному состоянию прогнозировать будущее состояние динамической системы, его называют законом эволюции. Динамические системы – это механические, физические, химические и биологические объекты, вычислительные процессы и процессы преобразования информации, совершаемые в соответствии с конкретными алгоритмами. Выбор одного из способов описания задает конкретный вид математической модели соответствующей динамической системы.

Математическая модель динамической системы считается заданной, если введены параметры (координаты) системы, определяющие однозначно ее состояние, и указан закон эволюции. В зависимости от степени приближения одной и той же системе могут быть поставлены в соответствие различные математические модели. Исследование реальных систем сводится к изучению математических моделей, совершенствование и развитие которых определяются анализом экспериментальных и теоретических результатов при их сопоставлении. В связи с этим под динамической системой мы будем понимать именно ее математическую модель. Исследуя одну и ту же динамическую систему (к примеру, движение маятника), в зависимости от степени учета различных факторов мы получим различные математические модели.

Основным элементом динамической системы, как правило, является система дифференциальных уравнений, описывающих изменение ее состояния с течением времени.





$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (3)$$

можно свести к нормальной системе дифференциальных уравнений, используя замену

$$y_1 = y', \quad y_2 = y'', \quad \dots, \quad y_{n-1} = y^{(n-1)}, \quad (4)$$

в результате чего получаем

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y_1, \\ \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{dy_{n-2}}{dx} &= y_{n-1}, \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}). \end{aligned} \quad (5)$$

Как правило, для реальных механических систем, соответствующая система дифференциальных уравнений практически не поддается аналитическому решению (за исключением некоторых простейших случаев). Это приводит к необходимости использовать численные методы решения.

Большое развитие получила также качественная теория дифференциальных уравнений. Ее преимущество состоит в том, что она создает общую картину поведения динамической системы в зависимости от тех или иных параметров. С учетом свойства непрерывной зависимости решения дифференциальной системы от начальных условий, специфика конкретной динамической системы проявляется в окрестности особых стационарных точек. Это позволяет отождествлять систему с ее фазовым портретом – изображением семейства фазовых траекторий с учетом расположения ее особых точек. По фазовому портрету динамической системы достаточно наглядно определяется поведение системы, как движение изображающей точки вдоль фазовой траектории, исходящей из некоторой начальной точки.

Особенно наглядно преимущества качественной теории дифференциальных уравнений проявляются в двумерном случае, для системы двух диф-

ференциальных уравнений. В этом случае фазовый портрет имеет плоское изображение. Большой вклад в развитие качественной теории дифференциальных уравнений внесли русский математик А. М. Ляпунов, а также французский математик А. Пуанкаре.

Рассмотрим некоторые особенности качественных методов исследования динамических систем на примере двух автономных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

Здесь  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  - непрерывные функции, имеющие в этой области непрерывные частные производные порядка не ниже первого.

Решением данной системы уравнений будем считать функции  $x(t)$ ,  $y(t)$ , удовлетворяющие данным уравнениям, а также начальным условиям:  $x(t_0) = x_0$ ,  $y(t_0) = y_0$ . При изменении состояния системы с течением времени переменные  $x, y$  изменяются, соответственно изменяется положение точки с координатами  $x, y$  на координатной плоскости  $Oxy$ .

Плоскость  $Oxy$  называется фазовой плоскостью. Она представляет совокупность всех возможных состояний динамической системы. Точка  $M(x, y)$  называется изображающей. Если считать, что при  $t = t_0$ , координаты изображающей точки  $M_0(x_0, y_0)$ , то с течением времени  $t$  изображающая точка будет двигаться вдоль некоторой кривой и принимать положение  $M(x, y)$ , соответствующее значениям  $x(t)$ ,  $y(t)$ .

Множество этих положений точки  $M(x, y)$  на фазовой плоскости  $Oxy$  называется фазовой траекторией. Семейство фазовых траекторий автономной динамической системы образует так называемый фазовый портрет, определяющий поведение системы с течением времени. Характерными особенностями фазового портрета являются особые (стационарные) точки, сепаратрисы, асимптоты.

Изображающая точка с координатами  $M(\bar{x}, \bar{y})$ , называется стационарной, если в этой точке  $\frac{dx}{dt} = 0$ ,  $\frac{dy}{dt} = 0$ . В теории динамических систем выделяют несколько основных типов особых (стационарных) точек: узел, седло, фокус, центр.

1. Стационарная точка типа узел. В окрестности особой точки типа узел изображающая точка либо асимптотически приближается к особой точке по некоторым криволинейным дугам, никогда ее не достигая (устойчивый узел), либо удаляется от этой особой точки (неустойчивый узел). Здесь характерной особенностью является также наличие прямолинейной сепаратрисы, разделяющей семейство фазовых траекторий на две части.

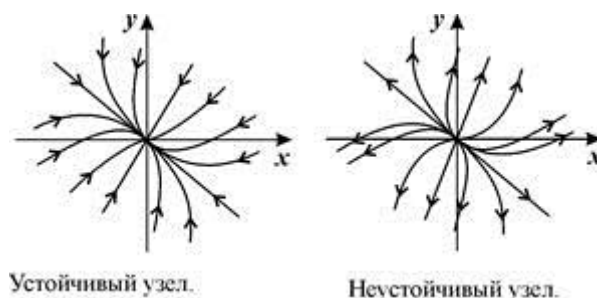
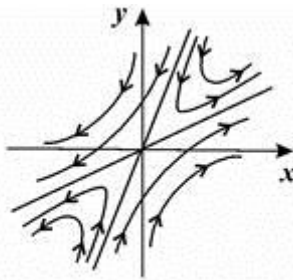


Рисунок 1 – Узел

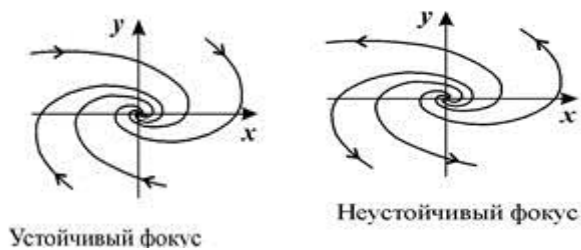
2. Стационарная точка типа седло. В окрестности особой точки типа седло изображающая точка либо сразу удаляется от нее, либо сначала приближается, а потом удаляется по дугам кривых гиперболического типа. Данная особая точка соответствует неустойчивому состоянию равновесия динамической системы. Здесь характерной особенностью является наличие двух прямолинейных пересекающихся сепаратрис, разделяющих окрестность особой точки на четыре области. Эти сепаратрисы также являются фазовыми траекториями. На одной из них изображающая точка асимптотически приближается к особой точке, никогда не достигая ее, на другой – удаляется.



Седло

Рисунок 2 – Седло

3. Стационарная точка типа фокус. В окрестности особой точки типа фокус изображающая точка либо асимптотически приближается к особой точке по дугам спиралевидных кривых (устойчивый фокус), либо удаляется от нее (неустойчивый фокус).

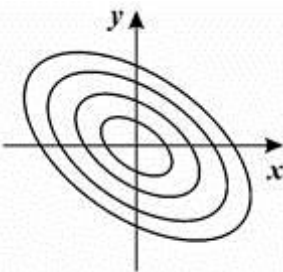


Устойчивый фокус

Неустойчивый фокус

Рисунок 3 – Фокус

4. Стационарная точка типа центр. В окрестности особой точки типа центр изображающая точка перемещается по замкнутым эллиптическим кривым, охватывающим особую точку. Поведение динамической системы носит периодический характер.



Центр

Рисунок 4 – Центр

## 2.2 Программные средства пакета Mathcad для исследования динамических систем

Фирма MathSoftInc.(США) выпустила первую версию системы в 1986 г. Главной особенностью Mathcad является её входной язык, который максимально приближен к обычному математическому языку, который используется как в трактатах по математике, так и в научной литературе. Документы, которые пользователь готовит в ходе работы с Mathcad, включают описания алгоритмов вычислений, управляющие работой систем программы и результаты. По внешнему виду тексты почти не похожи на обычную программу.

Mathcad – это востребованная система, предназначенная для автоматизирования решения обширных математических задач в самых разных областях науки, техники и образования. Название системы происходит от двух слов – MATHeMatica и CAD. Так что вполне правомерно считать Mathcad математической системой автоматического проектирования.

Сегодня разные версии Mathcad считаются математически ориентированными всесторонними системами.

Для решения дифференциальных уравнений Mathcad предоставляет пользователю библиотеку встроенных функций DifferentialEquationSolving, предназначенных для численного решения дифференциальных уравнений:

1) встроенная функция odesolve, предназначенная для решения дифференциальных уравнений, линейных относительно старшей производной (наиболее проста в использовании);

2) встроенные функции, предназначенные для решения задачи Коши и граничных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме.

Решение задачи Коши заключается в использовании одной из следующих встроенных функций, использующих различные численные методы rkfixed–метод Рунге-Кутты с фиксированным шагом, Rkadapt– метод Рунге-

Кутта с переменным шагом, Bulstoer– метод Булирша-Штера. Данные функции имеют следующий синтаксис:

*Имя\_функции* ( $y_0, t_0, t_k, k, D$ ),

где  $y_0$  – вектор начальных значений в точке  $t = t_0$ , длина которого равна  $N$ ;  $t_0$  – начальное значение интервала интегрирования;  $t_k$  – конечное значение интервала интегрирования;  $k$  – число шагов, на которых численный метод ищет решение;  $D$  – векторная функция размера  $N$  двух аргументов: скалярного  $t$  и векторного  $y$ . При этом  $y$  – искомая векторная функция аргумента  $t$  того же размера  $N$  [8].

