

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

Факультет математики и информатики
Кафедра математического анализа и моделирования
Направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
И.о. зав. кафедрой
_____ Н.Н. Максимова
« _____ » _____ 2019 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему: Математическое моделирование линейных волновых процессов

Исполнитель
студент группы 552об

(подпись, дата)

Б.Б. Дашинимаева

Руководитель
доцент, канд. тех. наук

(подпись, дата)

Т.В. Труфанова

Нормоконтроль
старший преподаватель

(подпись, дата)

Л.И. Мороз

Благовещенск 2019

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

Факультет математики и информатики
Кафедра математического анализа и моделирования

УТВЕРЖДАЮ
И.о. зав. кафедрой
_____ Н.Н. Максимова
«_____» _____ 2019 г.

З А Д А Н И Е

К бакалаврской работе студента Дашинимаевой Баиры Бадмадоржиевны

1. Тема бакалаврской работы: Математическое моделирование линейных волновых процессов (утверждена приказом от 15.04.2019 № 847-уч)
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 19.06.2019 г.
3. Исходные данные к бакалаврской работе: формулировка темы ВКР, литературные источники, среда разработки ППП Matlab.
4. Содержание бакалаврской работы (перечень подлежащих разработке вопросов): математические модели волновых процессов; численные методы решения уравнений гиперболического типа; реализация математического моделирования волнового процесса в ППП Matlab.
5. Перечень материалов приложения: листинг компьютерной программы.
6. Консультанты по бакалаврской работе: нормоконтроль – Мороз Л.И., старший преподаватель
7. Дата выдачи задания: 03.05.2019 г.

Руководитель бакалаврской работы: Труфанова Татьяна Вениаминовна, доцент, канд. тех. наук

Задание принял к исполнению (03.05.2019): _____ Дашинимаева Б.Б.

РЕФЕРАТ

Бакалаврская работа содержит 63 страницы, 17 рисунков, 24 источника, 1 приложение.

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ, ОГРАНИЧЕННАЯ СТРУНА, МЕМБРАНА, МЕТОД ФУРЬЕ, МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Данная работа посвящена математическому моделированию линейных волновых процессов.

В работе рассмотрены теоретические основы волновых процессов, проведено их математическое моделирование.

Представлен аналитический метод разделения переменных для решения уравнения свободных колебаний ограниченной струны и малых поперечных колебаний прямоугольной и круглой мембран

Изучены численные методы решения уравнений в частных производных гиперболического типа и способы их реализации в среде Matlab.

Представлены алгоритмы решения прикладных задач методом конечных разностей и с применением инструментов PDE Tool Matlab. Построены графики краевых задач в ППП Matlab. Проведены вычислительные эксперименты при различных значениях входных параметров.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1 Математические модели волновых процессов	7
1.1 Постановка задачи моделирования явлений волновой природы	7
1.2 Виды краевых задач	11
1.3 Примеры приложений	14
1.4 Основные свойства функции Бесселя	19
2 Аналитические методы решения уравнений гиперболического типа	23
2.1 Метод Фурье для случая двух независимых переменных	23
2.2 Метод разделения переменных в случае трех независимых переменных	26
2.2.1 Решения волновых уравнений для прямоугольной мембраны	26
2.2.2 Вынужденные колебания прямоугольной мембраны	32
2.2.3 Примеры решения начально-краевых задач для колебания круглой мембраны	35
3 Численные методы решения уравнений гиперболического типа	43
3.1 Метод конечных разностей для уравнения гиперболического типа	43
3.2 Инструментальные возможности ППП Matlab для решения уравнений с частными производными	47
4 Реализация математического моделирования волнового процесса в ППП Matlab	49
4.1 Конечно-разностная схема решения задачи	49
4.2 Алгоритм и программная реализация	50
4.3 Применение встроенной функции PDE Tool для решения уравнения гиперболического типа	53
5 Безопасность жизнедеятельности и здоровьесбережение	57
Заключение	60
Библиографический список	61
Приложение Листинг программной реализации метода конечных разностей для решения уравнения гиперболического типа	63

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи математической физики тесно связаны с различными физическими процессами, к которым относят задачи гидродинамики, теплопроводности, диффузии, электростатики и электродинамики, задачи о течении жидкости и многие другие.

Значительную часть математических моделей, используемых для решения разных прикладных задач, составляют уравнения и системы гиперболического типа, которые наиболее часто встречаются в физических задачах, связанных с волновыми процессами: волны, порождаемые землетрясениями, звуковые волны, распространяющиеся в воздухе, воде, электромагнитные волны и многие другие.

Несмотря на большое разнообразие, в колебательных процессах наблюдаются одни и те же закономерности, которые описываются одинаковыми математическими и физическими моделями и исследуются общими методами.

Исследование закономерностей распространения волн различной физической природы является актуальной задачей, т.к. волновые процессы являются эффективным средством передачи энергии и информации.

Работа посвящена математическому моделированию волновых процессов.

В первой главе бакалаврской работы изложены теоретические основы волновых и колебательных процессов, представлены виды краевых задач, приведены основные свойства функции Бесселя, а также рассмотрены примеры приложений уравнений в частных производных гиперболического типа.

Во второй главе приведены аналитические методы решения уравнений в частных производных гиперболического типа.

В третьей главе дипломной работы рассмотрены основы численных методов решения уравнений математической физики.

Практическая часть выполненных исследований представлена в четвертой главе бакалаврской работы. Рассмотрена и решена краевая задача при помощи метода конечных разностей и получены графики решения искомой функ-

ции в ППП Matlab. Проведено тестирование программы с варьированием параметров и анализ полученных результатов. Приведен листинг программы решения прикладной задачи. Изучен и применен встроенный инструментарий PDE Tool Matlab для решения двумерного уравнения гиперболического типа. В результате получен график решения уравнения при заданных начально-граничных условиях.

Пятая глава выпускной квалификационной работы посвящена исследованию влияния физических упражнений на умственные способности человека.

Цель работы заключается в изучении математических моделей волновых процессов, отыскании аналитических и численных решений уравнений гиперболического типа.

Для достижения поставленной цели необходимо выполнить следующие задачи:

- найти аналитические решения краевых задач для уравнений гиперболического типа для свободных и вынужденных колебаний прямоугольной мембраны, поперечных колебаний круглой мембраны с различными начально-краевыми условиями;

- решить одномерное уравнение гиперболического типа методом конечных разностей в ППП Matlab;

- решить двумерное уравнение гиперболического типа с применением инструментов PDE Tool Matlab;

- графическая визуализация найденных аналитических и численных решений волновых уравнений в ППП Matlab.

С точки зрения практической значимости, полученные аналитические решения уравнений гиперболического типа можно использовать в учебном процессе АмГУ по дисциплинам «Уравнения в частных производных», «Линейные и нелинейные уравнения физики».

1 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

1.1 Постановка задачи моделирования явлений волновой природы

При изучении физических процессов и явлений методами математического моделирования одним из важных этапов является формулировка математической модели, т. е. точная постановка математической задачи, соответствующей спектру изучаемых физических явлений. Ряд математических моделей, представляющих физические явления, представляют собой уравнения в частных производных второго порядка, которым посвящено множество книг [1, 2, 3, 4, 5].

Совокупность уравнений и заданных условий в полной мере определяет модель и способствует проведению ее дальнейшего изучения.

Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными в общем случае имеют вид:

$$F(x, y, U, U_x, U_y, U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}) = 0. \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) называется линейным, если оно первой степени относительно искомой функции и всех ее производных и не содержит их произведений [1]:

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial U}{\partial y} + cU = F(x, y). \quad (1.2)$$

Если коэффициенты A, B, C, a, b не зависят от x, y , то уравнение (1.2) называют линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

С учетом варьирования параметров процесса (скорости движения потока, температуры, давления и т.д.), их различают на стационарные $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, т.е. параметры меняются в пространстве, но не изменяются во времени и нестационарные $\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$, т.е. параметры изменяются и в пространстве, и во времени.

Наиболее полно рассмотрена классификация уравнений в частных производных в книге Смирнова М.М. [1].

Пусть $D = B^2 - AC$ – дискриминант уравнения (1.2):

$D > 0$ – гиперболическое уравнение;

$D = 0$ – параболическое уравнение;

$D < 0$ – эллиптическое уравнение.

Более подробно рассмотрим уравнения гиперболического типа, которые наиболее часто встречаются в физических задачах, связанных с колебательными и волновыми процессами.

Колебательные и волновые процессы очень часто наблюдаются в окружающей нас природе и технике. Большинство всех механических движений, движение периодически функционирующих машин, радиотехника и почти вся электроника, значительная часть акустических явлений, переменный ток, используемый человеком в своей повседневной деятельности и в различных технических устройствах, вся волновая оптика, волновые свойства частиц представляют собой перечень явлений и технических приложений, связанных с колебаниями и волнами.

Процесс распространения колебаний в пространстве называется волновым процессом или просто волной. Волновые процессы различной природы описываются подобными уравнениями в частных производных второго порядка по пространственно-временным переменным, которые называются *волновыми уравнениями*. Функция, удовлетворяющая волновому уравнению, называется волновой функцией.

Направление колебаний волн соответствует направлению их распространения. При данных условиях волна является продольной. Если волны производятся в перпендикулярном направлении относительно распространения волны – поперечной.

Колебательным движением, или просто колебаниями, называют любое движение или изменение состояния, характеризуемое уровнем повторяемости во времени значений физических величин, определяющих это движение или

состояние. Колебания встречаются при изучении самых разнообразных физических явлений, например, звука, света, переменных токов, радиоволн, качаний маятников и т. д. [2].

Таким образом, колебательные и волновые процессы вызывают большой интерес со стороны многих специалистов [3, 4, 5, 6].

В зависимости от размерности среды выполняемого процесса, различают одномерное, двумерное и трехмерное волновые уравнения.

Одномерное волновое уравнение используется для исследования продольных колебаний стержня, сечения которого выполняют плоскопараллельные колебательные движения. *Двумерное волновое* уравнение описывает колебания тонкой пластины. *Трехмерное волновое* уравнение описывает распространение волн в пространстве.

Наиболее распространенными случаями применения колебательного движения являются колебания маятников, струн, мембран телефонов, заряда и тока в колебательном контуре и др. Колебания сопровождаются попеременным превращением энергии одного вида в энергию другого вида.

Выделяют разные виды колебаний в зависимости от свойств системы, в которой происходит процесс.

Рассмотрим классификацию колебаний по следующим параметрам:

а) по физической природе (механические и электромагнитные)

При механических колебаниях тело неоднократно совершает одно и то же движение, проходя определенное положение в пространстве.

Несмотря на то, что электромагнитные колебания имеют несколько иную природу возникновения, законы для них такие же, как и для механических. При электромагнитных колебаниях может меняться не только напряжённость электромагнитного поля, но и такие характеристики, как сила заряда и тока.

б) по характеру возникновения и существования (свободные, вынужденные, параметрические, автоколебания) [3]

Вынужденные – колебания, протекающие в системе под влиянием внешнего периодического воздействия.

$$\rho(x)U_{tt} = T_0U_{xx} + \gamma(x,t). \quad (1.3)$$

Это уравнение называется уравнением вынужденных колебаний струны. Если струна однородная, то есть $\rho(x) = \rho$, то уравнение (1.3) принимает вид:

$$U_{tt} = a^2U_{xx} + f(x,t), \quad (1.4)$$

$$\text{где } a^2 = \frac{T_0}{\rho};$$

$$f(x,t) = \frac{\gamma(x,t)}{\rho}.$$

Свободные – это колебания в системе под действием внутренних сил, после того как система выведена из состояния равновесия (в реальных условиях свободные колебания всегда затухающие).

В том случае, когда на струну не действуют внешние силы, получается уравнение свободных колебаний струны:

$$U_{tt} = a^2U_{xx}. \quad (1.5)$$

Ярким примером свободных колебания является колебания груза, прикреплённого к пружине, или груза, подвешенного на нити.

Автоколебания – это колебания, при которых система имеет запас потенциальной энергии, расходуемой на совершение колебаний (пример такой системы – механические часы).

Параметрические – колебания, при которых за счет внешнего воздействия происходит изменение какого-либо параметра колебательной системы.

в) по характеру зависимости колеблющейся величины от времени (гармонические и негармонические)

Гармонические колебания – это периодические колебания, при которых координата, скорость, ускорение, характеризующие движение, изменяются во времени по синусоидальному закону [2].

Однако ни один реальный физический процесс не происходит в действительности в точности по гармоническому закону. Ни один колебательный процесс в природе или технике не может продолжаться бесконечно долго, а должен

иметь начало и конец во времени. А колебательный процесс, который лимитирован во времени, не является гармоническим.

Существует общность закономерностей этих явлений и математических методов их исследования. Несмотря на разную природу колебаний, в них обнаруживаются одни и те же физические закономерности; они описываются одними и теми же уравнениями и исследуются общими методами.

1.2 Виды краевых задач

Дифференциальные уравнения с частными производными имеют бесконечное множество решений. Для того чтобы описать физический процесс, необходимо, кроме самого уравнения, определяющего закон его развития, задать начальное состояние параметров этого процесса (начальные условия) и режим на границе той области, в которой он происходит (граничные условия). Это позволяет выбрать из многих возможностей интересующую нас реализацию физического процесса. Необходимо учитывать, что эти условия должны обеспечивать единственность и существование решения.

В силу разнообразия форм связи процессов на границе области могут быть заданы различные граничные условия. Принятая классификация граничных условий обычно связана с порядком производных искомой функции, которые присутствуют в граничном условии и выражают различные условия связи.

Граничные условия первого рода имеют вид:

$$\begin{aligned} U|_{x=0} &= g_1(t); \\ U|_{x=l} &= g_2(t). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Эти условия физически означают, что на концах задан закон движений.

Граничные условия второго рода имеют вид:

$$\begin{aligned} U_x|_{x=0} &= g_1(t); \\ U_x|_{x=l} &= g_2(t). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Такие условия соответствуют тому, что на концах заданы силы.

Граничные условия третьего рода имеют вид:

$$\begin{aligned}(U_x - \sigma_1 U)|_{x=0} &= g_1(t); \\ (U_x - \sigma_2 U)|_{x=l} &= g_2(t).\end{aligned}\tag{1.8}$$

Эти условия соответствуют упругому закреплению концов [4].

Граничные условия (1.6), (1.7) и (1.8) называются однородными, если правые части $g_1(t)$ и $g_2(t)$ тождественно равны нулю при всех значениях t . Если хотя бы одна из функций в правых частях не равна нулю, то граничные условия называются неоднородными.

Аналогично формулируются граничные условия и в случае трех или четырех переменных при условии, что одна из этих переменных – время.

Начальные и граничные условия в своей совокупности называются краевыми условиями. Соответствующим образом поставленная задача, включающая в себя дифференциальное уравнение (или систему дифференциальных уравнений) и краевые условия, называется *краевой задачей*.

Для волнового уравнения (1.5) при начальных условиях $U(x, 0) = \varphi(x)$, $U_t(x, 0) = \psi(x)$ и в случае граничных условий первого рода (1.6), задача называется первой начально-краевой задачей для волнового уравнения.

Однородная 1-ая краевая задача:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq l$$

$$U(x, 0) = f(x) \text{ – начальное отклонение;}$$

$$U_t(x, 0) = g(x) \text{ – начальная скорость;}$$

$$U(0, t) = \mu(t) \text{ – закон движение левого конца струны с течением времени;}$$

$$U(l, t) = \mu_2(t) \text{ – закон движения правого конца струны.}$$

Неоднородная 1-ая краевая задача:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x, t)$$

$$U(x, 0) = \varphi(x) \text{ – начальное отклонение;}$$

$$U_t(x, 0) = g(x) \text{ – начальная скорость;}$$

$$U(0, t) = U(l, t) = 0 \text{ – левая и правая концы закрепления.}$$

Если вместо граничных условий первого рода задавать условия второго рода (1.7) или третьего рода (1.8), то задача будет называться, соответственно, второй и третьей начально-краевой задачей. Если граничные условия на разных участках границы имеют различные типы, то такие начально-краевые задачи называют смешанными.

Однородная 2-ая краевая задача:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq l$$

$$U(x, 0) = f(x) \text{ – начальное отклонение;}$$

$$U_t(x, 0) = g(x) \text{ – начальная скорость;}$$

$U_x(0, t) = U_1(t)$ – сила действия на левый конец струны с течением времени вдоль оси OX ;

$$U_x(l, t) = U_2(t) \text{ – сила действия на правый конец струны вдоль } OX.$$

Неоднородная 2-ая краевая задача:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x, t)$$

$$U(x, 0) = \varphi(x) \text{ – начальное отклонение;}$$

$$U_t(x, 0) = g(x) \text{ – начальная скорость;}$$

$U_x(0, t) = U_x(l, t) = 0$ – вдоль оси концы не смещены (однородное краевое условие второго типа).

