Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Амурский государственный университет»

Инженерно-физический факультет
Кафедра физики

**Зотова О. В., Голубева И. А., Стукова Е. В.**

Лабораторный практикум по общей физике

Механика. Молекулярная физика и термодинамика

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1-0

# ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Благовещенск 2023

ББК 22.36 я 73

З 88

*Рецензент:*

*И.В. Верхотурова,* доцент кафедры физики ФГБОУ ВО «Амурский государственный университет», канд. физ.-мат. наук, доцент

Зотова О.В.

Лабораторная работа 1-0.Обработка результатов измерений /О.В. Зотова, И.А. Голубева, Е.В. Стукова. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2023. - 30 с.

Лабораторная работа 1-0 «Обработка результатов измерений» входит в физический практикум (раздел «Механика. Молекулярная физика и термодинамика») для студентов, обучающихся по инженерным специальностям и направлениям подготовки, и является вводной для всего физического практикума.

В пособии разъясняются основные положения теории погрешностей. Рассмотрены методы обработки и анализа результатов измерений, а также правила представления и анализа графического материала. Приведены примеры расчетов, варианты заданий для индивидуальной работы и вопросы для контроля знаний.

В авторской редакции.

## *Лабораторная работа № 1-0*

# ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Цель работы: ознакомиться с основами теории погрешностей и приобрести навык обработки результатов измерений.

## *ОСНОВЫ ТЕОРИИ*

### 1. Средства и методы измерений

Физика является наукой познания окружающего нас мира и познание в большинстве случаях происходит опытным путем. Не смотря на то, что современные физические теории (например, квантовая механика, теория поля) выглядят как сложные абстрактные конструкции из математических предположений, математических выкладок и выводов в виде математических формул, однако все эти теории опираются на опыт, и только опыт является критерием их достоверности.

Одна из основных целей физического практикума заключается в том, чтобы научиться правильно производить измерения физических величин и оценивать точность полученных результатов.

***Измерением*** называется процесс экспериментального получения одного или более значений величины, которые могут быть обоснованно приписаны измеряемой величине.

Измерения производятся с помощью ***средств измерения.*** Средство измерений может быть *измерительным прибором* или *материальной мерой*.

***Измерительными приборами*** называют средство измерений, которое обеспечивает выходной сигнал в визуальной форме (на числовой шкале или экране), несущий информацию о значении измеряемой величины. Например: микрометр, термометр, вольтметр, секундомер, электронные весы.

***Материальная мера*** средство измерений, которое воспроизводит в процессе использования или постоянно хранит приписанные значения величины. Например: линейная шкала (линейка), мерный стакан, эталонная гиря, эталонный электрический резистор и т.п. Измерение с помощью материальной меры заключается в сравнении параметра измеряемого объекта с мерой, которая принимается за эталон измеряемой величины.

Измерение предусматривает использование определенного метода измерений. ***Метод измерений –*** общее описание логической последовательности операций при измерении.

Методы измерений могут быть следующих видов: *метод прямых измерений* и *метод косвенных измерений*.

***Метод прямых измерений*** – это такие измерения, при которых численное значение измеряемой величины получают либо непосредственным сравнением ее с мерой (эталоном), либо с помощью приборов, градуированных в единицах измеряемой величины. Например: измерение длины предмета масштабной линейкой, определение массы тела на весах с помощью разновеса, измерение интервала времени секундомером и т.д.

Однако, не для всех физических величин существуют меры или измерительные приборы, а значит искомая физическая величина не всегда может быть получена в результате прямых измерений. В этом случае применяется ***косвенный метод измерения,*** в котором измеряется не сама искомая величина, а другие величины, связанные с нею теми или иными соотношениями и закономерностями, по значению которых вычислением определяется значение искомой величины. Например, проводимые в учебных лабораториях измерения плотности тел, измерения ускорения движения тел, измерения индукции магнитного поля и т.п.

## 2. Погрешности измерений

### 2.1 Неопределённость и погрешность

Задачей эксперимента является определение ***истинного значения физической величины.*** Однако истинное значение определить невозможно, т.к. любое измерение всегда производится с какой-то степенью точности, что связано с несовершенствами измерительных приборов, методики измерений, несовершенством органов человеческих чувств и т.п. Поэтому *в задачу эксперимента-*

*тора помимо измерения искомой величины в обязательном порядке входит оценка неопределенности (неточности) полученного результата.* Без такой оценки результат опыта не имеет, как правило, практической ценности.

