Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

Факультет математики и информатики
Кафедра математического анализа и моделирования
Направление подготовки 01.03.02 – Прикладная математика и информатика
Профиль: Математическое и информационное обеспечение экономической деятельности

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Зав. кафедрой
_____________ Н.Н. Максимова
«______»________________ 2017 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему: Моделирование процесса риска и расчет вероятности разорения

Исполнитель
студент группы 352об _____________________ А.Г. Верхотурова
(подпись, дата)

Руководитель
Доцент _____________________ В.А. Труфанов
(подпись, дата)

Нормоконтроль
доцент, канд. техн. наук _____________________ А.В. Рыженко
(подпись, дата)

Благовещенск 2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

Факультет математики и информатики
Кафедра математического анализа и моделирования

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой
_____________ Н.Н. Максимова
«______»_______________2017 г.

ЗАДАНИЕ

К бакалаврской работе студента Верхотуровой Анастасии Геннадьевны.

1. Тема бакалаврской работы: Моделирование процесса риска и расчет вероятности разорения (утверждена приказом от 10.04.2017 № 770-уч.).

2. Срок сдачи студента законченной работы:13 июня 2017 г.

3. Исходные данные к выпускной квалификационной работе: сведения из литературных источников, диссертаций, монографий, справочные данные, определяющую предметную область.

4. Содержание выпускной квалификационной работы: анализ и формализация сведений о предметной области – описание модели индивидуального и коллективного риска; адаптация данных и методов анализа к рабочей программного приложения; описание этапов реализации алгоритмов в программной среде Matlab; проведение вычислительных экспериментов, анализ результатов имитационного моделирования.

5. Перечень материалов приложения, листинги вычислительных программ, скриншоты пользовательского интерфейса программ.

6. Консультанты по бакалаврской работе – нормоконтроль: Рыженко А.В., канд. техн. наук, доцент.

7. Дата выдачи задания 24.04.2017 г.

Руководитель бакалаврской работы: Труфанов В.А., доцент.

Задание принял к исполнению: ____________ А.Г. Верхотурова

РЕФЕРАТ

Работа содержит 50 с., 10 рисунков, 2 таблицы, 1 приложение, 16 источников.

ПРОЦЕСС РИСКА, ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗОРЕНИЯ, СТРАХОВАЯ КОМПАНИЯ, МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО, ТЕОРИЯ СТРАХОВАНИЯ

Целью данной работы является исследование модели риска, в частности получение явного представления для вероятности разорения, построение алгоритма расчёта и численного моделирования вероятности разорения и проверка с помощью компьютерного моделирования.

Разработан программный модуль для оценки вероятности разорения страховой компании.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

История теории страхования восходит к началу XVIII века; ее возникновение принято связывать с именем Эдуарда Ллойда, владельца кофейни в Лондоне, пришедшего к идее страхования транспортных рисков в морских перевозках. Сейчас страхование – неотъемлемая часть мировой экономики, всемирная индустрия, доходы которой непрерывно растут. Роль страхования огромна и область его распространения постоянно увеличивается. Идея страхования основана на учете случайностей, и это связывает его с такими разделами математики как теория вероятностей и математическая статистика.

Слияние методов из различных теорий привело к созданию новой ветви науки, называемой страховой математикой. Из множества областей страховой математики можно выделить такие разделы как теория риска, личное страхование, платежеспособность, пенсионные фонды, модели выживания и распределения потерь и другие. Каждой из этих областей посвящено множество научных работ, так что теоретическая база страховой математики весьма обширна.

Основателем теории риска считается Ф. Лундберг. Он первым рассмотрел задачу об оценке вероятности разорения. Основы теории риска как математической теории были сформулированы Х. Крамером. Дальнейшие шаги в развитии теории были сделаны Х. Гербером, С. Несбиттом, Дж. Бекманом, П. Эмбрехтсом и многими другими. Для изучения теории риска был задействован целый ряд специальных методов теории вероятностей: мартингальный подход, теория марковских процессов, теория «геометрического суммирования» случайных величин и др. Использование этих методов позволило продвинуться в изучении асимптотического поведения вероятностей разорения, разработке методов одностороннего и двухстороннего оценивания вероятностей разорения, построении нестандартных моделей риска.

В настоящее время теория риска все еще находится в стадии интенсивного развития, к удовлетворению ее исследователей, и, возможно, к сожалению потенциальных ее потребителей, заинтересованных в возможности наискорейшего использования результатов теории. Актуальность проблем, связанных с теорией риска, вызвана ростом популярности страхового дела в мире; в последнее десятилетие теория страхования начала развиваться и в России.

Строящиеся в теории риска математические модели предназначены для описания реальных процессов изменения капитала, происходящих внутри финансовых структур. Классический процесс риска как базовая модель теории риска получил широкое применение для описания деятельности страховых компаний в развитых странах со стабильной экономикой. Однако эта модель содержит допущение, существенно ограничивающее область ее применения, — линейность притока страхового капитала. Очевидный интерес представляет более общая модель, учитывающая стохастический характер притока капитала в страховую компанию.

Цель работы: исследовать модель риска, в частности получит явное представление для вероятности разорения, построить алгоритм расчёта и численное моделирования вероятности разорения и проверить с помощью компьютерного моделирования.

Первая глава посвящена обзору результатов исследований классического процесса риска и изложения вычислительной вероятности разорения.

Во второй главе вводится понятие процесса риска со случайным притоком страховых взносов и строится соответствующая теория, а так же рассматривается алгоритм вычисления процессов риска.

В третей главе описаны алгоритмы оценки вероятности разорения страховой компании методом имитационного моделирования. Также рассмотрен программный модуль на основе исследуемых алгоритмов.

1 ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОБЛЕМАТИКИ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ

1.1 Процесс риска страховой компании

Одним из основных вопросов актуарной математики является вопрос об изучении процесса изменения капитала страховой компании с течением времени - так называемого процессы риска. На величину капитала страховой компании прямо или косвенно влияют различные факторы, такие как инфляция, изменение стоимости национальной денежной единицы по отношению к другим видам валют, доходы от вложения денежных средств в банковские структуры, инвестиционная деятельность, расходы, связанные с приобретением основных средств, расходы на оплату труда работников страховой компании, спонсорская деятельность, рекламные расходы и т.д. Но основными причинами изменения капитала страховой компании является поступление премий (страховых взносов от клиентов) и страховые выплаты, связанных с покрытием исков, предъявляемых страховой компании. Именно с позиций этих двух процессов обычно строят модель деятельности страховой компании. Политика страховой компании состоит в том, чтобы определить необходимые размеры премий и выплат, получить при этом определенный доход и не утратить способность делать выплаты по предъявляемым искам.

Математические формулировки вероятности разорения были даны Харальдом Крамером в работах [12-13]. В этих работах были введены основные понятия теории риска и описаны важные результаты теории риска, такие как неравенство Лундберга, аппроксимация Крамера-Лундберга и др.

Рассмотрим капитал компании U в момент времени t, который складывается из начального капитала $u = U\ (0)$, накопленной суммы страховых взносов (премий) $P(t)$, за вычетом расходов, связанных с покрытием исков (страховых выплат) $S(t)$:

$$U(t) = u + P(t) - S(t). \tag{1.1}$$

В большинстве работ рассматривается так называемый классический процесс Крамера-Лундберга

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N_i} Y_i, \qquad (1.2)$$

в котором поступление премий считается детерминированным и линейно зависит от времени, величины выплат Y_i являются случайными и происходят в соответствии с процессом Пуассона интенсивности λ, а величина N_t – есть количество исков на интервале времени $(0,t]$. Кроме того, мы предполагаем, что:

1) величины выплат не зависят от числа исков;

2) величина выплаты для одного иска не зависит от выплаты для другого иска;

3) все иски являются однородными.

В терминах теории вероятности эти три пункта можно записать так:

1) N и $(Y_1, Y_2 ...)$ независимы;

2) $Y_1, Y_2 ...$ независимы;

3) $Y_1, Y_2 ...$ имеют одну и ту же функцию распределения.

Обозначим функцию распределения исков через G_y. Ее моменты через $\mu_n = E[Y_1^n]$, преобразование Лапласа через $L_Y(z)$, которое определяется как

$$L_Y(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} dF_Y(x). \qquad (1.3)$$

Пусть среднее значение величины исков $\mu = \mu_1$, и $\mu < \infty$. Если такое условие не соблюдается, то теряется всякий смысл страхования. Заметим, что $G_Y(x) = 0$ для $x < 0$, кроме того, логично предположить, что $G_Y(0) = 0$.

В классическом процессе Крамера-Лундберга скорость поступления премий c есть величина постоянная на протяжении всего времени слежения за процессом риска. Скорость поступления премий, в соответствии с принципом математического ожидания, можно записать в следующем виде:

$$c = (1+\theta)\lambda\mu, \qquad (1.4)$$

где μ – среднее значение величины исков;

λ – параметр процесса Пуассона или интенсивность (число исковых случаев в единицу времени);

$\theta > 0$ – так называемая «относительная надбавка на безопасность», имеющая смысл удельного дохода страховой компании, который гарантирует, что поток премий превышает усредненные выплаты по искам за единицу времени.

1.2 Вероятность разорения

Для страховой компании важно, чтобы величина $U(t)$ всегда оставалась выше определённого уровня, например, нуля. Определим время разорения как

$$\tau = \inf\{t > 0 \,|\, U(t) < 0\}. \tag{1.5}$$

Главным образом нас будет интересовать вероятность разорения на интервале (0, *t)*

$$\psi(u,t) = P[\tau \le t \,|\, U(0) = u] \tag{1.6}$$

и вероятность разорения на бесконечности

$$\psi(u) = \lim_{t\to\infty} \psi(u,t) = P[\tau < \infty \,|\, U(0) = u]. \tag{1.7}$$

Вероятность разорения есть убывающая функция от *u* и возрастающая от *t.*

Обозначим времена возникновения исков через $T_1, T_2, \ldots$. Для удобства положим $T_0 = 0$. Пусть $X_i = c(T_i - T_{i-1}) - Y_i$. Если рассматривать величину капитала компании в эти моменты времени, то можно записать, что величина

$$U(T_n) = u + \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{1.8}$$

является случайной блуждающей величиной. Из теории случайного блуждания мы можем видеть, что разорения происходит в том случае, если $E[X_i] \le 0$. Таким образом можно записать

$$E[X_i] > 0 \Leftrightarrow c\frac{1}{\lambda} - \mu > 0 \Leftrightarrow c > \lambda\mu \Leftrightarrow E[U(t) - u] > 0.$$

Поскольку

$$E[\sum_{i=1}^{N_t} Y_i] = \lambda t \mu. \tag{1.9}$$

Тогда, для того, чтобы вероятность разорения была отлична от нуля, среднее значение поступления премий должно быть строго больше среднего значения расходов на страховые выплаты. Это условие называется условием чистой прибыли.