Задача Коши: задаются начальные условия, область задания уравнения совпадает со всем пространством, граничные условия отсутствуют.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty$$

Однородная задача Коши: рассматривается бесконечная струна.

$U(x, 0) = \varphi(x)$ – условие, задающее положение струны в начальный момент времени;

$U_t(x, 0) = g(x)$ – скорость струны в начальный момент времени.

Неоднородная задача Коши:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty$$

$U(x, 0) = \varphi(x)$ – начальное положение;

$U_t(x, 0) = g(x)$ – скорость струны в начальный момент времени.

1.3 Примеры приложений

Значительная часть математических моделей, основанных на уравнениях в частных производных, были разработаны главным образом для моделирования физических процессов в гидродинамике, аэромеханике и электродинамике.

На сегодняшний день с помощью таких уравнений моделируют процессы различной природы: физические, химические, биологические, экологические, экономические и др. Широкое применение методы математической физики находят и при решении инженерных задач.

Более подробно рассмотрим *процесс колебаний тонкой упругой нити*, которая может свободно изгибаться, не оказывая сопротивления изменению ее формы. В этом случае напряжения, возникающие в струне в любой момент времени, направлены по касательной к ее мгновенному профилю [5].

Пусть струна длины l в начальный момент направлена по отрезку оси Ox от 0 до l . Будем рассматривать только *поперечные колебания струны*. Предположим, что концы струны закреплены в точках $x=0$ и $x=l$. Задача заключается в определении формы струны в любой момент времени и определении закона движения каждой точки струны в зависимости от времени.

Будем рассматривать малые отклонения точек струны от начального положения. Движение точек струны происходит перпендикулярно оси Ox и в одной плоскости. Следовательно, процесс колебания струны описывается одной функцией $u(x, t)$, которая дает величину перемещения точки струны с абсциссой

x в момент t . При фиксированном значении t график функции $u(x, t)$ представляет собой форму струны в момент времени t .

Так как мы рассматриваем малые отклонения струны в плоскости (x, u) , то будем предполагать, что длина элемента струны $\cup M_1 M_2$ равняется ее проекции на ось Ox , т.е. $\cup M_1 M_2 = x_2 - x_1$ в соответствии с рисунком 1.1.

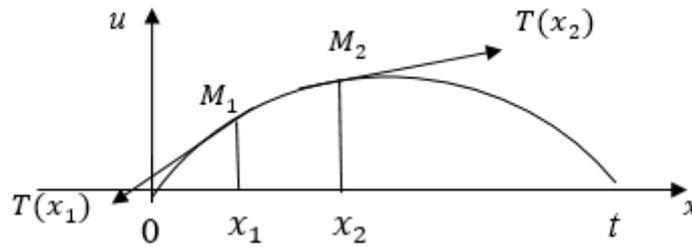


Рисунок 1.1 – График функции $u(x, t)$

Для поперечных колебаний струны сумма проекций на ось Ox сил натяжения, действующих на концах участка струны $M_1 M_2$, равна нулю [6]:

$$-T(x_1) \cos \alpha(x_1) + T(x_2) \cos \alpha(x_2) = 0,$$

где $\alpha(x)$ – угол между касательной к струне и осью Ox в некоторый момент времени.

На концах этого элемента, по касательным к струне, действуют силы T . Пусть касательные образуют с осью Ox углы φ и $\varphi + \Delta\varphi$. Тогда проекция на ось Ou сил, действующих на элемент $M_1 M_2$, будет равна $T \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin \varphi$. Так как угол φ мал, то можно положить $\operatorname{tg} \varphi \approx \sin \varphi$, и мы будем иметь:

$$\begin{aligned} T \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin \varphi &\approx T \operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) - T \operatorname{tg} \varphi = T \left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] = \\ &= T \frac{\partial^2 u(x + \Theta \Delta x, t)}{\partial x^2} \Delta x \approx T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Delta x, \quad 0 < \Theta < 1 \end{aligned}$$

Чтобы получить уравнение движения, нужно внешние силы, приложенные к элементу, приравнять силе инерции [7]. Распределение масс в струне будем характеризовать линейной плотностью $p(x)$, которая в общем случае изменяется вдоль струны. Тогда масса элемента струны будет $\rho \Delta x$. Ускорение эле-

мента равно $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Следовательно, по принципу Даламбера будем иметь:

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x .$$

Сокращая на Δx и обозначая $\frac{T}{\rho} = a^2$, получаем уравнение движения (1.5).

Оно описывает процесс малых поперечных колебаний струны, и его называют неоднородным одномерным волновым уравнением, или уравнением плоских волн. [5].

Наиболее полно исследование процесса поперечных колебаний струны рассмотрено авторами [7, 8].

Искомая функция $u(x, t)$ должна удовлетворять еще и граничным условиям, указывающим, что делается на концах струны ($x=0$ и $x=l$), и начальным условиям, описывающим состояние струны в начальный момент ($t=0$).

Пусть, например, как мы предполагали, концы струны при $x=0$ и $x=l$ неподвижны. Тогда при любом t должны выполняться равенства:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 .$$

Эти равенства являются граничными условиями для нашей задачи.

В начальный момент $t=0$ струна имеет определенную форму, которую мы ей придали. Пусть эта форма определяется функцией $f(x)$. Таким образом, должно быть

$$u(x, 0) = u|_{t=0} = f(x) . \tag{1.9}$$

Далее, в начальный момент должна быть задана скорость в каждой точке струны, которая определяется функцией $\varphi(x)$. Таким образом, должно быть

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x) . \tag{1.10}$$

Условия (1.9) и (1.10) являются начальными условиями.

В частности, может быть $f(x) \equiv 0$ или $\varphi(x) \equiv 0$. Если же $f(x) \equiv 0$ и $\varphi(x) \equiv 0$, то струна будет находиться в покое, следовательно, $u(x, t) \equiv 0$.

Волновые уравнения описывают не только малые поперечные колебания

упругой струны, но и ряд других физических процессов. К ним, в частности, относят *продольные колебания стержня постоянного поперечного сечения*.

Пусть тонкий упругий однородный стержень постоянного поперечного сечения S расположен вдоль оси x , и закреплен так, что может совершать продольные колебания вдоль этой оси. Обозначим через $u(x, t)$ продольное смещение в момент времени t поперечного сечения, имеющего координату x в состоянии ненагруженного равновесия; $u(x, t)$ и будет искомой функцией, а

$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, где E – модуль Юнга материала стержня, ρ – плотность материала стержня, $f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho S}$.

Для определения упругой силы $P(x, t)$ в стержне рассмотрим элементарный участок $[x, x + dx]$ в некоторый момент t . В этот момент левый край участка, по сравнению с ненагруженным равновесным положением, сместился на u , а правый – на $u + \partial_x u$, т.е. длина участка увеличилась на $\partial_x u$.

Согласно закону Гука имеем [9]:

$$P = SE \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.11)$$

Согласно второму закону Ньютона и выражению (1.11) имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho S} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + F \right) = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{F}{\rho S}$$

Получаем *уравнение вынужденных продольных упругих колебаний стержня* (1.4): $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$.

Если же внешняя сила отсутствует, получаем *уравнение свободных продольных упругих колебаний стержня* (1.5).

В качестве начального условия задаются начальные отклонения и начальные скорости точек стержня:

$$u|_{t=t_0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=t_0} = u_1(x). \quad (1.12)$$

Если точка $x = x_0$ является одним из концов стержня и в ней стержень абсолютно жестко закреплен, то соответствующее краевое условие имеет вид:

$$u|_{x=x_0} = 0. \quad (1.13)$$

Если конец стержня свободен, то $P|_{x=x_0} = 0$ и потому в силу (1.11) соответствующее краевое условие имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=x_0} = 0. \quad (1.14)$$

Если x_0 – правый конец стержня, то при $u|_{x=x_0} > 0$ этот конец сжат, т.е. $P|_{x=x_0} < 0$ и в силу (1.12) получается

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \right)_{x=x_0} = 0. \quad (1.15)$$

Уравнения (1.4) и (1.5) описывают и многие другие колебательные процессы, например, малые поперечные колебания натянутой струны (здесь u – поперечное отклонение от положения ненагруженного равновесия), колебания газа в трубке (u – давление) и т.д. [10, 11].

Волновое уравнение на плоскости имеет в неоднородном случае вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t). \quad (1.16)$$

Оно описывает, например, вынужденные колебания мембраны, натянутой на замкнутый контур и испытывающей распределенную внешнюю нагрузку.

Неоднородное волновое уравнение в пространстве имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t). \quad (1.17)$$

Оно описывает различные упругие, акустические, электрические и другие волновые процессы в *однородной изотропной* среде при распределенном внешнем воздействии.

Основное значение в теории распространения квазистационарных электрических колебаний по кабелям имеет телеграфное уравнение, входящее в группу волновых уравнений.

Телеграфное уравнение описывает распространение тока по *длинной линии*, т.е. такой, параметры которой (сопротивление, емкость и др.) нельзя считать сосредоточенными в отдельных точках, а необходимо учитывать их распределение вдоль линии. Обозначив через R , L , C и G соответственно плотность сопротивления линии (т.е. сопротивление единицы ее длины), плотность индуктивности, емкости и проводимости утечки, а через $j = j(x, t)$ и $v = v(x, t)$ силу тока и напряжение в точке с координатой x линии в момент t , можно получить *систему телеграфных уравнений*:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} + L \frac{\partial j}{\partial t} + Rj = 0; \\ \frac{\partial j}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial t} + Gv = 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

Если считать линию однородной и исключить из уравнений (1.18) j либо v , то получится одно и то же *телеграфное уравнение* [12]:

$$LC \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + (LG + CR) \frac{\partial \omega}{\partial t} + RG\omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \quad (1.19)$$

где ω может означать как v , так и j .

Если, наконец, считать, что $L > 0$, $C > 0$, и сделать замену $\omega(x, t) = e^{-\alpha t} u(x, t)$, где $\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right)$, то и для u получаем телеграфное уравнение [13]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2 u, \text{ где } a = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad b = \frac{1}{2} \left| \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right|.$$

Если уравнение $\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$, то $b=0$ и уравнение для $\omega(x, t)$ превращается в волновое уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. В этом случае говорят, что мы имеем линию без искажения сигналов.

1.4 Основные свойства функции Бесселя

При решении многих прикладных задач методом разделения переменных для областей, отличных от прямоугольных, либо уравнений с переменными коэффициентами в цилиндрических и полярных координатах нередко приводят к специальным функциям. Наибольший интерес вызывают уравнения Бесселя и цилиндрические функции.

Функции Бесселя имеют широкое распространение при решении задач о распространении волн, статических потенциалах, задач радиофизики, в акустических колебательных системах, гидродинамических процессах, задач атомной и ядерной физики. Весьма актуальны приложения функций Бесселя к теории теплопроводности и теории упругих колебаний и волн (задачи о колебаниях пластинок, задачи теории оболочек, задачи определения концентрации напряжения вблизи трещин).

Большой интерес к функциям Бесселя интерпретируется тем, что решение краевых задач математической физики, включающих оператор Лапласа в цилиндрических координатах, традиционным методом разделения переменных приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению, предназначенному для нахождения этих функций:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + (x^2 - \nu^2)u = 0, \quad (1.21)$$

представляющее собой уравнение Бесселя ν -го порядка.

Всякое решение уравнения Бесселя, не равное тождественно нулю, принято называть цилиндрической функцией [14].

Функция

$$J_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k + \nu} \quad (1.22)$$

является решением уравнения Бесселя при всех значениях параметра $\nu \in (-\infty; +\infty)$ и известна как функция Бесселя 1-го рода порядка ν .

Если ν есть не целое число, то функции $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x) = J_{-\nu}(x)$ два линейно независимых решения уравнения. Если $\nu = 0$, то эти два решения совпадают.

Если $\nu = n$ – целое положительное число, то $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, следовательно, функции $J_{-n}(x)$ и $J_n(x)$ линейно зависимы. При данных условиях, чтобы вычислить общее решение уравнения (1.21), нужно отыскать второе линейно-независимое от $J_\nu(x)$ частное решение. Для этого введем новую функцию $Y_\nu(x)$, равную $Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}$.

Надо полагать, что и $Y_\nu(x)$ равным образом представляет из себя решение уравнения (1.21), являясь линейной комбинацией частных решений $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ этого уравнения, и называется функцией Бесселя 2-го рода ν -го порядка.

Согласно определению функции $J_n(x)$ имеем:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k} k!(n+k)!}, n = 1, 2, \dots \quad (1.23)$$

Итак, для классических решений уравнений Бесселя существуют рекуррентные отношения вида:

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), \quad (1.24)$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x), \quad (1.25)$$

$$xJ'_n(x) = -xJ_{n+1}(x) + nJ_n(x). \quad (1.26)$$

Наиболее часто на практике при решении различных задач встречаются следующие формулы:

$$J'_0(x) = -J_1(x) \quad (1.27)$$

$$J''_0(x) = \frac{1}{2}[J_2(x) - J_0(x)] \quad (1.28)$$

Достоверность данных отношений основывается на тождествах (1.24), (1.25), (1.26), которые приводят к следующим выражениям:

$$J'_n(\alpha x) = J_{n-1}(\alpha x) - \frac{n}{\alpha x} J_n(\alpha x) \quad (1.29)$$

$$J'_n(\alpha x) = \frac{n}{\alpha x} J_n(\alpha x) - J_{n+1}(\alpha x). \quad (1.30)$$

Для решения задач также используются следующие формулы:

$$\int_0^x r J_0(r) dr = x J_1(x), \quad (1.31)$$

$$\int_0^x r^3 J_0(r) dr = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x). \quad (1.32)$$

Далее рассмотрим разложение произвольной функции в ряды Фурье-Бесселя.

Пусть произвольная функция $f(x)$ представима в виде ряда:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_\nu\left(\frac{\mu_n x}{l}\right), \quad \nu > -1, \quad (1.33)$$

где μ_1, μ_2, \dots – положительные корни уравнения $J_\nu(x) = 0$.

Для определения коэффициентов a_n умножим обе части разложения (1.33)

на $x J_\nu\left(\frac{\mu_n x}{l}\right)$ и проинтегрируем по x на отрезке $[0, l]$. Таким образом, учитывая (1.34)

$$\int_0^l x J_\nu\left(\frac{\mu_i x}{l}\right) J_\nu\left(\frac{\mu_j x}{l}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq i \\ \frac{l^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu_i) = \frac{l^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu_i), & \text{если } j = i, \end{cases} \quad (1.34)$$

найдем коэффициент

$$a_i = \frac{2}{l^2 J_{\nu+1}^2(\mu_i)} \int_0^l x f(x) J_\nu\left(\frac{\mu_i x}{l}\right) dx. \quad (1.35)$$

Разложение (1.33), в котором коэффициенты a_i определяются по формуле (1.35), является разложением функции $f(x)$ в ряд Фурье – Бесселя.

Величина $\|J_\nu(\alpha x)\| = \left(\int_0^1 x J_\nu^2(\alpha x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$ называется нормой функции Бесселя

$J_\nu(\alpha x)$.

2 АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

2.1 Метод Фурье для случая двух независимых переменных

Требуется найти решение одномерного волнового уравнения, удовлетворяющее начально-граничным условиям [13]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}. \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin \frac{\pi}{2l} x + \sin \frac{3\pi}{2l} x \\ u(0, t) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

где t – время;

a – скорость распространения возмущения;

$u(x, t)$ – функция, характеризующая отклонение струны;

$u(x, 0) = x$ – начальное смещение струны;

$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin \frac{\pi}{2l} x + \sin \frac{3\pi}{2l} x$ – начальная скорость струны;

$u(0, t) = 0$ – закрепленный конец;

$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$ – свободный конец.

Будем искать частные нетривиальные решения уравнения в виде произведения двух функций [15]:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (2.3)$$

Подставляем (2.3) в уравнение (2.1), разделяем переменные и получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (2.4)$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0. \quad (2.5)$$

$$X(0) = 0, X'(l) = 0. \quad (2.6)$$

Используя граничные условия, получаем:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= X(0) \cdot T(t) = 0; \\ u'(l,t) &= X'(l) \cdot T(t). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Общее решение уравнения (2.4): $X(x) = C_1 \text{Cos} \sqrt{\lambda} x + C_2 \text{Sin} \sqrt{\lambda} x, l > 0$.