***Неопределенность измерения*** – параметр, характеризующий рассеяние значений, приписываемых измеряемой величине на основании используемой информации. Неопределенность измерения является характеристикой (мерой) точности измерения. При практических измерениях неопределенности *не вычисляются*, а *оцениваются*.

Критерием численной оценки неопределенности измерения являются ***погрешности измерений***.

**2.2 Классификация погрешностей**

*1) По характеру проявления* погрешности разделяют на две основные группы: *случайные* и *систематические*.

***Случайная погрешность*** – это составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины. Она обусловлена влиянием на результаты измерения большого числа изменяющихся случайным образом факторов и проявляется в хаотическом изменении результатов повторных наблюдений. Её причиной могут служить изменение внешних условий, способных оказать влияние на параметры измерения (температура, атмосферное давление, движение воздушных потоков и т.п.), а также, в частности физическая и нервная реакция (внимание, координация) самого экспериментатора.

Признак случайной погрешности – она непредсказуемо изменяется по величине и знаку от опыта к опыту в узких пределах численных значений. Случайную погрешность нельзя исключить из результатов. Однако, пользуясь статистическими методами, можно учесть ее влияние на оценку истинного значения измеряемой величины. Многократное повторение опыта позволяет выявить и оценить случайную погрешность.

***Систематической погрешностью*** называют составляющую погрешности измерения, остающуюся постоянной или закономерно изменяющуюся при повторных измерениях одной и той же величины. Систематическая погрешность обусловлена конструкцией приборов, их принципом действия. Также она может возникать из-за неточности регулировки приборов, несоблюдением условий их эксплуатации, например, при несоблюдении абсолютно горизонтального положения некоторых приборов или при использовании стрелочного прибора, у которого стрелка до начала измерений не была установлена на нуль.

Причина возникновения систематической погрешности может заключаться и в самой методике измерений. Так, например, определяя плотность твердого тела по измерениям его массы и объема, можно допустить ошибку, если внутри исследуемого тела имеются пустоты в виде пузырьков воздуха. В этом случае устранить ошибку можно при изменении метода измерения.

В некоторых случаях систематические погрешности могут быть исключены введением поправок, однако часто они остаются не выявленными, поэтому систематические погрешности опаснее случайных. Случайные погрешности обнаруживают себя в ходе эксперимента при многократных измерениях, в то время как при наличии скрытой систематической погрешности результат будет казаться вполне надежным, хотя на самом деле он весьма неточен.

Кроме названных погрешностей встречаются ошибки, называемые промахами. ***Промах*** — это вид грубой погрешности, зависящей от действий экспериментатора и связанный с неправильным обращением со средствами измерений, неверными отсчетами показаний приборов, описками при записи результатов, невнимательностью при снятии показаний и т.п. Результат, содержащий грубую ошибку, резко отличается от остальных, и его следует исключить из ряда измеренных значений.

Все составляющие погрешности, как правило, не зависят друг от друга, что допускает их раздельное вычисление.

*2) По форме представления* различают погрешности ***абсолютные, относительные*** и ***приведенные***.

***Абсолютная погрешность*** – это погрешность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины, она определяет отклонение измеренного значения величины $x_{изм}$ от ее истинного значения $x_0$:

$$\Delta x = x_{изм} - x_0 \quad \text{(ед. изм.)} \tag{1}$$

Абсолютная погрешность имеет те же единицы измерения, что и измеряемая величина.

***Относительная погрешность*** - это погрешность измерения, выраженная отношением абсолютной погрешности к результату измерения (в случае однократного измерения) или к среднему значению (в случае многократных измерений), являющаяся мерой точности результатов измерения и выражающаяся в долях

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_{изм}} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle}\ , \tag{2}$$

или в процентах

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_{изм}} \cdot 100\% \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100\% \tag{3}$$

Погрешность многих сложных измерительных приборов определяется классом точности. Значение ***класса точности*** $\gamma$ выражает абсолютную погрешность прибора $\Delta x_{пр}$ – ***приборную погрешность***, выраженную в процентах от верхнего предела измерений $x_{\max}$ на данном диапазоне, называемую ***приведенной:***

$$\gamma = \frac{\Delta x_{пр}}{x_{\max}} \cdot 100\% \tag{4}$$

Класс точности устанавливается заводом изготовителем и указывается как правило, в паспорте прибора или на его шкале.

Приборная погрешность $\Delta x_{пр}$ в этом случае может быть определена из (4) как:

$$\Delta x_{пр} = \frac{\gamma \cdot x_{max}}{100\%} \quad \text{(ед. изм.)} \tag{5}$$

Например, приборная погрешность вольтметра на пределе измерения $U_{\max}$=10 *В*, при классе точности $\gamma$=0,5 равна $\Delta U = \dfrac{0{,}5 \cdot 10}{100} = 0{,}05\,B$.