Если условие чистой прибыли соблюдается, то $U(T_n)$ стремится к бесконечности при $n \to \infty$. Таким образом величина

$$\inf\{U(t)-u \mid t>0\} = \inf\{U(T_n)-u \mid n \geq 1\} \tag{1.10}$$

конечна. Таким образом, мы можем записать, что

$$\lim_{u\to\infty}\psi(u)=0. \tag{1.11}$$

1.2.1 Поправочный коэффициент.

Для дальнейших рассуждений необходимо ввести так называемый поправочный коэффициент (adjustment coefficient), или коэффициент Лундберга *k*, который определяется как решение уравнения

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{ku}(1-G_Y(u))du = 1 \tag{1.12}$$

или

$$1+(1+\theta)k\mu = L_Y(-k).$$

Легко убедится, что $k=0$ является решением (1.12), но нас будет интересовать положительное, отличное от нуля решение. Заметим, что $L_Y(0)=1, L_Y^{'}(z)<0, L_Y^{''}(z)>0$ и $L_Y^{'}(0)=-\mu$. Таким образом кривые $y=L_Y(z)$ и $y=1-(1+\theta)\mu z$ могут пересекаться, давая нужное нам решение, которое аналитически можно получить лишь для ограниченного числа распределений. В общем случае решение может быть найдено только численно.

В качестве такого метода можно использовать метод Ньютона [7]. Так, определим функцию

$$H(z)=1+(1+\theta)\mu z - L_Y(-z), \tag{1.13}$$

В самом деле, *k*>0 есть решение уравнения $H(k)=0$. Отсюда

$$H^{'}(z)=(1+\theta)\mu + L_Y^{'}(-z). \tag{1.14}$$

Можно вычислить поправки к оценкам *k* по формуле

$$k_{i+1}=k_i-\frac{H(k_i)}{H^{'}(k_i)} \tag{1.15}$$

начиная с начальной оценки k_0. Так как нам известно, что один корень k=0 $(H(0)=0)$, то k_0 не должно быть слишком близким к нулю. Если $\mu_2^{'}=E[Y^2]$ и $\mu_3^{'}=E[Y^3]$, то, разлагая экспоненту в ряд (взяв только первые четыре слагаемых), получаем

$$\begin{aligned} L_Y(-k) &= \int_0^{\infty} e^{kx} dG_Y(x) > \int_0^{\infty} (1+kx+\frac{1}{2}k^2x^2+\frac{1}{6}k^3x^3)dG_Y(x) = \\ &= 1+k\mu+\frac{k^2\mu_2'}{2}+\frac{k^3\mu_3'}{6}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Из (1.12) вытекает $1+(1+\theta)\mu k > 1+k\mu+\dfrac{k^2\mu_2'}{2}+\dfrac{k^3\mu_3'}{6}$. Другими словами, $\mu_3'k^2+3\mu_2'k-6\theta\mu<0$. Так как $\mu_3'>0$, то значение k лежит между двумя корнями этого квадратного уравнения. Один корень отбрасываем, так он является отрицательным. Итак, имеем

$$k<\frac{-3\mu_2'+\{9\mu_2^{'2}+24\mu\mu_3'\theta\}^{\frac{1}{2}}}{2\mu_3'}=\frac{12\mu\theta}{3\mu_3'+\{9\mu_2^{'2}+24\mu\mu_3'\theta\}^{\frac{1}{2}}}. \tag{1.17}$$

В формуле (1.17) равенство следует из выражения $a-b=(a^2-b^2)/(a+b)$. Так, правая часть (1.17) может быть использована в качестве начального значения k_0 в методе Ньютона. Если вызывает затруднение вычисление μ_3' можно воспользоваться выражением

$$\frac{12\mu\theta}{3\mu_3'+\{9\mu_2^{'2}+24\mu\mu_3'\theta\}^{\frac{1}{2}}}<\frac{12\mu\theta}{3\mu_3'+\{9\mu_2^{'2}\}^{\frac{1}{2}}}=\frac{2\mu\theta}{\mu_2'}. \tag{1.18}$$

Правая часть выражения (1.18) также может быть использована в качестве начального значения, но оно более отдалено от корня, хотя и проще для вычисления.

1.2.2 Неравенство Лундберга. Важным результатом в теории риска является верхняя граничная оценка вероятности разорения, часто называемая неравенством Лундберга, которое формулируется следующим образом.

Теорема 1. Если существует k>0, удовлетворяющий уравнению (1.12), то выполняется следующее неравенство [8]:

$$\psi(u) \le e^{-ku}, u \ge 0. \tag{1.19}$$

1.2.3 Аналитическое выражение для вероятности разорения. Покажем, что вероятность разорения удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению. Впервые оно было получено Крамером в 1955 году. Рассмотрим следующую теорему в применении к величине, называемой вероятностью неразорения или выживания $\phi(u)$, связанную с вероятностью разорения следующим выражением

$$\phi(u) = 1 - \psi(u). \tag{1.20}$$

Теорема 2. Вероятность неразорения $\phi(u) = 1 - \psi(u)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению (1.21) [8]:

$$c\phi'(u) = \lambda\phi(u) - \lambda\int_0^u \phi(u-x)dG_Y(x), u \ge 0. \tag{1.21}$$

Пример 1. Рассмотрим случай, когда иски имеют показательное распределение *e(β)* с функцией распределения $G_Y(x) = 1 - e^{-\beta x}$. Тогда выражение (1.21) можно записать как

$$c\phi'(u) = \lambda\phi(u) - \lambda e^{-\beta u}\int_0^u \phi(y)\beta e^{\beta y}dy. \tag{1.22}$$

Дифференцируя (1.22) получаем

$$c\phi''(u) = \lambda\phi'(u) + \lambda\beta e^{-\beta u}\int_0^u \phi(y)\beta e^{\beta y}dy - \beta\phi(u) = \lambda\phi'(u) - \beta c\phi'(u).$$

Решением этого дифференциального уравнения является

$$\phi(u) = A + Be^{-(\beta - \lambda/c)u}.$$

Так как $\phi(u) \to 1$ при $u \to \infty$, то *A=1*. По причине того, что $\phi(0) = 1 - \lambda/(\beta c)$, решение имеет вид

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{\beta c}e^{-(\beta - \lambda/c)u}. \tag{1.23}$$

1.2.4 Связь вероятности разорения с процессами массового обслуживания. В работе [6] был предложен новый метод оценки вероятности разорения страховой компании в классическом случае, основанный на связи вероятности разорения с процессами массового обслуживания.

Вероятность разорения на бесконечности может быть найдена с помощью моделирования, если иметь в виду две вещи: во-первых, вероятность разорения должна быть эквивалентна стационарному распределению некоторого связанного процесса, а во-вторых, если это стационарное распределение может быть получено с помощью «pathwise» моделирование.

Пусть у нас имеется классический процесс Крамера-Лунберга (1.2). Введем новый процесс

$$L(t) = S(t) - ct, t \geq 0 \tag{1.24}$$

имеющий смысл суммы потерь к моменту времени *t*, и

$$M(t) = \max_{0 \leq z \leq t} L(z), t \geq 0 \tag{1.25}$$

максимальная суммарная величина потери на интервале времени от 0 до *t*. Тогда имеем

$$1 - \psi(u,t) = \Pr[M(t) \leq u], \tag{1.26}$$

то есть вероятность неразорения $\varphi(u)$ к моменту времени *t* (функция начального капитала) есть функция распределения *M*(*t*).

Введем новый процесс

$$W(t) = L(t) - \min_{0 \leq z \leq t} L(z). \tag{1.27}$$

Процесс $\{W(t)\}$ получается из процесса $\{L(t)\}$ введением удерживающего барьера на уровне нуля.

Обозначим через

$$F(x,t) = \Pr[W(t) \leq x] \tag{1.28}$$

функцию распределения *W*(*t*). Перепишем (1.27) в виде

$$W(t) = \max_{0 \leq z \leq t} \{L(t) - L(z)\}. \tag{1.29}$$

Так как процесс $\{L(t)\}$ имеет независимые и стационарные приращения, то *W*(*t*) и *M*(*t*) имеют одинаковое распределение. Отсюда следует, что

$$1 - \psi(u,t) = F(u,t). \tag{1.30}$$

Пусть

$$F(x)=\lim_{t\to\infty}F(x,t) \tag{1.31}$$

– стационарное распределение процесса $\{W(t)\}$. Из (1.30) следует, что

$$1-\psi(u)=F(u). \tag{1.32}$$

Распределение $F(x)$ может быть получено следующим образом. Пусть для некоторого значения x, $D(x, t)$ – суммарное время, которое процесс $\{W(t)\}$ находится ниже этого уровня x к моменту времени t. Тогда можно показать, что

$$\frac{D(x,t)}{t}\to F(x),\ \text{при}\ t\to\infty. \tag{1.33}$$

Это следует из закона больших чисел. С помощью выражений (1.32) и (1.33) можно определить вероятность разорения, моделируя процесс $\{W(t)\}$ лишь однократно [6].

1.3 Аппроксимации вероятности разорения

1.3.1 Асимптотическая формула Крамера-Лундберга. Неравенство Лундберга (1.19) дает оценку верхней границы значения вероятности разорения. Для более точной оценки вероятности разорения существует очень важный результат, который носит название аппроксимации Крамера-Лунберга [9-10].

Теорема 1. Если существует поправочный коэффициент и выполняется следующее неравенство

$$\int_0^\infty xe^{kx}(1-G_Y(x))dx<\infty \tag{1.34}$$

то имеет место выражение

$$\lim_{u\to\infty}\psi(u)e^{ku}=\frac{c-\lambda\mu}{\lambda M_Y{}'(k)-c}. \tag{1.35}$$

Аппроксимация Крамера-Лундберга дает хорошие приближения для вероятности разорения, но мы не можем оценить точность таких приближений. Как показывает расчёты, погрешность может быть весьма велика.

Отметим, что аппроксимация Крамера-Лундберга может быть найдена в случаях, когда распределение исков имеет лёгкий правый хвост, то есть когда правая часть распределения убывает, по крайней мере, экспоненциально. Но, как показывает финансовый анализ страхового рынка, реальные данные очень часто подчиняются распределениям с тяжёлыми хвостами.

1.3.2 Диффузионная аппроксимация вероятности разорения.

Пусть $U_t^{(n)}$ – последовательность классических процессов Крамера-Лундберга с интенсивностью исков

$$\lambda^{(n)} = n\lambda, \tag{1.36}$$

распределения исков

$$G_Y^{(n)}(x) = G_Y(x\sqrt{n}) \tag{1.37}$$

и скоростью поступления премий

$$U_t^{(n)} \to (u + W_t), \tag{1.38}$$

где W_t – броуновской движение с параметрами $(c - \lambda\mu, \lambda\mu_2)$.

Пусть число исков в единицу времени стремится к бесконечности, а размеры исков будут малыми, так что распределение $U_1^{(n)} - u$ сводится к нормальному распределению и $E[U_1^{(n)} - u] = c - \lambda\mu$. Обозначив время разорения процесса $U_t^{(n)}$ через $\tau^{(n)}$, а вероятность разорения броуновского процесса через $\tau = \inf\{t \geq 0 : u + W_t < 0\}$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} P[\tau^{(n)} \leq t] = P[\tau \leq t]$ и $\lim\limits_{n\to\infty} P[\tau^{(n)} \leq \infty] = P[\tau \leq \infty]$.