Следовательно, при собственных значениях $\lambda_n = \left[\frac{\pi(1+2n)}{2l} \right]^2$, задача (2.4),

(2.6) имеет в качестве нетривиальных решений систему собственных функций:

$$X_n(x) = \text{Sin} \frac{\pi(1+2n)}{2l} x, n = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Каждому собственному значению λ_n будет соответствовать функция

$$T_n(t), \text{ которую находим из решения уравнения: } T_n''(t) + \left(\frac{\pi(1+2n)}{2l} \right)^2 a^2 T_n(t) = 0.$$

Общее решение данного уравнения выглядит следующим образом:

$$T_n(t) = A_n \text{Cos} \frac{\pi(1+2n)}{2l} at + B_n \text{Sin} \frac{\pi(1+2n)}{2l} at, \quad (2.9)$$

где A_{nm} и B_{nm} – произвольные постоянные.

Подставив выражения (2.8) и (2.9) в формулу (2.3), найдем частные решения исходного уравнения, удовлетворяющие граничным условиям:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \text{Cos} \frac{a\pi(1+2n)}{2l} t + B_n \text{Sin} \frac{a\pi(1+2n)}{2l} t \right) \cdot \text{Sin} \frac{\pi(1+2n)}{2l} x. \quad (2.10)$$

Используя начальные условия находим коэффициенты A_{nm} и B_{nm} . Необходимо продифференцировать почленно ряд (2.9) по t :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a\pi(1+2n)}{2l} \left(-A_n \text{Sin} \frac{a\pi(1+2n)}{2l} t + B_n \text{Cos} \frac{a\pi(1+2n)}{2l} t \right) \cdot \text{Sin} \frac{\pi(1+2n)}{2l} x \text{ и}$$

при $t = 0$ удовлетворим начальным условиям:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \text{Sin} \frac{\pi(1+2n)}{2l} x. \quad (2.11)$$

$$\sin \frac{\pi}{2l} x + \sin \frac{3\pi}{2l} x = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{a\pi(1+2n)}{2l} \cdot \sin \frac{\pi(1+2n)}{2l} x. \quad (2.12)$$

$$n=0 \Rightarrow B_0 = \frac{2l}{a\pi}; n=1 \Rightarrow B_0 = \frac{2l}{3a\pi}.$$

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{\pi(1+2n)}{2l} x. \quad (2.13)$$

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l x \cdot \sin \frac{\pi(1+2n)}{2l} x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad dv = \sin \frac{\pi(1+2n)}{2l} x dx \\ du = dx \quad v = -\frac{2l}{\pi(1+2n)} \cos \frac{\pi(1+2n)}{2l} x \end{array} \right| =$$

$$= x \cos \frac{\pi(1+2n)}{2l} x \Big|_0^l + \frac{4l^2}{\pi^2(1+2n)^2} \sin \frac{\pi(1+2n)}{2l} x \Big|_0^l = \frac{2}{l} \left(\frac{4l^2}{\pi^2(1+2n)^2} (-1)^n \right). \quad (2.14)$$

Итак, окончательное решение краевой задачи:

$$u(x,t) = \frac{8l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \right) \cdot \cos \frac{a\pi(1+2n)}{2l} t \cdot \sin \frac{\pi(1+2n)}{2l} x + \frac{2l}{a\pi} \sin \frac{a\pi}{2l} t \cdot$$

$$\cdot \sin \frac{\pi}{2l} x + \frac{2l}{3a\pi} \sin \frac{3a\pi}{2l} t \cdot \sin \frac{3\pi}{2l} x.$$

На рисунке 2.1 приведен график решения краевой задачи (2.1) – (2.2).

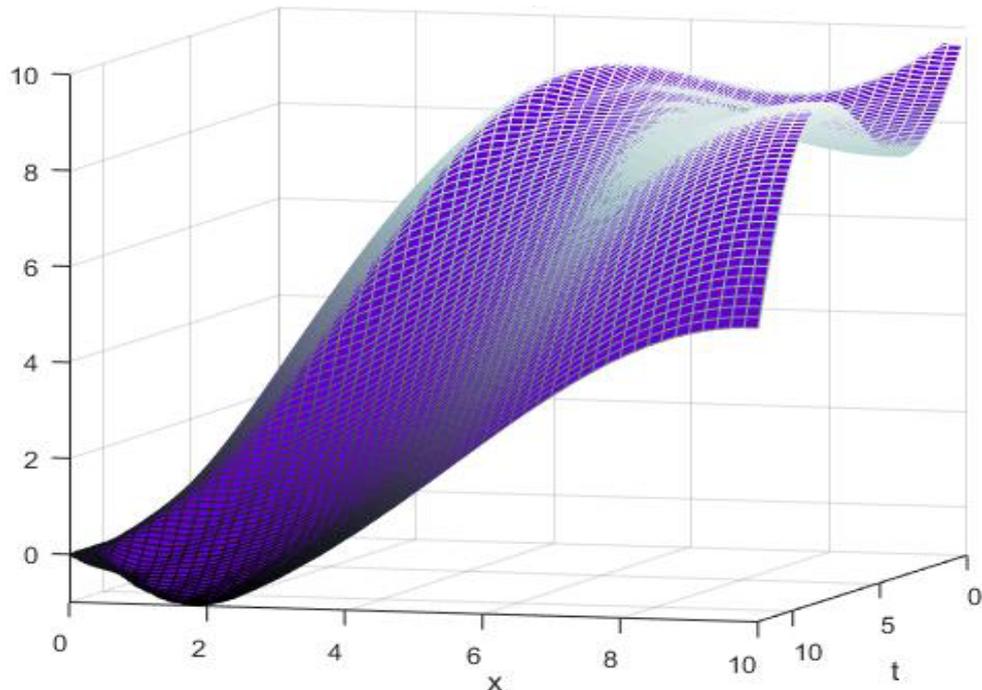


Рисунок 2.1 – График решения краевой задачи (2.1) – (2.2)

2.2 Метод разделения переменных в случае трех независимых переменных

2.2.1 Решения волновых уравнений для прямоугольной мембраны

Первая задача: Требуется найти решение двумерного волнового уравнения (2.15), удовлетворяющее начально-граничным условиям (2.16).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \{0 \leq x \leq s, 0 \leq y \leq p\} \quad (2.15)$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = Axy \\ u_t(x, y, 0) = 0 \\ u(0, y, t) = u_x(s, y, t) = 0 \\ u(x, 0, t) = u_y(x, p, t) = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Решение ищем в виде:

$$u(x, y, t) = v(x, y) \cdot T(t) \quad (2.17)$$

Подставляя (2.17) в уравнение (2.15), получаем: $\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \frac{\Delta_2 v}{v} = -\lambda = const$.

Отсюда следуют уравнение для функции $T(t)$:

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (2.18)$$

и задача на собственные значения:

$$\begin{cases} \Delta_2 v + \lambda v = 0, (x, y) \in \Omega \\ v|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Полагая $v(x, y) = X(x) \cdot Y(y) = 0$ и проведя еще раз разделение переменных, получаем две задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) + \nu X(x) = 0; \\ X(0) = X'(s) = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} Y''(y) + \mu Y(y) = 0; \\ Y(0) = Y'(p) = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

где ν и μ – собственные значения; $\nu + \mu = \lambda$.

$$\text{Решая (2.20), получаем: } \begin{cases} X_n(x) = \text{Sin} \frac{\pi(1+2n)}{2s} x; \\ Y_m(y) = \text{Sin} \frac{\pi(1+2m)}{2p} y. \end{cases}$$

Задача на собственные значения имеет в качестве собственных чисел

$$\lambda_{n,m} = \left[\frac{\pi(1+2n)}{2s} \right]^2 + \left[\frac{\pi(1+2m)}{2p} \right]^2, n, m = 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

каждому из которых соответствует собственная функция:

$$V_{n,m} = \text{Sin} \frac{\pi(1+2n)}{2s} x \cdot \text{Sin} \frac{\pi(1+2m)}{2p} y \quad (2.22)$$

Находим частные решения уравнения (2.10), удовлетворяющие граничным условиям:

$$T_{nm} = A_{nm} \text{Cos} \sqrt{\lambda} at + B_{nm} \text{Sin} \sqrt{\lambda} at, \quad (2.23)$$

$$\text{где } \omega_{nm} = a \sqrt{\lambda_{n,m}} = \frac{a\pi}{2} \sqrt{\left(\frac{(1+2n)}{s} \right)^2 + \left(\frac{(1+2m)}{p} \right)^2}.$$

Окончательное решение краевой задачи (2.15) – (2.16) представим в виде суперпозиции частных решений:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (A_{nm} \text{Cos} \omega_{nm} t + B_{nm} \text{Sin} \omega_{nm} t) \cdot \text{Sin} \frac{\pi(1+2n)}{2s} x \cdot \text{Sin} \frac{\pi(1+2m)}{2p} y,$$

где коэффициенты A_{nm} и B_{nm} находим, выполняя начальные условия.

$$Axy = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \cdot \text{Sin} \frac{\pi(1+2n)}{2s} x \cdot \text{Sin} \frac{\pi(1+2m)}{2p} y. \quad (2.24)$$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \omega_{nm} \cdot \text{Sin} \frac{\pi(1+2n)}{2s} x \cdot \text{Sin} \frac{\pi(1+2m)}{2p} y. \quad (2.25)$$

Откуда, $B_{nm} = 0$.

$$Axy = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{nm} \cdot \text{Sin} \frac{\pi(1+2n)}{2s} x \cdot \text{Sin} \frac{\pi(1+2m)}{2p} y. \quad (2.26)$$

$$\alpha_{nm} = \frac{4}{sp} \int_0^s \int_0^p Axy \cdot \text{Sin} \frac{\pi(1+2n)}{2s} x \cdot \text{Sin} \frac{\pi(1+2m)}{2p} y dx dy = \frac{4A}{sp} \int_0^s x \cdot \text{Sin} \frac{\pi(1+2n)}{2s} x dx \cdot$$

$$\int_0^p y \cdot \text{Sin} \frac{\pi(1+2m)}{2p} y dy = \left| \begin{array}{l} x = u \quad dv = \text{Sin} \frac{\pi(1+2n)}{2s} x \\ du = dx \quad v = -\frac{2s}{\pi(1+2n)} \text{Cos} \frac{\pi(1+2n)}{2s} x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{4A}{sp} \left[\frac{-2xs}{\pi(1+2n)} \cos \frac{\pi(1+2n)}{2s} x \Big|_0^s + \frac{4s^2}{\pi^2(1+2n)^2} \sin \frac{\pi(1+2n)}{2s} x \Big|_0^s \right] = \frac{64spA(-1)^{n+m}}{\pi^4(1+2n)^2(1+2m)^2}.$$

Итак, окончательное решение краевой задачи:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{64spA(-1)^{n+m}}{\pi^4(1+2n)^2(1+2m)^2} \cdot \cos \left(a\pi \sqrt{\frac{(1+2n)^2}{4s^2} + \frac{(1+2m)^2}{4p^2}} \cdot t \right) \cdot \sin \frac{\pi(1+2n)}{2s} x \cdot \sin \frac{\pi(1+2m)}{2p} y.$$

На рисунке 2.2 приведены графики функции в различные моменты времени ($t=1.3$; $t=2.3$; $t=4.3$; $t=5$).

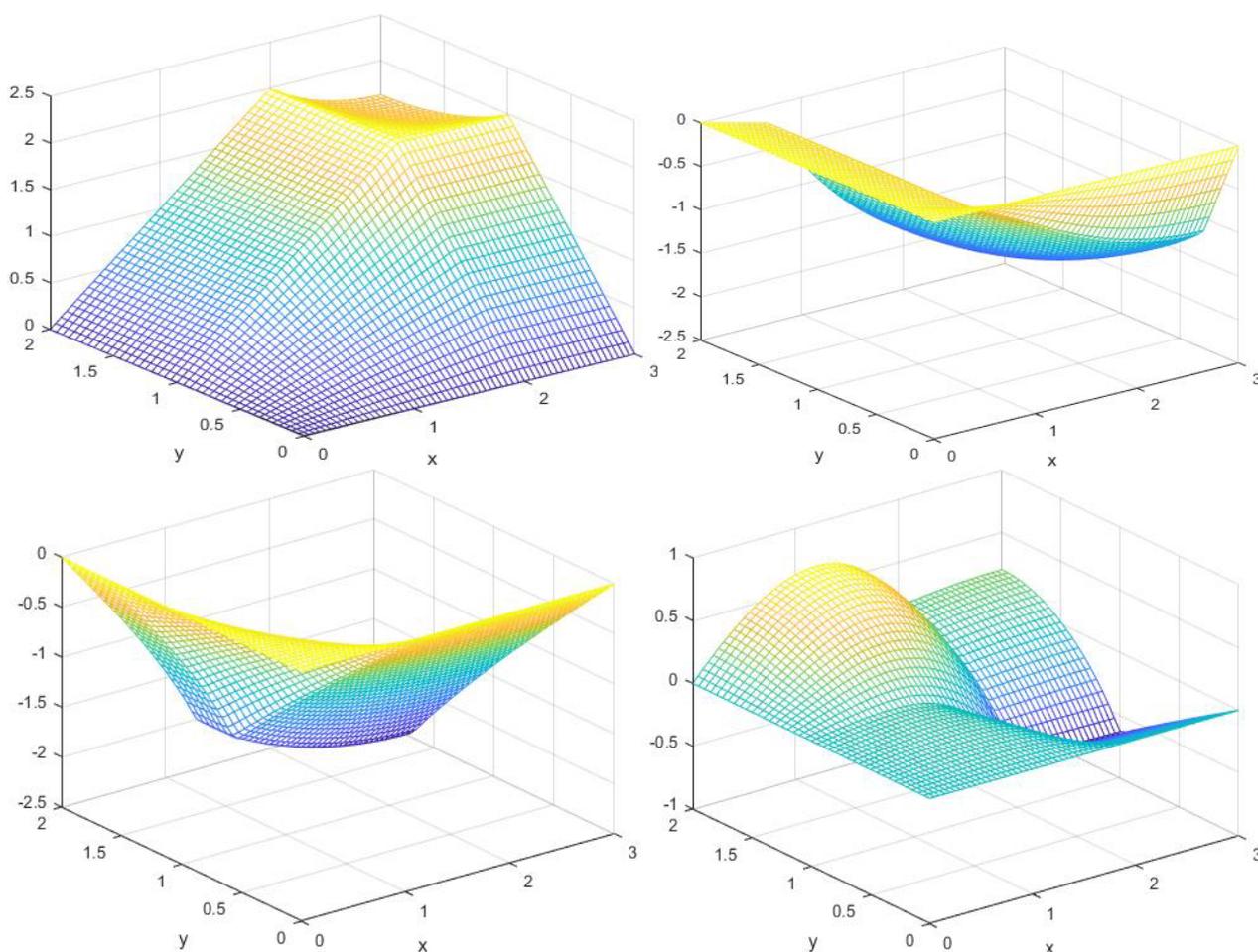


Рисунок 2.2 – Графики решения краевой задачи (2.15) – (2.16)

Вторая задача: Пренебрегая реакцией окружающей среды, определить поперечные колебания однородной прямоугольной мембраны $0 \leq x \leq s, 0 \leq y \leq p$ с жестко закрепленным краем для случая, когда в начальный момент мембрана

получает поперечный сосредоточенный импульс I в точке (x_0, y_0) , $0 < x_0 < s, 0 < y_0 < p$, а начальное положение – покой.

Требуется найти решение двумерного волнового уравнения (2.27), удовлетворяющее начально-граничным условиям (2.28):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \{0 < x < s, 0 < y < p\}, t > 0 \quad (2.27)$$

$$\begin{cases} u(0, y, t) = u(s, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = u(x, p, t) = 0, \\ u(x, y, 0) = 0, \\ u_t(x, y, 0) = \frac{I}{\rho} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0). \end{cases} \quad (2.28)$$

Решение задачи (2.27) – (2.28) ищем методом разделения переменных, находя частные решения вида:

$$u(x, y, t) = v(x, y) \cdot T(t). \quad (2.29)$$

Подставляя решение (2.29) в исходное уравнение (2.27), получаем:

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \frac{\Delta_2 v}{v} = -\lambda = const. \quad (2.30)$$

Получаем уравнение для функции $T(t)$:

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (2.31)$$

и задачу на собственные значения:

$$\begin{cases} \Delta_2 v + \lambda v = 0, (x, y) \in \Omega \\ v|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

Полагая $v(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ и проведя еще раз разделение переменных, получаем две идентичные задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) + \delta X(x) = 0 \\ X(0) = X(s) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} Y''(y) + \mu Y(y) = 0 \\ Y(0) = Y(p) = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

где δ и μ – собственные значения, $\nu + \mu = \lambda$.