В погрешность прибора могут входить как систематические (неточная разбивка шкалы и т.д.), так и случайные (силы трения в оси и т.д.) погрешности. Однако, поскольку при увеличении числа измерений точность прибора не возрастает, их следует рассматривать как *систематические*. Приборные погрешности часто употребляемых в лабораторной практике мер и приборов указаны в таблице1.

*Таблица 1*

**Приборные погрешности**

| Прибор или мера | Цена деления | Погрешность |
|---|---|---|
| Измерительная линейка | 1 мм/дел | 1 мм |
| Штангенциркуль | 0,1 мм/дел<br>0,05 мм/дел | 0,1 мм,<br>0,05 мм |
| Микрометр | 0,01 мм/дел | 0,01 мм |
| Весы технические | - | 0,1 г |
| Весы аналитические | 0,1 мг/дел | 0,1 мг |
| Секундомер с ручным запуском | 0,1 с/дел | 0,1 с |
| Часы с секундной стрелкой | 1 с/дел | 1 с |

*Замечания:*

1) Приборная погрешность приборов с нониусом равна точности нониуса.

2) Приборная погрешность цифровых приборов (например, электронного секундомера) равна единице минимального разряда.

### 3. Обработка результатов прямых измерений

Выполняя измерения, мы всегда имеем дело с погрешностями, являющимися суммой рассмотренных выше составляющих. В силу чего, при обработке результатов необходимо пользоваться методами математической статистики, которые, однако, позволяют лишь *с некоторой вероятностью* указать предельные значения погрешностей (случайных и выявленных систематических).

### 3.1 Обработка результатов однократных прямых измерений

Если измерение выполнено однократно, или при повторных наблюдениях получаются одинаковые значения измеряемой величины, а значит, повторять эксперимент не имеет смысла, то абсолютная погрешность измерения принимается равной приборной погрешности $\Delta x = \Delta x_{пр}$, которая находится из соотношения (5). Если класс точности на приборе (или в паспорте прибора) не указан, то абсолютная погрешность измерения принимается равной *цене деления* шкалы прибора.

***Цена деления шкалы*** – это количество измеряемой величины, приходящееся на одно деление шкалы прибора.

Для приборов с одним пределом измерения (однопредельных) цену деления можно найти как разность значений величины, соответствующих двум соседним отметкам шкалы. Для многопредельных измерительных приборов цена деления определяется как отношение предела измерения к числу делений шкалы.

Окончательный результат однократного измерения записывается в виде:

$$x = (x_{изм} \pm \Delta x) \ \ ед. \ изм; \qquad \varepsilon_x = \ldots\ldots \ \% \ .$$

### 3.2 Обработка результатов многократных прямых измерений

Для оценки случайной погрешности проводят статистическую обработку результатов многократных измерений. Предположим, что произведено $n$ прямых измерений величины $x$, в которых получены значения: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В таких случаях рекомендуется следующий порядок обработки результатов.

1) Оценивается приборная погрешность $\Delta x_{пр}$.

2) Результаты измерений проверяются на наличие промахов, т.е. если результат отдельного измерения резко отличается от остальных, то его следует исключить из ряда результатов.

3) Определяется ***среднее арифметическое измеренных значений***, т.к. оно, согласно законам статистики, ближе всего к истинному значению искомой величины:

$$\langle x\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \tag{6}$$

<u>*Замечание.*</u> Проводить усреднение результатов можно только для такой серии, в которой разброс результатов обусловлен случайными причинами. Если же результаты различаются вследствие целенаправленного изменения условий опыта, то среднее арифметическое такой серии не имеет смысла.

4) Определяются отклонения измеренных значений $x_i$ от $\langle x\rangle$. Эти отклонения носят случайный характер и называются ***абсолютными погрешностями отдельных измерений***:

$$\Delta x_i = \langle x\rangle - x_i \tag{7}$$

5) Рассчитывается ***среднеквадратичное отклонение от среднеарифметического значения,*** которое является мерой разброса измеряемой величины и вычисляется по формуле:

$$S_{\langle x\rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \cdots + \Delta x_n^2}{n(n-1)}} \tag{8}$$

6) Вычисляется ***статистическая погрешность*** по формуле:

$$\Delta x_{cm} = t_{\alpha, f} \cdot S_{<x>}\ , \tag{9}$$

где $t_{\alpha, f}$ – ***коэффициент Стьюдента,*** значение которого задается таблично (таблица 2): на пересечении столбца – *степень надежности α (доверительная вероятность*), и строки – *числа степеней свободы* $f = n-1$.