В результате решения получается матрица, число столбцов которой на единицу больше порядка дифференциального уравнения или числа уравнений в системе. Первый столбец матрицы содержит значения узлов, т.е. точек, в которых ищется решение. Второй столбец содержит значения искомой функции в узлах, а оставшиеся столбцы значения производных, начиная с первой и до  $(n - 1)$  включительно.

Для дифференциального уравнения первого порядка матрица решения состоит всего из двух столбцов: значений узлов и значений найденного решения в этих узлах. [7, 8, 10, 11]

В Mathcad функция rkfixed использует алгоритм Рунге-Кутта четвертого порядка, описанный в большинстве учебников по методам вычислений. Он обеспечивает малую погрешность для широкого класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений за исключением жестких систем [11].

### **2.3 Программные средства Matlab для исследования динамических систем**

MATLAB – одна из давних, тщательно разработанных и проверенных временем систем автоматизирования математических расчетов, сделанная на расширенном представлении и использовании матричных операций. Поэтому она так называется – MATrixLABoratory матричная лаборатория.

MATLAB является сразу и языком программирования, и операционной средой. Пользователь может сделать специальные функции и программы, ко-

торые пишутся в виде М-файлов. Классифицируя по виду задач, можно определить их в пакеты прикладных программ (ППП).

Способности MATLAB весьма значительны, а по скорости исполнения задач эта система часто превосходит конкурентов. Она используется для расчетов почти в любой сфере науки и техники – для математического моделирования разных устройств, процессов, систем в области телекоммуникаций и энергетике и акустике и аэродинамике и гидродинамике и механике.

Этому также содействует не только увеличенный набор матричных и других операций и функций. Этому ещё содействует наличие пакетов расширения Toolbox (набор инструментов) и Simulink (система имитационного блочного моделирования динамических систем), особо предназначенных для вычисления задач блочного моделирования динамических систем и устройств, вычисления задач изображений, идентификации, задач блочного моделирования динамических систем и структур.

Некоторые из этих пакетов, например, Notebook (объединение с текстовым вычислителем Word и подготовка живых электронных книг), SymbolicMath и ExtendedSymbolicMath (символьные решения с применением ядра пакета Maple V R5) и Simulink (моделирование динамических систем и устройств, заданных в виде системы блоков), настолько хорошо соединились с системой MATLAB, что стали ее композитными частями.

Язык MATLAB это высокоуровневый ЯП (язык программирования), включающий базирующиеся на матрицах структуры данных, различный спектр функций, объединенную среду разработки, объектно-ориентированные способности и интерфейсы к системам, сделанным на других ЯП (языках программирования).

Есть два типа программ, сделанных в MATLAB – это функции и скрипты. У функций есть как входные, так и выходные аргументы, а также ещё и собственное рабочее поле для хранения предварительных результатов решений и переменных. А скрипты же используют единое рабочее поле. Как функции, так и скрипты не компилируются в машинный код и остаются в ви-

де текстов на компьютере. Есть также ещё возможность оставлять так называемые pre-parsed программы – скрипты и функции, сделанные в виде, удобном для компьютерного исполнения. В едином случае такие программы исполняются быстрее обычных, в большей мере если функция или скрипт содержит команды создания графиков.

Обширные возможности по решению задач, так или иначе связанных с матрицами, является главной особенностью ЯП (языка программирования) MATLAB. «Думай векторно» – таким лозунгом выразили свою мысль создатели. [1, 4, 5, 6, 14]

Для построения графика будет использована встроенная функция Matlabode45.



## 3 МОДЕЛИ СЕРДЕЧНЫХ СОКРАЩЕНИЙ И ПЕРЕДАЧИ НЕРВНЫХ ИМПУЛЬСОВ

### 3.1 Модель сердечных сокращений

Эти модели сформулированы британским математиком Зиманом в 1973 году и являются примерами геометрического подхода к построению математических моделей с дифференциальными уравнениями. Здесь используется чисто качественное описание взаимодействия биологических механизмов. Эти дифференциальные уравнения, составляющие математическую модель, формируются как простейшие уравнения, решение которых имеет требуемую динамику. Конечно, упрощение механизма воспроизведения характеристик процесса приводит к проблемам адекватности математической модели. Степень соответствия модели реальному процессу устанавливается с помощью качественного анализа фазовых портретов динамических систем.

В процессе жизнедеятельности живого организма сердце совершает периодический переход из расслабленного состояния (диастола) в сокращенное (систола) и наоборот. Электрохимический толчок вынуждает каждое мускульное волокно быстро сокращаться, далее оно остается сокращенным некоторое время, затем достаточно быстро расслабляется в свое исходное устойчивое состояние и так далее. Другими свойствами обладает механизм передачи нервных импульсов. Основную роль в этом процессе играет так называемый аксон – часть нервной клетки, которая имеет способность передавать импульсы вследствие электрохимически стимулированного потенциала между внутренностью и внешним окружением аксона [22].

В спокойном состоянии потенциал аксона становится постоянным остаточным потенциалом. После передачи импульса потенциал аксона скачкообразно падает и затем сравнительно медленно возвращается к своему исходному значению.

Эти стадии процесса имеют три качественные особенности, формирующие основу моделей. Это:

1. существование состояния равновесия (устойчивое или неустойчивое), в окрестность которого система периодически возвращается.
2. механизм (спусковой курок) для переключения действия.
3. возврат к состоянию равновесия после завершения действия.

Основное различие между процессами сердцебиения и передачи нервных импульсов заключается в интенсивности осуществления пункта 3.

В монографии [15] приводится совокупность приемов и действий, с помощью которых удастся смоделировать процесс сердцебиения с приведенными свойствами. Для этого необходимо их сформулировать в фазовых переменных. Свойство 1 можно трактовать как наличие неподвижной точки на фазовом портрете. Свойство 2 требует устройства для периодического смещения состояния системы из окрестности положения равновесия к некоторому другому точечному состоянию. Далее фазовые переменные должны изменяться так, чтобы обеспечивалось быстрое возвращение к состоянию равновесия как требуется в 3.

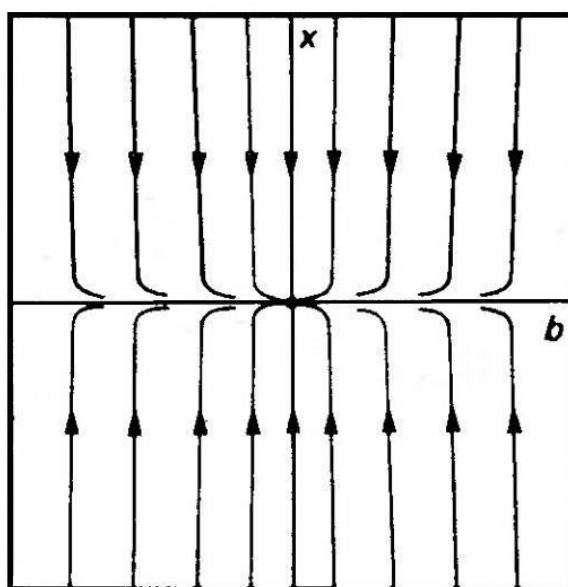


Рисунок 5 – Устойчивый узел

С использованием обозначений Зимана (1973) соответствующая система дифференциальных уравнений приобретает вид:

$$\dot{x} = -\lambda x, \quad \dot{t} \quad (6)$$

где  $\lambda$  играет роль большого параметра, много больше единицы (рисунок 5).

Для этой системы все фазовые траектории, отличные от практически параллельны оси  $x$ , соответствующей главному направлению от значения  $-\lambda$ , быстрого собственного значения, и, в конечном счете, смещаются почти параллельно в сторону главного направления от медленного собственного значения  $-1$ . Уравнения  $\dot{x} = -\lambda x, \quad \dot{t}$  часто называют быстрым и медленным уравнениями соответственно.

Другой пример такого типа поведения фазовых траекторий описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\varepsilon \dot{x} = x - b, \quad (7)$$

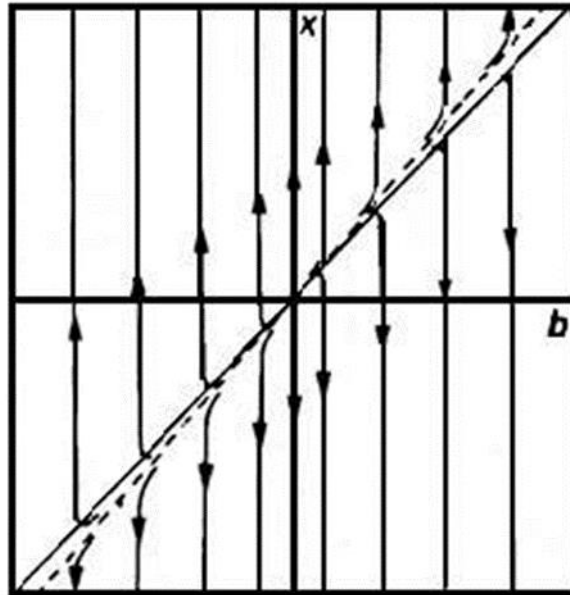


Рисунок 6 – Неустойчивый узел

где  $\varepsilon$  – положительное число и много меньше единицы. Собственные значения приблизительно равны  $\varepsilon$  и 1 и главные направления близки направле-

ниями прямых  $x = \pm \sqrt{b}$  и  $b = 0$ . Здесь быстрым является уравнение  $\varepsilon \dot{x} = x - x^3 - b$ , так как оно содержит малую величину  $\varepsilon$ , которая дает быстрое собственное значение  $\lambda = -3x^2$ . Фазовый портрет системы изображен на рисунке 8. Как и в предыдущем примере быстрое и медленное движения почти параллельны главным направлениям узла.

