ВВЕДЕНИЕ

Теория чисел занимает важное место в системе математического образования будущих математиков. Данный курс тесно связан с основными математическими дисциплинами специальности «010100»: алгебра, линейная алгебра, дискретная математика, математическая логика.

Основной задачей теории чисел является изучение свойств целого числа. Но ряд важных проблем этой теории непосредственно связан с понятием делимости числа. Изучению свойств делимости целых чисел и посвящено данное учебно - методическое пособие.

Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по теории чисел предусматривает изучение следующих тем (I часть): свойства делимости целых чисел; простые числа; решето Эратосфена; теорема о бесконечности множества простых чисел; основная теорема арифметики; наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное; некоторые частные случаи теоремы Дерихле о бесконечности множества простых чисел в арифметической прогрессии; арифметические функции: целая и дробная часть числа, число и сумма делителей числа, функция Эйлера; оценки Чебышева для функции числа простых чисел, не превосходящих данное число; конечные цепные дроби; подходящие дроби и их свойства; бесконечные цепные дроби, разложение действительных чисел в цепные дроби; приближение действительных чисел рациональными числами; признак иррациональности числа; иррациональность числа «е»; теорема Лагранжа о разложении квадратичных иррациональностей в цепные дроби.

Рабочая программа по курсу «Теория чисел», разработанная на основе государственного стандарта, предусматривает проведение 18 лекционных и 18 практических занятий со студентами – математиками I курса во втором семестре.

Данное учебно - методическое пособие содержит материал для проведения первых шести практических занятий по темам: «Делимость целых чисел», «НОД. Алгоритм Евклида. НОК», «Простые числа. Канонический вид числа», «Числовые функции», «Конечные цепные дроби», «Бесконечные цепные дроби». Здесь приводятся необходимые теоретические сведения, подробные решения типовых примеров, задания для самостоятельного решения, а также два индивидуальных задания по темам практических занятий**.**

1. ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Основную роль во всей арифметике целых чисел имеет теорема о делении с остатком.

Теорема. Для любого целого a и целого $b>0$ существуют и притом единственные, целые q и r, такие, что $a = bq+r$, $0 \le r < b$.

Число q называют неполным частным, r называют остатком от деления a на b.

Пример 1. Найти остаток от деления 1) 1307 на 153; 2) – 9 на 6.

Решение. 1) $1307 = 153 \cdot 8+83$, т.е. $q = 8$ и $r=83$, где $0 \le r < 153$.
2) $-9 = -2 \cdot 6+3$, т.е. $q = -2$ и $r=3$, где $0 \le r < 6$.

Определение. Целое число a делится на целое число $b \ne 0$, если существует такое целое число q, что $a=bq$. В этом случае число a называется кратным, а b — частным от деления a на b.

Соотношение «a делится на b» обозначается $a \vdots b$, а соотношение «b делит a» обозначается $b|a$.

Бинарное отношение $a \vdots b$ в кольце **Z** обладает следующими свойствами:

1) отношение делимости рефлексивно, т.е. для любого целого a $a \vdots a$;
2) отношение делимости транзитивно, т.е. из $a \vdots b$ и $b \vdots c$ следует $a \vdots c$;
3) для любого целого a $1|a$;
4) если $b|a$, то $\pm b|\pm a$;
5) если $b|a$, то при любом целом $k \ne 0$, $kb|ka$;
6) если $c|a$ и $c|b$, то $c|a \pm b$;
7) если $c|a$, то при любом целом b $c|b$.

Для решения вопросов делимости целых чисел часто применяют метод математической индукции, основанный на принципе полной математической индукции: утверждение $A(x)$, зависящее от целого неотрицательного параметра x, считается доказанным, если доказано $A(0)$ и для любого целого неотрицательного числа n из предположения, что верно $A(n)$, выведено, что верны также $A(n+1)$ и $A(n-1)$.

Пример 2. Доказать, что при любом целом n n^3+5n делится на 6.

Решение.

1) если $n=0$, то делится на 6;

2) предположим, что утверждение справедливо при $n=k$, где k – целое неотрицательное число, т.е. что число k^3+5k делится на 6;

3) установим, что утверждение справедливо при $n=k+1$ и при $n=k-1$, т.е. что числа $(k+1)^3+5(k+1)$ и $(k-1)^3+5(k-1)$ делятся на 6.

Рассмотрим выражение $(k+1)^3+5(k+1)$. После преобразований получим сумму двух слагаемых $(k^3+5k)+(3k^2+3k+6)$, из которых первое делится на 6 по предположению индукции, а второе, представленное в виде $3(k(k+1)+2))$, делится на 6, так как содержит множитель 3 и сумму, у которой каждое слагаемое делится на 2 (первое – как произведение двух последовательных целых чисел).

Рассмотрим выражение $(k\text{-}1)^3+5(k\text{-}1)$. После преобразований получим сумму двух слагаемых $(k^3+5k) - (3k^2-3k+6)$, из которых первое делится на 6 по предположению индукции, а второе, представленное в виде $-3(k(k\text{-}1)+2)$, делится на 6, т.к. содержит множитель 3 и сумму, у которой каждое слагаемое делится на 2.

Итак, на основании принципа математической индукции делаем вывод, что при любом целом n выражение n^3+5n делится на 6.

Пример 3. Доказать, что при любом целом a и простом p число a^p-a делится на p.

Решение. Доказательство проведем индукцией по a.

1) при a=0 утверждение справедливо: $(0^p\text{-}0)\vdots p;$

2) предположим, что утверждение справедливо при $a=k$, т.е. $k^p\text{-}k$ делится на $p;$

3) установим, что утверждение справедливо при $a=k+1$. Преобразуем выражение $(k+1)^p\text{-}(k+1)$, используя разложение по формуле бинома Ньютона: $k^p + C_p^1 k^{p-1} + C_p^2 k^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1} k + 1 - k - 1 = (k^p - k) + p \cdot A$, где A – целое число. В полученной сумме и первое и второе слагаемые делятся на p (первое — по предположению индукции);

4) Установим, что утверждение справедливо и при $a=k\text{-}1$. По аналогии с предыдущим пунктом решения задачи выражение $(k-1)^p - (k-1) = (k^p - k) + p \cdot B$, где B – целое число, делится на p.

Таким образом, при любых целых значениях a и простом p число a^p-a делится на p.

Пример 4. Доказать, что при всяком целом a выражение $(a^2+3a+1)^2\text{-}1$ делится на 24.

Решение. Представим данное выражение в виде произведения двух множителей: $(a^2+3a+1)^2\text{-}1=(a^2+3a)\ (a^2+3a+2)$. А затем продолжая разложение на множители, получим произведение линейных множителей $a(a+1)(a+2)(a+3)$, которое представляет собой произведение четырех последовательных целых чисел. Среди этих чисел обязательно найдутся числа, кратные 2, 3 и 4, следовательно, все произведение кратно 24.

Упражнения

1) Доказать методом математической индукции, что при любом целом n выражение n^3+11n делится на 6.

2) Доказать методом математической индукции, что при любом целом неотрицательном n:

a) $3^{2n+2}-8n\text{-}9$ делится на 64;
b) $7^{n+2}+8^{2n+1}$ делится на 57;
c) $11^{n+2}+12^{2n+1}$ делится на 133.

3) Доказать утверждение: если каждое из двух целых чисел при делении на натуральное число m дает остаток 1, то и их произведение при делении на m дает в остатке 1.

4) Методом математической индукции доказать, что любая натуральная степень 15 при делении на 7 дает остаток 1.

5) Доказать методом математической индукции, что натуральное число, составленное из 3^n одинаковых цифр, делится на 3^n.

6) Доказать, что число a^{4n+1}-a делится на 30 при любом целом a и целом неотрицательном n.

7) Доказать, что если делимое (при делении с остатком) есть произведение нескольких чисел, то остаток от деления этого произведения на некоторое число не изменится, если уменьшить или увеличить один из множителей на число кратное делителю.

8) Доказать, что при делении большего числа на меньшее делимое всегда больше двойного остатка.

9) Найти наибольшее целое число, которое при делении с остатком на 15 дает частное 9.

10) По делимому a и остатку r найти делитель b и соответствующее частное q, если: a=148, r=37.

10) Найти делитель и остаток, если делимое и частное соответственно равны: 1) 29 и 3; 2) −45 и −7.

11) Доказать, что числа вида $3m+2$ (m=1,2,...) не являются квадратами целых чисел.

12) Доказать, что в прямоугольном треугольнике, стороны которого выражаются натуральными числами, по крайней мере один из катетов делится: 1) на 3; 2) на 5.

13) При каком условии деление числа А (с остатком) на два последовательных числа a и $a+1$ дает в частном одно и то же число?

14) Доказать некоторые приемы умножения:

а) чтобы двузначное число умножить на 99, достаточно уменьшить это число на единицу и к результату приписать дополнение данного числа до 100 (двумя цифрами);

б) чтобы двузначное число, сумма цифр которого меньше 10, умножить на 11, достаточно между цифрами десятков и единиц вставить сумму десятков и единиц;

в) чтобы двузначное число, сумма цифр которого не меньше 10, умножить на 11, достаточно между цифрами десятков, увеличенной на единицу, и цифрой единиц вставить избыток суммы десятков и единиц над 10.