Для задач (2.33) собственные функции имеют вид:

$$\begin{cases} X_n(x) = \text{Sin} \frac{\pi n}{s} x; \\ Y_m(y) = \text{Sin} \frac{\pi m}{p} y. \end{cases} \quad (2.34)$$

Задача на собственные значения имеет в качестве собственных чисел:

$$\lambda_{n,m} = \left[\frac{n\pi}{s} \right]^2 + \left[\frac{m\pi}{p} \right]^2, n, m = 1, 2, \dots \quad (2.35)$$

каждому из которых соответствует собственная функция:

$$v_{n,m}(x, y) = \text{Sin} \frac{n\pi}{s} x \cdot \text{Sin} \frac{m\pi}{p} y. \quad (2.36)$$

С учетом уравнения (2.31), находим частные решения уравнения (2.27), удовлетворяющие граничным условиям:

$$T_{nm}(t) = A_{nm} \text{Cos} \omega_{nm} t + B_{nm} \text{Sin} \omega_{nm} t, \quad (2.37)$$

$$\text{где } \omega_{nm} = a \sqrt{\lambda_{n,m}} = a\pi \sqrt{\left(\frac{n}{s} \right)^2 + \left(\frac{m}{p} \right)^2}.$$

Общее решение краевой задачи представим в виде суперпозиции частных решений вида, т.е. в виде двойного ряда:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (A_{nm} \text{Cos} \omega_{nm} t + B_{nm} \text{Sin} \omega_{nm} t) \cdot \text{Sin} \frac{n\pi}{s} x \cdot \text{Sin} \frac{m\pi}{p} y, \quad (2.38)$$

где коэффициенты A_{nm} и B_{nm} находим, выполняя начальные условия:

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \cdot \text{Sin} \frac{n\pi}{s} x \cdot \text{Sin} \frac{m\pi}{p} y. \quad (2.39)$$

Откуда, $A_{nm} = 0$.

$$\frac{I}{\rho} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) = \sum_{n,m=1}^{\infty} B_{nm} \cdot \omega_{nm} \cdot \text{Sin} \frac{n\pi}{s} x \cdot \text{Sin} \frac{m\pi}{p} y. \quad (2.40)$$

$$\frac{I}{\rho} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) = \alpha_{nm} \cdot \text{Sin} \frac{n\pi}{s} x \cdot \text{Sin} \frac{m\pi}{p} y. \quad (2.41)$$

$$\lambda_{nm} = \frac{4}{sp} \int_0^s \int_0^p \frac{I}{\rho} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \cdot \text{Sin} \frac{n\pi}{s} x \cdot \text{Sin} \frac{m\pi}{p} y \, dx dy = \frac{4I}{\rho sp} \text{Sin} \frac{n\pi}{s} x \cdot \text{Sin} \frac{m\pi}{p} y.$$

$$B_{nm} = \frac{\lambda_{nm}}{\omega_{nm}} = \frac{4I}{\rho s p a \pi \sqrt{\left(\frac{n}{s}\right)^2 + \left(\frac{m}{p}\right)^2}} \cdot \text{Sin} \frac{n\pi}{s} x \cdot \text{Sin} \frac{m\pi}{p} y.$$

Итак, окончательное решение краевой задачи:

$$u(x, y, t) = \frac{4I}{\rho a \pi} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\text{Sin} \frac{n\pi}{s} x_0 \cdot \text{Sin} \frac{m\pi}{p} y_0}{\sqrt{n^2 p^2 + m^2 s^2}} \cdot \text{Sin} \left(\sqrt{\left(\frac{n}{s}\right)^2 + \left(\frac{m}{p}\right)^2} a \pi t \right) \cdot \text{Sin} \frac{n\pi}{s} x \cdot \text{Sin} \frac{m\pi}{p} y \cdot \text{Sin} \frac{\pi(1+2n)}{2s} x \cdot \text{Sin} \frac{\pi(1+2m)}{2p} y,$$

где ρ – поверхностная плотность массы мембраны.

На рисунке 2.3 приведен график краевой задачи (2.27) – (2.28) в различные моменты времени ($t=0.6, t=1, t=1.3, t=1.6$).

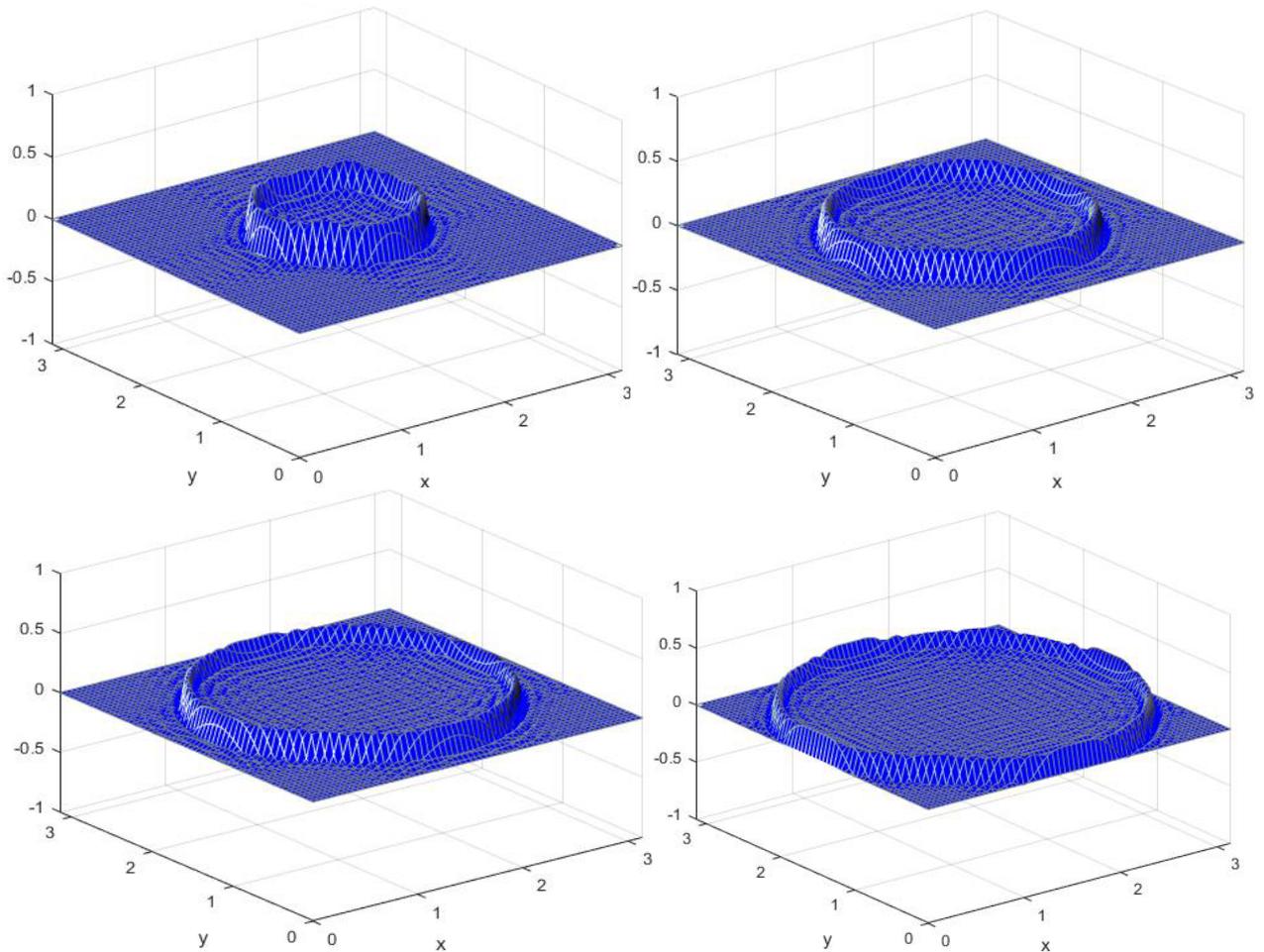


Рисунок 2.3 – График решения краевой задачи (2.27) – (2.28)

2.2.2 Вынужденные колебания прямоугольной мембраны

Пренебрегая реакцией окружающей среды, определить поперечные колебания однородной прямоугольной мембраны $0 \leq x \leq s, 0 \leq y \leq p$ с жестко закрепленным краем для случая, когда колебания вызваны непрерывно распределенной по мембране поперечной силой с плотностью $f(x, y, t) = e^{-t} x \sin \frac{2\pi}{p} y$.

Требуется найти решение двумерного волнового уравнения, удовлетворяющее начально-граничным условиям:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + e^{-t} x \sin \frac{2\pi}{p} y, \{0 < x < s, 0 < y < p\}, t > 0 \quad (2.42)$$

$$\begin{cases} u(0, y, t) = u(s, y, t) = 0 \\ u(x, 0, t) = u(x, p, t) = 0 \\ u(x, y, 0) = 0 \\ u_t(x, y, 0) = 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

Решение задачи (2.42) – (2.43) ищем методом разделения переменных, находя частные решения вида:

$$u(x, y, t) = v(x, y) \cdot T(t). \quad (2.44)$$

Подставляя решение (2.44) в исходное уравнение (2.42), получаем:

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \frac{\Delta_2 v}{v} = -\lambda = const. \quad (2.45)$$

Получаем уравнение для функции $T(t)$:

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (2.46)$$

и задачу на собственные значения:

$$\begin{cases} \Delta_2 v + \lambda v = 0, (x, y) \in \Omega \\ v|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \quad (2.47)$$

Полагая $v(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ и проведя еще раз разделение переменных, получаем две идентичные задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) + \delta X(x) = 0 \\ X(0) = X(s) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} Y''(y) + \mu Y(y) = 0 \\ Y(0) = Y(p) = 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

где δ и μ – собственные значения, связанные с λ соотношением $\delta + \mu = \lambda$.

Для задач (10) собственные функции имеют вид:

$$\begin{cases} X_n(x) = \text{Sin} \frac{n\pi}{s} x; \\ Y_m(y) = \text{Sin} \frac{m\pi}{p} y. \end{cases} \quad (2.49)$$

Задача на собственные значения имеет в качестве собственных чисел:

$$\lambda_{n,m} = \left[\frac{n\pi}{s} \right]^2 + \left[\frac{m\pi}{p} \right]^2, n, m = 1, 2, \dots \quad (2.50)$$

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} T_{n,m}(t) \text{Sin} \frac{n\pi}{s} x \cdot \text{Sin} \frac{m\pi}{p} y. \quad (2.51)$$

Подставив в уравнение (2.42), получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=1}^{\infty} T_{n,m}''(t) \text{Sin} \frac{n\pi}{s} x \cdot \text{Sin} \frac{m\pi}{p} y = -a^2 \sum_{n,m=1}^{\infty} T_{n,m}(t) \left[\left(\frac{n\pi}{s} \right)^2 \text{Sin} \frac{n\pi}{s} x \cdot \text{Sin} \frac{m\pi}{p} y + \right. \\ \left. + \left(\frac{m\pi}{p} \right)^2 \text{Sin} \frac{n\pi}{s} x \cdot \text{Sin} \frac{m\pi}{p} y \right] + \frac{1}{\rho} e^{-t} x \text{sin} \frac{2\pi}{p} y. \end{aligned}$$

Разлагаем x в ряд Фурье по собственной функции $\text{Sin} \frac{n\pi}{s} x$:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{Sin} \frac{n\pi}{s} x dx, \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \alpha_n = \frac{2}{\rho} \int_0^s x \text{Sin} \frac{n\pi}{s} x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad dv = \text{Sin} \frac{n\pi}{s} x dx \\ du = dx \quad v = -\frac{s}{n\pi} \text{Cos} \frac{n\pi}{s} x \end{array} \right| = \\ = \frac{2}{s} \left[-\frac{s}{n\pi} \text{Cos} \frac{n\pi}{s} x \Big|_0^s \right] = -\frac{2}{n\pi} s (-1)^n = \frac{2}{n\pi} s (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

$$T_{n,m}''(t) + a^2 T_{n,m}(t) \left[\left(\frac{n\pi}{s} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{p} \right)^2 \right] = \frac{1}{\rho} e^{-t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} s (-1)^{n+1} \sin \frac{2\pi}{p} y. \quad (2.53)$$

$$T_{n,2}''(t) + a^2 \omega_n^2 \pi^2 T_{n,2}(t) = 0, \quad k_{1,2} = \pm a \omega_n \pi i, \quad \text{где } \omega_n = \sqrt{\frac{n^2}{s^2} + \frac{4}{p^2}}.$$

$$T_{n,2}(t) = A_{n,2} \text{Cos} a \omega_n \pi t + B_{n,2} \text{Sin} a \omega_n \pi t \Rightarrow T_{n,2} = C e^{-t}.$$

$$C e^{-t} + C a^2 \omega_n^2 \pi^2 e^{-t} = \frac{s}{\rho} e^{-t} \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}. \quad (2.54)$$

$$C [1 + a^2 \omega_n^2 \pi^2] = \frac{s}{\rho} \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1} \Rightarrow C = \frac{2s(-1)^{n+1}}{n\pi\rho [1 + a^2 \omega_n^2 \pi^2]}.$$

Итак, окончательное решение краевой задачи:

$$u(x, y, t) = \sin \frac{2\pi}{p} y \sum_{n,m=1}^{\infty} C \left(e^{-t} - \text{Cos} a \omega_n \pi t + \frac{1}{a \omega_n \pi} \text{Sin} a \omega_n \pi t \right) \text{Sin} \frac{n\pi}{s} x.$$

На рисунке 2.4 приведены графики краевой задачи (2.42) – (2.43) в различные моменты времени ($t=2.8, t=3.4, t=4.5, t=1.6$).

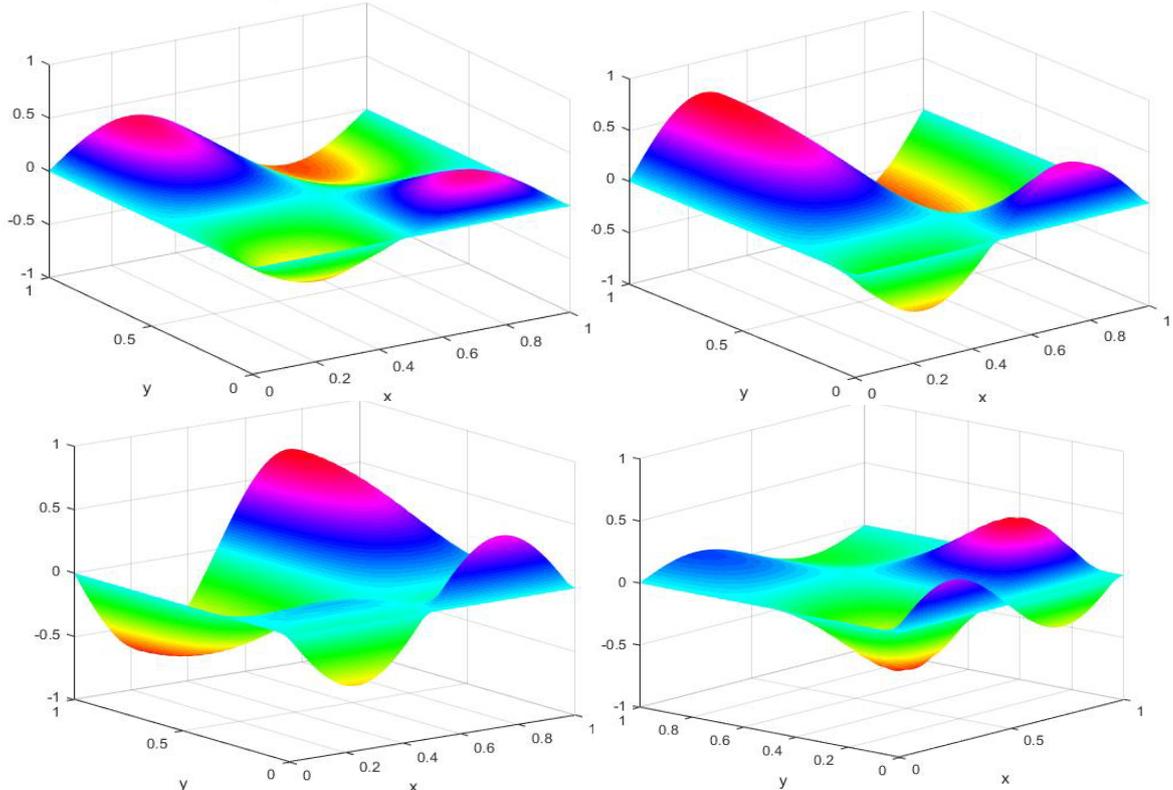


Рисунок 2.4 – Графики решения краевой задачи (2.42) – (2.43)

2.2.3 Примеры решения начально-краевых задач для колебания круглой мембраны

Первая задача: Определить поперечные колебания однородной круглой

мембраны радиуса R , вызванные начальной скоростью $f(r) = \begin{cases} U, & 0 \leq r \leq \frac{R}{2} \\ 0, & \frac{R}{2} < r < R \end{cases}$,

если край мембраны закреплен жестко.