Далее рассмотрим систему

$$\varepsilon \dot{x} = x - x^3 - b, \quad (8)$$

для значений  $\varepsilon$  положительных и малых по сравнению с единицей. Уравнение (8) можно рассматривать как преобразование уравнения (7) с заменой линейного члена  $x$  кубической функцией  $x - x^3$ . Нетрудно заметить, что линеаризация уравнений (7) в неподвижной точке  $(0,0)$  приводит к уравнениям (6). Изоклина  $\dot{x} = 0$  для нелинейной системы  $\varepsilon \dot{x} = x - x^3 - b$ , становится кубической кривой  $b = x - x^3$  как показано на рисунке 7. Быстрое движение происходит почти параллельно направлению оси  $x$ , а медленное движение совершается вблизи характеристической кривой  $b = x - x^3$ .

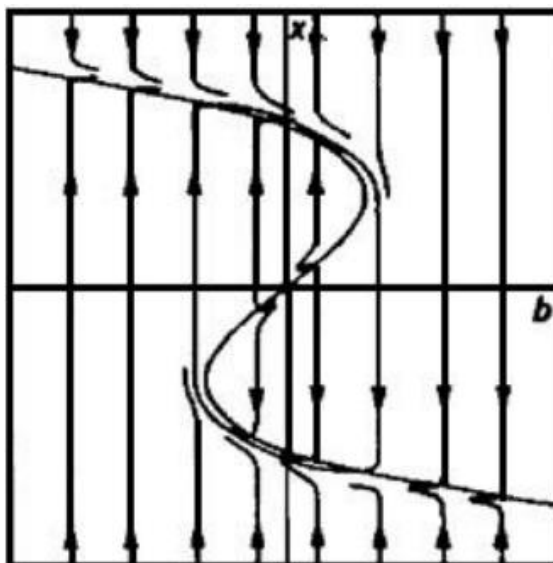


Рисунок 7 – Фазовый портрет системы  $\varepsilon \dot{x} = x - x^3 - b$ ,

Система (6) является известной системой Льенара. Форма предельного цикла и фазового портрета в целом в окрестности начала координат изображены на рисунке 7. Для построения математической модели сердцебиений Зиман (1973) сделал поправку в системе Льенара

$$\varepsilon \dot{x} = x - x^3 - b, \quad \dot{b} = \dots \quad (9)$$

Значение берется больше , значения  $x$  в точке  $A$  на рисунке 7. Система уравнений(9) тогда имеет единственную неподвижную точку  $E$ ,

где  $b_0 = x$ , на верхнем сгибе характеристики  $b =$ . Линеаризация уравнений (9) в неподвижной точке  $E$  дает систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3x_0^2 & - \\ & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Характеристическое уравнение линейной системы (10) имеет вид:

$$(1 - 3x_0^2 - \lambda)(-\lambda) + 1 = 0,$$

его корни имеют отрицательные действительные части ( $x_0 <$ , поэтому неподвижная точка  $E$  устойчива.

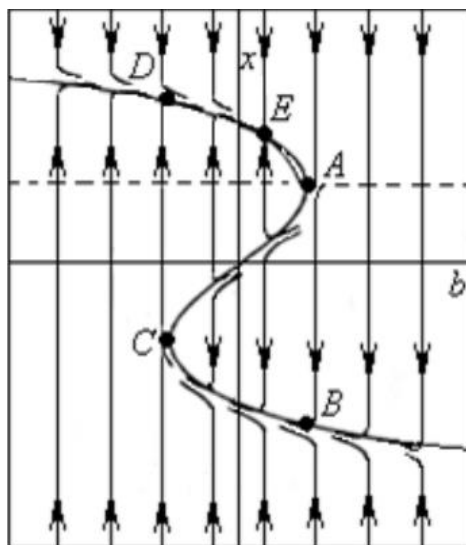


Рисунок 8 – Фазовый портрет системы  $\varepsilon \dot{x} = x - x^3 - b, \quad \dot{b} =$

Переменная  $x$  играет роль удлинения мускульного волокна, а  $b$  есть величина электрохимического потенциала. Порция электрохимического импульса сравнительно медленно сокращает сердечную мускулу от ее равновесного состояния  $E$  до ближайшего состояния  $A$  (как показано на рисунке 8). Затем мускульное волокно быстро сокращается, соответственно координата  $x$  быстро убывает вдоль траектории от  $A$  к  $B$ . Далее на участке  $BC$  происходит сравнительно медленное расслабление сердечной мышцы. Быстрое расслабление мускульного волокна происходит на участке  $CD$  перед возвращением ее к полурасслабленному состоянию  $E$ . Это поведение периодически повторяется воздействием порцией электрохимического импульса, чтобы воспроизвести поведение мускульного волокна при сердцебиении.

### 3.2 Исследование модели сердечных сокращений в математическом пакете Mathcad

Главный интерес представляет адекватность данной модели особенностям реального процесса. С этой точки зрения основное внимание следует уделять относительным значениям величин, характеризующих исследуемый процесс; абсолютным значениям можно не придавать конкретного смысла.

Полная математическая модель процесса сердцебиения включает в себя дифференциальные уравнения:

$$\varepsilon \dot{x} = x - x^3 - b, \quad \dot{b} = \quad (11)$$

начальные условия:

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad b = b_0;$$

а также условие приращения электрохимического потенциала, или импульса

$$d(x, b) \equiv \sqrt{(x - x_0)^2 + (b - b_0)^2} < \delta \Rightarrow b \leftarrow \quad (12)$$

Здесь величина  $d(x, b)$  выражает близость текущего состояния динамической системы к состоянию равновесия  $(x_0, b_0)$ , принимаемого за начальное. Условие (12) означает, что как только состояние системы отли-

чается от равновесного менее чем на  $\delta$  ( $\delta$  - порог чувствительности), электрохимический потенциал получает приращение .

На рисунках 9-12 представлены результаты численных исследований указанных зависимостей в пакете Mathcad. Листинг программного модуля сердцебиения включен в Приложение А. В расчетах использовалась встроенная подпрограмма интегрирования дифференциальных уравнений rkfixed, а также графические возможности пакета Mathcad.

Графики решения системы уравнений (11)-(12) показаны на рисунке 9.

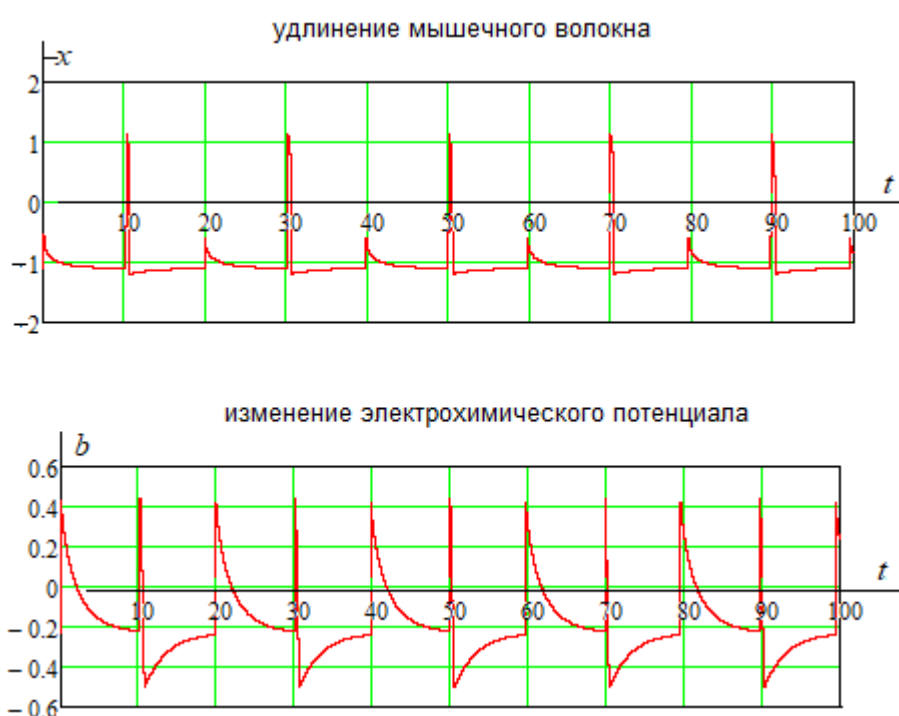


Рисунок 9 – Графики решения системы уравнений(11)-(12) при началь-

ных условиях:  $x_0 = 1.1$ ,  $b_0 = \cdot$  и значениях:

$$\varepsilon = 0.01, \quad \delta = 0.01, \quad \Delta b = 0.658$$

На рисунке 9 представлены характерные формы сердечного цикла в зависимости от положения особой точки  $E_1$  при условии, что импульс достаточно большой настолько, что обеспечивает вылет траектории цикла

вначале (пунктирная линия) и далее за гребень волны кубической параболы  $b =$ .

На рисунках 10а, 10б особая точка  $E$  является устойчивой (это нетрудно проверить на линеаризованной системе (9),  $|x_0|$ ), изображающая точка, попадая в  $\delta$  – окрестность точки  $E$ , получает импульс и попадает в положение  $A$ , далее по циклу  $BCDE$ . Циклы 10а, 10б отличаются участками  $DE$ , где происходит медленное сокращение 10а или расслабление 10б мышечного волокна, а также сравнительно медленный рост 10а или падение 10б электрохимического потенциала.