15) Доказать, что если целые числа a и b при делении на натуральное число c дают равные остатки, то одинаковые натуральные степени их при делении на c тоже дают равные остатки.

16) Доказать, что число n^5 при любом натуральном n оканчивается на ту же цифру, что и число n.

17) Доказать, что все числа вида $2^{2^n}+1$ ($n \in \mathrm{N}$) оканчиваются цифрой 7.

18) Существуют ли натуральные числа n и m такие, что $n^2 - m^2 = 101010$?

19) Доказать, что целое число делится на 7, 11 или 13 тогда и только тогда, когда разность между числом его тысяч и остатком от деления его на 1000 делится соответственно на 7, 11 или 13.

20) Доказать, что разность двух чисел с одинаковой суммой цифр делится на 9.

21) Доказать, что сумма $2m+1$ последовательных чисел делится на число $2m+1$.

22) Доказать, что при всяком целом значении n выражение $n(n^2-1)(n^2-5n+26)$ делится на 120.

23) Доказать, что при всяком нечетном целом x выражение x^3+3x^2-x-3 делится на 48.

24) Доказать, что если $ab+cd$ делится на $a-c$, то $ad+bc$ делится на $a-c$.

25) Найти необходимое и достаточное условие того, чтобы сумма чисел a и b делилась бы на c, если числа a и b на c не делятся.

26) Найти все натуральные числа, которые при делении на 17 дают остаток 2, а при делении на 5 дают остаток 3.

2. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ. АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА. НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ

Определение. Общим делителем целых чисел a и b называется любое целое d, такое, что $d|a$ и $d|b$. Наибольшим общим делителем целых чисел a и b называется такой положительный общий делитель D чисел a и b, который делится на любой другой общий делитель этих чисел.

Наибольший общий делитель чисел a и b обозначается $D=(a,b)$.

Таким образом, $D=(a,b)$ означает:

1) $D>0$ – целое;
2) $D|a$ и $D|b$;
3) если $\delta|a$ и $\delta|b$, то $\delta|D$.

<u>Свойства НОД.</u>

1) Если m – целое положительное число, то $(ma,mb)=m(a,b)$.
2) Если d – общий делитель чисел a и b, то $\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=\frac{(a,b)}{d}$.
3) Если $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})=\delta$ и $(\delta, a_n)=d$, то $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)= d$.

Последнее свойство позволяет свести нахождение наибольшего общего делителя системы чисел к нахождению наибольшего общего делителя двух чисел.

Рассмотрим способ нахождения НОД чисел a и b, известный как алгоритм Евклида, с помощью которого можно обосновать существование НОД любых целых чисел.

Теорема (алгоритм Евклида).

Если

$$\begin{aligned}
&a = bq_1 + r_1,\ 0 \le r_1 < l,\\
&b = r_1 q_2 + r_2,\ 0 \le r_2 < r_1,\\
&r_1 = r_2 q_3 + r_3,\ 0 \le r_3 < r_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n,\ 0 \le r_n < r_{n-1},\\
&r_{n-1} = r_n q_{n+1}, \qquad r_{n+1} = 0,
\end{aligned}$$

то $(a,b) = r_n$.

Определение. Если НОД двух чисел равен 1, то числа называются взаимно простыми.

Например, числа 15 и 47 взаимно простые, так как (15,47)=1.

Свойства взаимно простых чисел.

1) Для того, чтобы числа a и b были взаимно простыми, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие целые числа x и y, что $ax+by=1$.
2) Если произведение двух чисел a и b делится на c и a взаимно просто с c, то b делится на c.
3) Если $(a_1,b)=1$, …, $(a_n,b)=1$, то $(a_1, \ldots, a_n,b)=1$.
4) Если $(a,b)=1$, то при любых целых неотрицательных m и n $(a^n,b^m)=1$.

Пример 1. Доказать, что если разность двух нечетных чисел равна 2^n , то эти числа взаимно простые.

Решение. Если числа a и b нечетные, то $(a,b)=d$ – число нечетное. По условию $a\text{-}b=2^n \vdots d$, откуда $d=1$.

Определение. Общим кратным целых чисел a и b, где $a\neq 0$ и $b\neq 0$, называется любое целое m, такое, что $m \vdots a$ и $m \vdots b$. Наименьшим общим кратным целых чисел a и b называется такое положительное общее кратное M чисел a и b, если любое другое общее кратное этих чисел делится на M.

Наименьшее общее кратное чисел a и b обозначается $M=[a,b]$.

Таким образом, $M=[a,b]$ означает:

1) $M>0$ – целое;
2) $a|M$ и $b|M$;
3) если $a|m$ и $b|m$, то $M|m$.

Теорема. Наименьшее общее кратное чисел a и b вычисляется по формуле $[a,b] = \dfrac{ab}{(a,b)}$.

Свойства НОК.

1) Если m – целое положительное число, то $[ma,mb]=m[a,b]$.
2) Если d – общий делитель чисел a и b, то $\left[\dfrac{a}{d},\dfrac{b}{d}\right] = \dfrac{[a,b]}{d}$.

3) Если $(a,b)=1$, то $[a,b]=ab$.

Пример 2. Доказать, что $\left(\frac{x}{a},\frac{x}{b}\right)=1$ тогда и только тогда, когда $x=[a,b]$.

Решение. Если $x=[a,b]=\frac{ab}{(a,b)}$, то $\left(\frac{x}{a},\frac{x}{b}\right)=\left(\frac{b}{(a,b)},\frac{a}{(a,b)}\right)=1$. Если $\left(\frac{x}{a},\frac{x}{b}\right)=1$, то, положив $x=[a,b]\cdot y$, имеем $\left(\frac{[a,b]y}{a},\frac{[a,b]y}{b}\right)=y\left(\frac{b}{(a,b)},\frac{a}{(a,b)}\right)=y=1$, откуда $x=[a,b]$.

Пример 3. Найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 275 и 180.

Решение. Применим алгоритм Евклида для нахождения НОД.

$$\begin{aligned}
275&=180\cdot 1+95,\\
180&=95\cdot 1+85,\\
95&=85\cdot 1+10,\\
85&=10\cdot 8+5,\\
10&=5\cdot 2+0.
\end{aligned}$$

Равенства алгоритма Евклида можно записывать «уголком», одновременно производя вычисления :

$$\begin{array}{rrrrrrl}
 & & & & -\,275 & 180 & \\
 & & & & 180 & 1 & =q_1 \\
 & & & -\,180 & 95 & =r_1 & \\
 & & & 95 & 1 & =q_2 & \\
 & & -\,95 & 85 & =r_2 & & \\
 & & 85 & 1 & =q_3 & & \\
 & -\,85 & 10 & =r_3 & & & \\
 & 80 & 8 & =q_4 & & & \\
-\,10 & \mathbf{5} & \mathbf{=r_4=НОД(125,90)} & & & & \\
10 & 2=q_5 & & & & & \\
0 & & & & & &
\end{array}$$

Последний отличный от нуля остаток, равный 5, является НОД чисел 275 и 180.

Для нахождения НОК чисел воспользуемся формулой:

$$[275,180]=\frac{275\cdot 180}{(275,180)}.$$

Таким образом, $[275,180]=9900$.

Пример 4. Найти линейное представление наибольшего общего делителя чисел 90 и 125.

Решение. Применим алгоритм Евклида для нахождения НОД(125,90).

$$\begin{array}{r|l} 125 & 90 \\ \hline 90 & 1 = q_1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 90 & 35 = r_1 \\ \hline 70 & 2 = q_2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 35 & 20 = r_2 \\ \hline 20 & 1 = q_3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 20 & 15 = r_3 \\ \hline 15 & 1 = q_4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 15 & \mathbf{5} = \mathbf{r_4 = НОД(125,90)} \\ \hline 15 & 3 = q_5 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$a = bq_1 + r_1, \ 0 \le r_1 < l,$$
$$b = r_1 q_2 + r_2, \ 0 \le r_2 < r_1,$$
$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \ 0 \le r_3 < r_2,$$
$$r_2 = r_3 q_4 + r_4, \ 0 \le r_4 < r_3,$$
$$r_3 = r_4 q_5, \quad r_5 = 0 .$$

Выразим:

$$r_4 = r_2 - r_3 q_4, \tag{1}$$
$$r_3 = r_1 - r_2 q_3,$$
$$r_2 = b - r_1 q_2,$$
$$r_1 = a - bq_1$$

и подставим выражения $r_1, \ r_2, \ r_3$ в (1):

$$r_4 = r_2 - r_3 q_4 = b - r_1 q_2 - (r_1 - r_2 q_3) q_4 = b - r_1 (q_2 + q_4) + r_2 q_3 q_4 =$$
$$= b - r_1 (q_2 + q_4) + (b - r_1 q_2) q_3 q_4 = b(1 + q_3 q_4) - r_1 (q_2 + q_4 + q_2 q_3 q_4) =$$
$$= b(1 + q_3 q_4) - (a - bq_1)(q_2 + q_4 + q_2 q_3 q_4) = b(1 + q_1 q_2 + q_1 q_4 + q_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 q_4) +$$
$$+ a(-q_2 - q_4 - q_2 q_3 q_4).$$

Следовательно, $x = -q_2 - q_4 - q_2 q_3 q_4, \ y = 1 + q_1 q_2 + q_1 q_4 + q_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 q_4.$

Найдем x=-2-1-2·1·1=-5, y=1+1·2+1·1+1·1+1·2·1·1=7.