Итак, требуется найти решение уравнения:

$$u_{tt} = \frac{a^2}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right), \quad 0 \leq r < R, \quad t > 0, \quad |u(0, t)| < \infty \quad (2.55)$$

при граничном условии:

$$u(R, t) = 0 \quad (2.56)$$

и начальных условиях:

$$u(r, 0) = 0, \quad u_t(r, 0) = f(r). \quad (2.57)$$

В данном случае решение ищется в виде: $u(r, t) = T(t)W(r)$.

Тогда граничные и начальные условия примут вид:

$$W(R) = 0, \quad T(0) = 0, \quad T'(0) = f(r). \quad (2.58)$$

Подставляя $u(r, t) = T(t)W(r)$ в исходное уравнение (2.55) и разделяя переменные получим:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{1}{r} \left(\frac{W'(r) + r W''(r)}{W(r)} \right) = -\lambda^2. \quad (2.59)$$

Получили систему уравнений: $\begin{cases} T''(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0, \\ r W''(r) + W'(r) + \lambda^2 r W(r) = 0. \end{cases}$

решение которой будет выглядеть следующим образом:

$$W_n(r) = J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \text{ и } T_n(t) = A_n \cos \frac{\mu_n a}{R} t + B_n \sin \frac{\mu_n a}{R} t, \quad (2.60)$$

Решение исходного уравнения (2.60) запишем в виде суперпозиции двух

решений $W_n(r)$ и $T_n(t)$: $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{a\mu_n}{R} t + B_n \sin \frac{a\mu_n}{R} t \right) \cdot J_0\left(\frac{r\mu_n}{R}\right)$.

Для того чтобы найти коэффициенты A_n и B_n , используем начальные условия и выражение для начальной скорости $f(r)$:

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) = 0, \text{ откуда находим } A_n = 0.$$

$$u_t(r, 0) = \frac{a \mu_n}{R} \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) = f(r)..$$

Для того, чтобы найти значение B_n , разложим $f(r)$ в ряд по функциям Бесселя в соответствии разложению Фурье – Бесселя:

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right), \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \text{где } b_n &= \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R r f(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr = \frac{2U}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^{R/2} r J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr = \\ &= \int_{\frac{\mu_n r}{R} = t, r = \frac{R}{\mu_n} t, dr = \frac{R}{\mu_n} dt} \frac{2U}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot \frac{R^2}{\mu_n^2} \cdot \int_0^{\mu_n/2} t J_0(t) dt = / \text{ согласно выра-} \\ \text{жению (1.32)} &= \frac{2U}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot t J_1(t) \Big|_0^{\mu_n/2} = \frac{2U}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot \frac{\mu_n r}{R} \cdot J_1\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \Big|_0^{R/2} = \\ &= \frac{2U}{\mu_n J_1^2(\mu_n)} \cdot \frac{R}{2} \cdot J_1\left(\frac{\mu_n}{2}\right) = \frac{U}{\mu_n J_1^2(\mu_n)} \cdot J_1\left(\frac{\mu_n}{2}\right). \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно: } \frac{a \mu_n}{R} \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

$$\text{где } b_n = \frac{U}{\mu_n J_1^2(\mu_n)} \cdot J_1\left(\frac{\mu_n}{2}\right). \text{ Откуда:}$$

$$B_n = \frac{R}{a \mu_n} b_n = \frac{R}{a \mu_n} \cdot \frac{U}{\mu_n J_1^2(\mu_n)} \cdot J_1\left(\frac{\mu_n}{2}\right) = \frac{R U J_1\left(\frac{\mu_n}{2}\right)}{a \mu_n^2 J_1^2(\mu_n)}. \quad (2.62)$$

Таким образом, решение исходной задачи имеет вид:

$$u(r, t) = \frac{U R}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{\mu_n}{2}\right)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot \sin\left(\frac{\mu_n a}{R} t\right) \cdot J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где μ_n – положительные корни уравнения Бесселя $J_0(\mu_n) = 0$.

На рисунке 2.5 приведены графики краевой задачи (2.55) – (2.57) в различные моменты времени ($t=0.3, t=1.2, t=2.1, t=3$).

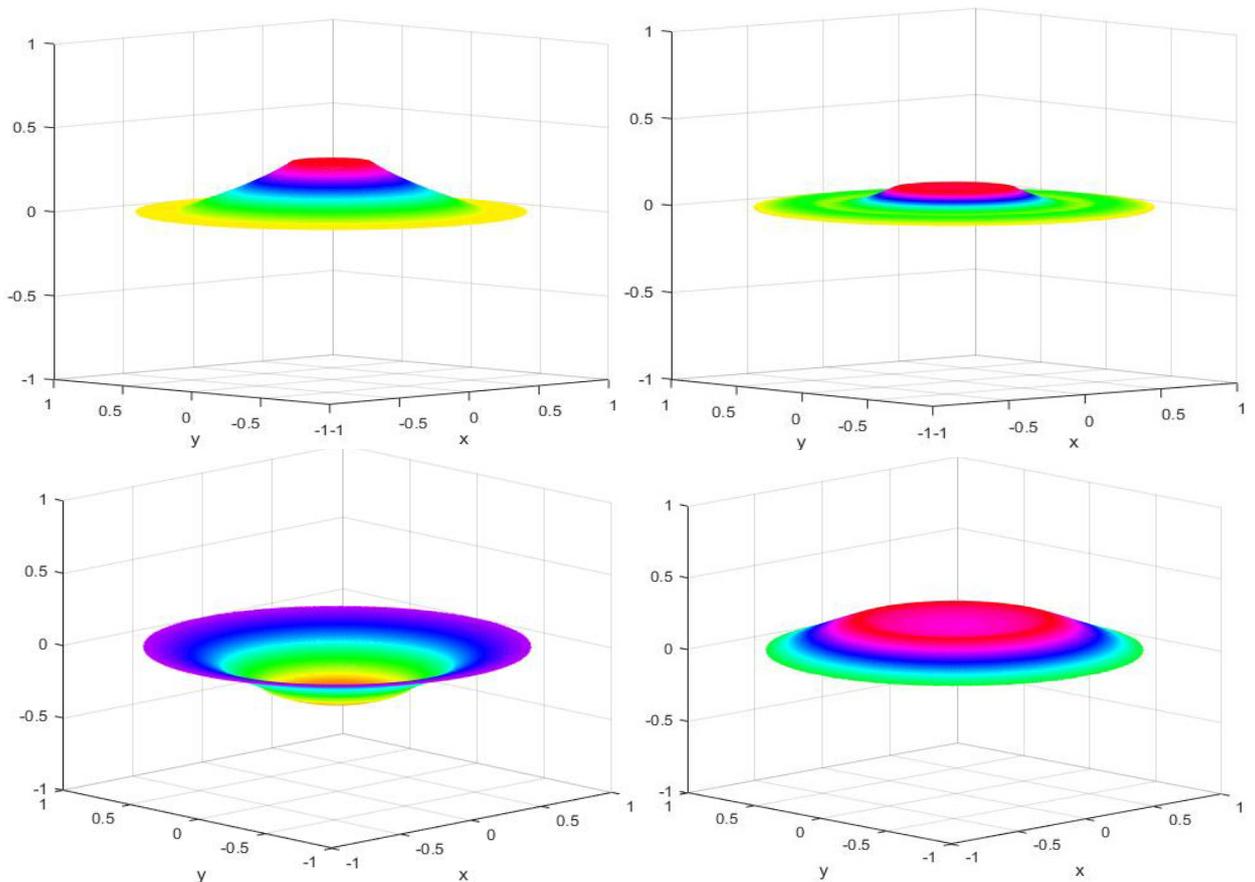


Рисунок 2.5 – Графики решения краевой задачи (2.55) – (2.57)

Вторая задача: Однородная круглая мембрана совершает поперечные колебания, вызванные начальным отклонением $f(r) = A(R^2 - r^2)$.

Требуется найти решение уравнения:

$$u_{tt} = \frac{a^2}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right), \quad 0 \leq r < R, \quad t > 0, \quad |u(0, t)| < \infty \quad (2.63)$$

при граничном условии:

$$u(R, t) = 0 \quad (2.64)$$

и начальных условиях:

$$u(r, 0) = A(R^2 - r^2), \quad u_t(r, 0) = 0. \quad (2.65)$$

Решение ищем в виде произведения двух функций $T(t)$ и $W(r)$:

$$u(r, t) = T(t) \cdot W(r) \quad (2.66)$$

Тогда граничные и начальные условия примут вид:

$$W(R) = 0, T(0) = 0, T'(0) = f(r) \quad (2.67)$$

Подставляем $u(r, t) = T(t)W(r)$ в исходное уравнение (2.63):

$$T''(t) \cdot W(r) = a^2 T(t) \left(\frac{1}{r} W'(r) + W''(r) \right). \quad (2.68)$$

Разделим это равенство на $a^2 T(t)W(r)$ и получим:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{\frac{1}{r} W'(r) + W''(r)}{W(r)} = -\lambda^2. \quad (2.69)$$

Откуда получаем систему уравнений
$$\begin{cases} T''(t) + a^2 T(t) = 0, \\ W''(r) + \frac{1}{r} W'(r) + \lambda^2 W = 0. \end{cases}$$

$W(r) = J_0(\lambda r)$, $J_0(\lambda_n r) = 0$ – решение уравнения Бесселя для заданных граничных условий.

$W(R) = 0$. Обозначим $R\lambda_n = \mu_n$ – корни уравнения Бесселя.

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{R}. \quad W_n(r) = J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)$$

Решим уравнение для функции $T_n(t)$: $T_n(t) = A_n \cos \frac{\mu_n a}{R} t + B_n \sin \frac{\mu_n a}{R} t$.

Решение исходного уравнения (2.63) запишем в виде суперпозиции двух решений $W_n(r)$ и $T_n(t)$: $u(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\mu_n a}{R} t + B_n \sin \frac{\mu_n a}{R} t \right) \cdot J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)$.

Для того чтобы найти коэффициенты A_n и B_n , используем начальные условия (2.65) и выражение (1.32): $A(R^2 - r^2) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos 0 J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)$.

Разложим $f(r)$ в ряд Фурье-Бесселя: $A(R^2 - r^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) = 0$, где

$$\alpha_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R r A(R^2 - r^2) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr = \frac{2A}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R (rR^2 - r^3) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr.$$

$$R^2 \int_0^R r J_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right) dr = \left| \begin{array}{l} \frac{\mu_n r}{R} = \tau \quad r = \frac{\tau R}{\mu_n} \\ dr = \frac{R d\tau}{\mu_n} \end{array} \right| = R^2 \int_0^{\mu_n} \frac{\tau R}{\mu_n} \cdot J_0(\tau) \frac{R d\tau}{\mu_n} = \frac{R^4}{\mu_n^2} \int_0^{\mu_n} \tau \cdot J_0(\tau) d\tau =$$

/в силу ф.(1.32): /= $\frac{R^4}{\mu_n^2} \mu_n J_1(\mu_n) = \frac{R^4}{\mu_n} J_1(\mu_n)$.

$$\int_0^R r^3 J_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right) dr = \left| \begin{array}{l} \frac{\mu_n r}{R} = t \quad r = \frac{Rt}{\mu_n} \\ dr = \frac{R dt}{\mu_n} \end{array} \right| = \frac{R^3}{\mu_n^3} \cdot \frac{R}{\mu_n} \int_0^{\mu_n} t^3 J_0(t) dt.$$

Применим ф. (1.32): $\int_0^x r^3 J_0(r) dr = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x)$, согласно ко-

торой $\int_0^R r^3 J_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right) dr = \frac{R^4}{\mu_n^4} \cdot \left[2t^2 J_0(t) + (t^3 - 4t) J_1(t) \right]_0^{\mu_n} // \text{учитывая } J_0(\mu_n) = 0 //$

$$= \frac{R^4}{\mu_n^4} \cdot [\mu_n^3 - 4\mu_n] J_1(\mu_n) = \frac{R^4}{\mu_n^3} \cdot [\mu_n^2 - 4] J_1(\mu_n).$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \alpha_n &= \frac{2A}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot \left[\frac{R^4}{\mu_n} J_1(\mu_n) - \frac{R^4}{\mu_n^3} \cdot [\mu_n^2 - 4] J_1(\mu_n) \right] = \\ &= \frac{2A}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot \frac{4R^4}{\mu_n^3} J_1(\mu_n) = \frac{8AR^2}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}. \end{aligned}$$

Следовательно, $A_n = \frac{8R^2 A}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}$, $B_n = 0$.

Таким образом, решение исходной задачи имеет вид:

$$u(r, t) = 8AR^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} \cdot \text{Cos} \left(\frac{\mu_n a}{R} t \right) \cdot J_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right),$$

где μ_n – положительные корни уравнения Бесселя $J_0(\mu) = 0$.

На рисунке 2.6 приведены графики краевой задачи (2.63) – (2.65) в различные моменты времени ($t=1.2$, $t=2.8$, $t=4.2$, $t=5.4$).

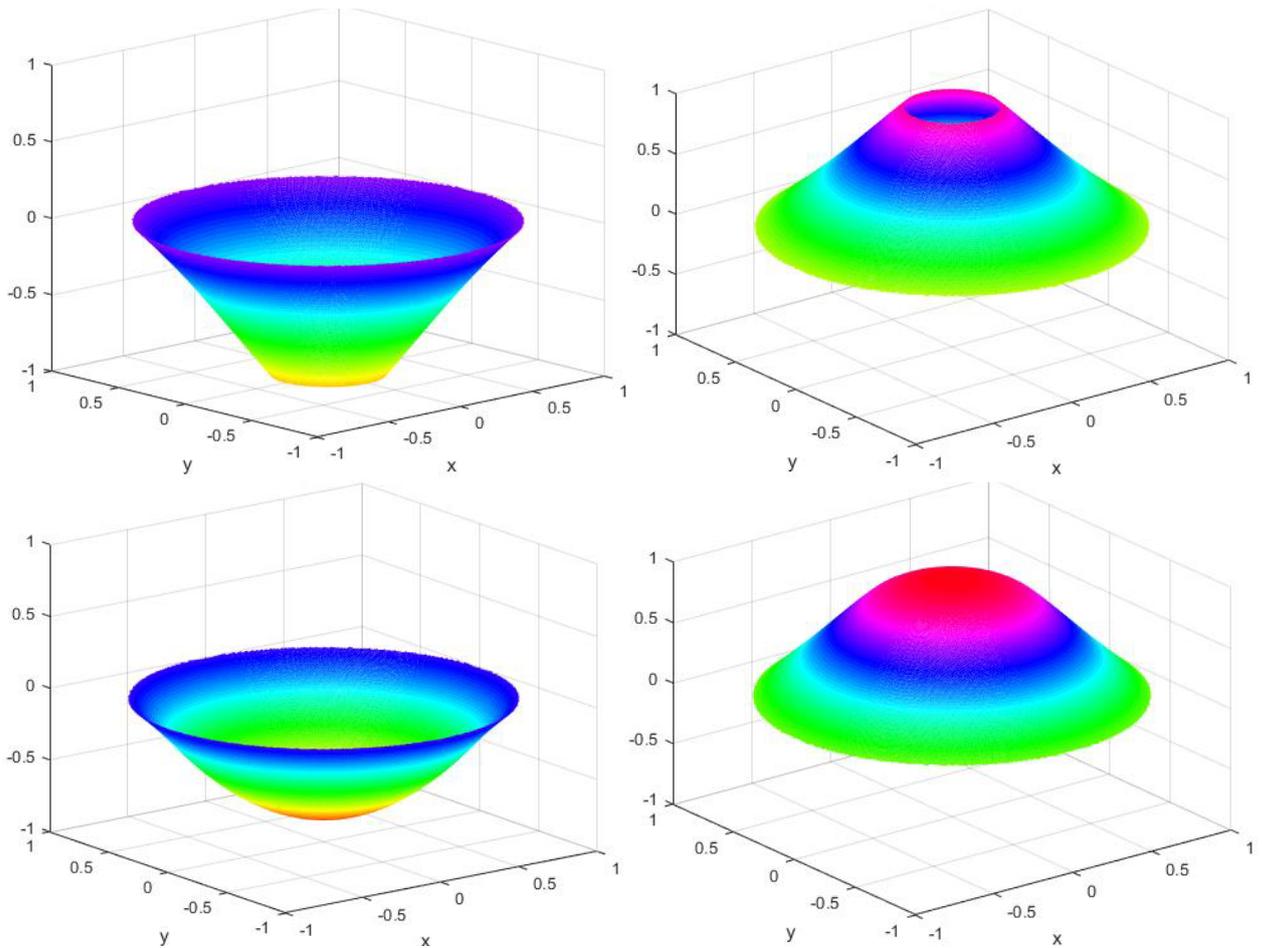


Рисунок 2.6 – Графики решения краевой задачи (2.63) – (2.65)

Третья задача: Однородная круглая мембрана совершает поперечные колебания, вызванные постоянной начальной скоростью U точек мембраны.