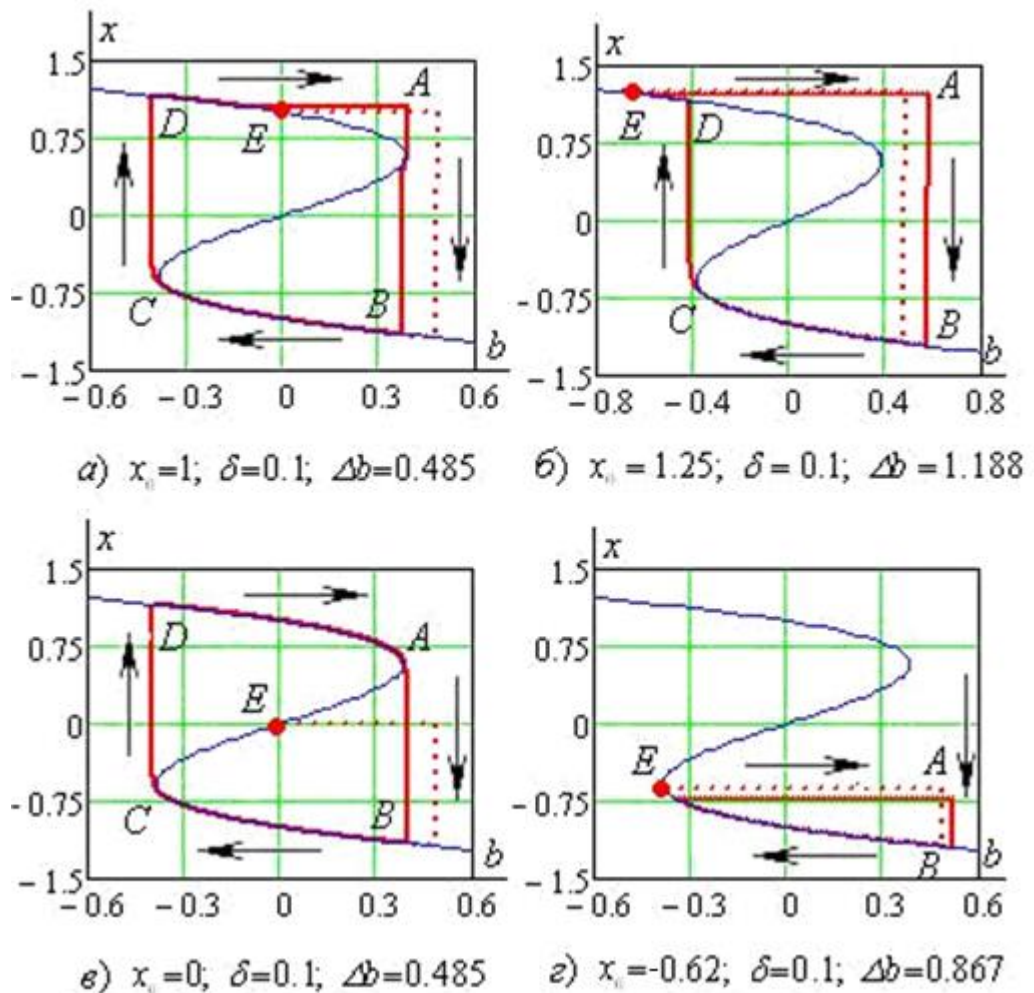


Рисунок 10 – Влияние положения особой точки на форму сердечного цикла



На рисунках 10 особая точка  $E$  является неустойчивой,  $|x_0| <$

Изображающая точка, покидая окрестность точки  $E$ , далее перемещается по циклу  $ABCD$ , без дополнительных импульсов, за счет размеренного периодического изменения электрохимического потенциала. В случае 10г особая точка  $E$  является устойчивой ( $|x| >$ ), изображающая точка, периодически попадая в окрестность точки  $E$ , за счет импульса выбрасывается в положение  $A$ , далее образуя неполный цикл  $ABE$ . Такой цикл естественно ассоциировать с понятием «конвульсия».

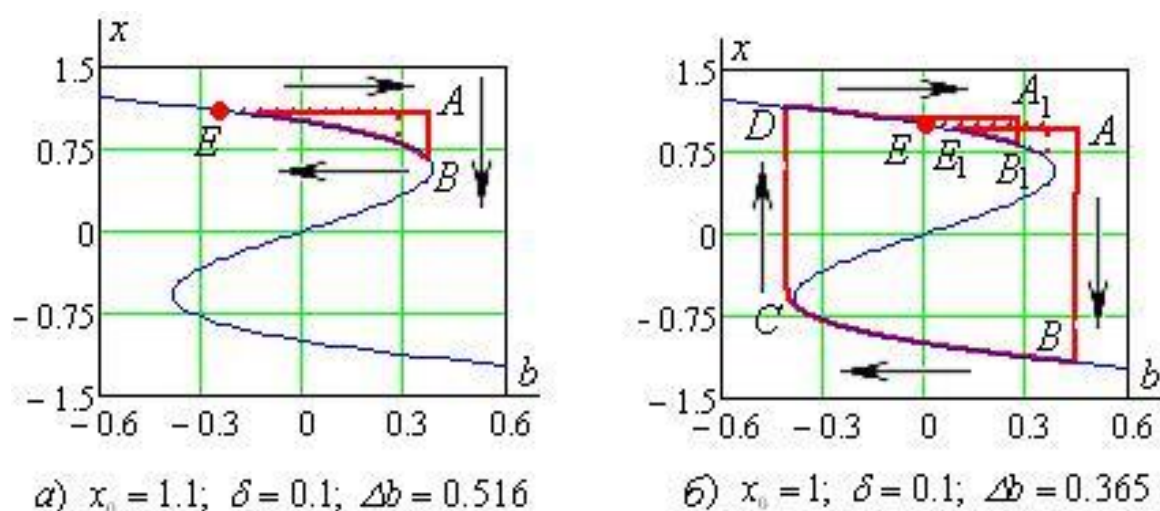


Рисунок 11 – Явление «конвульсии» и дополнительной систолы в окрестности устойчивой особой точки

Явление «конвульсии» можно наблюдать также в окрестности устойчивой особой точки  $E$  (рисунок 11а), когда порог чувствительности достаточно высок (при малых  $\delta > 0$ ), а электрохимический импульс  $\Delta b$  мал. Если порог чувствительности достаточно низок (при больших  $\delta > 0$ ), а электрохимический импульс  $\Delta b$  также мал, то в окрестности устойчивой особой точки  $E$  могут возникнуть дополнительные систолы типа  $A_1B_1E_1$  (рисунок 11б) при полном сердечном цикле  $EABCD$ .

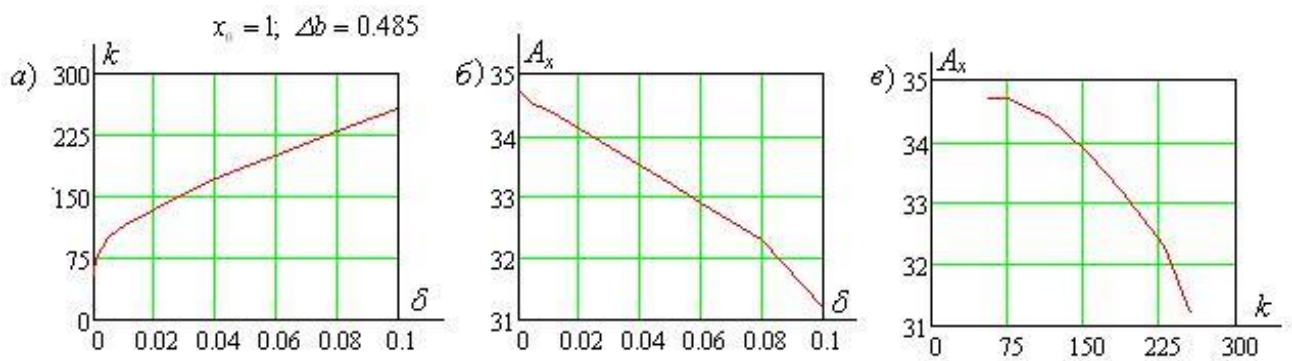


Рисунок 12 – Графики частоты и амплитуды колебаний мышечного волокна для полного нормального цикла 10а

Важными характеристиками процесса сердцебиения являются также частота (пульс), амплитуда колебаний мышечного волокна. В результате обработки семейства решений системы (9) на рисунке 12 а-б представлены зависимости частоты  $k$  и амплитуды  $A_x$  от порога чувствительности  $\delta$ , а на рисунке 12 в – амплитудо-частотная характеристика сердцебиения. На основании анализа данных можно сделать вывод, что с уменьшением чувствительности ( $\delta$  возрастает) увеличивается частота  $k$  и уменьшается амплитуда  $A_x$  колебаний сердечной мышцы. Это согласуется с тем, что в основной массе у пожилых людей с возрастом повышается в среднем давление и слабеет сердцебиение.

В качестве численного эксперимента получены массивы значений соответствующих характеристик для случаев нарушений ритма работы сердца (такими случаями условно можно считать случаи 10г, 11а, 11б).