Итак, получили линейное представление НОД чисел 125 и 90:

5= - 5·125+7·90 .

Пример 5. Найти (10n+9,n+1).

Решение. Пусть (10n+9,n+1)=d, тогда 10n+9=dx и n+1=dy. Выразим n из последнего равенства и подставим в предпоследнее равенство. Получим выражение 10(dy-1)+9=dx или 10dy-1=dx, откуда d=1.

Упражнения

1) Найти НОД и НОК чисел: 1) 372 и 156; 2) 544 и 720; 3) 2160 и 5184; 4) 529, 1541 и 1817; 5) 420, 126 и 525; 6) 988, 2014, 42598 и 6726.

2) Найти линейное представление НОД двух чисел: 1) 120 и 144; 2) 114 и 75; 3) 823 и 12; 4) 152 и 97; 5) 152 и 99.

3) Найти (a,c) и (b,c), если $a=177^5+30621\cdot173^3-173^5$, $b=173^5+30621\cdot177^3-177^5$, $c=173^4+30621^2+177^4$.

4) Доказать, что наибольший общий делитель двух последовательных четных чисел равен 2.

5) Доказать, что два последовательных нечетных числа – числа взаимно простые.

6) Доказать, что $\left(\frac{n(n+1)}{2}, 2n+1\right)=1$.

7) Доказать, что если $(a,b)=1$, то $(a+b, a-b)=1$ или $(a+b, a-b)=2$.

8) Дробь $\frac{a}{b}$ несократима. Будет ли несократимой дробь $\frac{a}{a+b}$?

9) Дробь $\frac{a+b}{a-b}$ (a, b — целые положительные числа) сократима. Что в этом случае можно сказать о сократимости дроби $\frac{a}{b}$?

10) Показать, что сумма $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}$, где a, b – взаимно простые целые положительные числа, после приведения дроби к общему знаменателю не может быть сократимой дробью.

11) Доказать, что если числа a и b взаимно простые, то их сумма и неполный квадрат разности тоже числа взаимно простые или имеют общий наибольший делитель, равный 3.

12) Доказать, что если числа a и b взаимно простые и одно из них четное, а другое нечетное, то

$$\left((a+b)^n, (a-b)^n\right)=1.$$

13) Доказать, что произведение двух взаимно простых положительных чисел равно квадрату целого числа тогда и только тогда, когда каждый из сомножителей есть квадрат целого числа.

14) Показать, что с помощью двух сосудов вместимостью a и b литров (a и b – целые взаимно простые и $b>a>1$) можно налить из водопроводного крана любое число литров, не превосходящее b.

15) Доказать, что наибольший общий делитель чисел a и b совпадает с наибольшим общим делителем чисел $5a+3b$ и $13a+8b$.

16) Показать, что сумма

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} \quad (n>1)$$

не может быть целым числом.

17) Установить, чему может быть равно наименьшее общее кратное трех последовательных натуральных чисел.

18) Доказать, что наибольший общий делитель суммы двух чисел и их наименьшего общего кратного совпадает с наибольшим общим делителем этих чисел.

19) Доказать, что наименьшее общее кратное чисел 1, 2, …, $2n$ равно наименьшему общему кратному чисел $n+1$, $n+2$, …, $2n$.

20) Решить в натуральных числах следующие системы уравнений:

a) $\begin{cases} x+y=150 \\ (x,y)=30; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{9} \\ (x,y)=28; \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy=20 \\ [x,y]=10; \end{cases}$ d) $\begin{cases} (x,y)=13 \\ [x,y]=1989; \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y=667 \\ \dfrac{[x,y]}{(x,y)}=120; \end{cases}$ f) $\begin{cases} [x,y]=8100 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=48. \end{cases}$

3. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА. КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД ЧИСЛА

Определение. Натуральное число p называется простым, если $p>1$ и p не имеет положительных делителей, отличных от 1 и p.

Первые простые числа в натуральном ряду 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,…

Определение. Натуральное число $n>1$ называется составным, если число n имеет по крайней мере один положительный делитель, отличный от 1 и n.

Согласно этим определениям множество натуральных чисел разбивается на три подмножества: 1) простые числа; 2) составные числа; 3) число 1, которое не причисляется ни к простым числам, ни к составным.

<u>Свойства простых чисел.</u>

1. Если простое число p кратно натуральному числу $a>1$, то $p=a$.
2. Простое число p тогда и только тогда взаимно просто с натуральным числом a, когда a не делится на p.
3. Если произведение двух натуральных чисел ab делится на простое число p, то по меньшей мере один из сомножителей a, b произведения должен делиться на p.
4. Множество простых чисел бесконечно (теорема Евклида).

Пример 1. Найти простое число p, чтобы число $2p^2+1$ было также простым.

Решение. Разобьем множество простых чисел на три класса: класс простых чисел $3q$ (q=1), класс простых чисел вида $3q+1$ (q=2, 4, …) и класс простых чисел вида $3q+2$ (q=1, 3, …). Единственное простое число первого класса p=3 удовлетворяет требованиям задачи. При $p=3q+1$ или $p=3q+2$ число $2p^2+1$ является составным — кратным трем.

Пример 2. Показать, что существует бесконечное множество простых чисел вида $3n+1$.

Решение. Все множество натуральных чисел разобьем на три подмножества с общими членами: $3u$, $3u+1$, $3u+2$; среди чисел первого подмножества имеется лишь одно простое число 3, остальные простые числа входят в два других подмножества. Допустим, что P — наибольшее простое число вида $3n+1$; запишем число $N=3\cdot 7\cdot 13\cdot 19\cdot\ldots\cdot P+1$, где в произведение включено число 3 и все простые числа вида $3n+1$; очевидно, число N будет вида $3n+1$ и, следовательно, $N=3s+1$.

Число N не может быть простым, так как $N> P$, но оно не может иметь простыми делителями число 3 и числа вида $3n+1$; следовательно, все его простые делители вида $3u+2$, откуда $N=3t+2$, но равенство $3t+2=3s+1$ невозможно ни при каких целых положительных значениях t и s, так как последнее равенство может быть переписано в виде $3(t-s)=-1$. Полученное противоречие доказывает существование бесконечного множества простых чисел вида $3n+1$.

Пример 3. Доказать, что 3, 5 и 7 являются единственной тройкой простых чисел-близнецов (т.е. тройкой простых чисел, составляющих арифметическую прогрессию с разностью 2).

Решение. Рассмотрим числа p, $p+2$, $p+4$ ($p>3$). Положим, $p=3q+1$ (q=2, 4,…), тогда число $p+2$ — число составное (кратное 3). Если $p=3q+2$ (q=1, 3,…), то составным является $p+4$.

Теорема 1. Как бы велико ни было целое число $k\geq 1$, в натуральном ряду можно найти k составных чисел, непосредственно следующих друг за другом.

Следующая теорема дает критерий, позволяющий судить, является ли натуральное число простым или составным.

Теорема 2. Если натуральное число n ($n>1$) не делится ни на одно простое число $\leq \sqrt{n}$, то оно простое.

Очевидно, что если n делится хоть на одно простое число, меньшее или равное $\sqrt{n}$, то оно является составным.

Способ отсеивания составных чисел, получивший название решета Эратосфена, заключается в следующем:

1) если во множестве натуральных чисел 2, 3, 4, …,N зачеркнуть числа, кратные первым r простым числам 2, 3, …,p_r, то первое (наименьшее) незачеркнутое число будет простым;

2) если вычеркнуть все числа, кратные всем простым числам до $\sqrt{N}$, то оставшиеся числа будут совпадать с множеством всех простых чисел p, — таких, что $\sqrt{N}<p\leq N$.

Пример. Найти все простые числа между 2640 и 2660.