Диффузионная аппроксимация основана на замене $P[\tau^{(1)} \leq t]$ на $P[\tau \leq t]$ и $P[\tau^{(1)} \leq \infty]$ на $P[\tau \leq \infty]$. Можно показать, что если (W_t) – есть броуновское движение с параметрами (m, η^2) с *m>0* и $\tau = \inf\{t \geq 0 : u + W_t < 0\}$, то вероятность разорения на бесконечности равна

$$P[\tau < \infty] = e^{\frac{-2um}{\eta^2}}. \tag{1.39}$$

А вероятность разорения за время *t*

$$P[\tau < t] = 1 - \Phi(\frac{mt + u}{n\sqrt{t}}) + e^{\frac{-2um}{\eta^2}} \Phi(\frac{mt - u}{n\sqrt{t}}). \tag{1.40}$$

Недостатком диффузионной аппроксимации является низкая точность получаемых результатов, причём этот метод работает, если отношение $c/(\lambda\mu)$ близко к единице.

1.3.3 Аппроксимация де Вильдера.

Более точным является метод, предложенный де Вильдером. Эта аппроксимация является эвристической и основана на том, что вместо исходного процесса U_t рассматривается процесс $\tilde{U}_t$, у которого иски имеют показательное распределение, и, соответственно, известно точное аналитическое выражение для вероятности разорения. Процессы U_t и $\tilde{U}_t$ связаны между первыми моментами

$$E[(U_t-u)^k]\equiv E[(\tilde{U}_t-u)^k], k=1,2,3. \tag{1.41}$$

Первые три центральных момента можно записать в виде выражений

$$E[U_t-u]=(c-\lambda\mu)t=(\tilde{c}-\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\beta}})t, \tag{1.42}$$

$$E[(U_t-u)^2]=Var[U_t]=Var[u+ct-U(t)]=\lambda\mu_2 t=\frac{2\tilde{\lambda}}{\tilde{\beta}^2}t \tag{1.43}$$

и

$$E[(U_t-E[U_t])^3]=-E[(u+ct-U_t-E[u\_ct-U_t])^3]=-\lambda\mu_3 t=-\frac{6\tilde{\lambda}}{\tilde{\beta}^3}t\,. \tag{1.44}$$

Из системы уравнений (1.40)-(1.42) можно найти три параметра:

$$\tilde{\beta}=\frac{3\mu_2}{\mu_3}, \tag{1.45}$$

$$\tilde{\lambda}=\frac{\lambda\mu_2\tilde{\beta}^2}{2}=\frac{9\mu_3^2}{2\mu_3^2}\lambda, \tag{1.46}$$

$$\tilde{c}=c-\lambda\mu+\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\beta}}=c-\lambda\mu+\frac{3\mu_2^2}{2\mu_3}\lambda. \tag{1.47}$$

Отсюда аппроксимация де Вильдера вероятности разорения на бесконечности имеет вид

$$\psi(u) \approx \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\beta}\tilde{c}} e^{-(\tilde{\beta}-\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c}})u}. \tag{1.48}$$

Заметим, что аппроксимация де Вильдера допускает применение и в процессах, ограниченных по времени.

$$\psi(u,t) \approx \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\beta}\tilde{c}} e^{-(\tilde{\beta}-\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c}})u} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \tag{1.49}$$

где

$$f(x) = \eta \frac{\exp\{2\eta\tilde{\beta}\tilde{c}t\cos x - (\tilde{\beta}\tilde{c} + \tilde{\lambda})t + \tilde{\beta}u(\eta\cos x - 1)\}}{1+\eta^2 - 2\eta\cos x} \times$$
$$\times(\cos(\tilde{\beta}u\eta\sin x) - \cos(\tilde{\beta}u\eta\sin x + 2x)).$$

1.3.4 Аппроксимация Бикмана-Бауэрса.

Рассмотрим аппроксимацию Бикмана-Бауэрса, применяется в классической модели риска, идея которой заключается в том, что рассматривается функция распределения

$$H(u) = 1 - \frac{c}{\lambda\mu}\psi(u), \tag{1.50}$$

которая заменяется на функцию распределения $\tilde{H}(u)$ гамма-распределения $\Gamma(\gamma,\alpha)$, причем у функций $H(u)$ и $\tilde{H}(u)$ первые два момента совпадают. Таким образом, параметры гамма-распределения могут быть легко найдены из уравнений

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{c\mu_2}{2\mu(c-\lambda\mu)}, \tag{1.51}$$

и

$$\frac{\gamma(\gamma+1)}{\alpha^2} = \frac{c}{\mu}\left(\frac{\mu_3}{3(c-\lambda\mu)} + \frac{\lambda\mu_2^2}{2(c-\lambda\mu)^2}\right). \tag{1.52}$$

Аппроксимация Бикмана-Бауэрса имеет вид

$$\psi(u) = \frac{\lambda\mu}{c}(1-H(u)) \approx \frac{\lambda\mu}{c}(1-\tilde{H}(u)). \tag{1.53}$$

Кроме рассмотренных выше аппроксимаций имеются другие разновидности аппроксимаций для вероятности разорения.

1.4 Процессы риска с обобщением процесса поступления премий

В большинстве моделей, рассмотренных в актуарной литературе, поступление премий в страховую компанию является детерминированным, и более того, скорость поступления премий c является постоянной величиной. Это объясняется тем фактом, что число премий много больше количества предъявляемых исков, и при усреднении процесс поступления премий можно аппроксимировать линейной функцией.

Однако эта модель не является точной и не описывает реальные процессы, протекающие в страховых компаниях.

1.4.1 Модель, в которой скорость поступления премий зависит от капитала компании.

Если скорость поступления премий зависит от капитала компании, то процесс риска (1.1) можно записать как

$$U(t) = u + \int_0^t c(U(\tau))d\tau - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i. \tag{1.54}$$

Уравнение (1.54) можно компактно переписать в виде стохастического дифференциального уравнения

$$dU(t) = c(U(t))dt - dS,$$

где $dS = yd\pi$;

$d\pi$ равно 1 или 0 с вероятностью $\lambda dt + o(dt)$ и $1 - \lambda dt + o(dt)$ соответственно;

y – случайная величина (размер иска), имеющая функцию распределения $G(x)$, а $U(0)=u$.

В работе [2] показано, что если скорость поступления премий есть функция капитала компании, то вероятность разорения удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$c(u)\overline{\psi}'(u)=\lambda\overline{\psi}(u)-\lambda\int_{-\infty}^{u}\overline{\psi}(u-y)dG(y),\quad u>0,$$

где $\overline{\psi}(x)=1-\psi(x)$.

Рассмотрим некоторые частные случаи таких процессов.

1.4.2 Модель с барьером, многоуровневая модель.

В работе [2] рассмотрены модели, в которых скорость поступления премий зависит от текущего капитала страховой компании. Чем больше капитал компании, тем более устойчивое положение она занимает и тем меньше она подвержена риску разорения

Если иски распределены по показательному закону с функцией распределения $G_Y(x)=1-e^{-x}$, то выражение для вероятности разорения может быть записано в следующем виде:

$$\psi(u)=\begin{cases}\alpha\psi_0(u)+\beta, & u<b,\\ \psi_1(u-b)(\alpha e^{-\frac{b(c_0-\lambda\mu)}{c_0}}+\beta), & u\ge b,\end{cases}$$

где $\psi_i(u)=\dfrac{\lambda\mu}{c_i}e^{-(1-\frac{\lambda\mu}{c_i})u}$,

$$\alpha=\frac{c_1-\lambda\mu}{c_1-\lambda\mu+(c_0-c_1)\psi_0(b)},\quad \beta=1-\alpha.$$

1.4.3 Модель с процентной ставкой.

Пусть капитал компании выполняется не с постоянной скоростью c, а со скоростью, зависящей от капитала компании и определяемой выражением

$$c(U(t))=c_0+\delta U(t). \tag{1.55}$$

Для случая, когда иски распределены по показательному распределению с функцией распределения $G_y(x)=1-e^{-\beta x}$, получены точные аналитические выражения вероятности разорения:

$$\psi(u)=\frac{\lambda\Gamma(\frac{\lambda}{\delta},\frac{\beta c_0}{\delta}+\beta u)}{(\lambda+\beta c_0)\Gamma(\frac{\lambda}{\delta},\frac{\beta c_0}{\delta})+\alpha c_0(1-\frac{\lambda}{\delta})\Gamma(\frac{\lambda}{\delta}-1,\frac{\beta c_0}{\delta})}. \tag{1.56}$$

Аналогичное выражение было получено в 1942 году Сегердалом:

$$\psi(u)=\frac{\Gamma(\frac{\lambda}{\delta},\frac{c_0}{\delta\mu}+\frac{u}{\mu})}{\Gamma(\frac{\lambda}{\delta},\frac{c_0}{\delta\mu})+\frac{\delta}{\mu}(\frac{c_0}{\delta\mu})^{\frac{\lambda}{\delta}}e^{-\frac{c_0}{\delta\mu}}},\qquad(1.57)$$

где $\Gamma(a,b)=\int\limits_b^{\infty}x^{a-1}e^{-x}dx,\ \mu=1/\beta$ − среднее значение исков;

λ − интенсивность процесса Пуассона.

1.4.4 Другие обобщения процесса поступления премий.

Классическая модель риска может быть обобщена различными способами. Одним из таких обобщений является обобщение введением в процесс риска дополнительного слагаемого в виде:

$$U(t)=R(t)+\varepsilon W(t)=u+P(t)-S(t)+\varepsilon W(t),\qquad(1.58)$$

где $W(t)$ – винеровский процесс, не зависящий от $R(t)$;

$\varepsilon\in R$ – некоторая константа;

$EW(t)=0$.

Возмущенный процесс вида (1.58) для классического процесса $R(t)$ в случае, если число исков N_t к моменту времени t имеет распределение Пуассона, впервые был рассмотрен Гербером.

1.5 Постановка задачи

В актуарной математике существуют различные модели риска, которыми с той или иной степенью достоверности можно описать процессы, протекающие в реальной страховой компании. Введением дополнительных факторов, влияющие на динамику изменения капитала страховой компании, мы сталкиваемся с задачами определения основных характеристик построенных процессов риска, решение которых не укладывается в рамки существующих знаний.

Задачей настоящей бакалаврской работы является разработка и реализация методов, позволяющих моделировать обобщённые процессы вида

$$U(t)=u+P(t)-S(t).\qquad(1.59)$$

Основной задачей бакалаврской работы является построение универсального метода нахождения $\psi(u)$ и других характеристик для процессов риска, в которых поступления премий $P(t)$ и выплаты по искам $S(t)$ задаются произвольным способом и хорошо подходят под реальные процессы из страховой практики. Кроме того, способ определения вероятности разорения должен быть удобным с точки зрения использования его сотрудниками страховых компаний.