***Степень надежности α (доверительная вероятность)*** характеризует вероятность, что истинное значение измеряемой величины *x* попадает внутрь установленного в результате измерений интервала: от *(‹x› – Δx)* до *(‹x›+Δx)*, который называется ***доверительным интервалом***.

В лабораторных работах, проводимых на специальном учебном оборудовании, степень надежности принимается равной 0,95.

*Таблица 2*

**Коэффициент Стьюдента**

| ***Число степеней свободы f*** | ***Степень надежности $\alpha$*** | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ***0,5*** | ***0,6*** | ***0,7*** | ***0,8*** | ***0,9*** | ***0,95*** | ***0,98*** | ***0,999*** |
| ***1*** | 1,00 | 1,38 | 2,0 | 3,1 | 6,3 | 12,7 | 32 | 640 |
| ***2*** | 0,82 | 1,06 | 1,3 | 1,9 | 2,9 | 4,3 | 7,0 | 32 |
| ***3*** | 0,77 | 0,98 | 1,3 | 1,6 | 2,4 | 3,2 | 4,5 | 13 |
| ***4*** | 0,74 | 0,94 | 1,2 | 1,5 | 2,1 | 2,8 | 3,7 | 8,6 |
| ***5*** | 0,73 | 0,92 | 1,2 | 1,5 | 2,0 | 2,6 | 3,4 | 6,9 |
| ***6*** | 0,72 | 0,90 | 1,1 | 1,4 | 1,9 | 2,4 | 3,1 | 6,0 |
| ***7*** | 0,71 | 0,90 | 1,1 | 1,4 | 1,9 | 2,4 | 3,0 | 5,4 |
| ***8*** | 0,71 | 0,90 | 1,1 | 1,4 | 1,9 | 2,3 | 2,9 | 5,0 |
| ***9*** | 0,70 | 0,88 | 1,1 | 1,4 | 1,8 | 2,3 | 2,8 | 4,8 |
| ***14*** | 0,69 | 0,87 | 1,1 | 1,3 | 1,8 | 2,1 | 2,6 | 4,1 |
| ***19*** | 0,69 | 0,86 | 1,1 | 1,3 | 1,7 | 2,1 | 2,5 | 3,9 |
| $\infty$ | 0,67 | 0,84 | 1,0 | 1,3 | 1,6 | 2,0 | 2,3 | 3,3 |

7) Определяется ***полная абсолютная погрешность*** прямых измерений суммированием приборной погрешности $\Delta x_{пр}$ и статистической погрешности $\Delta x_{ст}$:

$$\Delta x = \sqrt{\left(\Delta x_{пр}\right)^2 + (\Delta x_{ст})^2} \tag{10}$$

Если одна из составляющих полной погрешности хотя бы в 2,5÷3 раза меньше другой, то меньшей составляющей можно пренебречь.

8) Оценивается ***относительная погрешность***, согласно (3), которая позволяет оценить степень точности произведенного измерения:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100\%$$

9) Записывается окончательный результат измерения с учетом полной абсолютной погрешности в виде:

$$x = (\langle x \rangle \pm \Delta x) \text{ ед. изм.,}$$

$$\alpha = \dots\dots, \qquad \varepsilon_x = \dots..\%$$

***<u>Внимание!</u>*** *Запись окончательного результата должна производится, в соответствии с правилами округления результата и погрешностей.*

## 4. Округление результата и погрешностей

При обработке результатов измерений необходимо производить округление результатов промежуточных вычислений, а по окончанию расчетов округлить найденную полную абсолютную погрешность и среднее арифметическое значение.

Округление следует производить в соответствии со следующими правилами.

1) *В промежуточных вычислениях* (например, при расчете среднего значения) ***число значащих цифр не должно превышать более чем на единицу число значащих цифр в исходных (измеренных) данных***, так как лишние значащие цифры, появившиеся при расчете, не повышают точности вычислений, а лишь загромождают запись и усложняют визуальное восприятие результата.

Все промежуточные расчеты погрешностей достаточно вести с двумя значащими цифрами.

***Значащей цифрой*** приближённого числа в десятичной записи называется любая цифра, кроме нулей, расположенных слева от первой ненулевой цифры.

Например: Число 0,0076805 содержит пять значащих цифр: 7, 6, 8, 0 и 5. Первые два нуля не являются значащими и служат для указания разряда. Если это число является промежуточным результатом расчета погрешности (например, среднеквадратичное отклонение от среднеарифметического значения $S_{\langle x \rangle}$), то оно округляется до второй значащей цифры, т.е.: 0,0076805≈0,0077.