Решение. Так как $\sqrt{2659}=51{,}565\ldots$, то наименьший простой делитель указанных чисел ≤ 47. Выпишем указанные числа 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659 и будем отсеивать числа, кратные простым числам, не превышающим 47. Сначала удалим каждое четное число : 2641, 2643, 2645, 2647, 2649, 2651, 2653, 2655, 2657, 2659. Затем найдем первое число, кратное 3, используя признак делимости на 3 (этим числом является 2643), и удалим его, а также каждое третье число. Останутся 2641, 2645, 2647, 2651, 2653, 2657, 2659. Из этих чисел удалим число 2645, т. к. оно делится на 5. Так как 2641=7·377+2, то наименьшее кратное 7 число — пятое от 2641, т.е. 2646; но оно уже удалено, а следующее число кратное 7 — 2653. После его удаления останутся числа 2641, 2647, 2651, 2657, 2659. Заметим, что число 2641 при делении на простое число 11 дает в остатке 1. Значит, следующее число, которое делится на 11, будет 2651. Далее выясняется, что ни одно из оставшихся чисел не делится ни на 13, ни на 17. Следующее простое число 19 делит нацело число 2641. Таким образом, остаются числа 2647, 2657 и 2659, которые не делятся ни на 23, ни на 29, 31, 37, 41, 43, 47, а значит, оставшиеся числа являются простыми.

Теорема (основная теорема арифметики). Всякое натуральное число либо является простым, либо разлагается в произведение простых чисел, и притом единственным образом, без учета порядка следования множителей.

Определение. Каноническим разложением натурального числа $n>1$ называется представление n в виде $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2,..., p_k$ — попарно различные простые числа, $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ — натуральные числа.

Например, число 3780 имеет следующий канонический вид:

$$3780=2^2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7.$$

Процесс представления чисел в каноническом виде называется факторизацией.

Пусть числа a и b представлены в виде произведения простых множителей $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$, $b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_k^{\beta_k}$, где $p_1, p_2,..., p_k$ — различные простые числа, а показатели α_i и β_j — целые неотрицательные числа, среди которых некоторые показатели могут равняться нулю. Тогда наибольший общий делитель этих чисел ищется по правилу:

$$(a,b)=\prod_{i=1}^{k} p^{\min(\alpha_i,\beta_i)},$$

а наименьшее общее кратное по правилу:

$$[a,b]=\prod_{i=1}^{k} p^{\max(\alpha_i,\beta_i)}.$$

Справедливость этих правил очевидна из основной теоремы арифметики и определений НОД и НОК.

Пример. Найти канонический вид чисел 792 и 1936, их НОД и НОК.

Решение.

792	2
396	2
198	2
99	3
33	3
11	11
1	

1936	2
968	2
484	2
242	2
121	11
11	11
1	

$$792=2^3\,3^2\,11,\ 1936=2^4\,11^2,$$

$$(792,1936)=2^3\,11=88,\qquad [792,1936]=2^4 3^2\,11^2=17424\,.$$

Упражнения

1. Определить простым или составным числом является:
   a) $2^{54}+7^{18}$;
   b) n^4+1, где $n>1$;
   c) n^4+n^2+1, где $n>1$;
   d) $5^{501}+4^{402}+3^{500}$;
   e) $2222^{5555}+5555^{2222}$.
2. Доказать, что p^2-1 делится на 24,где $p>3$ — простое число.
3. Доказать, что квадрат простого числа p , $p\geq5$, при делении на 24 дает остаток 1.
4. Доказать, что разность четвертых степеней двух простых чисел, больших 5, делится на 240.
5. Сумма и произведение двух чисел делятся на некоторое третье число. Что можно сказать о делимости каждого из данных двух чисел на это третье число, если оно простое?если оно составное?
6. Доказать, что если a и b — не равные простые числа, то $(a+b,a-b)=2$.
7. Доказать, что если разность a^p-b^p делится на p, то она разделится и на p^2, где a и b — целые числа, p— простое число.
8. Найти натуральные значения m, такие, чтобы числа m, $m+10$ и $m+14$ были простыми.
9. Найти числа, представляющие собой кубы натуральных чисел и имеющие вид $13p+1$, где p — простое число.
10. Доказать, что если a — простое число вида $4k+1$, то a^2 может быть представлено в виде $24n+1$.
11. Написать 10 последовательных составных чисел.
12. Какие простые числа заключены между 40322 и 40330, 3628802 и 3628810?
13. Доказать, что существует бесконечное множество простых чисел вида $4n-1$.
14. Доказать, что существует бесконечное множество простых чисел вида $6n+1$.

15. Доказать, что число $\sqrt{2249\underbrace{9\ldots9}_{k-2}\underbrace{10\ldots0}_{k}9}+3$ при $k\geq2$ имеет простыми делителями только числа 2, 3, 5.

16. Доказать, что сумма двух простых чисел делится на 12, если их разность равна 2 и меньшее больше 3.

17. Три простых числа, большие 3, образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что разность этой прогрессии делится на 6.

18. Найти каноническое разложение чисел:

а) 420, б) 2401, в) 38808, г) 3599, д) 1185575.

19. С помощью канонического разложения найти НОД и НОК чисел: а) 247 и 1596; б) 2160 и 36000; в) 6188, 4709 и 11050; г) 2737, 9163 и 9639.

20. Найти все делители числа 572, используя каноническое представление этого числа. Сколько делителей имеет число $572a^3bc$, если:

1) a, b, c – различные простые числа, большие 20; 2) a=31, b=32, c=33?

4. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

Определение. Функция называется числовой, если она определена при всех натуральных значениях аргумента.

Определение. Целой частью действительного числа α называется наибольшее целое число, не превосходящее α.

Целая часть числа обозначается $[\alpha]$.

Таким образом, $[\alpha]\leq\alpha<[\alpha]+1$.

Определение. Дробной частью действительного числа α называется разность $\alpha - [\alpha]$.

Дробная часть обозначается $\{\alpha\}$. Тогда $0\leq\{\alpha\}<1$.

Пример 1. $[7{,}32]=7$, $[-6{,}9]=-7$, $\{4.8\}=0{,}8$, $\{6\}=0$, $\{-3{,}65\}=0{,}35$.

Теорема. Пусть p – простое число, $n>1$ – целое. Показатель α наивысшей степени p, делящей $n!$, равен $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots$.

Эта теорема дает возможность находить каноническое разложение $n!$:

$$n!=\prod_{p} p^{\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots}.$$

Пример 2. Найти каноническое разложение 13!

Решение. Пусть число 13! имеет следующий канонический вид $2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}5^{\alpha_3}7^{\alpha_4}11^{\alpha_5}13^{\alpha_6}$. Найдем показатели, с которыми простые числа 2, 3, 5, 7, 11, 13 входят в разложение 13!:

$$\alpha_1=\left[\frac{13}{2}\right]+\left[\frac{13}{2^2}\right]+\left[\frac{13}{2^3}\right]+\left[\frac{13}{2^4}\right]=6+3+1+0=10,$$

$$\alpha_2=\left[\frac{13}{3}\right]+\left[\frac{13}{3^2}\right]+\left[\frac{13}{3^3}\right]=4+1+0=5,$$

$$\alpha_3=\left[\frac{13}{5}\right]+\left[\frac{13}{5^2}\right]=1+0=1,$$

$$\alpha_4=\left[\frac{13}{7}\right]+\left[\frac{13}{7^2}\right]=1+0=1,$$

$$\alpha_5=\left[\frac{13}{11}\right]+\left[\frac{13}{11^2}\right]=1+0=1,$$

$$\alpha_6=\left[\frac{13}{13}\right]+\left[\frac{13}{13^2}\right]=1+0=1.$$

Таким образом, каноническое разложение 13! представляется в виде $13!=2^{10}\cdot 3^5\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$.

Числовые функции, зависящие от делителей аргумента, — это $\tau(n)$ и $\sigma(n)$. Функция $\tau(n)$ определяется как число положительных делителей натурального числа n, а $\sigma(n)$ определяется как сумма положительных делителей n, т.е.

$$\tau(n)=\sum_{d/n} 1,\ \sigma(n)=\sum_{d/n} d.$$

Если $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение натурального числа, то

$$\tau(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k})=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_k+1) \quad \text{и}$$

$$\sigma(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k})=\frac{p_1^{\alpha_1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_k^{\alpha_k}-1}{p_k-1}.$$

Функции $\tau(n)$ и $\sigma(n)$ — мультипликативные, т.е. $\tau(ab)=\tau(a)\tau(b)$ и $\sigma(ab)=\sigma(a)\sigma(b)$.

Пример 3. $\tau(360)=\tau(2^3\,3^2\,5)=(3+1)(2+1)(1+1)=24$;

$$\sigma(360)=\sigma(2^3\,3^2\,5)=\frac{2^{3+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^{2+1}-1}{3-1}\cdot\frac{5^{1+1}-1}{5-1}=1170.$$

Определение. Число n называется совершенным, если $\sigma(n)=2n$.

Например, совершенными числами являются 6, 28, 496, 8128.

Теорема. Четное число n является совершенным тогда и только тогда, когда имеет вид

$$n=2^{k-1}(2^k-1),\ \text{где } k\geq 2,\ 2^k-1 \text{ — простое число.}$$

Пример 4. Найти число делителей куба числа, если само число имеет два простых делителя, а его квадрат имеет всего 15 делителей.