Необходимо найти решение уравнения

$$u_{tt} = \frac{a^2}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right), \quad 0 \leq r < R, \quad t > 0, \quad |u(0, t)| < \infty \quad (2.70)$$

при граничном условии:

$$u(R, t) = 0 \quad (2.71)$$

и начальных условиях:

$$u(r, 0) = 0, \quad u_t(r, 0) = U. \quad (2.72)$$

Решение ищем в виде: $u(r, t) = T(t) \cdot W(r)$.

Подставляем $u(r, t) = T(t) \cdot W(r)$ в исходное уравнение (2.70):

$$T''(t) \cdot W(r) = a^2 T(t) \left(\frac{1}{r} W'(r) + W''(r) \right). \quad (2.73)$$

Разделим это равенство на $a^2 T(t)W(r)$ и получим:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{\frac{1}{r}W'(r) + W''(r)}{W(r)} = -\lambda^2. \quad (2.74)$$

Получили уравнения (2.75) и (2.76):

$$T''(t) + a^2 T(t) = 0, \quad (2.75)$$

$$W''(r) + \frac{1}{r}W'(r) + \lambda^2 W(r) = 0. \quad (2.76)$$

$W(r) = J_0(\lambda r)$ – решение уравнения Бесселя.

$$W(R) = J_0(\lambda R) = 0. \text{ Обозначим } R\lambda_n = \mu_n \Rightarrow \lambda_n = \frac{\mu_n}{R} \Rightarrow W_n(r) = J_0\left(\frac{r\mu_n}{R}\right).$$

Решение уравнения для функции $T_n(t)$: $T_n(t) = A_n \cos \frac{\mu_n a}{R} t + B_n \sin \frac{\mu_n a}{R} t$.

Решение исходного уравнения (2.70) запишем в виде суперпозиции двух

$$\text{решений } W_n(r) \text{ и } T_n(t): u(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\mu_n a}{R} t + B_n \sin \frac{\mu_n a}{R} t \right) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right).$$

Для того чтобы найти коэффициенты A_n и B_n , используем начальные

$$\text{условия (2.75): } 0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos 0 J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \Rightarrow A_n = 0.$$

Разложим U в ряд Фурье-Бесселя:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \lambda a J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) = 0. \quad (2.77)$$

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) = 0,$$

$$\text{где } \alpha_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R r U J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr = \left. \begin{array}{l} \frac{\mu_n r}{R} = \tau \quad r = \frac{\tau R}{\mu_n} \\ dr = \frac{R d\tau}{\mu_n} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2U}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^{\mu_n} \frac{\tau R}{\mu_n} J_0(\tau) \frac{R d\tau}{\mu_n} = \frac{2U}{J_1^2(\mu_n) \mu_n^2} \cdot \mu_n \cdot J_1(\mu_n) = \frac{2U}{J_1(\mu_n) \mu_n}.$$

$$\text{Следовательно, } B_n = \frac{2U}{J_1(\mu_n)\mu_n a \lambda} = \frac{2UR}{J_1(\mu_n)\mu_n a \mu_n} = \frac{2UR}{J_1(\mu_n)a\mu_n^2}.$$

Таким образом, решение исходной задачи имеет вид:

$$u(r,t) = \frac{2UR}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2 J_1(\mu_n)} \cdot \text{Sin}\left(\frac{\mu_n a}{R} t\right) \cdot J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где μ_n – положительные корни уравнения Бесселя $J_0(\mu_n) = 0$.

На рисунке 2.7 приведены графики краевой задачи (2.70) – (2.72) в различные моменты времени ($t=0.6, t=1.2, t=2.4, t=3.2$).

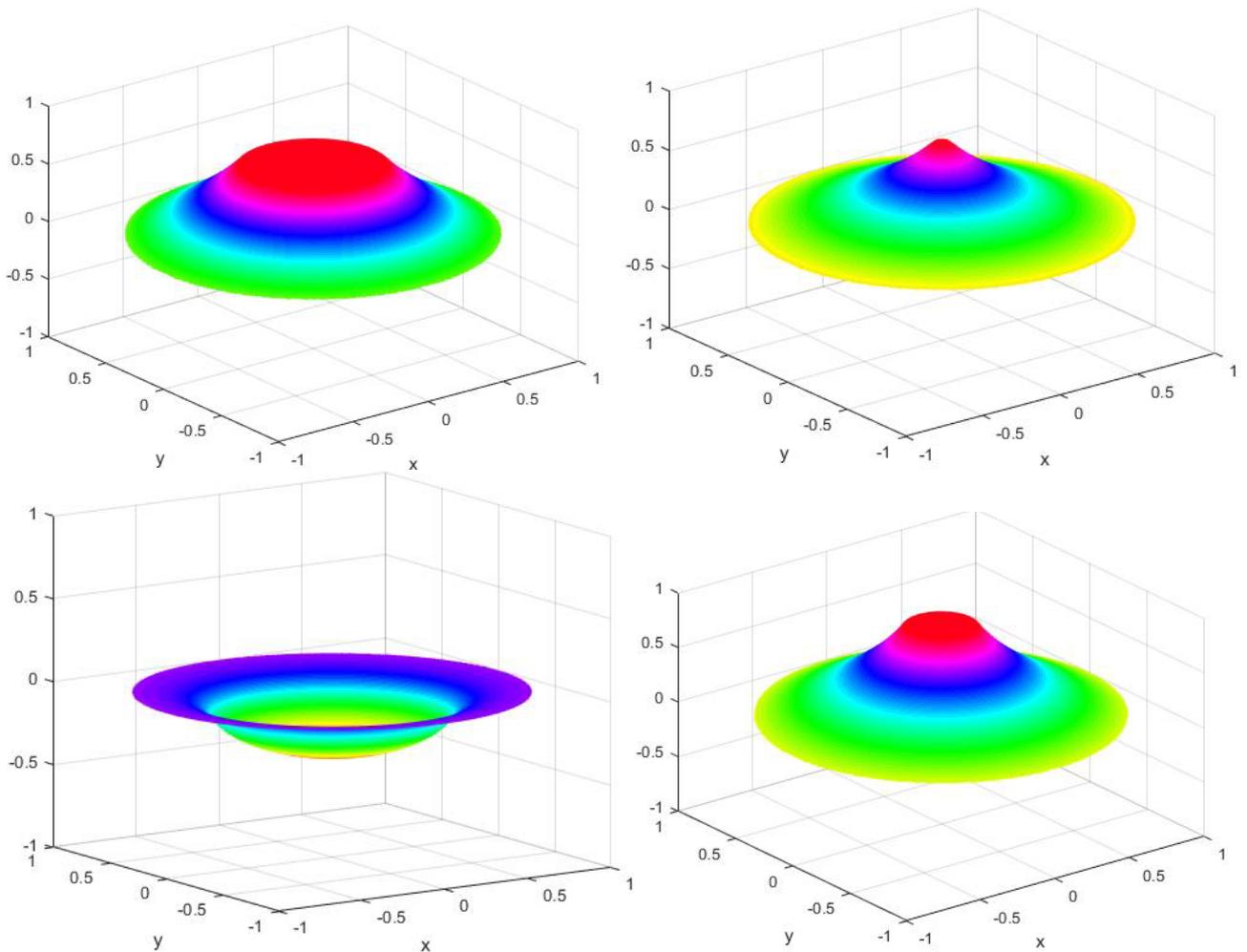


Рисунок 2.7 – Графики решения краевой задачи (2.70) – (2.72)

3 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

3.1 Метод конечных разностей для уравнения гиперболического типа

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, где нахождение решения требует высокой точности, что способствует увеличению вычислений и времени отыскания решения. В настоящий момент сеточные методы являются наиболее распространенными и эффективными методами численного решения уравнений в частных производных.

Наиболее широкое применение находит метод конечных разностей. Этому методу посвящено множество книг [16, 17, 18, 19, 20].

Суть метода конечных разностей заключается в замене, или, как говорят, аппроксимации дифференциальных коэффициентов в исходном дифференциальном уравнении на разностные коэффициенты, что позволяет свести решение уравнения к решению его разностного аналога, то есть построить его конечно-разностную схему [16].

Преимуществом данного метода является его высокая универсальность по сравнению, например, с аналитическими методами. Алгоритм и программная реализация данного метода относительно просты и не вызывают особых сложностей.

Первым делом, при создании разностной схемы необходимо заменить решения некоторым множеством дискретных значений в узлах сеточной области. Это множество представляет собой область определения функций дискретного аргумента и именуется разностной сеткой. Соответственно функции дискретного аргумента являются сеточными функциями, непосредственно сами точки называются узлами сетки, а расстояние между ними – шагом сетки.

Далее заменяя дифференциальные операторы конечно-разностными соотношениями, получаем систему конечно-разностных (алгебраических) уравнений, откуда определяем значения искомой функции в узлах сетки.

Ограничимся рассмотрением случая двух независимых переменных. Построим множество равноотстоящих точек сетки $x_i = x_0 + ih$, $0 \leq i \leq N$ и $y_j = y_0 + jk$, $0 \leq j \leq M$.

На плоскости наиболее часто применяют конечно-разностные прямоугольные сетки в соответствии с рисунком 3.1, образуемых системой прямых:

$$\begin{cases} x_i = x_0 + ih \\ y_j = y_0 + jk \end{cases},$$

где h, k – шаг сетки по оси Ox и Oy соответственно.

Точки (x_i, y_j) пересечения прямых являются узлами сетки.

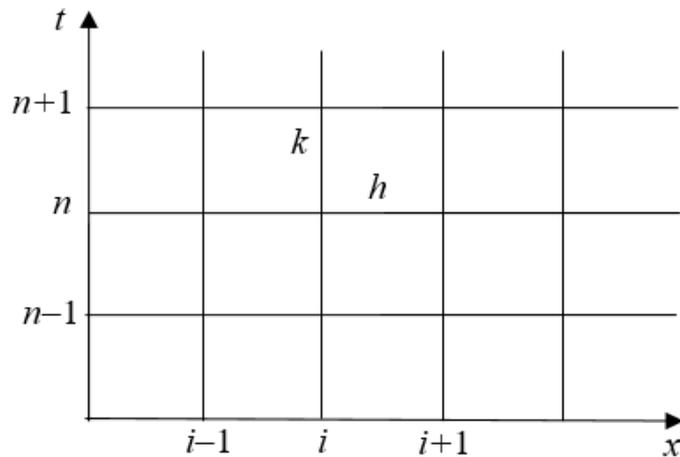


Рисунок 3.1 – Структура разностной сетки

В ходе создания разностной схемы частные производные аппроксимируются конечными разностями для сеточных функций, которые строятся аналогично формулам численного дифференцирования.

Конечно-разностная аппроксимация первых производных имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h} + O(h) \approx \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{h} + O(h) \approx \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h} + O(h^2),$$

аналогично для $\frac{\partial U}{\partial y}(x_i, y_j) \approx \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2k} + O(k^2)$.

Конечно-разностная аппроксимация вторых производных:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2),$$

аналогично для $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x_i, y_j) \approx \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2} + O(k^2)$. Тогда погрешность

аппроксимации оператора Лапласа:

$$|\omega(x, y)| \leq M \frac{h^2 + k^2}{12}, \quad M = \max \left(\left| \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right|, \left| \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} \right| \right)$$

где $U_{i,j}, U_{i+1,j}, U_{i-1,j}, U_{i,j+1}, U_{i,j-1}$ – значения функции $U(x, y)$ в точках $(x_i, y_j), (x_i + h, y_j), (x_i - h, y_j), (x_i, y_j + l), (x_i, y_j - l)$ соответственно.

Рассмотрим простейшее уравнение гиперболического типа – уравнение свободных колебаний однородной ограниченной струны:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

с начальными и граничными условиями:

$$U(x, 0) = f(x), \quad U_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$U(0, t) = \mu_1(t), \quad U(l, t) = \mu_2(t), \quad t \geq 0.$$

В системе координат $\{x, t\}$ покроем полуполосу $t \geq 0, 0 \leq x \leq l$ прямоугольной сеткой (рисунок 3.2).

$x = ih, t = jk, i = \overline{0, n}$, где h, k – шаги вдоль соответствующих осей.

Заменим исходное уравнение конечно-разностным:

$$\frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2} = a^2 \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}$$

При $k = \frac{h}{a}$ уравнение упрощается: $U_{i,j+1} = U_{i+1,j} + U_{i-1,j} - U_{i,j-1}$

Для начала вычислительного процесса необходимо знать значение температуры на двух предыдущих узлах $j = 1, j = 0$, на нулевом слое используем начальное условие, а для нахождения недостающих уравнений в системе найдем значение $U(x, t)$ на фиктивном слое с номером $j = -1$.

Для этого заменим производную во втором начальном условии конечно-

разностным отношением [17]: $\frac{U_{i,-1} - U_{i,0}}{-k} = F_i \Rightarrow U_{i,-1} = U_{i,0} - kF_i$

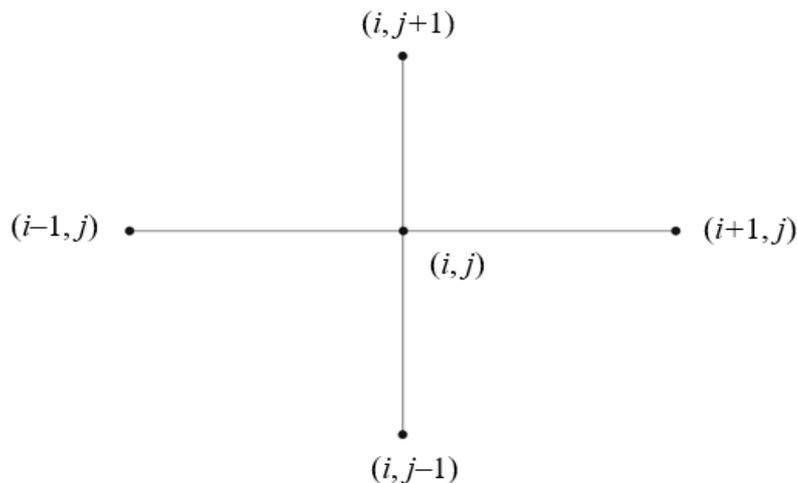


Рисунок 3.2 – Разностная схема «крест»

В методах конечных разностей требуется обеспечить качество аппроксимации, разностная задача должна соответствовать свойствам устойчивости и сходимости.

Сходимость сеточной схемы к решению краевой задачи подразумевает адекватность дискретной математической модели, получаемой в рамках этой схемы, соответствующей непрерывной математической модели, т.е. если неограниченно измельчать сетку, то последовательность решений, полученных методом сеток, будет сходиться равномерно к точному решению краевой задачи.

Качество сеточной схемы характеризуется еще одним свойством – ее устойчивостью. Под этим понимается непрерывная зависимость решения сеточной задачи от исходных данных, т.е. малым изменениям начальных условий соответствуют малые изменения решения разностной задачи. Под исходными данными понимаются значения правых частей краевой задачи, левые части краевой задачи характеризуют закон развития соответствующего процесса и закон взаимодействия с окружающей средой.

Сужение решения исходной краевой задачи на сетку не совпадает с решением дискретной задачи, но близко к нему. Если в разностную схему подста-

вить точное решение $u(x)$ исходной задачи, то возникнет невязка (точное решение не удовлетворяет разностной схеме). Эта невязка называется погрешностью аппроксимации разностной схемы, отвечающей за точность численного метода.

3.2 Инструментальные возможности ППП Matlab для моделирования волновых процессов

Большинство прикладных задач сводятся к решению дифференциальных уравнений в частных производных и их систем в областях сложной формы. В ППП Matlab включены вычислительные инструменты, расширяющие круг приложений для специальных инженерных областей. Одним из наиболее распространенных приближенных методов их решения является метод конечных элементов.

Среда PDE Toolbox (Partial Differential Equations) – это особый инструмент для решения краевых задач для уравнений в частных производных в двумерных расчетных областях методом конечных элементов. Пакет включает перечень команд, функционирующих реализацию данного метода для решения разных уравнений в частных производных второго порядка или их систем, которые могут быть эллиптическими, параболическими или гиперболическими. В дополнение, один пакет включает в себя приложения PDE Tool с графическим интерфейсом пользователя, который не требует больших знаний о методе конечных элементов и облегчает пользование перечнем функций пакета.