2) *Округление полной абсолютной погрешности* производиться ***до одной (первой) значащей цифры.*** Если первая значащая цифра равна 1, то допускается оставлять следующую за ней цифру.

Даже при высокоточных измерениях, в которых знание о точном значении погрешности очень важно, не оставляют при округлении погрешности более *двух значащих цифр.*

Например: $\Delta x$=0,00269≈0,003; $\Delta y$=1,561≈1,6; $\Delta z$=0,013289≈0,013; $\Delta U$=23,7981≈20.

3) *При округлении относительной погрешности* достаточно оставить ***две значащие цифры***.

Например: $\varepsilon_x = \frac{0,2}{15,5} \cdot 100\% = 12,903\% \approx 13\%$

$$\varepsilon_y = \frac{0,8}{21,4} \cdot 100\% = 3,7383\% \approx 3,7\%$$

*Замечание:* как правило, относительная погрешность при проведении учебных лабораторных работ не должна превышать 20 %, что указывает на правильность проведенного эксперимента и обработки результатов.

4) Перед тем, как записать окончательный результат измерений, его точность необходимо привести в соответствие с полной абсолютной погрешностью. Так, в окончательной записи результата $x$=20,27±0,4 указывать сотые бессмысленно, поскольку уже десятые содержат погрешность, а значит необходимо ***округлить результат (среднее арифметическое значение) до того разряда, в котором находиться последняя значащая цифра округленной абсолютной погрешности.*** То есть правильной будет запись $x$=20,3±0,4.

В окончательной записи результата измерения следует использовать стандартную запись числа (число от 1 до 10, умноженное на 10 в какой-либо степени). При этом погрешность записывается в этом же виде с той же степенью у 10. Указанное правило рекомендуется также использовать и в промежуточных вычислениях, это облегчает действие с большими и малыми числами. Например:

$$x = 0,045871 \pm 0,000459 \approx 0,0459 \pm 0,0005 = (4,59 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}$$

$$y = 3634,831 \pm 5,71 \approx 3635 \pm 6 = (3,635 \pm 0,006) \cdot 10^{3}$$

$$z = 258,9945 \pm 1,571 \approx 259,0 \pm 1,6 = (2,590 \pm 0,016) \cdot 10^{2}$$

$$U = 8,1805 \cdot 10^{8} \pm 1,413 \cdot 10^{7} \approx 81,8 \cdot 10^{7} \pm 1,4 \cdot 10^{7} = (8,18 \pm 0,14) \cdot 10^{8}$$

## 5. Обработка результатов косвенных измерений

Часто оказывается, что искомая величина есть функция прямо измеряемых величин. (Например, объем параллелепипеда является функцией длин его сторон $V=a\cdot b\cdot c$, т.е. $V=f(a, b, c)$). Погрешность такой величины вычисляется через погрешности прямых измерений.

Пусть некоторая физическая величина $F$ является функцией нескольких переменных *x*, *y*, *z* которые в свою очередь являются результатами прямых измерений, т.е. $F=f(x, y, z)$. В этом случае рекомендуется следующий порядок обработки результатов.

1) Обрабатываются результаты прямых измерений (как описано ранее в разделе 3).

2) Определяется ***среднее значение*** искомой функции через среднеарифметические значения измеренных прямым методом величин:

$$\langle F\rangle = f(\langle x\rangle, \langle y\rangle, \langle z\rangle).$$

3) Находятся ***частные погрешности*** функции по всем ее переменным

$$\Delta F_x = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot \Delta x$$

$$\Delta F_y = \frac{\partial f}{\partial y}\cdot \Delta y$$

$$\Delta F_z = \frac{\partial f}{\partial z}\cdot \Delta z$$

где $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ; $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ; $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ – частные производные данной функции по каждой из переменных.

4) Рассчитывается ***полная абсолютная погрешность*** величины $F$:

$$\Delta F = \sqrt{\Delta F_x^2 + \Delta F_y^2 + \Delta F_z^2}$$

5) Определяется ***относительная погрешность*** величины $F$:

$$\varepsilon_F = \frac{\Delta F}{\langle F\rangle}\cdot 100\%$$

6) Записывается окончательный результат в виде:

$$F = (\langle F\rangle \pm \Delta F)\ \text{ед. изм}, \qquad \varepsilon_F = \cdots\%$$

**Пример 1.**

В ходе гипотетического эксперимента получен ряд результатов прямых измерений некоторых величин $x$ и $y$:

$$x_1=2{,}3;\ \ x_2=2{,}4;\ x_3=2{,}5;\ \ x_4=2{,}3;\ \ x_5=2{,}2$$

$$y_1=1{,}25;\ \ y_2=1{,}27;\ \ y_3=1{,}24;\ \ y_4=1{,}27;\ \ \ y_5=1{,}83.$$

Величина $F= f(x, y)$ определяется косвенным методом и ее зависимость от измеренных величин $x$ и $y$ задается в виде $F=\frac{x^2}{2}+3y$.