Решение. По условию данное число имеет вид $m=p_1^{\alpha}p_2^{\beta}$ и $m^2=p_1^{2\alpha}p_2^{2\beta}$. Тогда число делителей $\tau(m^2)$ вычисляется по формуле $(2\alpha+1)(2\beta+1)=15$, откуда $2\alpha+1=3$ и $2\beta+1=5$, т.е. $\alpha=1$ и $\beta=2$. Значит, $\tau(m^3)=(3\alpha+1)(3\beta+1)=4\cdot 7=28$.

Определение. Если для двух чисел a и b выполняются условия:

$$\sigma(a)-a=b,\ \sigma(b)-b=a,$$

то такие числа называются дружественными.

Примером дружественных чисел служат числа 220 и 284.

Определение. Функцией Эйлера $\varphi(n)$ называется число натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n.

Функция Эйлера – мультипликативная.

Функция Эйлера вычисляется по следующим формулам:

$$\varphi(p)=p-1;$$

$$\varphi(p^{\alpha})=p^{\alpha}\cdot(1-\frac{1}{p});$$

$$\varphi(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots\cdot p_k^{\alpha_k})=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\ldots(1-\frac{1}{p_k}).$$

Пример 5. $\varphi(13)=13-1=12$, $\varphi(121)=\varphi(11^2)=11^2(1-\frac{1}{11})=110$,

$$\varphi(360)=\varphi(2^3 3^2 5)=2^3 3^2 5(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})=360\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=96.$$

Справедливо тождество Гаусса:

$$\varphi(d_1)+\varphi(d_2)+\ldots+\varphi(d_k)=m,$$

где d_i – все натуральные делители m.

Пример 6. Решить уравнение $\varphi(x)=2^{\alpha}$.

Решение. Из формулы Гаусса имеем, что $x=2^y\,3^z\,5^u$ ($y\geq 0$, $z=0;\ 1$, $u=0;\ 1$). Исследование возможностей $x=2^y$; $2^y\,3$; $2^y\,5$; $2^y 15$; 3; 5; 15 дает : $x=2^{\alpha+1}$; $2^{\alpha}3$; $2^{\alpha-1}5$; $2^{\alpha-2}15$ ($\alpha\geq 2$); 15($\alpha=3$).

Пример. Найти количество натуральных чисел, не превышающих числа 1200 и имеющих с ним наибольшим общим делителем число 30.

Решение. Используем свойство функции Эйлера: если d – делитель числа n и имеющих с n общим делителем число d – равно $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$.

Так как $\frac{n}{d}=\frac{1200}{30}=40$, то $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)=\varphi(40)=\varphi\left(2^3\cdot 5\right)=\varphi(2^3)\,\varphi(5)=$
$=2^{3-1}(2-1)\cdot(5-1)=16$.

Определение. Функцией Мебиуса называется функция $\mu(n)$ такая, что:

1) $\mu(1)=1$;
2) $\mu(n)=(-1)^s$, если $n=p_1p_2...p_s$;
3) $\mu(n)=0$, если $n\vdots p^2$.

Пример 7. $\mu(390)=\mu(2\cdot 3\cdot 5\cdot 13)=(-1)^4=1$, $\mu(2366)=\mu(2\cdot 7\cdot 13^2)=0$.

Функция $\pi(x)$ выражает число простых чисел, не превышающих $x>0$. Она неограниченно возрастает с возрастанием x. Существуют постоянные $a<b$,

такие, что при всех $x>2$ имеют место неравенства $a< \pi(x):\dfrac{x}{\ln x}<b$ (неравенство Чебышева). Более точно связь между функциями $\pi(x)$ и $\dfrac{x}{\ln x}$ выражается асимптотической формулой $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\ln x}$.

Упражнения

1. Найти целую часть числа: 1) –7,81; 2) $\dfrac{2+\sqrt{59}}{3}$; 3) $\dfrac{2}{5-\sqrt{5}}$; 4) $-2-\sin\dfrac{15\pi}{8}$; 5) $4-\lg\dfrac{1}{5}$; 6) $2-\lg\overline{abcd}$; 7) $3-2\cos\dfrac{90\pi}{181}$.

2. Построить графики функций: 1) $[-2x+1]$; 2) $\left[\dfrac{x^2}{2}-1\right]$; 3) $[\cos x]$.

3. Решить уравнения: 1) $\left[x^2\right]=9$; 2) $\left[3x^2-2x\right]=2x-1$; 3) $[x]=\dfrac{3}{4}x$.

4. Сколько натуральных чисел, кратных 593, заключено между 10^7 и 10^8?

5. Сколько натуральных чисел, меньших 1000, не делятся ни на 3, ни на 11?

6. Среди чисел от 1 до 41 найти количество чисел, делящихся на 2, но не делящихся на 2^3.

7. Сколькими нулями заканчивается число 2001!?

8. С каким показателем число 8 входит в произведение $100!\cdot 101!$?

9. С каким показателем степени входит простое число p в каноническое разложение $p^n!$?

10. Найти каноническое разложение чисел: а) 13!, б) 18!, в) 27!

11. Найти каноническое разложение числа $\dfrac{40!}{20!\cdot 20!}$.

12. Найти наибольшее число α, при котором $\dfrac{101\cdot 102\ldots 1000}{11^{\alpha}}$ – число целое.

13. Показать, что для взаимно простых целых чисел $p>0$ и $q>0$ имеет место равенство

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

14. Путешественник был в пути целое количество дней и проезжал каждый день столько километров, сколько дней он был в пути. Если бы он проезжал каждый день по 20 км и останавливался на один день через каждые 40 км, то время его езды увеличилось бы на 37 дней. Определить время езды.

15. Найти число и сумму делителей чисел:

а) 800, б) 21700, в) 28561, г) 27504.

16.Найти натуральные делители чисел:

а) 75, б) 360, в) 363.

17.Построить графики функций y=τ(n) и y=σ(n).

18.Найти натуральное число, если оно делится на 3 и на 4 и имеет 14 делителей.

19.Некоторое натуральное число имеет два простых делителя, его квадрат имеет всего 81 делитель. Сколько делителей имеет куб этого числа?

20.Найти количество делителей числа n^3, если $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}$ и число n^2 имеет 105 различных делителей.

21.Найти наименьшее натуральное число, имеющее двенадцать положительных делителей.

22.Доказать, что натуральные числа вида $2^{\alpha}(2^{\alpha+1}-1)$, где $2^{\alpha+1}-1$ – простое число, являются единственными четными совершенными числами (теорема Эйлера).

23.Доказать, что натуральное число является точным квадратом тогда и только тогда, когда число его различных натуральных делителей нечетное.

24.Вычислить: $\varphi(729)$, $\varphi(1000)$, $\varphi(624)$, $\varphi(34272)$, $\varphi(509)$.

25.Сколько натуральных чисел в промежутке от 1 до 150 не взаимно простых с 24?

26.Найти число натуральных чисел, не превышающих 450 и имеющих наибольшим общим делителем число 15.

27.Проверить справедливость формулы $\sum\limits_{d/n}\varphi(d)=n$, где суммирование распространено на все делители числа n, для чисел:

а) 16, б) 21, в) 30.

28.Дано, что $\varphi(7^n)=705894$. Найти n.

29.Решить уравнения: 1) $\varphi(p^x)=p^{x-1}$; 2) $\varphi(3^x5^x)=600$; 3) $\varphi(p^x)=6\cdot p^{x-2}$; 4) $\varphi(x)=\dfrac{x}{2}$; 5) $\varphi(x)=\dfrac{x}{3}$; 6) $\varphi(x)=\dfrac{x}{4}$; 7) $\varphi(x)=11424$, где $x=p_1^2p_2^2$.

30.Найти условия, при которых $\varphi(3x)=\varphi(2x)$, где x – натуральное число.

31.Показать невозможность равенства $\varphi(5x)=\varphi(2x)$, где x – натуральное число.

32.Построить график функции $y=\pi(x)$.

33.Вычислить: а) $\pi(60)$, б) $\pi(90)$.

5, 6. КОНЕЧНЫЕ И БЕСКОНЕЧНЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

Определение. Конечной цепной дробью называется число, записанное в виде

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_s}}},$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots a_s$ – целые числа, $a_1 \geq 1, \ldots, a_{s-1} \geq 1, \ldots a_s > 1$.

Теорема. Любое рациональное число можно представить в виде конечной цепной дроби, притом единственным образом.

Определение. k - ой подходящей дробью ($0 \leq k \leq s$) к конечной цепной дроби называется величина

$$\frac{P_k}{Q_k}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_k}}}.$$

Существует рекуррентная формула для вычисления подходящих дробей:

$$\frac{P_k}{Q_k}=\frac{q_k P_{k-1}+P_{k-2}}{q_k Q_{k-1}+Q_{k-2}}$$

Вычисление подходящих дробей с помощью данной рекуррентной формулы целесообразно проводить по следующей схеме:

k		0	1	2	...	m
q_k		q_0	q_1	q_2	...	q_m
P_k	1	P_0	P_1	P_2	...	$P_m=q_m P_{m-1}+P_{m-2}$
Q_k	0	$Q_0=1$	Q_1	Q_2	...	$Q_m=q_m Q_{m-1}+Q_{m-2}$

<u>Свойства подходящих дробей.</u>

1. $P_k Q_{k-1}-P_{k-1}Q_k=(-1)^{k-1}$ $(k \geq 1)$.