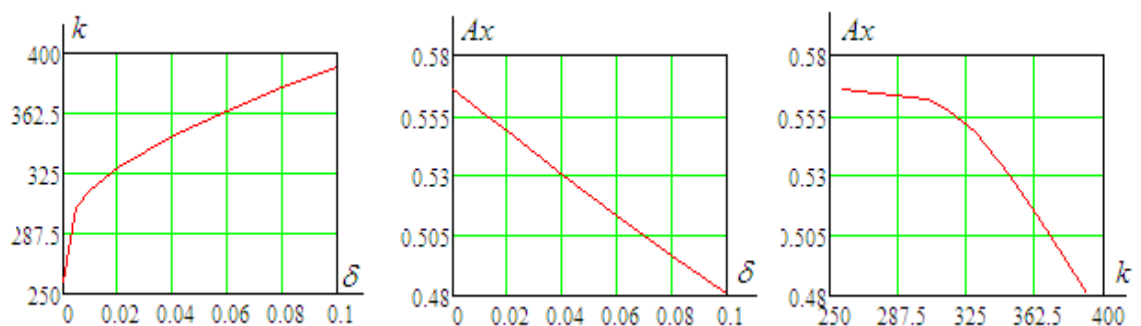


Рисунок 13 – Графики частоты и амплитуды колебаний мышечного волокна для неполного сердечного цикла 10г

В случае неполного сердечного цикла 10г анализ графиков изменения амплитуды и частоты показывает, что также с с уменьшением чувствительности ( $\delta$  возрастает) увеличивается частота  $k$  и уменьшается амплитуда  $A_x$  колебаний сердечной мышцы.

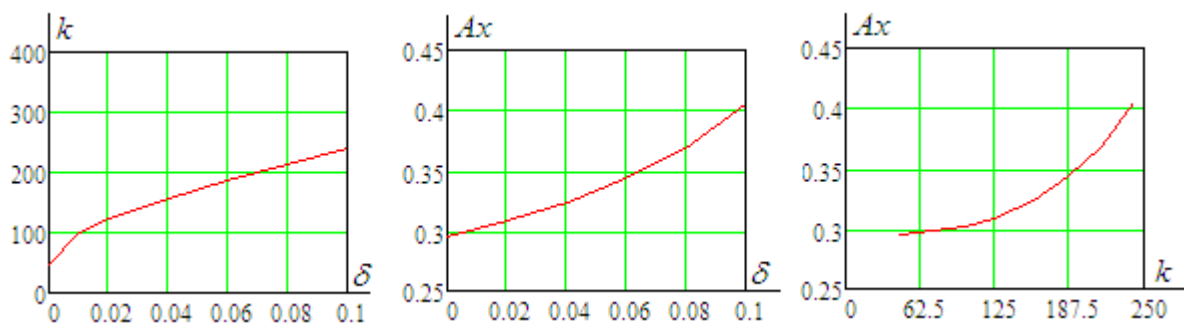


Рисунок 14 – Графики частоты и амплитуды колебаний мышечного волокна для неполного сердечного цикла 11а

В случае неполного сердечного цикла 11а анализ графиков изменения амплитуды и частоты показывает, что здесь уже с уменьшением чувствительности ( $\delta$  возрастает) увеличивается как частота  $k$ , так и амплитуда  $A_x$  колебаний мышечного волокна, возникают дополнительные механические перегрузки сердечной мышцы.

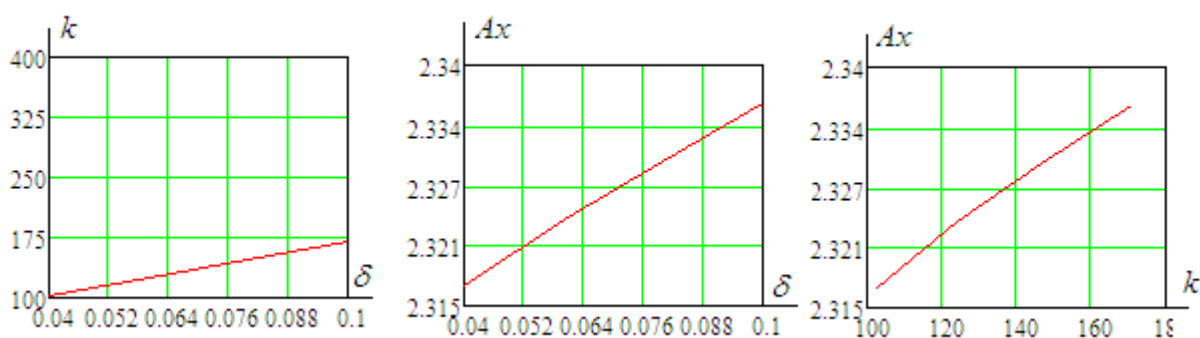


Рисунок 15 – Графики частоты и амплитуды колебаний мышечного волокна для сердечного цикла с дополнительной систолой 11б

В случае дополнительной систолы сердечного цикла в 11б анализ графиков изменения амплитуды и частоты показывает, что здесь также как и в предыдущем случае с уменьшением чувствительности ( $\delta$  возрастает) увеличивается как частота  $k$ , так и амплитуда  $A_x$  колебаний мышечного волокна, и

также возникают дополнительные механические перегрузки сердечной мышцы.

### 3.3 Математическая модель процесса передачи нервных импульсов

Передача нервного импульса осуществляется в результате химических процессов, происходящих в аксоне – части нервной клетки, формирующей электрохимический импульс. В качестве переменных величин, характеризующих протекание процесса, выступают:

- 1) натриевая проницаемость поверхности аксона (обозначают  $x$ );
- 2) калиевая проницаемость поверхности аксона (обозначают  $a$ );
- 3) разность потенциалов на разных сторонах клеточной мембраны (обозначают  $b$ ).

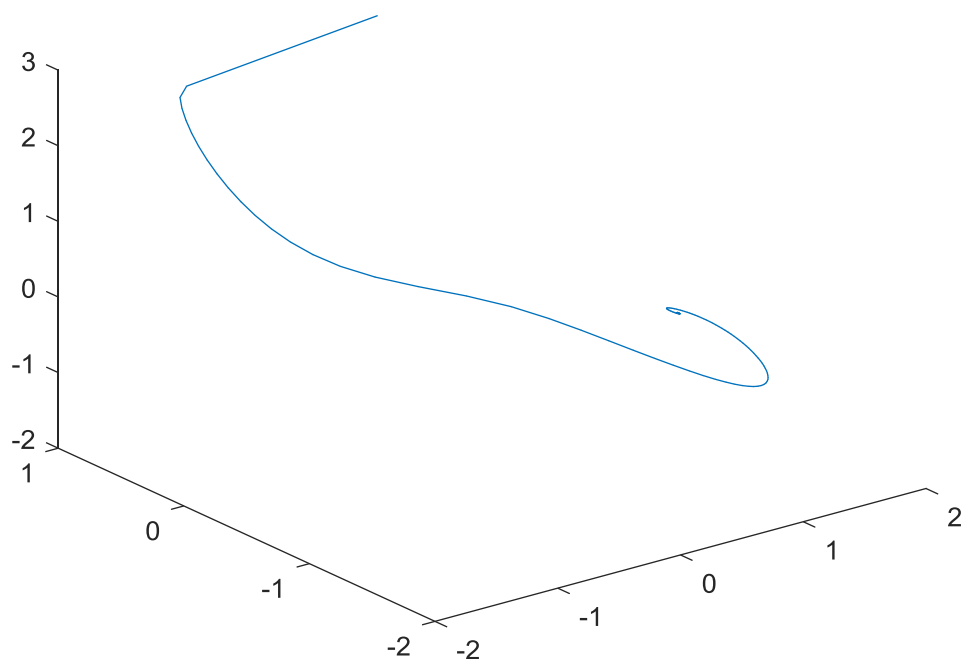


Рисунок 16 – Фазовая траектория нервного импульса, построенного в пакете Matlab

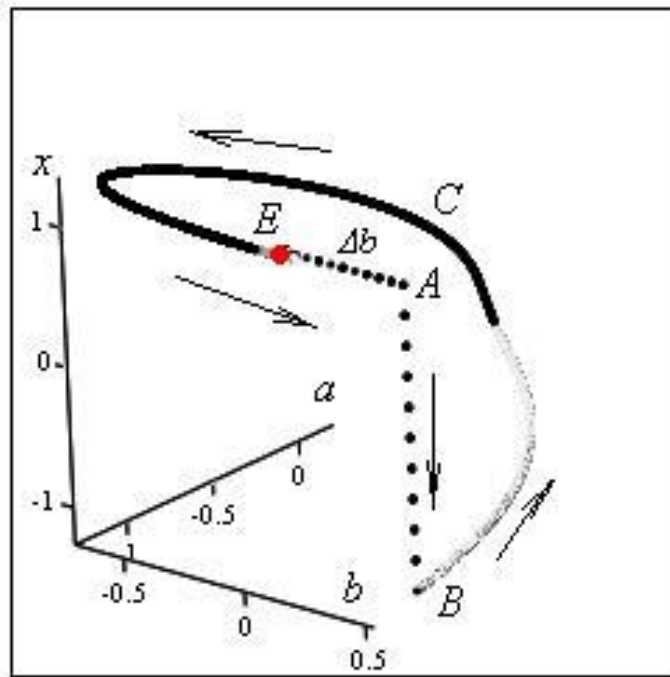


Рисунок 17 – Фазовая траектория цикла нервного импульса, построенного в пакете Mathcad

Данные эксперимента показывают, что при возрастании разности потенциалов на некоторую величину показатель натриевой проницаемости также возрастает, причем достаточно быстро, за счет чего образуется электрохимический импульс, аксон переходит в возбужденное состояние, затем постепенно изменяется калиевая проницаемость, и аксон сравнительно медленно переходит в спокойное состояние.