Требуется найти величину $F$ и оценить ее абсолютную $\Delta F$ и относительную $\varepsilon_F$ погрешности.

*Решение:*

Сначала проведем обработку прямых измерений величины $x$ по методике, изложенной в разделе 3, с учетом правил округления, изложенных в разделе 4.

1) Так как прибор измерения не указан (это гипотетический эксперимент) приборная погрешность отсутствует.

2) Промахи в приведенном ряде результатов отсутствуют, а значит все пять результатов измерений будут учтены при дальнейшей обработке.

3) Вычисляем среднее арифметическое значение величины $x$ по формуле (6):

$$\langle x\rangle=\frac{2{,}3+2{,}4+2{,}5+2{,}3+2{,}2}{5}=2{,}34$$

4) Определяем абсолютные погрешности отдельных измерений по формуле (7): $\Delta x_1=2{,}34-2{,}3=0{,}04$

$$\Delta x_2=2{,}34-2{,}4=-0{,}06$$

$$\Delta x_3=2{,}34-2{,}5=-0{,}16$$

$$\Delta x_4=2{,}34-2{,}3=0{,}04$$

$$\Delta x_5=2{,}34-2{,}2=0{,}14$$

5) Рассчитываем среднеквадратичное отклонение от среднеарифметического значения по формуле (8):

$$S_{\langle x\rangle}=\sqrt{\frac{0{,}04^2+(-0{,}06)^2+(-0{,}16)^2+0{,}04^2+0{,}14^2}{5(5-1)}}=0,05099\approx 0{,}051$$

6) По таблице 2 определяем коэффициент Стьюдента. При $n$=5 число степеней свободы $f= n-1=4$. Надежность выбираем равной $\alpha$=0,95. На пересече-

нии указанных строки и столбца находим $t_{\alpha,n-1}=2{,}8$.

7) Определяем статистическую погрешность:

$$\Delta x_{\text{ст}} = 2{,}8 \cdot 0{,}051 = 0{,}1428 \approx 0{,}1$$

8) Полная погрешность в данном примере будет равна только статистической погрешности, т.к. приборная погрешность не задается (измерительные приборы в гипотетическом эксперименте не указаны), т.е.

$$\Delta x = \Delta x_{\text{ст}}.$$

9) Округляем среднее значение $\langle x \rangle$ с учетом абсолютной погрешности ($\Delta x$=0,1):

$$\langle x \rangle = 2{,}34 \approx 2{,}3.$$

10) Относительная погрешность измерения величины $x$, согласно выражению (3) равна:

$$\varepsilon_x = \frac{0{,}1}{2{,}3} \cdot 100\% = 4{,}3\ \%$$

11) Записываем результат измерений величины $x$ в виде

$$x = 2{,}3 \pm 0{,}1$$

$$\alpha = 0{,}95 \qquad \varepsilon_x = 4{,}3\%$$

Полученный результат означает, что истинное значение величины $x$ лежит в интервале значений от 2,2 до 2,4 с вероятностью $\alpha$ = 0,95.

Для удобства и наглядности всех этапов обработки результаты можно представить в виде таблицы:

*Таблица 3*

| $x_i$ | $\langle x \rangle$ | $\Delta x_i$ | $(\Delta x_i)^2$ | $S_{\langle x \rangle}$ | $t_{\alpha,n-1}$ | $\Delta x_{cm}$ | $\Delta x$ | $\varepsilon_x$,% | $\langle x \rangle \pm \Delta x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,3 | 2,34 | 0,04 | 0,0016 | 0,051 | 2,8 | 0,1 | 0,1 | 4,3 | 2,3±0,1 |
| 2,4 | | -0,06 | 0,0036 | | | | | | |
| 2,5 | | -0,16 | 0,0256 | | | | | | |
| 2,3 | | 0,04 | 0,0016 | | | | | | |
| 2,2 | | 0,14 | 0,0196 | | | | | | |

Аналогично проводим обработку результатов прямых измерений величины $y$. Результаты этих вычислений приведены в таблице 4.