2. Подходящие дроби четного порядка образуют возрастающую последовательность, а подходящие дроби нечерного порядка – убывающую последовательность; при этом любая подходящая дробь нечетного порядка больше любой подходящей дроби четного порядка.

3. Если α — положительное рациональное число и $\frac{P_k}{Q_k}$ — подходящая дробь k - го порядка цепной дроби, в которую α разложено, то $\left|\alpha-\frac{P_k}{Q_k}\right|<\frac{1}{Q_k^2}$.

Пример 1. По данной конечной дроби найти соответствующее рациональное число, если $\frac{a}{b} = [-2;1,2,2,2,1,5]$.

Решение. Найдем все подходящие дроби, составив и заполнив таблицу:

k		0	1	2	3	4	5	6
q_k		-2	1	2	2	2	1	5
P_k	1	-2	-1	-4	-9	-22	-31	-177
Q_k	0	1	1	3	7	17	24	137

Последняя подходящая дробь $\frac{P_6}{Q_6} = \frac{-177}{137}$ и является искомым рациональным числом.

Определение. Бесконечной цепной дробью называется выражение вида

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}},$$

где a_0– целое число, а все остальные a_n – натуральные числа.

Определение. Подходящей дробью $\frac{P_k}{Q_k}$ к бесконечной цепной дроби $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}$ называется конечная цепная дробь

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_k}}}.$$

Определение. Бесконечная цепная дробь называется сходящейся, если существует предел ее подходящих дробей, т.е.

$$\lim_{k \to \infty} \frac{P_k}{Q_k}.$$

Определение. Величиной бесконечной сходящейся цепной дроби называется предел ее подходящих дробей, т.е. такое число α, что $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{P_k}{Q_k} = \alpha$.

Конечные и бесконечные цепные дроби объединяют общим понятием «цепные дроби», понимая под этим выражения вида $a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots}}$, где последовательность целых чисел a_0, $a_1\geq 1$, $a_2\geq 1$ ... может быть конечной или бесконечной. В случае конечной последовательности последний член $a_s>1$.

Теорема 1. Пусть разложение α в цепную дробь имеет вид: $\alpha=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots}}$. Введем обозначение $\alpha_0=a_s+\cfrac{1}{a_{s+1}+\cfrac{1}{a_{s+2}+\ddots}}$. Тогда:

1) $\alpha=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots\cfrac{}{a_{s-1}+\cfrac{1}{\alpha_s}}}}$, т.е. α_s представляет собой s –е полное частное к разложению α;

2) $a_s=[\alpha_s]$ при всех s.

Теорема 2. Для любого действительного числа α существует разложение в цепную дробь.

Пример 1. Найти величину цепной дроби $3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}}}}$.

Решение. Согласно ранее сформулированным теоремам имеем:

$$\alpha=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\alpha}}}},\quad \alpha=\frac{P_3\alpha+P_2}{Q_3\alpha+Q_2}.$$

Составим таблицу значений P_k и Q_k:

k		0	1	2	3
q_k		3	3	3	1
P_k	1	3	10	33	43
Q_k	0	1	3	10	13

так что $\alpha=\frac{43\alpha+33}{13\alpha+10}$, $13\alpha^2-33\alpha-33=0$, а поскольку $\alpha>0$, то $\alpha=\frac{33+\sqrt{2805}}{26}$.

Теорема 3. Если бесконечная цепная дробь получена из данного положительного иррационального числа с помощью процесса выделения целой части, то должно быть значением этой цепной дроби.

Таким образом, всякое действительное положительное число α всегда можно представить в виде цепной дроби, эта дробь конечна, если α рационально, и бесконечна, если α иррационально.

Определение. Бесконечная цепная дробь называется чистой периодической, если последовательность ее неполных частных a_0, a_1, a_2, … a_n, … представляет собой повторение одного и того же периода из $(n+1)$ чисел a_0, a_1, a_2, … a_n, и смешанной периодической, если такое повторение имеет место лишь после некоторого неполного частного a_k $(k\geq 0)$.

Определение. Действительное иррациональное число ω называется квадратичной иррациональностью, если ω – корень квадратного уравнения с целыми коэффициентами. Общий вид квадратичной иррациональности: $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$, где a, $c\neq 0$ и $b>0$ – целые числа.

Теорема Лагранжа. Всякая положительная квадратичная иррациональность ω разлагается в периодическую цепную дробь.

Имеет место и обратная теорема.

Теорема 4. Квадратичная иррациональность $\alpha=\frac{a+\sqrt{b}}{c}$, где a, $c\neq 0$ и $b>0$ – целые числа, разлагается в чисто периодическую цепную дробь тогда и только тогда, когда $\alpha>1$ и сопряженная иррациональность $\alpha'=\frac{a-\sqrt{b}}{c}$ лежит в интервале (-1;0).

Пример 2. Заменить число $\sqrt{15}$ такой его подходящей дробью, чтобы его погрешность не превосходила 0,0001.

Решение. Всякая положительная квадратичная иррациональность разлагается в бесконечную периодическую дробь.

Целая часть числа $\sqrt{15}$ есть *3*, а поэтому $\sqrt{15}=3+\frac{1}{\alpha_1}$; $\alpha_1=\frac{\sqrt{15}+3}{6}$.

Целая часть числа $\frac{\sqrt{15}+3}{6}$ равна *1*, а поэтому $\frac{\sqrt{15}+3}{6}=1+\frac{1}{\alpha_2}$; $\alpha_2=\sqrt{15}+3$.

Целая часть числа $\sqrt{15}+3$ равна 6, а поэтому $\sqrt{15}+3=6+\dfrac{1}{\alpha_3}$;

$\alpha_3=\dfrac{\sqrt{15}+3}{6}=\alpha_1$. Следовательно, неполные частные будут повторяться и разложение $\sqrt{15}$ в бесконечную цепную дробь будет иметь вид:

$$3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6\ddots}}}} \text{ или } [3;1616...].$$

Составим таблицу значений числителя и знаменателя подходящих дробей

k		0	1	2	3	4	5	6	...
q_k		3	1	6	1	6	1	6	...
P_k	1	3	4	27	31	213	244	1708	...
Q_k	0	1	1	7	8	55	63	433	...

Подходящая дробь $\dfrac{P_k}{Q_k}$ должна быть выбрана так, чтобы имело место соотношение:

$$\left|\sqrt{15}-\frac{P_k}{Q_k}\right|<\frac{1}{Q_kQ_{k+1}}\le 0{,}0001.$$

Условию задачи удовлетворяет подходящая дробь пятого порядка $\dfrac{P_5}{Q_5}=\dfrac{244}{63}$,

т.к. $\dfrac{1}{Q_5Q_6}=\dfrac{1}{63\cdot 433}=\dfrac{1}{27279}$<0,0001.

Пример. Корнем какого квадратного уравнения является число $[2,2,4,1(1,1,3)]$?

Решение. Полагая $x=[2,2,4,1,y]$, $y=[1,1,3,y]$, установим зависимость между x и y по схеме нахождения подходящих дробей:

	2	2	4	1	y
1	2	5	22	27	$27y+22$
0	1	2	9	11	$11y+9$

Отсюда следует, что

$$x=\frac{27y+22}{11y+9}. \tag{1}$$

С другой стороны, взяв $y=[1,1,3,y]$, по схеме получаем:

	1	1	3	y
1	1	2	6	$6y+2$
0	1	1	4	$4y+1$

и, следовательно,

$$y = \frac{6y+2}{4y+1}. \qquad (2)$$

Путем простейших преобразований (1) получаем $y = \frac{22-9x}{11x-27}$.

После соответствующих преобразований равенство (2) принимает вид $4y^2-5y-2=0$, а в результате подстановки получаем

$$4\left(\frac{22-9x}{11x-27}\right)^2 - 5\frac{22-9x}{11x-27} - 2 = 0$$

и окончательно:

$$497x^2-2029x+28385=0.$$

Упражнения

1. Разложить рациональные числа в конечные цепные дроби и найти подходящие дроби: 1) $\frac{637}{125}$; 2) $-\frac{169}{27}$; 3) $\frac{883}{211}$; 4) $\frac{865}{412}$; 5) 2,71828.

2. По данным конечным дробям найти соответствующие им обыкновенные несократимые дроби: 1) $[3;11,1,1,2,1,2]$; 2) $[-3;2,4,6,1,2]$; 3) $[a;a,a,a,a]$; 4) $[a;2a,a,2a,a]$.

3. Сократить дроби: 1) $\frac{1043}{3427}$; 2) $-\frac{3653}{3107}$; 3) $\frac{70757}{491209}$.

4. Доказать несократимость дроби вида $\frac{a^4+3a^2+1}{a^3+2a}$, где a – натуральное число.