Такой процесс описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\varepsilon \dot{x} = -(x^3 + ax + b), \quad \dot{a} = -2x - 2a, \quad \dot{b} = \quad (13)$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр ( ). Эта модель также разработана Зиманом (1973). Анализ решения системы (13), показывает, что фазовый портрет системы содержит устойчивую неподвижную точку. Координаты особой точки определяются как решение системы алгебраических уравнений (  $\dot{x} = \dot{a} =$

$$x^3 + ax + b = 0, \quad -2x - 2a = 0, \quad x - x_0 = 0,$$

откуда получаем  $x = 1, a = -1$  В окрестности этой особой точки аксон постепенно приобретает нейтральное состояние. Для повторения цикла передачи нервного импульса требуется следующая порция разности потенциалов .

Графически циклический процесс передачи нервного импульса может быть представлен замкнутой фазовой траекторией в пространстве трех переменных  $(x, a, b)$  (рисунки 16-17, стрелками показано направление движения изображающей точки и последовательность чередования состояний аксона). На самой фазовой траектории можно выделить следующие участки:

- участок  $EA$  – прямолинейный, параллельный оси  $b$ , на котором происходит резкий скачок разности потенциалов ;

- участок  $AB$  – прямолинейный, параллельный оси  $x$ , на котором происходит резкий скачок показателя натриевой проницаемости;

- участок  $BCE$  – плавно огибающая кривая. Перемещение изображающей точки вдоль этого участка отвечает сравнительно медленному изменению показателя калиевой проницаемости  $a$ . Здесь происходит также возвращение всех характеристик аксона в спокойное состояние.

Рассматривая механизм подключения импульса таким же, как и для модели сердцебиения с учетом показателя чувствительности  $\delta$ , можно установить зависимости для исследуемого колебательного процесса:

$$k = k(\delta), \quad A_x = A_x(\delta), \quad A_a = A_a(\delta), \quad A_b = A_b(\delta),$$

где  $k$  - частота,  $A_x$  - амплитуды изменений соответственно натриевой, калиевой проницаемости и разности потенциалов.

На рисунке 18 демонстрируются некоторые из указанных зависимостей, резкие скачки на графиках пока еще не получили своего объяснения, возможно здесь влияет специфика вычислительного процесса.

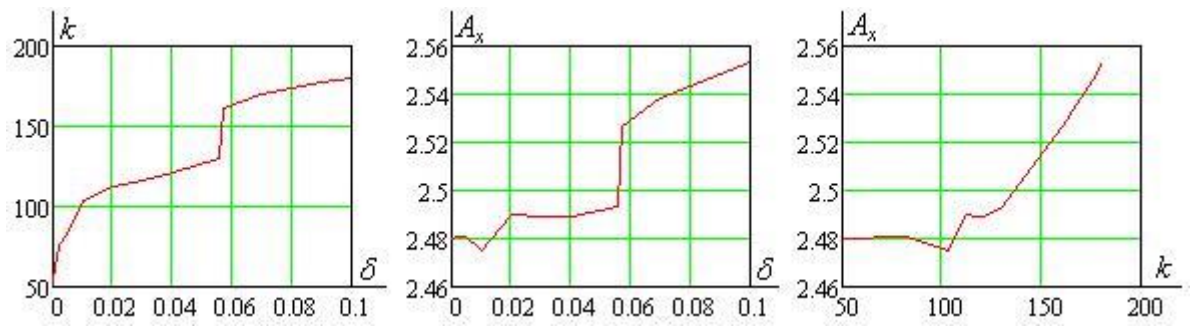


Рисунок 18 – Зависимости основных характеристик передачи нервного импульса

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При выполнении настоящей бакалаврской работы были изучены вопросы теории дифференциальных уравнений и динамических систем, изложенные в работах отечественных и зарубежных авторов. Большое количество научных исследований говорит об актуальности и большой практической значимости этой теории и ее приложений.

С помощью математических пакетов Matlab, Mathcad и, используя аналитические методы исследования функций, получено подтверждение соответствия известных математических моделей некоторых биологических процессов, таких как: биение сердца, передача нервных импульсов (модели Зимана).

В модели Зимана биений сердца обнаружены новые возможности описания таких эффектов как: без импульсный предельный цикл, содержащий неустойчивую особую точку, конвульсия как неполный цикл работы сердца. Также исследовано влияние нового понятия «чувствительность» на частоту и амплитуду сердечных сокращений, и характер передачи нервных импульсов. Подтверждается, что с понижением порога чувствительности амплитуда сердцебиений уменьшается, а частота повышается (чаще всего это происходит у пожилых людей).

Сформулирована постановка задачи, исследование которой выполняется в выпускной квалификационной работе. Рассмотрены программные средства, используемые в ходе реализации поставленной задачи, приведена краткая характеристика возможностей этих средств, и продемонстрирован пример реализации модели данными средствами.

Был обоснован выбор этих программных средств и их возможностей, продемонстрирована реализация поставленной модели и приведён листинг программ. Приведён список литературы, используемой в работе.



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Арипова, О.В. Математические расчёты с помощью MATLAB [Текст]: учебное пособие / О.В. Арипова, Ю.В. Анискевич. – Санкт–Петербург: БГТУ "Военмех" им. Д.Ф. Устинова, 2017. – 107 с.
2. Бейли, Н. Математика в биологии и медицине [Текст] / Н. Бейли; пер. с англ. Е.Г. Коваленко; предисл. Э.Л. Наппельбаума. – Москва: Мир, 1970. – 326 с.
3. Дромашко, С.Е. Математическое и компьютерное моделирование в биологии [Текст] / С.Е. Дромашко. – Минск: ИПНК, 2009. – 65 с.
4. Дьяконов В.П. Справочник по применению системы РС MATLAB [Текст] / В.П. Дьяконов. – Москва: Физматлит, 1993. – С. 112.
5. Дьяконов, В. П. Компьютерная математика. Теория и практика [Текст] / В. П. Дьяконов. – Москва: Нолидж, 2001. – 1295 с.
6. Дьяконов, В.П. MATLAB. Анализ, идентификация и моделирование систем [Текст]: спец. справ. / В. Дьяконов, В. Круглов. – Санкт-Петербург: Питер, 2002. – 444 с.
7. Казанцева, Н.В. Математическое моделирование в программных пакетах Excel и MathCad [Текст]: учебно–методическое пособие / Н.В. Казанцева. – Екатеринбург: УрГУПС, 2018. – 99 с.
8. Мелихова, Е.В. Применение комплексов программ Mathcad для решения задач математического моделирования [Текст]: учебное пособие / Е.В. Мелихова. – Волгоград: Волгоградский ГАУ, 2016. – 140 с
9. Мюррей, Джеймс Д. Математическая биология [Текст]: пер. с англ. / Д.Д. Мюррей; под науч. ред. Г.Ю. Ризниченко. – М.: Регулярная и хаотическая динамика; Ижевск: Ин–т компьютер. исслед. Т. 2: Пространственные модели и их приложения в биомедицине. – 2011. – 1079 с.

10. Охорзин, В. А. Компьютерное моделирование в системе Mathcad [Текст]: учеб. пособие для студентов вузов / В.А. Охорзин. – Москва: Финансы и статистика, 2006. – 140 с.

11. Охорзин, В.А. Прикладная математика в системе MATHCAD [Текст]: учеб. пособие / В.А. Охорзин. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 349 с.

12. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст]: пер. с англ. / ред. Дж. Холл. – М.: Мир, 1979. – 312 с.

13. Титомир, Л. И. Математическое моделирование биоэлектрического генератора сердца: [Монография] / Л.И. Титомир, П. Кнеппо. – М.: Наука: Физ-матлит, 1999. – 447 с.

14. Ходосов, В.В. Математическое моделирование с использованием Matlab: учебное пособие / В.В. Ходосов. – Санкт-Петербург: БГТУ "Военмех" им. Д.Ф. Устинова, 2018. – 36 с.

15. Эрроусмит, Д.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст]: Качеств. теория с приложениями / Д. Эрроусмит, К. Плейс; пер. с англ. Т.Д. Вентцель; под ред. Н.Х. Розова. – Москва: Мир, 1986. – 243 с.