В бакалаврской работе уделено большое внимание процессу поступления премий $P(t)$ по той причине, что подавляющее большинство результатов по теории риска трактуют процесс поступление премий как детерминированный с постоянной скоростью $c = const$. Но, как показывает практика, такой подход оправдан лишь в случаях, когда страховой рынок является стабильным, и процесс $P(t)$ может быть описан линейной функцией ct. К сожалению, во многих случаях это не так. В частности, страховой рынок России нельзя считать устоявшимся с экономической точки зрения, поэтому результаты работы являются актуальными.

2 ПРОЦЕССЫ РИСКА С НЕПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ ПОСТУПЛЕНИЯ ПРЕМИЙ

2.1 Оценка вероятности разорения страховой компании методом имитационного моделирования

Аналитические выражения для вероятности разорения страховой компании могут быть записаны лишь для ограниченного числа процессов риска даже в классической постановке задачи. Как было указано в разделе 1, для оценки вероятности разорения в ряде случаев удобно использовать вместо точных аналитических выражений различные аппроксимации, такие как аппроксимация Крамера-Лундберга, диффузионная аппроксимация, аппроксимация де Вильдера, Бикмана-Бауэрса и другие.

Но для многих случаев использование перечисленных способов получения численных значений для вероятности разорения невозможно. Это может быть связано с невозможностью нахождения поправочного коэффициента или в результате какого-либо обобщения классической модели, для которой еще не найдены явные выражения для вероятности разорения.

Одним из методов оценки вероятности разорения для достаточно большого числа процессов риска является метод имитационного моделирования. Для оценки вероятности удобным является, в частности, метод Монте-Карло, идея которого состоит в многократном моделировании процесса риска с последующим определением относительной частоты разорившихся процессов. Если мы можем ответить на вопрос, чему равны выражения $P(t)$ и $S(t)$ в любой момент времени t, то построение процесса $U(t)$ не представляет никакой вычислительной сложности.

Построив определенное количество таких процессов, и найдя относительное количество разорившихся процессов, мы можем получить оценку вероятности разорения.

Обозначим через $Z_i = I\left(\tau_i < T_{\max}\right)$ индикатор разорения i -того процесса за время $T_{\max}$. Для N реализаций процесса, можно найти число разорившихся процессов

$$N_r = \sum_{i=1}^{N} Z_i, \tag{2.1}$$

а также приближенное значение для вероятности разорения и неразорения, как

$$\psi_N = \frac{1}{N}(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_N) = \frac{N_r}{N}, \tag{2.2}$$

$$\delta_N = 1 - \psi_N. \tag{2.3}$$

2.2 Генерация случайных чисел

При имитационном моделировании важнейшей задачей является проблема генерации случайных чисел, подчиняющихся тому или иному вероятностному распределению.

Для генерации случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале (0,1) можно использовать различные методы, такие как метод середины квадратов, метод вычетов, линейные сопряженные генераторы первого, второго и более высоких порядков, и другие методы.

Попытки получения случайных чисел на основе арифметических свойств дают в результате псевдослучайные числа, так как в принципе сгенерированные таким образом числа зависят от предыдущего использования ЭВМ. Тем не менее, для практического использования можно использовать целый ряд методов, различающихся периодом повторения, спектральными характеристиками, вычислительной сложностью, временем генерации и т.п.

Приведем периоды генерации для некоторых распространенных методов генерации случайной величины, равномерно распределенной на (0,1). Генераторы Парка-Миллера и Парка-Миллера со смещением Бейса-Дурхама имеет период порядка $2^{31} - 2 \approx 2.1 \times 10^{9}$. Генератор Л'Экуйера со смещением Бейса-Дурхама имеет период равен 2.3×10^{18}. Хорошими характеристиками обладает MRNG-генератор Джоржда Марсаглии. Случайные величины, полученные этим методом обладают отличными спектральными характеристиками и очень большим периодом, равным приблизительно $3 \cdot 10^{47}$. Кроме того, очень хорошими характеристиками обладаем метод генерации случайных чисел, основанный на шифровании данных.

2.2.1 Генерация случайных величин по заданному распределению.

Существует несколько методов генерации случайных чисел по заданному распределению. Все они основаны на подходящем преобразовании равномерно распределенных случайных чисел.

Эти методы делятся на несколько типов.

Прямой метод. Метод основан на определении функции распределения. Для примера, рассмотрим генерацию величины, распределенной по биномиальному закону. Будем считать случайную величину как число гербов, выпавших за n бросков, причем вероятность выпадения герба будем считать равной p. Если мы сгенерируем n случайных числа, равномерно распределенных на единичном интервале, и подсчитаем их количество, которое больше p, то результат и будет величиной, распределенной по биномиальному закону с параметрами n и p.

Инверсный метод. Метод основан на связи случайной величины из единичного интервала с другими распределениями. Этот метод можно применять для генерирования переменных с любой непрерывной функцией распределения. Для построения случайной переменной с непрерывной функцией распределения $F(x)$ необходимо сгенерировать случайное число U из диапазона [0,1], а затем вычислить $X = F^{-1}(U)$. Тогда X имеет функцию распределения, равную $F(x)$. *К* сожалению, этот метод не всегда эффективен.

Метод отклонения. В некоторых случаях вышеперечисленные методы использовать трудно либо по причине недостаточной быстроты алгоритма, либо в связи с трудностью функциональной записи распределения. Метод отклонения иногда позволяет находить интересные решения в этих случаях. Допустим, необходимо сгенерировать случайное число, имеющее плотность распределения $f(x)$. Для использования метода отклонений нужно в начале найти другую плотность распределения $g(x)$ и постоянное число c, чтобы выполнялось неравенство $f(x) \le cg(x)$ для любых x. Затем необходимо проделать следующие шаги:

1) сгенерировать число X для распределения G с плотностью распределения g;

2) вычислить отношение $r = c\dfrac{g(x)}{f(x)}$;

3) сгенерировать случайное число U из единичного диапазона;

4) если произведение U и r меньше единицы, то вернуть X;

5) иначе повторить шаги 1-3.

Естественно, для эффективной работы необходимо, чтобы генерация случайного числа для распределения G было достаточно простым, а постоянная c – достаточно мала.

2.3 Точность оценки вероятности разорения при моделировании

Пусть у нас имеется n значений вероятности разорения, определенных с помощью моделирования, в каждом из которых рассматривается N процессов. Тогда в качестве оценки для ψ можно взять величину

$$\hat{\psi} = \frac{1}{n}(\psi_1 + \psi_2 + ... + \psi_n), \tag{2.4}$$

а для дисперсии

$$\hat{\sigma}_\psi^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\psi_i - \hat{\psi})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}\psi_i^2 - n\hat{\psi}^2). \tag{2.5}$$

При оценке вероятности разорения моделированием возникает вопрос, насколько велико должно быть число значений вероятности разорения n и реализаций процесса N для достижения заданной точности. Для метода Монте-Карло мы можем говорить о точности полученного результата только с определенной вероятностью. Покажем, как можно оценить необходимое число n оценок вероятности разорения для достижения заданной точности с определенной вероятностью.

Из центральной предельной теоремы можно записать, что

$$\sqrt{n}(\hat{\psi} - \psi) \xrightarrow{D} N(0, \sigma_\psi^2). \tag{2.6}$$

Тогда для 95% доверительного интервала можно записать, что

$$\hat{\psi} \pm \frac{1{,}96\hat{\sigma}\psi}{\sqrt{n}} = \left[\hat{\psi} - \frac{1{,}96\hat{\sigma}\psi}{\sqrt{n}}, \hat{\psi} + \frac{1{,}96\hat{\sigma}\psi}{\sqrt{n}}\right]. \quad (2.7)$$

Пусть нам необходимо определить число реализаций n для обеспечения точности результата ε с вероятностью 95%. Тогда мы можем записать, что

$$n = \frac{1{,}96^2 \sigma^2 \psi}{\varepsilon^2}. \quad (2.8)$$

На практике значение σ_ψ^2 нам обычно неизвестно. По можно поступить следующим образом: получить некоторое число $n^{'}$ величин $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n'}$, а затем определить величину дисперсии $\sigma_\psi^{'2}$, на основе которой можно оценить $n = 1{,}96^2 \sigma_\psi^{'2} / \varepsilon^2$.

2.4 Модели с непостоянной скоростью поступления премий

2.4.1 Модель, в которой скорость поступления премий зависит от времени. Скорость поступления премий (1.4) в процессе Крамера-Лундберга (1.2) определяется в соответствии с принципом математического ожидания. Существуют другие принципы определения скорости поступления премий, такие как дисперсный или принцип стандартного отклонения, принцип нулевой полезности, экспоненциальный принцип и другие. Во всех упомянутых принципах скорость поступления премий детерминирована постоянна.

Случай, когда скорость поступления премий есть функция времени

$$c = c(t) \quad (2.9)$$

представляет собой более общую модель, по сравнению с моделью, где скорость поступления премий есть функция капитала компании. При такой постановке задачи мы можем задавать закон изменения скорости поступления премий с течением времени, что позволяет описывать различные реальные ситуации, возникающие в страховой практике, например, изменения курсов валют, инфляционные процессы, сезонные изменения в интенсивности заключения страховых договоров конечными клиентами страховых компаний, влияние различных других факторов на приток капитала в страховые компании.

Для предложенной модели суммарную величину поступивших премий к моменту времени *t* можно записать в виде выражения

$$P = \int_0^t c(\tau)d\tau, \tag{2.10}$$

а величину капитала страховой компании в произвольный момент времени можно записать как

$$U(t) = u + \int_0^t c(\tau)d\tau - S(t). \tag{2.11}$$

Рассмотрим некоторые законы изменения скорости поступления премий.

1) Процесс Крамера-Лундберга.