5. Решить уравнения: 1) $[2;x,7]=\frac{19}{7}$; 2) $[1;x,3,2,2]=\frac{107}{88}$.

6. Что произойдет с цепной конечной дробью, если одно из ее неполных частных увеличить на несколько единиц?

7. Разложить в цепную дробь 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; 4) $\frac{4}{5+\sqrt{3}}$.

8. Найти величины цепных дробей: 1) $1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\ddots}}}}}$;

2) $3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\ddots}}}}}}$; 3) $[1;2,3,\overline{4}]$; 4) $[0;1,1,1,1,\overline{2,2,2}]$; 5) $[a;\overline{a,2a}]$.

9. С помощью аппарата цепных дробей найти лучшее приближение $\sqrt{5}$ со знаменателем, не превышающим 72.

10. При помощи зубчатой передачи, состоящей из двух шестерен, требуется установить между их осями отношение угловых скоростей вращения, близкое к 355:113, чтобы погрешность не превышала 0,002. Можно ли осуществить такую передачу при помощи меньшего числа зубцов, чем 355 и 113?

11. Корнем какого квадратного уравнения является число: 1) $[2,5,(1,2)]$; 2) $[3,2,1,(2,4,1,1)]$?

12. С помощью аппарата цепных дробей вычислить положительный корень квадратного уравнения: а) $3x^2-7x-5=0$ с точностью до 0,01; б) $16x^2-8x-8=0$ с точностью до 0,001.

13. Зная значение числа $\pi\approx3{,}1416$ с точностью до четвертого знака после запятой, выяснить, является ли дробь $\frac{22}{7}$ подходящей дробью разложения π в цепную дробь.

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ «ДЕЛИМОСТЬ В КОЛЬЦЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ»

Вариант 1

1. Доказать методом математической индукции, что при любом целом n выражение $n^6-3n^5+6n^4-7n^3+5n^2-2n$ делится на 24.
2. Доказать: чтобы двузначное число умножить на 101, достаточно приписать справа к данному числу само это число.
3. Доказать, что при целом нечетном n выражение $n^8-n^6-n^4+n^2$ делится на 1152.
4. Найти неизвестные цифры числа $\overline{1234xy}$, если оно делится на 8 и на 9.

Вариант 2

1. Доказать методом математической индукции, что при любом целом неотрицательном n выражение $3^{2n+2}5^{2n}-3^{3n+2}2^{2n}$ делится на 1053.
2. Доказать, что если имеются два трехзначных числа, каждое из которых не делится на 37, но их сумма делится на 37, то шестизначное число, составленное из этих двух чисел, делится на 37.
3. Доказать, что при целом нечетном n выражение $n^{12}-n^8-n^4+1$ делится на 512.
4. Доказать, что всякое число, делящееся на 2^n, есть сумма 2^{n-1} последовательных нечетных чисел.

Вариант 3

1. Доказать методом математической индукции, что при натуральном четном (или равном 0) n выражение $20^n+16^n-3^n-1$ делится на 323.
2. Чтобы умножить число на 25, достаточно найти частное от деления этого числа на 4 и к результату приписать 00; 25; 50 или 75 в зависимости от того, равен ли остаток соответственно 0, 1, 2, 3.
3. Доказать, что $ab(a^4-b^4)$ делится на 30, где a и b–любые натуральные числа.
4. Доказать, что числа 49, 4489, 444889 и т. д., полученные путем вписывания в середину предыдущего числа 48, –квадраты натуральных чисел.

Вариант 4

1. Доказать методом математической индукции, что при любом целом n выражение $n^4+6n^3+11n^2+6n$ делится на 24.
2. Доказать, что если трехзначное число делится на 37, то имеются и другие трехзначные числа, составленные из тех же цифр, которые делятся на 37.
3. Доказать, что при любом натуральном n выражение $6n^5+15n^4+10n^3-n$ делится на 30.

4. Найти неизвестные цифры числа $\overline{4x87y6}$, если оно делится на 56 .

Вариант 5

1. Доказать методом математической индукции, что при любом целом неотрицательном n выражение $6^{2n}+3^{n+2}+3^{n}$ делится на 11.
2. Доказать: чтобы четное число умножить на 15, достаточно к этому числу прибавить частное от деления этого числа на 2 и к результату приписать 0.
3. Доказать, что при любом натуральном n выражение $n(n^2+49)(n^2-49)$ делится на 30.
4. Доказать, что числа 16, 1156, 111556 и т. д., полученные путем вписывания в середину предыдущего числа 15, –квадраты натуральных чисел.

Вариант 6

1. Доказать методом математической индукции, что при любом целом неотрицательном n выражение $3^{3n+2}+5\cdot 2^{3n+1}$ делится на 19.
2. Доказать, что если число делится на 6, то сумма цифры единиц с учетверенной цифрой каждого из остальных разрядов числа делится на 6 и обратно.
3. Доказать, что при любом целом неотрицательном n выражение $n^7-5n^5+4n^3$ делится на 360.
4. Найти четырехзначное число, зная, что оно является квадратом натурального числа и что цифры его распадаются на две пары, состоящие из одинаковых цифр.

Вариант 7

1. Доказать методом математической индукции, что при любом целом неотрицательном n выражение $2^{n+5}3^{4n}\cdot+5^{3n+1}$ делится на 37.
2. Доказать: чтобы вычислить произведение двух двузначных чисел, у которых одинаковы цифры единиц или десятков, а сумма цифр десятков или единиц равна 10, достаточно произведение цифр десятков сложить с повторяющейся цифрой и к результату приписать двумя цифрами произведение цифр единиц.
3. Доказать, что выражение $ab(a^4-b^4)$делится на 30, где a и b − любые натуральные числа.
4. Доказать, что числа 1331, 1030301, 1003003001 и т. д., полученные при последовательном увеличении количества нулей между цифрами 1, 3, 3, 1, –кубы натуральных чисел.

Вариант 8

1. Доказать методом математической индукции, что при любом целом неотрицательном n выражение $11^{n+2}\cdot+12^{2n+1}$ делится на 133.

2. Доказать, что если число делится на 8, то сумма цифры единиц с удвоенной цифрой десятков и с учетверенной цифрой сотен делится на 8 и обратно.

3. Доказать, что выражение $a^2(a^4-1)$ делится на 60, где a – любое натуральное число.

4. Найти двузначное число, обладающее тем свойством, что если сложить его с суммой кубов его цифр, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

Вариант 9

1. Доказать методом математической индукции, что при любом целом четном n выражение n^3+20n делится на 48.

2. Доказать: чтобы вычислить произведение двух двузначных чисел, у которых цифры одного числа одинаковы, а сумма цифр другого числа равна 10, достаточно произведение цифр десятков сложить с повторяющейся цифрой и к результату приписать двумя цифрами произведение цифр единиц.

3. Доказать, что разность между пятой и первой степенями любого натурального числа, не меньшего 3, делится на 240.

4. Найти неизвестные цифры числа $\overline{x52ypk}$, если оно делится на 11 и сумма его цифр делится на 11.

Вариант 10

1. Доказать методом математической индукции, что при любом целом неотрицательном n выражение $3^{2n+1}\cdot+40n$-67 делится на 64.

2. Доказать: чтобы найти произведение двух двузначных чисел, у которых цифры десятков разнятся на 1, а сумма цифр единиц равна 10, достаточно взять большее из чисел, возвести в квадрат цифру десятков, вычесть единицу и к результату приписать дополнение до 100 квадрата цифры единиц.

3. Доказать, что выражение $a^2b^2(a^4-b^4)(a^4-1)$ делится на 900, где a и b – любые натуральные числа.

4. Найти такие числа K, что если N делится на K, то любое число, полученное из числа N перестановкой порядка цифр, делится на K.

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ «НОД. НОК. Простые числа»

Вариант 1

1. Найти линейное представление НОД чисел 478 и 46.
2. Доказать, что если числа a и m взаимно простые, $a^m - 1$ делится на d и $a^n - 1$ делится на d, то $a^t - 1$ делится на d, где t — произвольное натуральное число.
3. Найти показатель, с которым число 11 содержится в числе $\frac{90!}{45!\cdot 45!}$.
4. Найти количество натуральных чисел, не превышающих числа 1800 и имеющих с ним наибольшим общим делителем число 36.
5. Определить погрешность, полученную при замене числа $\sqrt{17}$ подходящей дробью пятого порядка.

Вариант 2

1. Найти линейное представление НОД чисел 734 и 25.
2. Доказать, что $1+4rq$ есть квадрат числа, если r равно разности между произведением двух чисел и их общим наибольшим делителем, а q равно отношению наименьшего общего кратного к наибольшему общему делителю тех же двух чисел.
3. Найти показатель, с которым число 7 содержится в числе $\frac{40!}{20!\cdot 20!}$.
4. Найти количество натуральных чисел, не превышающих числа 2800 и имеющих с ним наибольшим общим делителем число 26.
5. Определить погрешность, полученную при замене числа $\sqrt{13}$ подходящей дробью пятого порядка.