16. Белова, Т. И. Вычисление неопределенных интегралов. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / Т. И. Белова, А. А. Грешилов, И. В. Дубограй: под редакцией А. А. Грешилов. – Москва: Логос, 2004. – 184 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Листинг программного модуля сердцебиения

#### Программа расчета характеристик сердцебиения

$x_{00} := 1.1$  - координаты особой точки  $(x_{00}, b_0)$ , если  $|x_{00}| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ , то точка неустойчивая  
 $b_0 := x_{00} - x_{00}^3$

$\Delta b_0 := .35$  - приращение потенциала электрохимического импульса мышечного сокращения,  $\Delta b_0 > 0$

$\Delta b := \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{b_0}{2} + \Delta b_0$  - величина электрохимического импульса мышечного сокращения

$\delta := .01$  - параметр точности вычислений (чувствительность)  $b_0 = -0.231$

$\varepsilon := .01$  - параметр быстрой переменной  $\Delta b = 0.658$

#### Вспомогательные функции и правые части дифференциальных уравнений

$d(x, y) := \sqrt{(x - x_{00})^2 + (y - b_0)^2}$  - функция расстояния до неподвижной точки  $(x_{00}, b_0)$

$D(t, X) := \begin{bmatrix} -\frac{1}{\varepsilon} (X_0)^3 + \frac{1}{\varepsilon} X_0 - \frac{1}{\varepsilon} X_1 \\ X_0 - x_{00} \end{bmatrix}$  - функции правых частей дифференциальных уравнений

#### Начальные условия

$t_{00} := 0$

$S_0 := (t_{00} \ x_{00} \ b_0)$  - массив начальных данных

$T_0 := 100$  - длина интервала интегрирования

$n := 2000$  - количество узлов интегрирования на единицу интервала

$N := n \cdot T_0$  - общее число узлов интегрирования

$\Delta t := \frac{T_0}{N}$  - шаг интегрирования

Продолжение ПРИЛОЖЕНИЯ А  
Листинг программного модуля сердцебиения

$$\Delta t := \frac{T0}{N} \quad \text{- шаг интегрирования}$$

**Основная программа интегрирования  
дифференциальных уравнений движения**

```

S1 := (
  j ← 0
  while j < N
    t0 ← j · Δt
    t1 ← t0 + Δt
    if d(S0j,1, S0j,2) ≥ δ
      for i ∈ 0..1
        ici ← S0j,i+1
        S ← rkfixed(ic, t0, t1, 1, D)
        for i ∈ 0..2
          S0j+1,i ← S1,i
      otherwise
        S0j+1,0 ← S0j,0 + Δt
        S0j+1,1 ← S0j,1
        S0j+1,2 ← S0j,2 + Δb
    j ← j + 1
  S0
)

```

$\underline{T} := S1^{(0)}$     $X1 := S1^{(1)}$     $B1 := S1^{(2)}$  - массивы решений

**Формирование значений установившегося процесса**

$$\underline{n} := \frac{N}{2}$$

i := n..N

$$D1_i := \sqrt{(X1_i - x00)^2 + (B1_i - b0)^2}$$

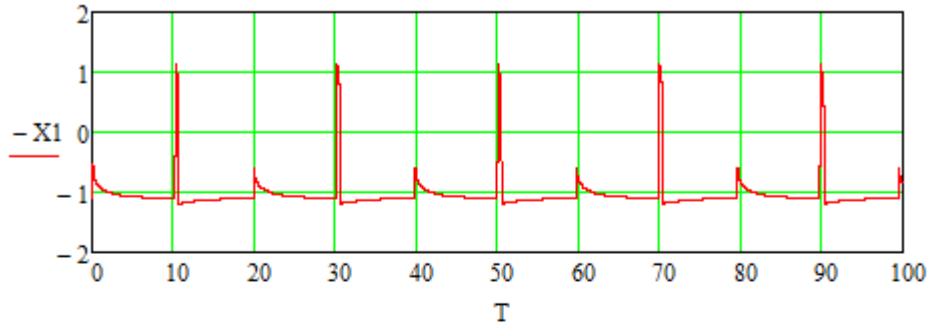
$$\underline{D}_{i-n} := D1_i \quad X_{i-n} := X1_i \quad B_{i-n} := B1_i$$

f(z) := z - z<sup>3</sup> - вспомогательная функция

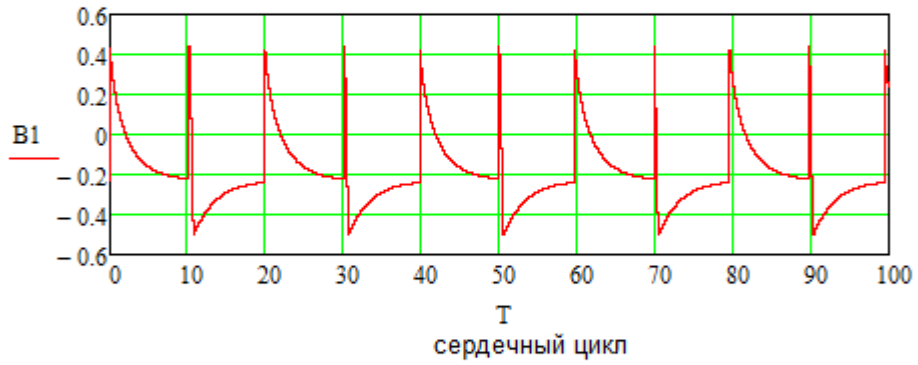
Продолжение ПРИЛОЖЕНИЯ А  
Листинг программного модуля сердцебиения

Графики решений

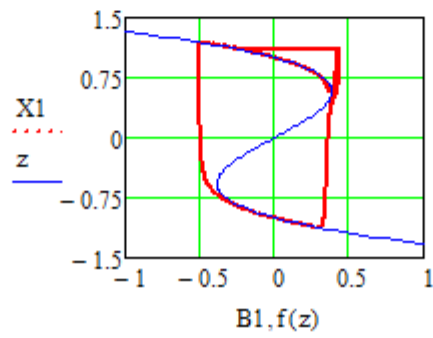
удлинение мышечного волокна



изменение электрохимического потенциала



сердечный цикл



Продолжение ПРИЛОЖЕНИЯ А  
Листинг программного модуля сердцебиения

**Влияние чувствительности на частоту и амплитуду сердечных сокращений**

$\delta$  - чувствительность

K - частота сердечных сокращений (для удобства восприятия \*1000)

AX - амплитуда сердечных сокращений

```

 $\underline{K} :=$ 
j ← 0
dmax ← max(D)
dmin ← min(D)
while dmax - Dj > δ
  | j ← j + 1
  | k1 ← j
while Dj - dmin > δ
  | j ← j + 1
  | k2 ← j
while dmax - Dj > δ
  | j ← j + 1
  | k3 ← j
TS ← (k3 - k1) · Δt
K ←  $\frac{1000}{TS}$ 

```

Амплитуда X

Амплитуда B

max(X) = 1.192

max(B) = 0.436

min(X) = -1.127

min(B) = -0.503

AX := max(X) - min(X)

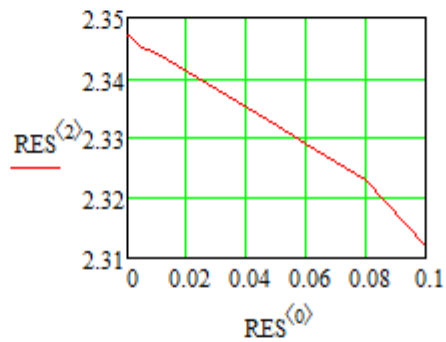
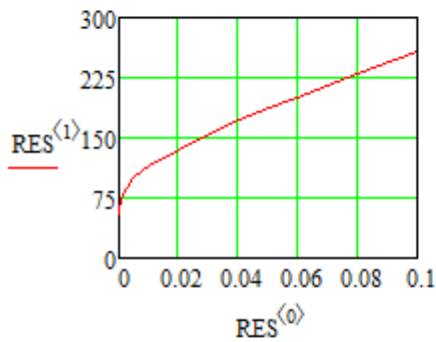
AB := max(B) - min(B)

Продолжение ПРИЛОЖЕНИЯ А  
Листинг программного модуля сердцебиения

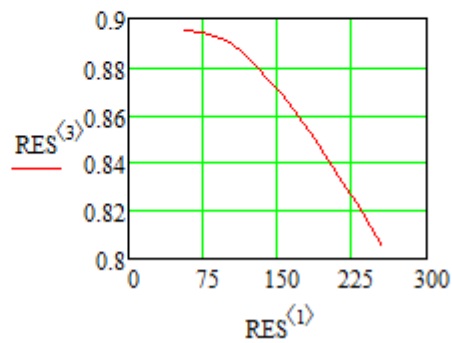
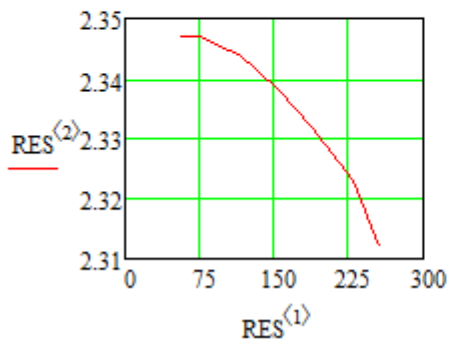
**Построение массива и графиков характеристик процесса**

$$\delta = \text{RES}^{(0)} \quad K = \text{RES}^{(1)} \quad AX = \text{RES}^{(2)} \quad AB = \text{RES}^{(3)}$$

$$\text{RES} := \begin{pmatrix} .0001 & .001 & .005 & .01 & .03 & .04 & .05 & .06 & .07 & .08 & .1 \\ 55.935 & 75.347 & 99.542 & 115.607 & 155.909 & 171.836 & 186.776 & 201.187 & 215.332 & 229.41 & 256.608 \\ 2.347 & 2.347 & 2.345 & 2.344 & 2.338 & 2.335 & 2.332 & 2.329 & 2.326 & 2.323 & 2.312 \\ 0.895 & 0.894 & 0.891 & 0.886 & 0.868 & 0.859 & 0.85 & 0.841 & 0.832 & 0.823 & 0.805 \end{pmatrix}^T$$



`RES := csort(RES, 1)` - сортирует строки по возрастанию значений элементов первого столбца



## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### Листинг программного модуля передачи нервного импульса

#### Программа расчета характеристик передачи нервных импульсов

- $\Delta b := 0.5$  - приращение разности потенциалов  
 $a0 := -1$  - показатель калиевой проницаемости в особой точке  
 $\delta := .045$  - параметр точности вычислений (чувствительность)  
 $\varepsilon := .001$  - параметр быстрой переменной