В случае, если процесс является процессом Крамера-Лундберга, $c(t)=c=\text{const}$ (рисунок 2.1). Тогда

$$P(t) = \int_0^t c d\tau = ct.$$

2) Гармонический закон. Пусть $c(t) = a + A\cos(\omega t + \beta)$ (рисунок 2.2). В этом случае величина премий к моменту времени *t* определяется выражением

$$P(t) = \int_0^t (a + A\cos(\omega\tau + \beta))d\tau = at + \frac{A}{\omega}[\sin(\omega t + \beta) - \sin\beta].$$

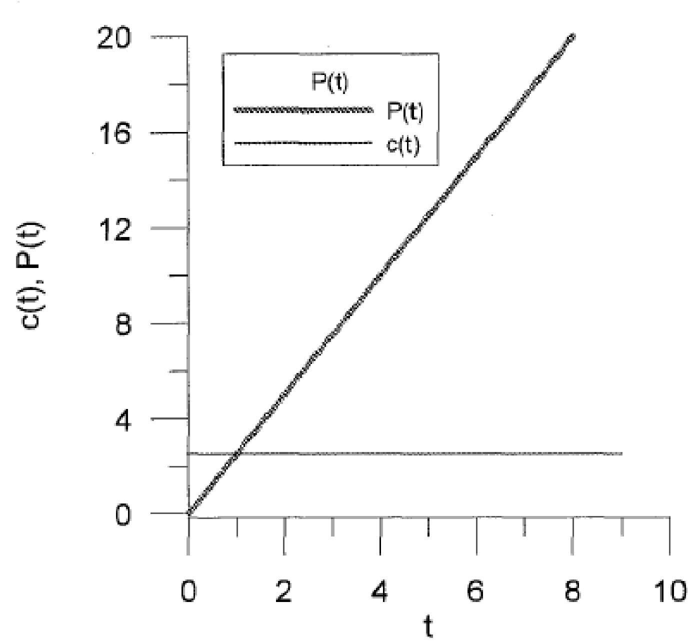

Рисунок 2.1 – Величины $P(t)$ и $c(t)$ для процесса Крамера-Лундберга c = const. Параметр c = 2.5

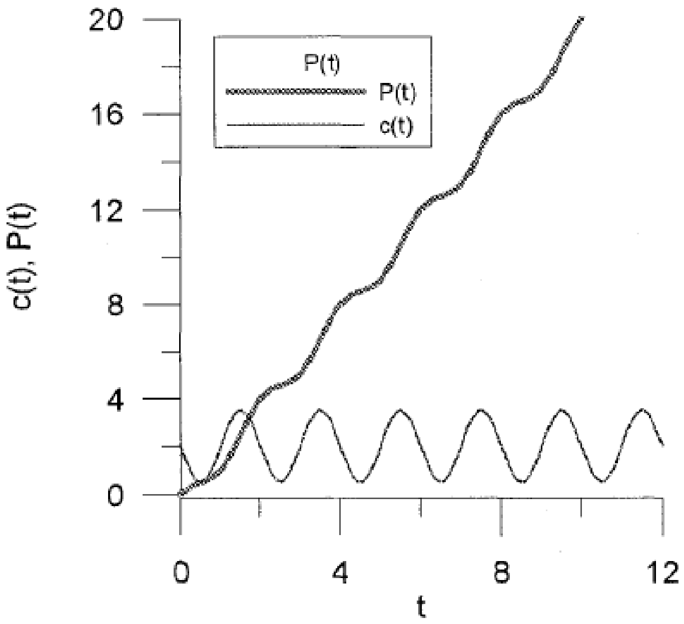

Рисунок 2.2 – Величины $P(t)$ и $c(t)$ для гармонического случая

$c(t) = a + A\cos(\omega t + \beta)$.

3) Пусть $c(t) = a + bt$ (рисунок 2.3).Тогда

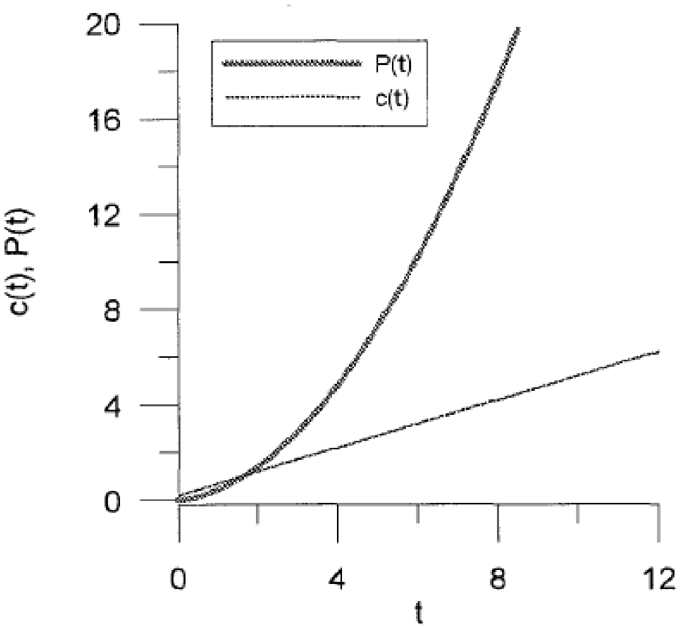

Рисунок 2.3 – Величины $P(t)$ и $c(t)$ для случая $c=a+bt$. Параметры a=0.2, b=0.5

4) В более общем случае $c(t) = a + bt^k, k \neq -1$ (рисунок 2.4), премии к моменту t равны

$$P(t)=\int_0^t (a+b\tau^k)d\tau = at+\frac{b}{k+1}t^{k+1}.$$

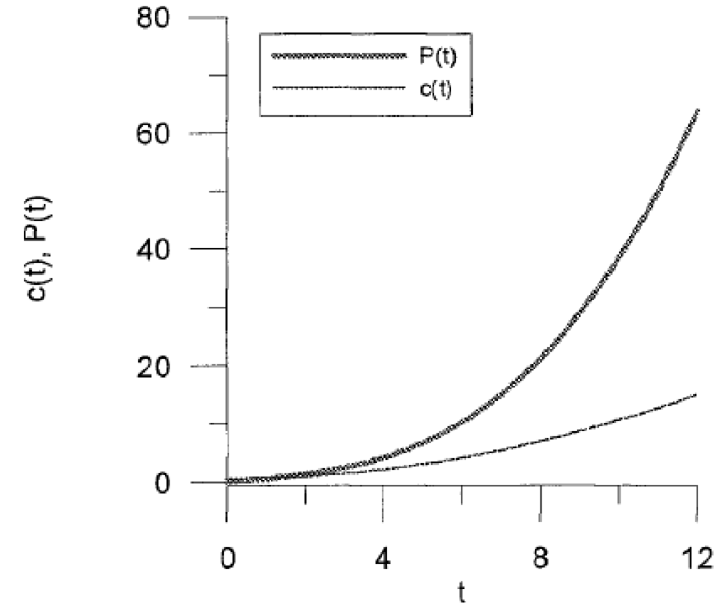

Рисунок 2.4 – Величины $P(t)$ и $c(t)$ для случая $c(t)=a+bt^k$, $k\neq -1$.

Параметры a = 0.5, b = 0.1, k = 2

5) Для $c(t)=a+b/t, t>t_0, t>t_0>0$ (рисунок 2.5), премии запишутся как

$$P(t)=\int_{t_0}^t (a+\frac{b}{\tau})d\tau = at+b(\ln t-\ln t_0).$$

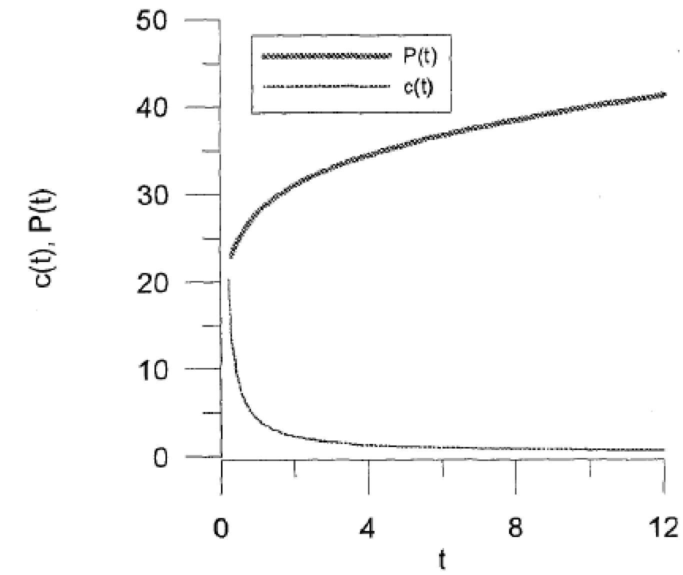

Рисунок 2.5 – Величины $P(t)$ и $c(t)$ для случая $c(t)= a+b/t$.

Параметры a = 0.3, b=4, t_0=0.3

Для произвольной функции скорости поступления премий $c = c(t)$ суммарное количество поступивших премий можно рассчитать либо аналитически, либо численно. Таким образом, для перечисленных выше моделей могут быть построены имитационные модели и оценена вероятность разорения методом Монте-Карло.

2.4.2 Модель с кусочно-непрерывной переменной скоростью поступления премий между исками.

Рассмотрим модель, в которой скорость поступления премий может принимать различные значения между моментами предъявления исков. Тогда (1.1) можно записать как

$$U(t) = u + [\sum_{i=1}^{N_t} c_i\sigma_i + c_{N_t+1}(t - T_{N_t})] - S(t), \tag{2.12}$$

где $T_1, T_2, \ldots$ – моменты предъявления исков (считаем, что $T_0 = 0$);

c_i – значение скорости поступления премий между (i - 1) и i-ым иском (для $c_i = c$ получаем процесс Крамера-Лундберга);

$\sigma_i = T_i - T_{i-1}$.

Если рассматривать *U(t)* в моменты t = $T_1, T_2, \ldots$, то формула (2.12) может быть записана проще:

$$U(T_j) = u + \sum_{i=1}^{N_t} c_i\sigma_i - \sum_{i=1}^{N_t} Y_j. \tag{2.13}$$

Величины c_i могут быть как детерминированными, так и случайными.

Можно предложить другой подход к формированию процесса поступления премий. Пусть нам не известно среднее значение μ величины исков. Тогда скорость поступления премий динамически изменяется и строится на основе информации об исках, доступной к моменту времени *t:*

$$c(t) = (1+\theta)\frac{S(t)}{t},$$

так как наилучшей оценкой величины $\lambda\mu$ является отношение $S(t)/t$.

Значение скорости поступления премий c_i можно определить как

$$c_1 = 0,$$

$$c_i = (1+\theta)\frac{S(T_{i-1})}{T_{i-1}},\ i = 2,3,...,$$

где $S(T_k) = \sum_{j=1}^{k} Y_j$. В этом случае суммарная величина премий, накопленных к моменту времени *t* есть

$$P(t) = \sum_{i=1}^{N_t} c_i \sigma_i + c_{N_t+1}(t - T_{N_t}),$$

а в моменты времени $T_1, T_2, ...$

$$P(T_j) = \sum_{i=1}^{N_t} c_i \sigma_i.$$

Заметим, что в данной модели $\psi(0) = 1$, так как до первого иска приращения капитала страховой компании не происходит, и любая страховая выплата приводит к дефициту средств и разорению.

2.5 Процесс поступления премий как случайный процесс

Как было сказано выше, в классической модели риска поступление средств в страховую компанию происходит непрерывно и линейно зависит от времени. В действительности «доход» компании можно представить как сумму премий, которые заплатили за свои страховые полисы клиенты страховой компании. В этом случае модель Крамера-Лундберга не может описать процессы, имеющие место в страховой практике.

Рассмотрим следующий процесс риска. Пусть на протяжении работы страховой компании заключаются новые договора, которые приносят доход в виде премии *p*. Можно предположить, что величина премии не является постоянной величиной для всех контрактов, а меняется от различных параметров. Тогда процесс будет иметь вид

$$U(t) = u + \sum_{i=1}^{M_t} p_i - \sum_{i=1}^{M_t} Y_j, \tag{2.14}$$

где M_t – количество принятых премий к моменту времени *t*;

p_i – величина *i*-й премии.

В простейшем случае число премий M_t на интервале $(0,t]$ – есть процесс Пуассона с параметром λ_p, тогда интервалы времени между поступлениями премий распределены по показательному распределению с параметром $1/\lambda_p$. В действительности, интервалы времени между исками и премиями могут иметь распределение, отличное от показательного.