Гиперболические уравнения, рассматриваемые в инструментарии PDE Toolbox имеют следующий вид: $d \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \text{div}(c \cdot \text{grad}(u)) + a \cdot u = f$.

Коэффициенты d , c , a и правая часть f могут зависеть как от x и y , так и от времени.

Функции, входящие в состав PDE Toolbox, позволяют решить систему дифференциальных уравнений произвольной размерности. Среда PDE Tool оперирует только с системой второго порядка [18]:

$$-\nabla \cdot (c_{11} \nabla u_1) - \nabla \cdot (c_{12} \nabla u_2) + a_{11} u_1 + a_{12} u_2 = f_1;$$

$$-\nabla \cdot (c_{21} \nabla u_1) - \nabla \cdot (c_{22} \nabla u_2) + a_{21} u_1 + a_{22} u_2 = f_2.$$

Среда PDE Tool дает возможность искать решение только в ограниченной области Ω , позволяет определить область решения, тип и коэффициенты дифференциального уравнения, задать начальные и краевые условия, выполнить разбиение области на конечные элементы, решить полученную систему линейных уравнений и воспроизвести графическое решение задачи.

Различают три типа краевых условий:

а) граничные условия Дирихле:

$$h_{11}u_1 + h_{12}u_2 = r_1;$$

$$h_{21}u_1 + h_{22}u_2 = r_2.$$

б) граничные условия Неймана:

$$n \cdot (c_{11}\nabla u_1) + n \cdot (c_{12}\nabla u_2) + q_{11}u_1 + q_{12}u_2 = g_1;$$

$$n \cdot (c_{21}\nabla u_1) + n \cdot (c_{22}\nabla u_2) + q_{21}u_1 + q_{22}u_2 = g_2.$$

в) смешанные граничные условия:

$$h_{11}u_1 + h_{12}u_2 = r_1;$$

$$n \cdot (c_{11}\nabla u_1) + n \cdot (c_{12}\nabla u_2) + q_{11}u_1 + q_{12}u_2 = g_1 + h_{11}\mu;$$

$$n \cdot (c_{21}\nabla u_1) + n \cdot (c_{22}\nabla u_2) + q_{21}u_1 + q_{22}u_2 = g_2 + h_{12}\mu.$$

Окно меню PDE Specification способствует указанию типа и коэффициентов стационарных и нестационарных задач. Окно Boundary позволяет задать граничные условия на различных сегментах границы.

Раздел меню Plot предоставляет возможность визуализировать графическую реализацию результата [19].

Среда PDE Tool предоставляет пользователю возможность визуализации значений приближенного решения в любой заданной точке и в любой момент времени и проследить за развитием процесса в отдельном графическом окне.

В процессе работы с PDE Tool все действия пользователя автоматически генерируют программный код, который хранится в оперативной памяти. При завершении работы PDE Tool предлагает сохранить сгенерированный код в формате m-файла.

4 РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЛНОВОГО ПРОЦЕССА В ППП MATLAB

4.1 Конечно-разностная схема решения задачи

Рассмотрим процесс поперечных колебаний тонкой струны, описываемый краевой задачей (2.1) – (2.2).

Рассмотрим вопрос о построении разностной схемы, аппроксимирующей исходную задачу.

Строим прямоугольную равномерную по осям x и t сетку с узлами $(x_i, t_j) : \omega_{hk} = \{(x_i = ih, t_j = j\tau), i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M\}$ с шагами $h = \frac{l}{N}$ и $k = \frac{T}{M}$ ($0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$) и дифференциальный оператор исходного уравнения колебаний $Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Воспользовавшись для аппроксимации производных приближениями вида: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) \approx \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{k^2}$, получим сеточное уравнение, которое аппроксимирует соответствующее дифференциальное со вторыми порядками относительно шагов h и k :

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{k^2} = a^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

Заменяем разностным оператором:

$$L_{hk} = \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{k^2} - a^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}.$$

Данный оператор определен на пятиточечном шаблоне разностной схемы «крест» [20].

Выражаем узлы $(j+1)$ слоя, используя узлы предыдущих слоев:

$$u_i^{j+1} = \frac{a^2 k^2}{h^2} (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + 2u_i^j - u_i^{j-1}.$$

Учитывая, что разностный оператор $L_{h\tau}$ определен только во внутренних узлах сетки, задаем начальные и краевые условия:

- начальное условие $u(x, 0) = x$:

$$u_i^1 = x_i; \quad 0 \leq i \leq N.$$

- начальное условие $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin \frac{\pi}{2l} x + \sin \frac{3\pi}{2l} x$ (левая разностная производная):

водная):

$$\frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} = \sin \frac{\pi h}{2l} + \sin \frac{3\pi h}{2l} \Rightarrow u_i^0 = u_i^1 - \tau \left(\sin \frac{\pi}{2l} x_i + \sin \frac{3\pi}{2l} x_i \right); \quad 0 \leq i \leq N.$$

- краевое условие $u(0, t) = 0$:

$$u_1^{j+1} = 0; \quad 1 \leq j \leq M.$$

- краевое условие $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$ (левая разностная производная):

$$\frac{u_{N+1}^{j+1} - u_N^{j+1}}{h} = 0 \Rightarrow u_{N+1}^{j+1} = u_N^{j+1}; \quad 1 \leq j \leq M.$$

Условие устойчивости схемы [17]: $k \leq h$.

4.2 Алгоритм и программная реализация

Рассмотрим один из вариантов алгоритма и программной реализации начально-краевой задачи (2.1) – (2.2):

а) инициализация параметров:

Входные параметры:

L – линейный размер объекта;

T – промежуток времени, на котором строим решение;

h – шаг по координате;

τ – шаг по времени;

N – число разбиений по координате;

M – число разбиений по времени.

Выходные параметры:

x – вектор-строка координатной сетки по оси x размерности $1 \times N+1$;

t – вектор-строка сетки по оси времени размерности $1 \times s$;

U – матрица значений результирующей функции в узлах координатной сетки для каждого момента времени размерности $N+1 \times M+1$.

б) разбиение расчетной области на прямоугольную равномерную по осям x и t сетку с узлами (x_i, t_j) : $\omega_{ht} = \{(x_i = ih, t_j = jk), i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M\}$

с шагами $h = \frac{L}{N}$ по координате и $k = \frac{T}{M}$ по времени ($0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T$).

в) задание функции в начальный момент времени:

```
U(:,1) = x; % начальное условие u(x,0)
```

```
dudt = sin(pi/(2*L)*x) + sin(3*pi/(2*L)*x); % начальное условие dudt(x,0)
```

```
p = U(:,1) - tao*dudt'; % U(x,0).
```

г) организация цикла:

- по координате $i = 0, 1, \dots, N$:

```
for i=1:N
```

```
U(i,2) = 2*U(i,1)*(1-g)+g*(U(i-1,1)+U(i+1,1));
```

```
end
```

- по времени $j = 0, 1, \dots, M$:

```
for j=1:M
```

```
U(N+1,j+1)=U(N,j+1);
```

```
p = U(:,j);
```

```
end
```

Расчет функции по формулам (4.1), (4.2) и (4.3).

д) проведение вычислительного эксперимента и вывод результата:

```
plot(x',U(:,4),'b',x,U(:,11),'r',x,U(:,21),'g',x,U(:,31),'k',x,U(:,41),'c', 'LineWidth',1.5)
```

Листинг компьютерной программы краевой задачи (2.1) – (2.2) методом конечных разностей в ППП Matlab приведен в приложении.

На рисунках 4.1 и 4.2 приведены графики краевой задачи (2.1) – (2.2) на плоскости и в пространстве соответственно.

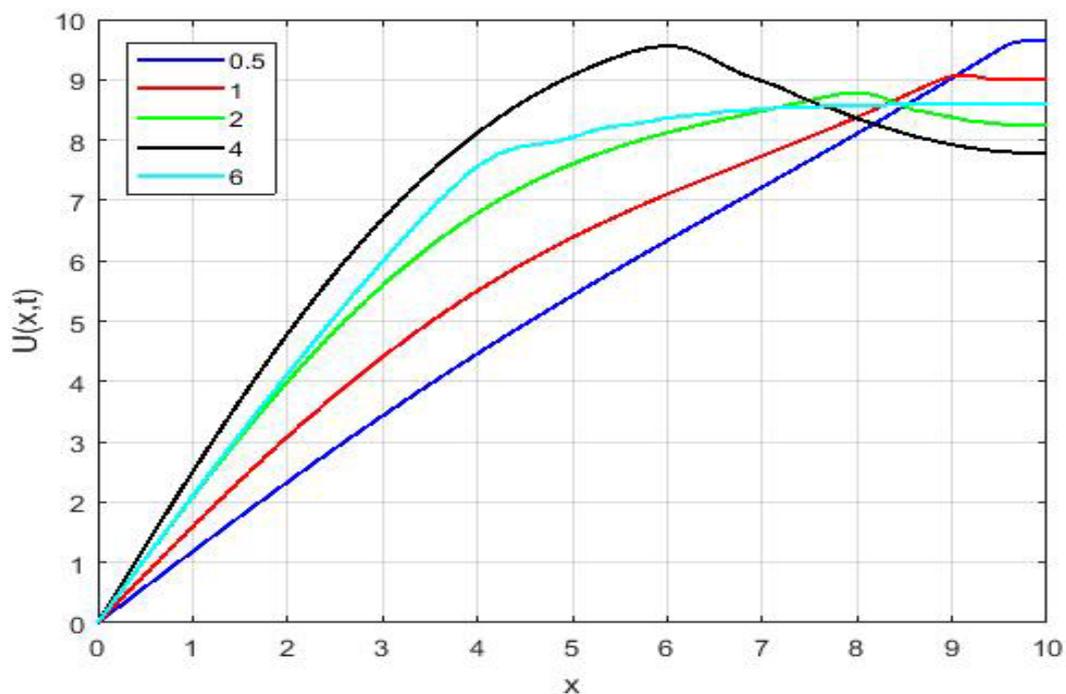


Рисунок 4.1 – График решения краевой задачи (2.1) – (2.2) на плоскости в различные моменты времени ($t=0.5$; $t=1$; $t=2$; $t=4$; $t=6$)

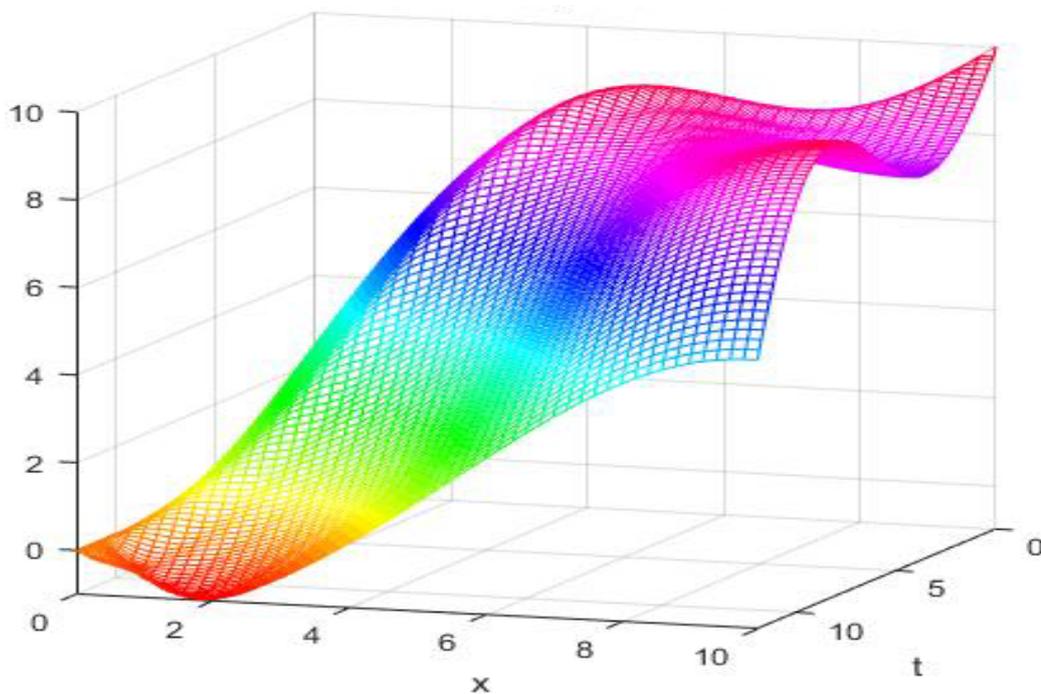


Рисунок 4.2 – График решения краевой задачи (2.1) – (2.2) в пространстве

Для проверки правильности решения был проведен сравнительный анализ полученного численного решения с аналитическим решением краевой зада-

чи (2.1) – (2.2), представленным во второй главе дипломной работы, график которого отображен на рисунке 4.3.

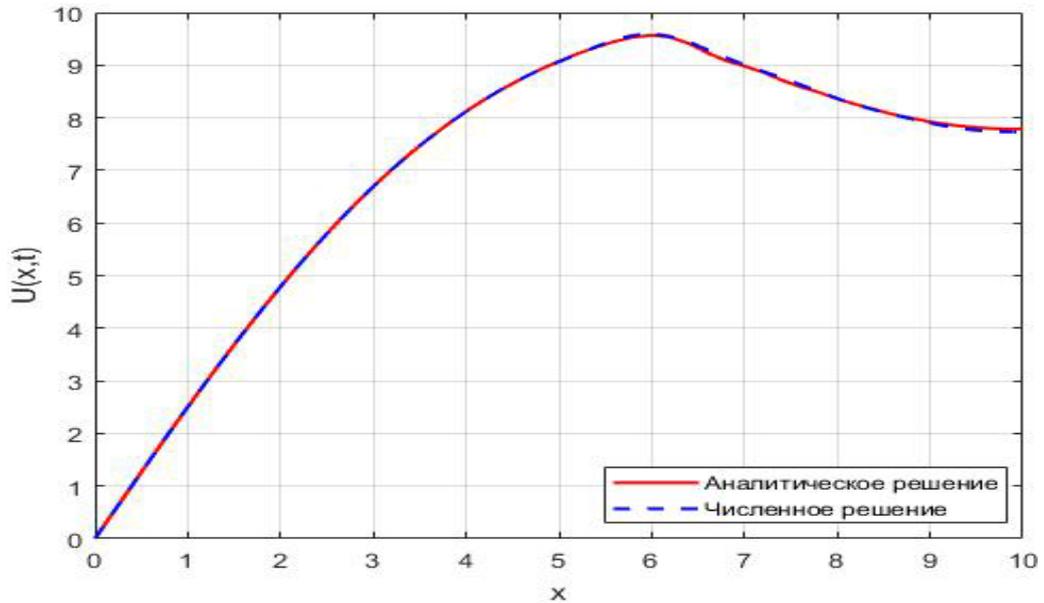


Рисунок 4.3 – Сравнение аналитического и численного решений краевой задачи (2.1) – (2.2) в момент времени $t = 4$

4.3 Применение встроенной функции PDE Tool для решения уравнения гиперболического типа

Рассмотрим процесс колебаний однородной прямоугольной мембраны, часть границы которой свободна, а остальная часть закреплена жёстко.

Математическая постановка задачи колебаний мембраны описана в краевой задаче (2.15) – (2.16).

Решение реализуем с помощью инструментария PDE Tool Matlab.

Первым делом, вводим команду *pdetool*, вызывая на экран основную форму.

В появившемся окне PDE Toolbox среды PDE Tool сконструируем область. Выберем в меню Draw пункт Rectangle/square и построим прямоугольник. Нарисуем мышью требуемую прямоугольную область на осях от угла, затем двойным щелчком мыши вызовем диалоговое окно Object Dialog, в котором зададим координаты нижнего левого угла прямоугольника, а также его ширину и высоту, например $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2$.

Задаем тип дифференциального уравнения и коэффициенты в соответствии с рисунком 4.4:

Equation:		d*u''-div(c*grad(u))+a*u=f	
Type of PDE:	Coefficient	Value	
<input type="radio"/> Elliptic	c	1.0	
<input type="radio"/> Parabolic	a	0.0	
<input checked="" type="radio"/> Hyperbolic	f	0	
<input type="radio"/> Eigenmodes	d	1.0	

Рисунок 4.4 – Окно PDE Specification

Задаем краевые условия. Входим в режим *Boundary mode*. Открываем окно Boundary Condition, предназначенное для выбора типа граничного условия. Определим коэффициенты граничного условия. Устанавливаем флажок *Show Edge Labels*, чтобы видеть номера границ [19].

Выбираем двойным щелчком нужный отрезок и указываем краевое условие (условие Неймана или Дирихле) [20].