Вариант 3

1. Найти линейное представление НОД чисел 929 и 87.
2. Дано, что ни a, ни b не делится на нечетное простое p и что разность квадратов этих чисел делится на натуральную степень p. Доказать, что либо сумма, либо разность чисел a и b делится на эту степень p.
3. Найти показатель, с которым число 13 содержится в числе $\frac{90!}{45!\cdot 45!}$.
4. Найти количество натуральных чисел, не превышающих числа 2400 и имеющих с ним наибольшим общим делителем число 40.
5. Определить погрешность, полученную при замене числа $\sqrt{31}$ подходящей дробью пятого порядка.

Вариант 4

1. Найти линейное представление НОД чисел 625 и 12.

2. Показать, что произведение двух натуральных чисел, разность между которыми равна 3, не может быть квадратом натурального числа, кроме случая, когда меньшее число есть 1.

3. Найти показатель, с которым число *3* содержится в числе $\frac{60!}{30!\cdot 30!}$.

4. Найти количество натуральных чисел, не превышающих числа 2500 и имеющих с ним наибольшим общим делителем число 42.

5. Определить погрешность, полученную при замене числа $\sqrt{33}$ подходящей дробью пятого порядка.

Вариант 5

1. Найти линейное представление НОД чисел 731 и 54.

2. Доказать, что число $(a\text{-}b)\sqrt{ab}$ не делится на 24 , если ab есть квадрат числа и если a и b – натуральные числа одной четности.

3. Найти показатель, с которым число 2 содержится в числе $\frac{20!}{10!\cdot 10!}$.

4. Найти количество натуральных чисел, не превышающих числа 2600 и имеющих с ним наибольшим общим делителем число 52.

5. Определить погрешность, полученную при замене числа $\sqrt{25}$ подходящей дробью пятого порядка.

Вариант 6

1. Найти линейное представление НОД чисел 823 и 12.

2. Найти целые числа n, делящиеся на все целые числа, не большие $\sqrt{n}$.

3. Найти показатель, с которым число 5 содержится в числе $\frac{50!}{25!\cdot 25!}$.

4. Найти количество натуральных чисел, не превышающих числа 2400 и имеющих с ним наибольшим общим делителем число 45.

5. Определить погрешность, полученную при замене числа $\sqrt{27}$ подходящей дробью пятого порядка.

Вариант 7

1. Найти линейное представление НОД чисел 487 и 47.

2. Все простые числа, не превосходящие данного простого числа p, разбиты на две группы a, b, c, …, k и α, β, ..., γ так, что число x, определяемое разностью $x = abc\ldots k - \alpha\beta\ldots\gamma$, заключается между 1 и p^2. Доказать, что x – простое число.

3. Найти показатель, с которым число 7 содержится в числе $\frac{70!}{35!\cdot 35!}$.

4. Найти количество натуральных чисел, не превышающих числа 1000 и имеющих с ним наибольшим общим делителем число 20.

5. Определить погрешность, полученную при замене числа $\sqrt{11}$ подходящей дробью пятого порядка.

Вариант 8

1. Найти линейное представление НОД чисел 174 и 95.
2. Доказать, что выражение

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1}\right)\cdot(p-1)!$$

делится на p, где p – простое число, большее 2.

3. Найти показатель, с которым число 11 содержится в числе $\frac{60!}{30!\cdot 30!}$.
4. Найти количество натуральных чисел, не превышающих числа 1900 и имеющих с ним наибольшим общим делителем число 44.
5. Определить погрешность, полученную при замене числа $\sqrt{23}$ подходящей дробью пятого порядка.

Вариант 9

1. Найти линейное представление НОД чисел 372 и 81.
2. Доказать, что наибольший общий делитель суммы двух чисел и их наименьшего общего кратного совпадает с наибольшим общим делителем этих чисел.
3. Найти показатель, с которым число 13 содержится в числе $\frac{80!}{40!\cdot 40!}$.
4. Найти количество натуральных чисел, не превышающих числа 2800 и имеющих с ним наибольшим общим делителем число 40.
5. Определить погрешность, полученную при замене числа $\sqrt{19}$ подходящей дробью пятого порядка.

Вариант 10

1. Найти линейное представление НОД чисел 628 и 29.
2. Доказать, что не существует целых чисел a, b, c, k , удовлетворяющих равенствам:

$$abck-a=\underbrace{11\ldots1}_{1970};$$

$$abck-b=\underbrace{11\ldots1}_{1971};$$

$$abck-c=\underbrace{11\ldots1}_{1972};$$

$$abck-k=\underbrace{11\ldots1}_{1973}.$$

3. Найти показатель, с которым число 3 содержится в числе $\frac{100!}{50!\cdot 50!}$.

4. Найти количество натуральных чисел, не превышающих числа 3700 и имеющих с ним наибольшим общим делителем число 28.

5. Определить погрешность, полученную при замене числа $\sqrt{31}$ подходящей дробью пятого порядка.

ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

1 ЧАСТЬ

1. Доказать теорему о делении с остатком.
2. Доказать свойства делимости целых чисел нацело.
3. НОД и его свойства.
4. Алгоритм Евклида.
5. Доказать свойства простых чисел.
6. Решето Эратосфена.
7. Доказать основную теорему арифметики.
8. Доказать теорему о наивысшем показателе простого числа, входящего в разложение n!
9. Вывести формулы для вычисления значений числовых функций $\tau(n)$ и $\sigma(n)$.
10. Вывести формулу для вычисления значений числовой функции $\varphi(x)$.
11. Доказать теорему о разложении рационального числа в конечную цепную дробь.
12. Доказать свойства подходящих дробей.
13. Доказать теорему Лагранжа.

Таблица простых чисел, не превосходящих 1000

2	**47**	**109**	**191**	**269**	**353**	**439**	**523**	**617**	**709**	**811**	**907**
3	**53**	**113**	**193**	**271**	**359**	**443**	**541**	**619**	**719**	**821**	**911**
5	**59**	**127**	**197**	**277**	**367**	**449**	**547**	**631**	**727**	**823**	**919**
7	**61**	**131**	**199**	**281**	**373**	**457**	**557**	**641**	**733**	**827**	**929**
11	**67**	**137**	**211**	**283**	**379**	**461**	**563**	**643**	**739**	**829**	**937**
13	**71**	**139**	**223**	**293**	**383**	**463**	**569**	**647**	**743**	**839**	**941**
17	**73**	**149**	**227**	**307**	**389**	**467**	**571**	**653**	**751**	**853**	**947**
19	**79**	**151**	**229**	**311**	**397**	**479**	**577**	**659**	**757**	**857**	**953**
23	**83**	**157**	**233**	**313**	**401**	**487**	**587**	**661**	**761**	**859**	**967**
29	**89**	**163**	**239**	**317**	**409**	**491**	**593**	**673**	**769**	**863**	**971**
31	**97**	**167**	**241**	**331**	**419**	**499**	**599**	**677**	**773**	**877**	**977**
37	**101**	**173**	**251**	**337**	**421**	**503**	**601**	**683**	**787**	**881**	**983**
41	**103**	**179**	**257**	**347**	**431**	**509**	**607**	**691**	**797**	**883**	**991**
43	**107**	**181**	**263**	**349**	**433**	**521**	**613**	**701**	**809**	**887**	**997**

БИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Александров В.А., Горшенин С.М.* Задачник – практикум по теории чисел. М.: Учпедгиз, 1972.
2. *Бухштаб А.А.* Теория чисел. М.: Учпедгиз, 1960.
3. *Виноградов И.М.* Основы теории чисел. М.: Наука,1995.
4. *Гайнов А.Т.* Теория чисел. Изд - во НГУ, 1995.
5. *Галочкин А.И., Нестеренко Н.В., Шидловский А.Б.* Введение в теорию чисел. Изд - во МГУ, 1995.
6. *Грибанов В.У., Титов Л.И.* Сборник упражнений по теории чисел. М.: Просвещение, 1964.
7. *Кудреватов Г.А.* Сборник задач по теории чисел. М.: Просвещение, 1970.
8. *Ляпин С.Е., Баранова И.В., Борчугова З.Г.* Сборник задач по элементарной математике. М.: Просвещение, 1973.
9. *Окунев Л.Я.* Краткий курс теории чисел. М.: Учпедгиз, 1956.
10. *Пензин Ю.Г., Клейменов В.Ф.* Сравнения. Учебно-методические разработки (тексты лекций). Изд-во ИГУ, 1998.
11. *Серр Ж*. Курс арифметики. М.: Мир, 1972.

СОДЕРЖАНИЕ

Наталья Владимировна Кван,
Старший преподаватель кафедры МАиМ АмГУ

Практикум по теории чисел. Часть I.
Учебно - методическое пособие.

Изд - во АмГУ. Подписано к печати 02.09.02. Формат 60x84/16.

Усл. печ. л. 2,09, уч. – изд. л. 2,25. тираж 100. Заказ 107.