*Таблица 4*

| $y_i$ | $\langle y \rangle$ | $\Delta y_i \cdot 10^{-3}$ | $(\Delta y_i)^2 \cdot 10^{-6}$ | $S_{\langle x \rangle}$ | $t_{\alpha,n-1}$ | $\Delta y_{cm}$ | $\Delta y$ | $\varepsilon_y$, % | $\langle y \rangle \pm \Delta y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,25 | 1,258 | 8 | 64 | 0,0075 | 3,2 | 0,02 | 0,02 | 1,6 | 1,26±0,02 |
| 1,27 | | 12 | 144 | | | | | | |
| 1,24 | | 18 | 324 | | | | | | |
| 1,27 | | 12 | 144 | | | | | | |

При обработке результатов измерения величины $y$ учтено, что результат $y_5=1,83$ очень сильно отличается от остальных результатов ряда, что позволяет интерпретировать его как грубую ошибку (промах) и в дальнейшем не учитывать. Таким образом, расчет статистической погрешности величины $y$ ведется по четырем результатам измерений.

Проведем теперь обработку результата косвенных измерений величины $F$.

1) Находим среднее значение искомой величины $F = \frac{x^2}{2} + 3y$:

$$\langle F \rangle = \frac{\langle x \rangle^2}{2} + 3\langle y \rangle = \frac{2{,}3^2}{2} + 3 \cdot 1{,}26 = 6{,}425$$

2) Определяем частные производные по каждой переменной

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{2} + 3y\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial (x^2)}{\partial x} + 0 = \frac{1}{2} \cdot 2x = x = 2{,}3$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} + 3y\right) = 0 + 3\frac{\partial y}{\partial y} = 3$$

3) Находим частные погрешности величины $F$ по каждой переменной:

$$\Delta F_x = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \Delta x = 2{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}23$$

$$\Delta F_y = \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \Delta y = 3 \cdot 0{,}02 = 0{,}06$$

4) Определяем полную абсолютную погрешность функции $F$:

$$\Delta F = \sqrt{\Delta F_x^2 + \Delta F_y^2} = \sqrt{0{,}23^2 + 0{,}06^2} = 0{,}23 \approx 0{,}2$$

5) Округляем среднее значение $\langle F \rangle$ с учетом полученной погрешности $\Delta F$=0,2: $\langle F \rangle = 6{,}425 \approx 6{,}4$

6) Относительная погрешность величины $F$, измеренной косвенным методом

$$\varepsilon_F = \frac{\Delta F}{\langle F \rangle} \cdot 100\% = \frac{0{,}2}{6{,}4} \cdot 100\% = 3{,}1\ \%$$

7) Окончательный результат измерения величины $F$ косвенным методом будет иметь вид:

$$F = 6{,}4 \pm 0{,}2; \quad \varepsilon_F = 3{,}1\ \%$$

Полученный результат означает, что истинное значение величины $F$ лежит в интервале значений от 6,2 до 6,6, с вероятностью $\alpha = 0{,}95$.

**Пример 2.**

При измерении диаметр цилиндра с помощью микрометра были получены следующие результаты: $d_1$ = 23,28 *мм*, $d_2$ = 23,30 *мм*, $d_3$ = 23,32 *мм*, $d_4$ = 23,33 *мм*, $d_5$ = 23,29 *мм*.

Проведем обработку результатов измерения.

1) Определяем приборную погрешность. Согласно таблице 1 погрешность микрометра составляет 0,01 мм. Систематическая составляющая погрешности измерения диаметра равна приборной погрешности микрометра, т.е.

$\Delta d_{пр}$=0,01 *мм*

2) Вычисляем среднее арифметическое значение диаметра согласно (6):

$$\langle d \rangle = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5}{n} = \frac{23{,}28 + 23{,}30 + 23{,}32 + 23{,}33 + 23{,}29}{5} =$$

= 23,304 *мм*

3) Определяем абсолютные погрешности отдельных измерений $d_i$ от среднего $\langle d \rangle$ по формуле (7):

$$\Delta d_1 = d_{cp} - d_1 = 0{,}024 = 24 \cdot 10^{-3}\ мм$$
$$\Delta d_2 = d_{cp} - d_2 = 0{,}004 = 4 \cdot 10^{-3}\ мм$$
$$\Delta d_3 = d_{cp} - d_3 = -0{,}016 = 16 \cdot 10^{-3}\ мм$$
$$\Delta d_4 = d_{cp} - d_4 = -0{,}026 = 26 \cdot 10^{-3}\ мм$$
$$\Delta d_5 = d_{cp} - d_5 = 0{,}014 = 14 \cdot 10^{-3}\ мм$$