В частном случае, если величина премии является постоянной, равной *p,* процесс (2.15) запишется в виде

$$U(t) = u + \sum_{i=1}^{M_t} p - \sum_{j=1}^{N_t} Y_j = u + M_t p - \sum_{j=1}^{N_t} Y_j. \tag{2.15}$$

Если число заключенных контрактов достаточно велико, то можно вместо величин p_i взять среднее значение для данного распределения. Имеем

$$p = E[p_i]. \tag{2.16}$$

В реальной ситуации количество исков много меньше, чем количество поступивших премий. Покажем, что при усреднении поступления премий выражение (2.15) приводиться к классической модели Крамера-Лундберга. Имеем

$$ct = E[pM_t] = pE[M_t] = p\lambda_p t. \tag{2.17}$$

Тогда $c = p\lambda_p$. Для (2.15) выражение (2.18) с учетом (2.17) может быть записано в виде

$$ct = E[p_i M_t] = E[p_i]E[M_t] = p\lambda_p t. \tag{2.18}$$

2.6 Имитационное моделирование неоднородного процесса Пуассона для описания поступления премий и выплат по искам

В классической модели риска предполагается, что число исков к моменту времени t – N_t – распределено по закону Пуассона с параметром λ. Более реалистичной является модель, в которой иски предъявляются в соответствии с неоднородным процессом Пуассона, у которого интенсивность меняется со временем. Изменение интенсивности $\lambda(t)$ процесса Пуассона может описывать различные явления, например, сезонное учащение пожаров в сухое и жаркое время года, повышение травматизма и учащение дорожно-транспортных происшествий в гололед и т.д.

Применение неоднородного процесса Пуассона к поступлению премий может помочь в описании различных циклических процессов в заключении контрактов с клиентами страховой компании.

Рассмотрим метод генерации моментов времени предъявления исков (или поступления премий) для такого неоднородного процесса Пуассона.

Пусть интенсивность неоднородного процесса Пуассона $\lambda(t)$ не превышает некоторого значения $\lambda_{\max} < \infty$.. Построим неоднородный процесс $\{N_t^*\}$ из однородного процесса $\{N_t\}$ следующим образом. Будем генерировать интервалы времени между исками для однородного процесса Пуассона интенсивностью λ, а затем принимать или отклонять эти значения в момент времени t с вероятностью $\lambda(t)/\lambda$. Обозначим интервалы времени между исками (премиями) через $\sigma_i^* = T_i^* - T_{i-1}^*$, $T_1^*, T_2^*, \ldots$ – моменты предъявления исков (поступления премий) для $\{N_i^*\}$. Обозначим для удобства T_0^* = 0.

Тогда алгоритм генерации T_i^* будет иметь вид:

1 $T^* = 0$;

2 $\sigma \in Exp(1/\lambda)$;

3 $T = T + \sigma$;

4 r ~ Uniform(0,1);

5 Если $r \le \lambda(t)/\lambda$, то $T^* = T$ иначе перейти к шагу 2.

3 РАЗРАБОТКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА И ПРОГРАММНОГО МОДУЛЯ

В данной разделе мы опишем алгоритмы оценки вероятности разорения страховой компании методом имитационного моделирования. Также рассмотрим программный модуль на основе исследованных алгоритмов.

3.1 Разработка вычислительного алгоритма

Построим алгоритм имитационного моделирования для классического процесса Крамера-Лундберга.

$$U(t)=U(t-1)+c\sigma-Y, \tag{3.1}$$

где σ – интервал времени между исками.

Величину иска и интервал времени на каждом шаге будем генерировать случайным образом в соответствии с заданным распределением. В итоге для начального капитала $U=u_0$ мы можем составить следующий алгоритм:

1) $U=u_0, T=0$;

2) генерация σ;

3) генерация Y;

4) $U=U+c\sigma-Y$;

5) $T=T+\sigma$;

6) если $U>0$, то перейти к п.2;

7) вывод T момент остановки;

8) вывод $U+Y$ капитал компании до разорения;

9) вывод U дефицит средств;

10) Z =1.

Построим алгоритм имитационного моделирования процесса со случайным поступлением премий. Величины исков и премий, а также интервалы времени между ними будем генерировать случайным образом в соответствии с заданными распределениями. Пусть нам известен начальный капитал компании $U=u_0$. Зададим время между премиями T_p и время между исками T_c. Если поступление премии произошло раньше чем иска, то капитал компании на данном шаге увеличится на величину премии $U = U + p$. Если же иск произошёл раньше чем поступление премии, то на данном шаге капитал компании уменьшится на величину иска $U = U - Y$. Запишем алгоритм следующим образом:

1) $U := u_0;\ T_c := 0; T_p := 0$

2) генерация ξ и p;

3) генерация σ и Y;

4) если $\xi < \sigma$, то перейти к п. 8;

5) $U = U - Y,\ T_c = T_c + \sigma$, генерация σ и Y;

6) если $U < 0$, то перейти к п.10;

7) если $T_p + \xi > T_c + \sigma$, то перейти к п. 5;

8) $U = U + p,\ T_p = T_p + \xi$, генерация ξ и p;

9) перейти к п. 7;

10) $Z = 1$.

При многократном запуске процедуры моделирования, из выражения (2.2) мы получим оценку для вероятности разорения страховой компании.

Таким образом, мы можем оценивать вероятность разорения не только для процесса Крамера-Лундберга, в котором иски предъявляются в соответствии с процессом Пуассона, но и для процессов восстановления (а также для процессов восстановления с задержкой), в которых интервалы времени между исками имеют произвольную функцию распределения, а также для других процессов, в частности, для процесса со случайным поступлением премий. Таким образом, с помощью метода имитационного моделирования, мы можем решить задачу оценки вероятности разорения реальной страховой компании по данным о поступлениях премий и выплатах по искам за заданный промежуток времени.

3.2 Программный модуль для оценки вероятности разорения страховой компании

Для моделирования был создан программный модуль (рисунок 3.1). В качестве среды разработки выбран продукт Matlab.

Интерфейс программы представлен на рисунке 3.1.

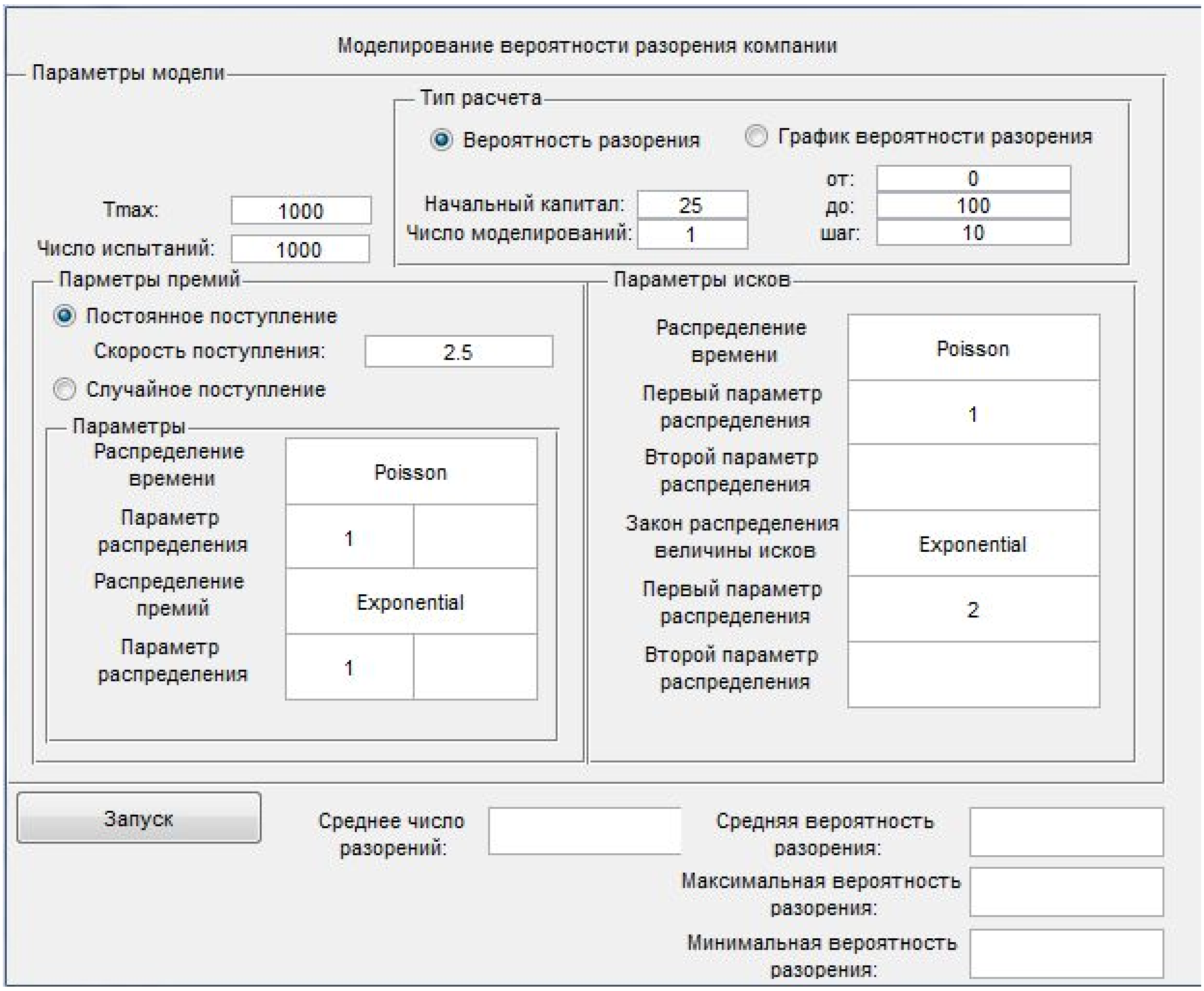

Рисунок 3.1 – Интерфейс программного модуля

Для задачи определены следующие параметры: скорость поступления премий для классического процесса, вид распределений исков и премий, параметры распределения премий и исков, начальный капитал, время слежения за процессом $T_{\max}$, число моделируемых процессов $N_{\max}$, а также число повторений данной задачи. В разработанном программном модуле могут быть использованы следующие распределения:

нормальное распределение (Normal);

показательное распределение (Exponential);

гамма-распределение (Gamma);

бета-распределение (Beta);

Хи-квадрат распределение (Chisquare);

распределение Парето (Generalized Pareto);

логнормальное распределение (Lognormal).

Страховая компания может влиять на такие параметры, как величины страховых выплат и стоимости страховых полисов (премий), величину начального капитала. Изменив эти параметры можно повторно провести процедуру оценки вероятности разорения, и сравнить полученный результат с предыдущим значением. Таким путём, варьируя названные параметры можно следить за динамикой изменения вероятности разорения, вносить коррективы в управление страховой компанией, воздействуя на процесс поступления премий и выплаты исков.