На границах №3 и №4 ($u(0, y, t)$ и $u(x, 0, t)$) условия Дирихле в соответствии с рисунком 4.5:

Boundary condition equation:			
h*u=r			
Condition type:	Coefficient	Value	Description
<input type="radio"/> Neumann	g	0	
<input checked="" type="radio"/> Dirichlet	q	0	
	h	1	
	r	0	

Рисунок 4.5 – Окно ввода условий Дирихле

На границах №1 и №2 ($u_x(s, y, t)$ и $u_y(x, p, t)$) будут условия Неймана в соответствии с рисунком 4.6:

Condition type:	Coefficient	Value	Description
<input checked="" type="radio"/> Neumann	g	0	
<input type="radio"/> Dirichlet	q	0	
	h	1	
	r	0	

Рисунок 4.6 – Окно ввода условий Неймана

Далее экспортируем информацию в переменные среды с помощью команд Boundary – Export Decomposed Geometry, Boundary Cond's. Матрицу области назовем, например, rect1, а матрицу условий – cond1.

Затем выполняем триангуляцию области и строим сетку:

```
>> [p, e, t]=initmesh(rect1, 'Hmax', 0.1);
```

```
>> pdemesh(p, e, t); axis equal;
```

Создаем вектора, содержащие координаты узлов для задания начальных условий в узлах сетки и вектор моментов времени, в которые будем находить решение ($\tau = (0; 0.1; 0.2; \dots; 5.0)$):

```
>> x=p(1,:);
```

```
>> y=p(2,:);
```

```
>> u0=x.*y %начальное смещение;
```

```
>> ut0=0 %начальная скорость;
```

tau=linspace(0,5,51) – моменты времени для поиска решения.

Вызываем функцию *hyperbolic* и получаем сообщение об успешности поиска решения:

```
>> sol=hyperbolic(u0, ut0, tau, cond1, p, e, t, 1,0 , 0, 1);
```

Графическое представление краевой задачи (2.15) – (2.16) в некоторый момент времени $t = \tau(1) = 1$ представлено на рисунке 4.7.

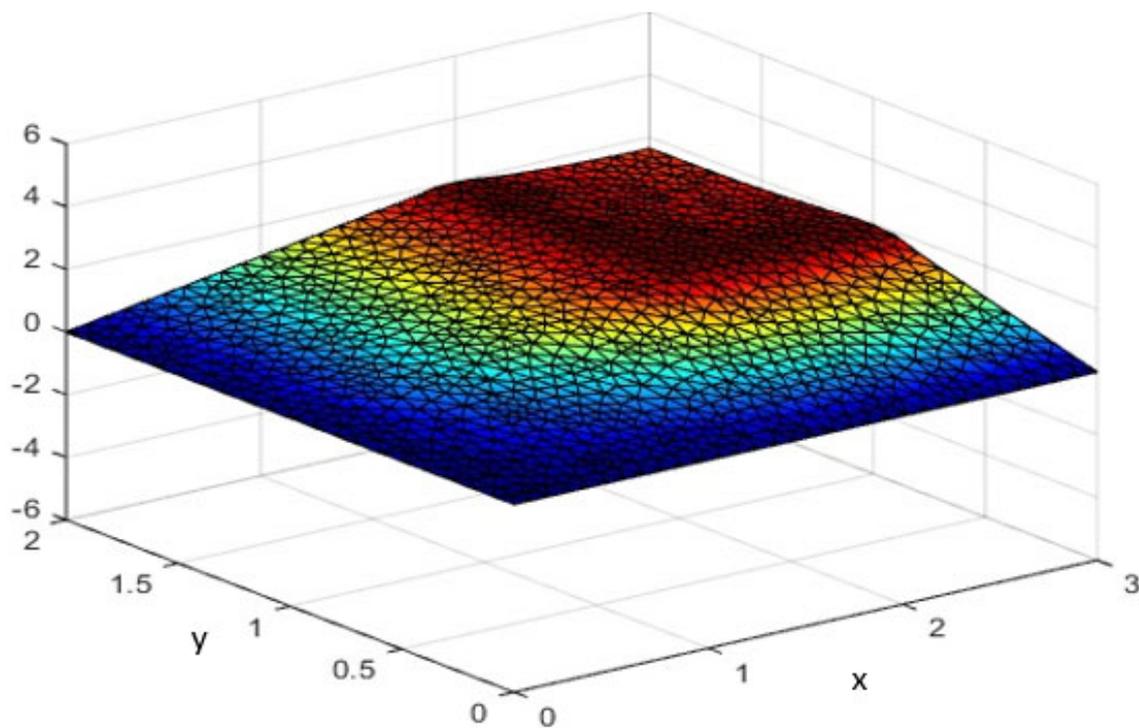


Рисунок 4.7 – График решения краевой задачи (2.15) – (2.16)

5 БЕЗОПАСНОСТЬ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ И ЗДОРОВЬЕСБЕРЕЖЕНИЕ

Данная глава посвящена влиянию физических упражнений на умственные способности человека.

Спортивные мероприятия, будь то в древности или в наше время, никогда не были обыденным занятием, не затрагивающим кроме физических способностей человека его духовную составляющую и мыслительные процессы, ведь достижения в спорте возможны в первую очередь благодаря силе психологического настроя, позволяющего преодолевать изнурительные тренировки и открывать новые границы физического совершенства. И вот, наука современности с помощью различных исследований установила, что всевозможные виды упражнений оказывают положительное влияние не только на силу мышц и выносливость, но и на функции головного мозга, улучшая умственные способности.

Мозг выполняет свои функции с помощью расположенных в нём многочисленных нейронных сетей, состоящих из нейронов, которые передают сигналы друг другу. Раньше считалось, что эти структуры у взрослого человека остаются неизменными, но сегодня учёные знают, что нейронные сети сохраняют свою пластичность и в зрелом возрасте, а значит их можно менять и развивать с помощью обучения и, как выясняется, физических упражнений. Занятия спортом оказывают прямое воздействие на структуры мозга, которые преобразуются благодаря своей нейропластичности, что приводит к усилению когнитивных функций человека. В обновлении мозга ключевую роль выполняет процесс нейрогенез (образование новых нейронов) [21]. Учёные предполагают, что данным процессом движет определённый гормон мозга, известный как нейротропный фактор мозга (BDNF). Исследования на животных показали, что физическая нагрузка значительно повышает выработку нейротропного фактора, и чем сильнее BDNF синтезируется в мозге, тем больше улучшается его способность к обучению, усвоению информации и управлению общим психологи-

ческим состоянием. Кроме того, гормон BDNF влияет на повышение ингибиторного контроля, связанного со способностью самоконтроля. В результате чего человек развивает силу воли и мысленный настрой, помогающий ему выполнять сложные задачи, которые приносят пользу не сразу, а в перспективе.

Экспериментальным путём было установлено, что некоторые виды упражнений оказывают реальное воздействие на нейропластичность мозга, причём каждый тип нагрузки имеет схожий принцип, но действует несколько иначе.

Самым эффективным тренингом не только для развития выносливости и укрепления сердечно-сосудистой системы, но и для повышения различных когнитивных функций являются *аэробные упражнения* (кардиотренировки), при которых учащается дыхание и сердцебиение, значительно усиливается кровоток в ключевых областях мозга.

Канадские учёные выяснили, что *силовые тренировки* положительно влияют на исполнительные функции мозга, то есть планирование и регуляцию сознательных действий.

Современная наука подтверждает, что *йога* действительно повышает активность мозга, улучшая психологическое состояние человека. Специальные комплексные упражнения (асаны) призваны укреплять ум и тело практикующего.

Новейшие исследования показывают, что короткие периоды максимальной интенсивности, называемые *высокоинтенсивным интервальным тренингом* (ВИИТ), способны улучшать мозговое кровообращение и стимулировать нейропластичность структур головного мозга, благодаря чему создаются условия для повышения умственных способностей, в частности, развивается навык обучаться чему-то новому.

Мааике, физиотерапевт и исследователь из университета прикладных наук в Утрехте, заметила, что мозг похож на включение компьютера: чем он старше, тем медленнее запускается. Умеренно интенсивные физические

нагрузки улучшают когнитивную функцию, скорость обработки информации и внимание.

В рамках одного исследования, проведенного в университете Питтсбурга, 120 участников (средний возраст которых был равен 67 годам) разделили на две группы: одной назначили интенсивные физические упражнения, а другой – растяжку. Спустя год их МРТ-снимки сравнили. Ученые обратили особое внимание на *гиппокамп*, играющий ключевую роль в работе нашей памяти. В группе, выполнявшей интенсивные упражнения, объем гиппокампа увеличился на 2%, а в группе, занимающейся растяжкой, уменьшился на 1,5% – нормальное явление для людей в их возрасте. Затем исследователи проанализировали еще две области мозга, менее подверженные влиянию процессов старения, и не нашли никакой разницы. Соответственно, интенсивные упражнения приносят пользу не всему нашему мозгу, а только той его части, что с годами уменьшается [22].

Более того, память у участников интенсивной спортивной группы тоже улучшилась пропорционально увеличению объема серого вещества в гиппокампе. Следовательно, интенсивные физические упражнения улучшают память.

Кроме того, исследования с участием большого количества пациентов, получающих регулярную физическую нагрузку, показывают, что занятия спортом существенно снижают риск болезни Альцгеймера, прогрессирующего заболевания головного мозга, – иногда до 50 %. Наименьшую вероятность развития заболевания имеют физически активные смолоду люди. Но даже если начать заниматься спортом в 60, это принесет пользу мозгу.

Хотя учёные ещё только открывают тайны мозга, связанные с его ответной реакцией на физическую нагрузку, уже сейчас понятно, что спорт вызывает реальные положительные изменения в структуре нейронных связей, в результате чего мозговая деятельность усиливается. Тренировочный процесс таким образом затрагивает как физическое, так и психологическое состояние человека, создавая поистине масштабные преобразования тела и духа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной бакалаврской работе основное внимание уделено изучению линейных математических моделей волновых процессов и методам построения аналитических и численных решений уравнений в частных производных.

Были представлены основные методы решения уравнений гиперболического типа на примере свободных колебаний ограниченной струны и малых поперечных колебаний прямоугольной и круглой мембраны. Задачи решены точными аналитическими и приближенными численными методами.

Аналитические решения построены при помощи метода разделения переменных. Численное решение представлено методом конечных разностей и получены графики решения искомой функции в ППП Matlab. Проведено тестирование программы с варьированием параметров и анализ полученных результатов. Изучен и применен встроенный инструментарий PDE Tool Matlab для решения двумерного уравнения гиперболического типа. В результате получен график решения уравнения при заданных начально-краевых условиях.

Приведен листинг программы решения прикладной задачи методом конечных разностей в ППП Matlab.

Результаты проделанной работы апробированы на XXVII и XXVIII научных конференциях «День науки АмГУ», а также в XX региональной научно-практической конференции «Молодежь XXI века: шаг в будущее».

По теме работы опубликованы следующие работы: [23, 24]

а) Дашинимаева, Б. Б. Применение функции Бесселя к решению краевых задач / Б. Б. Дашинимаева, Т. В. Труфанова. // Материалы XIX региональной научно-практической конференции «Молодежь XXI века: шаг в будущее». – 2018. – 3 т. – С. 25-27.

б) Дашинимаева, Б. Б. Математическое моделирование волновых процессов / Б. Б. Дашинимаева, Т. В. Труфанова. // Материалы XX региональной научно-практической конференции «Молодежь XXI века: шаг в будущее». – 2019. – 3 т. – С. 152-154.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Смирнов, М. М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка / М. М. Смирнов. – М. : Наука, 1964. – 208 с.
- 2 Фарлоу, С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: пер. с англ. / С. Фарлоу. – М. : Мир, 1985. – 384 с.
- 3 Мартисон, Л. К. Дифференциальные уравнения математической физики / Л. К. Мартисон, Ю. И. Малов. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. – 368 с.
- 4 Русак, В. Н. Математическая физика / В. Н. Русак. – Минск : Издательство «Дизайн про», 1998. – 207 с.
- 5 Дзержинский, Р. И. Уравнения математической физики / Р. И. Дзержинский, В. А. Логинов. – М. : Московская государственная академия водного транспорта, 2015. – 66 с.
- 6 Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – 9-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательский центр «Академия», 2004. – 560 с.
- 7 Савельев, И. В. Курс общей физики / И. В. Савельев. – М. : АСТ. Астрель, 2006. – 256 с.
- 8 Соболев, С. Л. Уравнение математической физики / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1996. – 444 с.
- 9 Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: МГУ, 2004. – 798 с.
- 10 Захаров, Е. В. Уравнения математической физики / Е. В. Захаров, И. В. Дмитриева, С. И. Орлик. – М. : Академия, 2010. – 318 с.
- 11 Агошков, В. И. Методы решения задач математической физики / В. И. Агошков, П. Б. Дубовский, В. П. Шутяев. – М. : Физматлит, 2002. – 320 с.
- 12 Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. – 2-е изд. – М. : Физматлит, 2004. – 398 с.
- 13 Бицадзе, А. В. Сборник задач по уравнениям математической физики / А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко. – 3-е изд. – М. : Альянс, 2007. – 311 с.

- 14 Холодова, С. Е. Специальные функции в задачах математической физики / С. Е. Холодова, С. И. Перегудин. – СПб. : НИУ ИТМО, 2012. – 71 с.
- 15 Труфанова, Т.В. Методы решения уравнений математической физики / Т.В. Труфанова, А.Г. Масловская, Е.М. Веселова. – Благовещенск : Изд-во Амур. гос. ун-та, 2015. – 196 с.
- 16 Вержбицкий, В. М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения /В. М. Вержбицкий. – 2-е изд., испр. – М. : ОНИКС, 2005. – 400 с.
- 17 Бахвалов, С. В. Численные методы / С. В. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : Бинوم. Лаборатория знаний, 2011. – 640 с.
- 18 Ануфриев, И. Е. MATLAB 7 / И. Е. Ануфриев, И. Е. Смирнов, Е. Н. Смирнова. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.
- 19 Кетков, Ю. Л. MATLAB 6.x.: Программирование численных методов / Ю. Л. Кетков, А. Ю. Кетков, М. М. Шульц. – СПб. : БХВ-Петербург, 2004. – 672 с.
- 20 Самарский, А. А. Введение в численные методы / А. А. Самарский. – СПб. : Лань, 2009. – 288 с.
- 21 Журавлева, А. И. Спортивная медицина и лечебная физкультура /А. И. Журавлева, Н. Д. Граевская. – М. : Медицина, 2017. – 291 с.
- 22 Епифанов, В. А. Лечебная физическая культура и спортивная медицина / В. А. Епифанов. – М. : Медицина, 2014. – 304 с.
- 23 Дашинимаева, Б. Б. Применение функции Бесселя к решению краевых задач / Б. Б. Дашинимаева, Т. В. Труфанова. // Материалы XIX региональной научно-практической конференции «Молодежь XXI века: шаг в будущее». – 2018. – 3 т. – С. 25-27.
- 24 Дашинимаева, Б. Б. Математическое моделирование волновых процессов / Б. Б. Дашинимаева, Т. В. Труфанова. // Материалы XX региональной научно-практической конференции «Молодежь XXI века: шаг в будущее». – 2019. – 3 т. – С. 152-154.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Листинг программной реализации метода конечной разности для решения уравнения гиперболического типа.

```
clear
clc
close all

a = 1;
L = 10;
N = 50;
h = L/N
tao = h/2;
M = 120;
T = M*tao
g=tao^2*a^2/h^2
U = zeros(N+1,M+1);
x = 0:h:L;
t = 0:tao:T;
U(1,:) = 0; %г.у при x=0
U(:,1) = x; %Н.У u(x,0)
dudt = sin(pi/(2*L)*x) + sin(3*pi/(2*L)*x); %Н.У dudt(x,0)
p = U(:,1) - tao*dudt'; % U(x,0)

for j = 1:M%время
    for i = 2:N%координата
        U(i,j+1) = 2*U(i,j)*(1-g)-p(i)+g*(U(i-1,j)+U(i+1,j));
    end
    U(N+1,j+1)=U(N,j+1);
    p = U(:,j);
end

plot(x',U(:,4),'b',x,U(:,11),'r',x,U(:,21),'g',x,U(:,31),'k',
x,U(:,41),'c','LineWidth',1.5)
legend('0.5','1','2','3','4','Location','northwest')
xlabel('x')
ylabel('U(x,t)')
grid on

%проверка г.у. условия dudx(L,t)=0
U(end,:)-U(end-1,:)
U(1,:)
%график
[X,Y]=meshgrid(t,x);
figure
mesh(X,Y,U)
shading interp;
colormap(hsv)
```