#### Вспомогательные функции и правые части дифференциальных уравнений

$f(x, a, b) := x^3 + a \cdot x + b$  - функция изгиба поверхности

$Df(x, a, b) := 3x^2 + a$  - производная функции изгиба поверхности

$$x0 := \left[ \begin{array}{l} x \leftarrow -\Delta b^{\frac{1}{3}} \\ \text{while } \left| \frac{f(x, a0, \Delta b)}{Df(x, a0, \Delta b)} \right| \geq \varepsilon \\ x \leftarrow x - \frac{f(x, a0, \Delta b)}{Df(x, a0, \Delta b)} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{- координата точки начала сокращения} \\ \text{мышечной ткани} \end{array}$$

$d(x, y, z) := \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2}$  - функция расстояния до неподвижной точки (1, -1, 0)

$$D(t, X) := \left[ \begin{array}{l} -\frac{1}{\varepsilon} (X_0)^3 - \frac{1}{\varepsilon} X_0 \cdot X_1 - \frac{1}{\varepsilon} X_2 \\ -2X_0 - 2X_1 \\ -X_1 - 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{- функции правых частей} \\ \text{дифференциальных уравнений} \end{array}$$

#### Начальные условия

- $t00 := 0$   
 $S0 := (t00 \ x0 \ a0 \ \Delta b)$  - массив начальных данных  
 $T0 := 100$  - длина интервала интегрирования  
 $n := 1000$  - количество узлов интегрирования на единицу интервала  
 $N := n \cdot T0$  - общее число узлов интегрирования  
 $\Delta t := \frac{T0}{N}$  - шаг интегрирования



Продолжение ПРИЛОЖЕНИЯ Б  
Листинг программного модуля передачи нервного импульса

Основная программа интегрирования  
дифференциальных уравнений движения

```

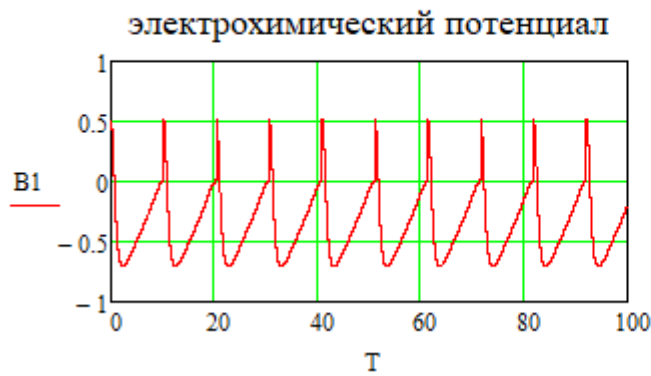
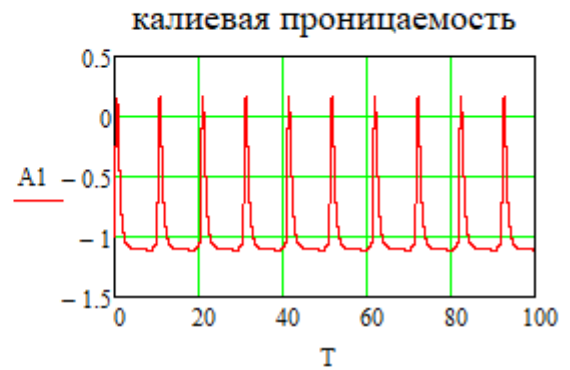
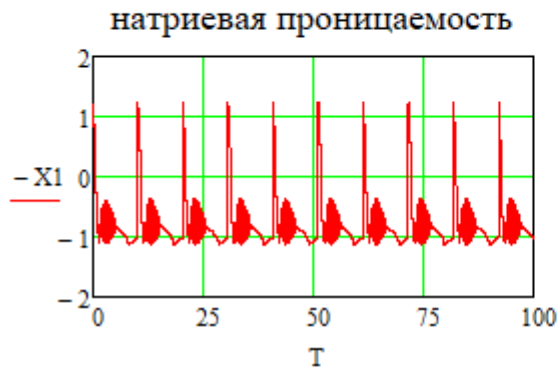
S1 := ( j ← 0
      while j < N
        t0 ← j · Δt
        t1 ← t0 + Δt
        if d(S0j,1, S0j,2, S0j,3) ≥ δ
          for i ∈ 0..2
            ici ← S0j,i+1
            S ← rkfixed(ic, t0, t1, 1, D)
            for i ∈ 0..3
              S0j+1,i ← S1,i
          otherwise
            for k ∈ 1..10
              S0j+k,0 ← S0j,0 + k · Δt
              S0j+k,1 ← S0j,1
              S0j+k,2 ← S0j,2
              S0j+k,3 ← S0j,3 + k ·  $\frac{\Delta b}{10}$ 
            j ← j + 10
            a ← S0j,2
            b ← S0j,3
            x ←  $-\sqrt[3]{b}$ 
            while  $\left| \frac{f(x, a, b)}{Df(x, a, b)} \right| \geq \epsilon$ 
              x ← x -  $\frac{f(x, a, b)}{Df(x, a, b)}$ 
            Δx ← x - S0j,1
            for k ∈ 1..10
              S0j+k,0 ← S0j,0 + k · Δt
              S0j+k,1 ← S0j,1 + k ·  $\frac{\Delta x}{10}$ 
              S0j+k,2 ← S0j,2
              S0j+k,3 ← S0j,3
            j ← j + 9
          j ← j + 1
      S0
    )

```

Продолжение ПРИЛОЖЕНИЯ Б  
Листинг программного модуля передачи нервного импульса

$\underline{T} := S1^{(0)}$   $X1 := S1^{(1)}$   $A1 := S1^{(2)}$   $B1 := S1^{(3)}$  - массивы решений

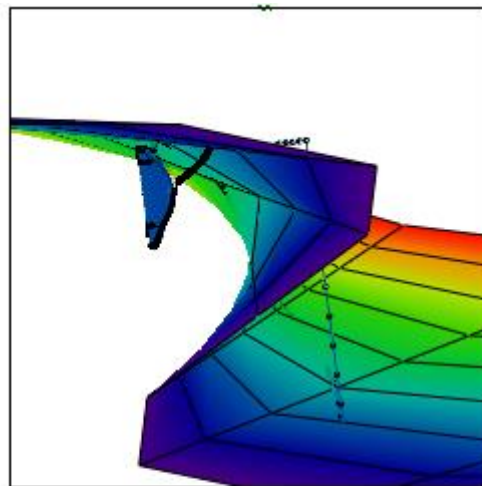
Графики решений



вспомогательная поверхность

$$x(u, v) := -u \quad a(u, v) := v$$

$$b(u, v) := u^3 + u \cdot v$$



$(X1, B1, A1), (x, b, a)$

Формирование значений установившегося процесса

$$\underline{n} := \frac{N}{2} \quad i := n..N \quad D1_i := \sqrt{(X1_i - 1)^2 + (A1_i + 1)^2 + (B1_i)^2}$$

$$\underline{D}_{\underline{t-n}} := D1_i \quad X_{\underline{t-n}} := X1_i \quad \underline{A}_{\underline{t-n}} := A1_i \quad B_{\underline{t-n}} := B1_i$$

Продолжение ПРИЛОЖЕНИЯ Б  
Листинг программного модуля передачи нервного импульса

**Влияние чувствительности на частоту и амплитуду нервных импульсов**

$\delta$  - чувствительность

K - частота передачинервных импульсов (для удобства восприятия \*1000)

AX - амплитуда изменения натриевой проницаемости

AA - амплитуда изменения калиевой проницаемости

AB - амплитуда изменения электрохимического потенциала

```

K := | j ← 0
      | dmax ← max(D)
      | dmin ← min(D)
      | while dmax - Dj > ε
      |   | j ← j + 1
      |   | k1 ← j
      |   | while Dj - dmin > ε
      |   |   | j ← j + 1
      |   |   | k2 ← j
      |   |   | while dmax - Dj > ε
      |   |   |   | j ← j + 1
      |   |   |   | k3 ← j
      |   |   |   | TS ← (k3 - k1) · Δt
      |   |   |   | K ←  $\frac{1000}{TS}$ 

```

Амплитуда X

max(X) = 1.13

min(X) = -1.247

AX := max(X) - min(X)

AX = 2.376

Амплитуда A

max(A) = 0.166

min(A) = -1.12

AA := max(A) - min(A)

AA = 1.286

Амплитуда B

max(B) = 0.513

min(B) = -0.707

AB := max(B) - min(B)

AB = 1.22

Продолжение ПРИЛОЖЕНИЯ Б  
Листинг программного модуля передачи нервного импульса

Построение массива и графиков характеристик процесса

$$\delta = \text{RES}^{(0)} \quad K = \text{RES}^{(1)} \quad AX = \text{RES}^{(2)} \quad AA = \text{RES}^{(3)} \quad AB = \text{RES}^{(4)}$$

$$\text{RES} := \begin{pmatrix} .0001 & .0015 & .009 & .01 & .017 & 0.058 & 0.06 & 0.062 & 0.065 & .08 & .1 \\ 42.45 & 58.126 & 73.649 & 74.102 & 76.664 & 100.251 & 100.614 & 100.969 & 101.471 & 103.983 & 107.262 \\ 2.321 & 2.322 & 2.318 & 2.318 & 2.318 & 2.382 & 2.381 & 2.381 & 2.341 & 2.342 & 2.341 \\ 1.277 & 1.278 & 1.277 & 1.277 & 1.281 & 1.28 & 1.279 & 1.278 & 1.276 & 1.269 & 1.26 \\ 1.202 & 1.202 & 1.201 & 1.202 & 1.209 & 1.207 & 1.205 & 1.203 & 1.2 & 1.184 & 1.163 \end{pmatrix}^T$$