3.3 Примеры расчетов

Пример 1. Пусть иски распределены по показательному закону с параметром $\beta = 0.5$, скорость поступления премий $c = 2.5$, резерв $u_0 = 25$, интенсивность процесса Пуассона $\lambda = 1$. Точное значение вероятности разорения может быть определено из выражения (1.23) и равно $\psi(25) = 0.065668$. Расчеты производились для различных значений максимального времени $T_{\max}$ и числа испытаний *n* (таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Вероятность разорения при различных $T_{\max}$

N	$T_{\max} = 300$	$T_{\max} = 500$	$T_{\max} = 1000$
n=1000	0.076	0.072	0.064
n=10000	0.064	0.0677	0.0632
n=20000	0.06435	0.0638	0.0652
n=60000	0.0644	0.065817	0.063867

В таблице 3.2 приведены результаты расчётов для показательного распределения с теми же параметрами при резерве от 0 до 100 с шагом 10.

Таблица 3.2 – Расчет вероятности разорения

Начальный капитал	Оценка вероятности разорения	Точное значение вероятности разорения
0	0.8001	0.8000
10	0.2945	0.2943
20	0.1066	0.1083
30	0.0391	0.0398
40	0.0149	0.0147

50	0.0058	0.0054
60	0.0019	0.0020
70	0.0005	0.0007
80	0.0005	0.0003
90	0.0001	0.0001
100	0.0001	0.0001

На рисунке 3.2 изображен график зависимости вероятности разорения от капитала компании.

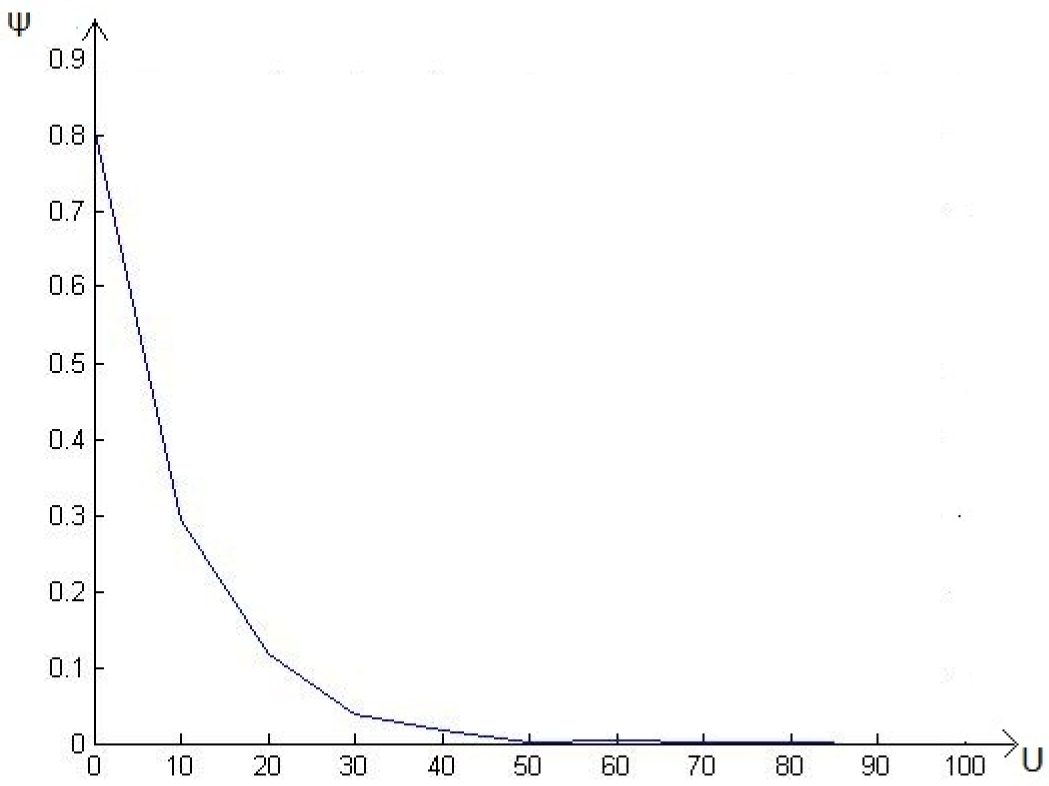

Рисунок 3.2 – График зависимости вероятности разорения от капитала

Пример 2. Реализация процессов с независимым случайными размерами премий и исков. Интервал времени между исками и премиями детерминирован и равен 1. Величины премий и исков распределены по показательному закону: $p \in Exp(0.3)$, $Y \in Exp(0.3)$. При таких параметрах капитал компании будет оставаться на уровне начального капитала (рисунок 3.3).

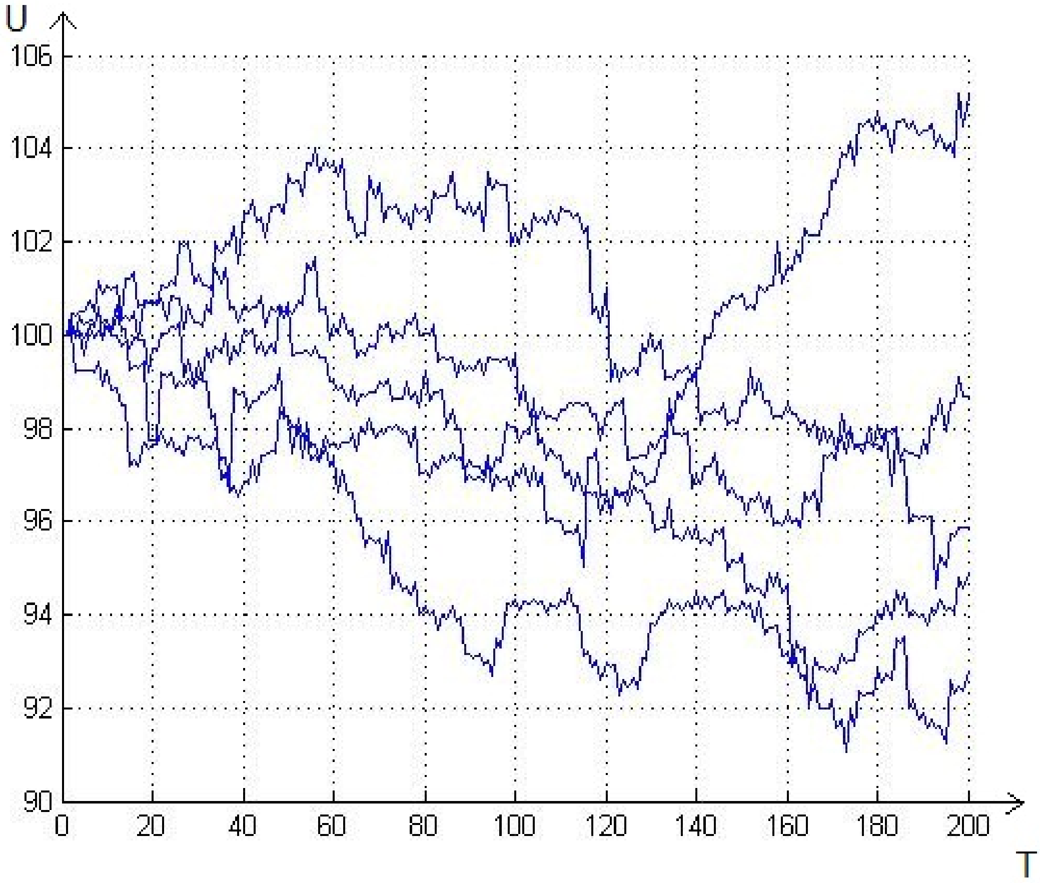

Рисунок 3.3 – График зависимости капитала от времени для примера 2

Пример 3. Реализация процессов с независимыми случайными процессами поступления премий и выплаты исков. Интервал времени между исками $\sigma \in Gamma(15{,}0.5)$, интервал между премиями $\xi \in Gamma(1{,}0.5)$. Величины премий и исков распределены по показательному закону: $\text{p} \in Exp(2)$, $\Upsilon \in Exp(20)$ (рисунок 3.4).

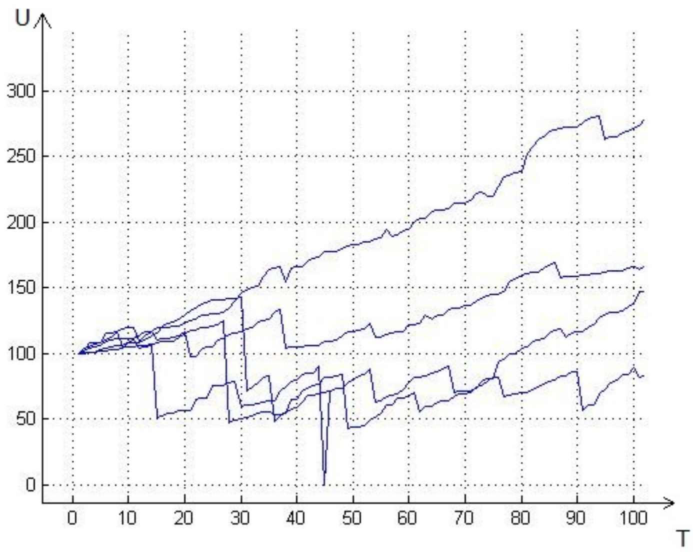

Рисунок 3.4 – График зависимости капитала от времени для примера 3

Пример 4. Реализация процессов с независимыми случайными процессами поступления премий и выплаты исков. Интервал времени между исками, $\sigma\in Lognormal(1.5,1)$ интервал между премиями $\xi\in Gamma(0.3,2)$.Величины премий и исков распределены по закону: $p\in Lognormal(0.5,0.2)$, $Y\in Gamma(3,0.5)$. При таких параметрах компания не разорится даже при резерве равным нулю (рисунок 3.5).

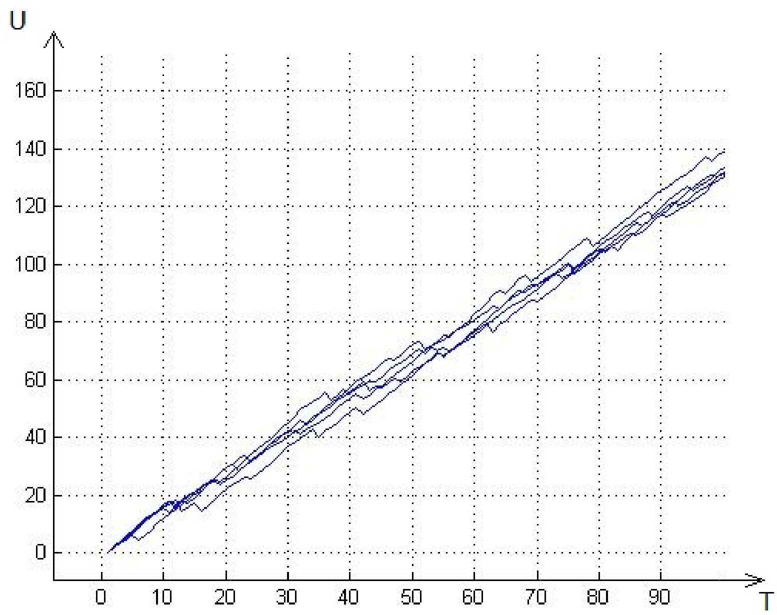

Рисунок 3.5 – График зависимости капитала от времени для примера 4

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы были рассмотрены основные сведения о теории риска.

Приёмы, рассмотренные в бакалаврской работе, позволяют с помощью имитационного моделирования методом Монте-Карло получить оценку для основных характеристик процесса риска для целого ряда задач с обобщённым процессом поступления премий и выплаты исков.

Основные результаты работы:

1) исследован метод имитационного моделирования процессов функционирования страховой компании в случае произвольных процессов поступления премий и требований по искам;

2) на основе метода Монте-Карло построена процедура оценки вероятности разорения страховой компании;

3) исследован и реализован вычислительный алгоритм и программный модуль для оценки вероятности разорения страховой компании.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.О. Жидков, Г.В. Кобельков. – М.: Наука, 1987. – 438 с.

2 Бенинг, В.Е. Асимптотическое поведение обобщенных процессов риска / В.Е. Бенинг, В.Ю. Королев. − Обозрение промышленной и прикладной математики. Сер. Финансовая и страховая математика, 1998. – Т. 5. – Вып. 1. – 279 с.

3 Бенинг, В.Е. Статистическое оценивание вероятности разорения для обобщенных процессов риска / В.Е. Бенинг, В.Ю. Королев. − Теория вероятностей и ее применения. – 1999. – Т. 44. - Вып. 1. – 260 с.

4 Бойков, А.В. Стохастические модели капитала страховой компании и оценивание вероятности неразорения: Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.– М.: Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 2003.– 80 с.

5 Ермаков, С.М. Курс статистического моделирования / С.М. Ермаков, Г.А. Михайлов. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

6 Калашников, В.В. Математические методы построения стохастических моделей обслуживания / В.В. Калашников, С.Т. Рачев.– М.: Наука, 1988.– 311 с.

7 Темнов, Г.О. Расчет вероятности разорения для классического процесса риска / Г. О. Темнов // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: Межвуз. темат. сб. тр. / С.-Петерб. гос. архитектур.-строит. ун-т. - СПб., 2002. – Вып. 8. – С. 101-106.

8 Темнов, Г.О. Исследование классического процесса риска; разработка и обобщение моделей риска / Г.О. Темнов // Доклады 59-й научной конференции профессоров, преподавателей, научных работников, инженеров и аспирантов СПб- ГАСУ. / С.-Петерб. гос. архитектур.-строит. ун-т.– СПб., 2002. – Ч. I.– С. 156-168.

9 Темнов, Г.О. Разработка, моделирование и анализ случайных процессов в теории страхования / Г.О. Темнов // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: Межвуз. темат. сб. тр. / С.-Петерб. гос. архитектур.-строит. ун-т. – СПб., 2003. – Вып. 9. – С. 149-155.

10 Темнов, Г.О. Процесс риска со случайным притоком страховых взносов / Г.О. Темнов // Вестник молодых ученых. Секция «Прикладная математика и механика». – СПб., 2004. - Вып. 12/2002. – С. 116-119.

11 Климин, А.С. Процесс риска страховой компании в случае переменной скорости поступления премий между исками / А.С. Климин // Материалы региональной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике / г. Уфа, 1-2 июня 2001 г., С.37-41.

12 Крамер, Г. Математические методы статистики / Пер. с англ. А.С. Монина, А.А. Петрова под ред. акад. А.Н.Колмогорова. – М.: Госуд. изд-во иностр. лит., 1948. – 632 с.

13 Крамер, Г. Полвека с теорией вероятностей: наброски воспоминаний. Современные проблемы математики. / (Перевод с английского). – М.: Знание, 1979. – 64 с.

14 Спивак, С.И. Моделирование процесса риска страховой компании в случае переменной скорости поступления премий между исками / С.И. Спивак, А.С. Климин // Обозрение прикладной и промышленной математики, Том 8, Выпуск 1, 2001 г., С. 333-334.

15 Спивак, С.И. Оценивание вероятности разорения страховой компании методом Монте-Карло / С.И. Спивак, А.С. Климин // Обозрение прикладной и промышленной математики, 8 всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам. Том 8, Выпуск 2, 2001 г., С. 802-803.

16 Спивак, С.И. Оценка вероятности разорения реальной страховой компании моделированием методом Монте-Карло/ С.И. Спивак, А.С. Климин // Принятие решений в условиях неопределенности, Уфа, УГАТУ,2002, с. 191-198.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Листинг программы для оценки вероятности разорения страховой компании

1) Классический процесс Крамера-Лундберга.

Файл – ruin_prob.m

```
function [U,Z] =
ruin_prob(u0,awards,Tmax,N,time_dist,alfa,claim_dist,gamma,alfa2,gamma2)
%%
Z = 0;          %число разорений в модели
U = cell(N,1);  %Значения капитала в N испытаниях

%%
%производим N моделирований
for i = 1:N
   Uc(1) = u0;
   T = 0;
   k = 2;
   %%
   %моделируем процесс разорения
   while T<Tmax
      if(isnan(alfa2))
         Th = random(time_dist,alfa);        %время между исками
      else
         Th = random(time_dist,alfa,alfa2);
      end
      if(isnan(gamma2))
         Y = random(claim_dist,gamma);      %величина иска
      else
         Y = random(claim_dist,gamma,gamma2);
      end
      Uc(k) = Uc(k-1) + awards*Th - Y;
      T = T+Th;
      if(Uc(k)<0)
         Z = Z+1;
         break;
      end
      k = k+1;
   end
   U{i} = Uc;
end
end
```

2) Случайный процесс поступления премий.

Файл − ruin_prob_2.m

```
function [U,Z] =
ruin_prob_2(u0,Tmax,N,time_dist,alfa,alfa2,claim_dist,beta,beta2,time_dist_2,ga
mma,gamma2,awards_dist,delta,delta2)
%%
Z = 0;          %число разорений в модели
U = cell(N,1);  %Значения капитала в N испытаниях

%%
%производим N моделирований
for i = 1:N
   Uc(1) = u0;
   Tc = 0;
   Ty = 0;
   k = 2;
   %%
   %моделируем процесс разорения
   if(isnan(alfa2))
      Thy = random(time_dist,alfa);         %время между исками
   else
      Thy = random(time_dist,alfa,alfa2);
   end
   %Thc = random(time_dist_2,delta);
   if(isnan(gamma2))
      Thc = random(time_dist_2,gamma);         %время между премиями
   else
      Thc = random(time_dist_2,gamma,gamma2);
   end
   if(isnan(delta2))
      C = random(awards_dist,delta);         %величина премий
   else
      C = random(awards_dist,delta,delta2);
   end
   if(isnan(beta2))
      Y = random(claim_dist,beta);      %величина иска
   else
      Y = random(claim_dist,beta,beta2);
   End
```

```
    %C = random(awards_dist,gamma);

    while Tc<Tmax&&Ty<Tmax

        if(Tc+Thc > Ty+Thy)
            Ty = Ty + Thy;
            Uc(k) = Uc(k-1) - Y;
            if(isnan(alfa2))
                Thy = random(time_dist,alfa);          %время между исками
            else
                Thy = random(time_dist,alfa,alfa2);
            end
            if(isnan(beta2))
                Y = random(claim_dist,beta);      %величина иска
            else
                Y = random(claim_dist,beta,beta2);
            end
        else
            Tc = Tc + Thc;
            Uc(k) = Uc(k-1) + C;
            if(isnan(gamma2))
                Thc = random(time_dist_2,gamma);          %время между премиями
            else
                Thc = random(time_dist_2,gamma,gamma2);
            end
            if(isnan(delta2))
                C = random(awards_dist,delta);          %величина премий
            else
                C = random(awards_dist,delta,delta2);
            end
        end

        if(Uc(k)<0)
            Z = Z+1;
            break;
        end
        k = k+1;
    end
    U{i} = Uc;
end
end
```

3) Основной файл реализации процесса.

Файл − programm.m

```
function pb_start_Callback(hObject, eventdata, handles)
alpha = str2double(get(handles.ed_alfa,'String'));
if(isempty(get(handles.ed_alfa2,'String')))
   alpha2 = nan;
else
   alpha2 = str2double(get(handles.ed_alfa2,'String'));
end
gamma = str2double(get(handles.ed_gamma,'String'));
if(isempty(get(handles.ed_gamma2,'String')))
   gamma2 = nan;
else
   gamma2 = str2double(get(handles.ed_gamma2,'String'));
end
td = (get(handles.ed_time,'String'));
cd = (get(handles.ed_clain,'String'));
Tmax = str2double(get(handles.ed_tmax,'String'));
N = str2double(get(handles.ed_n,'String'));
if(get(handles.rb_const,'Value') == 1)
   awards = str2double(get(handles.ed_awards,'String'));
   aw_const = 1;
else
   atd = (get(handles.ed_time_c,'String'));
   atdp = str2double(get(handles.ed_tcp,'String'));
   if(isempty(get(handles.ed_tcp2,'String')))
      atdp2 = nan;
   else
      atdp2 = str2double(get(handles.ed_tcp2,'String'));
   end
   ad = (get(handles.ed_adist,'String'));
   adp = str2double(get(handles.ed_adp,'String'));
   if(isempty(get(handles.ed_adp2,'String')))
      adp2 = nan;
   else
      adp2 = str2double(get(handles.ed_adp2,'String'));
   end
   aw_const = 0;
end
```

```
if(get(handles.rb_one,'Value')==1)
   u0 = str2double(get(handles.ed_u,'String'));
   multiple = 0;
else
   u0 = str2double(get(handles.ed_u0,'String'));
   uh = str2double(get(handles.ed_uh,'String'));
   u1 = str2double(get(handles.ed_u1,'String'));
   multiple = 1;
end

if(multiple == 0)
   Nc = str2double(get(handles.ed_count,'String'));
   for i=1:Nc
      if(aw_const == 1)
         [U,Z(i)] =
ruin_prob(u0,awards,Tmax,N,td,alpha,cd,gamma,alpha2,gamma2);
      else
         [U,Z(i)] =
ruin_prob_2(u0,Tmax,N,td,alpha,alpha2,cd,gamma,gamma2,atd,atdp,atdp2,ad,adp,
adp2);
      end
   end
   figure;
   hold on
   grid on
   for i = 1:N
      plot(U{i});
   end
   Zavr = mean(Z);
   set(handles.ed_ruins_count,'String',Zavr);
   set(handles.ed_ruins_prob,'String',Zavr/N);
   set(handles.ed_maxrp,'String',max(Z)/N);
   set(handles.ed_minrp,'String',min(Z)/N);

else
   u = u0:uh:u1;
   Nc = length(u);
   for i=1:Nc
      if(aw_const == 1)
         [U,Z(i)] =
ruin_prob(u(i),awards,Tmax,N,td,alpha,cd,gamma,alpha2,gamma2);
```

```
        else
            [U,Z(i)] =
ruin_prob_2(u(i),Tmax,N,td,alpha,alpha2,cd,gamma,gamma2,atd,atdp,atdp2,ad,ad
p,adp2);
        end
    end
    figure;
    plot(u,Z/N);
end
```