3) Вычисляем среднюю квадратичную погрешность $S_{\langle d \rangle}$, применяя (8):

$$S_{\langle d\rangle} = \sqrt{\frac{\sum_i (\varDelta d_i)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{(24^2 + 4^2 + (-16)^2 + (-26)^2 + 14^2)\cdot 10^{-6}}{5(5-1)}} =$$

$$= 9{,}273\cdot 10^{-3} \approx 9{,}3\cdot 10^{-3}\ \textit{мм}$$

4) Пользуясь таблицей 2 определяем коэффициент Стьюдента $t_{\alpha,\,f}$ . Надежность выбираем равной α=0,95. Число степеней свободы $f$=5–1=4. На пересечении данных $f$ и $\alpha$ в таблице находим значений $t_{\alpha,f} = 2{,}8$.

5) Вычисляем статистическую погрешность $\Delta d_{cm}$ согласно (9):

$$\Delta d_{cm} = S_{\langle d\rangle}\cdot t_{\alpha,\,f} = 9{,}3\cdot 10^{-3}\cdot 2{,}8 = 0{,}02604 \approx 0{,}03\ \ \textit{мм}$$

Как видно из представленных расчетов, погрешность появляется уже во втором знаке после запятой. Кроме того, приборная погрешность, равная цене деления микрометра $\Delta d_{np}$ = 0,01 *мм*, сравнима по порядку величины с $\Delta d_{cm}$. Поэтому обе составляющие должны быть учтены в оценке полной абсолютной погрешности $\Delta d$.

5) Вычисляем полную абсолютную погрешность результата измерений по формуле (10):

$$\Delta d \ = \sqrt{\left(\Delta d_{np}\right)^2 + (\Delta d_{cm})^2} = \sqrt{0{,}03^2 + 0{,}01^2} = 0{,}0316\ \text{мм}$$

Первая значащая цифра содержится во втором знаке после запятой, поэтому $\Delta d$ и $d_{\text{ср}}$ следует округлить до сотых: $\Delta d$ = 0,03 *мм* и $d_{\text{ср}}$ = 23,30 *мм*.

6) Вычисляем относительную погрешность результата измерений $\varepsilon_d$ согласно (3):

$$\varepsilon_d = \frac{\Delta d}{\langle d\rangle}\cdot 100\% = \frac{0{,}03}{23{,}30}\cdot 100\% = 0{,}001287\% \approx 0{,}13\ \%.$$

7) Окончательный результат измерений диаметра цилиндра представляем в виде:$d$ = (23,30 ± 0,03) *мм*, $\alpha$ = 0,95, $\varepsilon_d = 0{,}13\ \%$

Полученный результат означает, что истинное значение диаметра лежит в интервале значений от 23,27 до 23,33 *мм*, с вероятностью $\alpha$ = 0,95.

## 6. Графическое представление результатов эксперимента

В лабораторном практикуме и при выполнении расчетно-графических работ по физике часто возникает необходимость построения графических зависимостей. Графическое представление информации бывает весьма полезным именно в силу своей наглядности. По графикам можно определять характер функциональной зависимости, определять значения величин. Графики позволяют сравнить результаты, полученные экспериментально, с теорией. На графиках легко находить максимумы и минимумы, а также выявлять промахи.

### 6.1 Требования к построению графических зависимостей

При оформлении графиков нужно следовать нижеперечисленным правилам.

1. Графики строят только на бумаге, имеющей координатную сетку (миллиметровая бумага). Размер листа не менее чем 14×16 мм (страница стандартной тетради.

2. Строятся графики, за редким исключением, в прямоугольной системе координат, где по горизонтальной оси (оси абсцисс) откладывают аргумент − независимую физическую величину, а по вертикальной оси (оси ординат) – функцию, т.е. зависимую физическую величину.

3. Начало координат, если это не оговорено особо, может не совпадать с нулевыми значениями величин. Его выбирают таким образом, чтобы площадь чертежа была использована максимально.

Обычно график строят на основании таблицы экспериментальных данных, откуда легко установить интервалы, в которых изменяются аргумент и функция. Их наименьшее и наибольшее значения задают значения масштабов, откладываемых вдоль осей (по каждой оси он выбирается отдельно).

Правильно построенная кривая должна заполнять все поле графика, что будет свидетельствовать о правильном выборе масштабов по каждой из осей (рисунок 1). Если же значительная часть поля оказывается незаполненной (рисунок 2), то необходимо заново выбрать масштабы и перестроить зависимость.

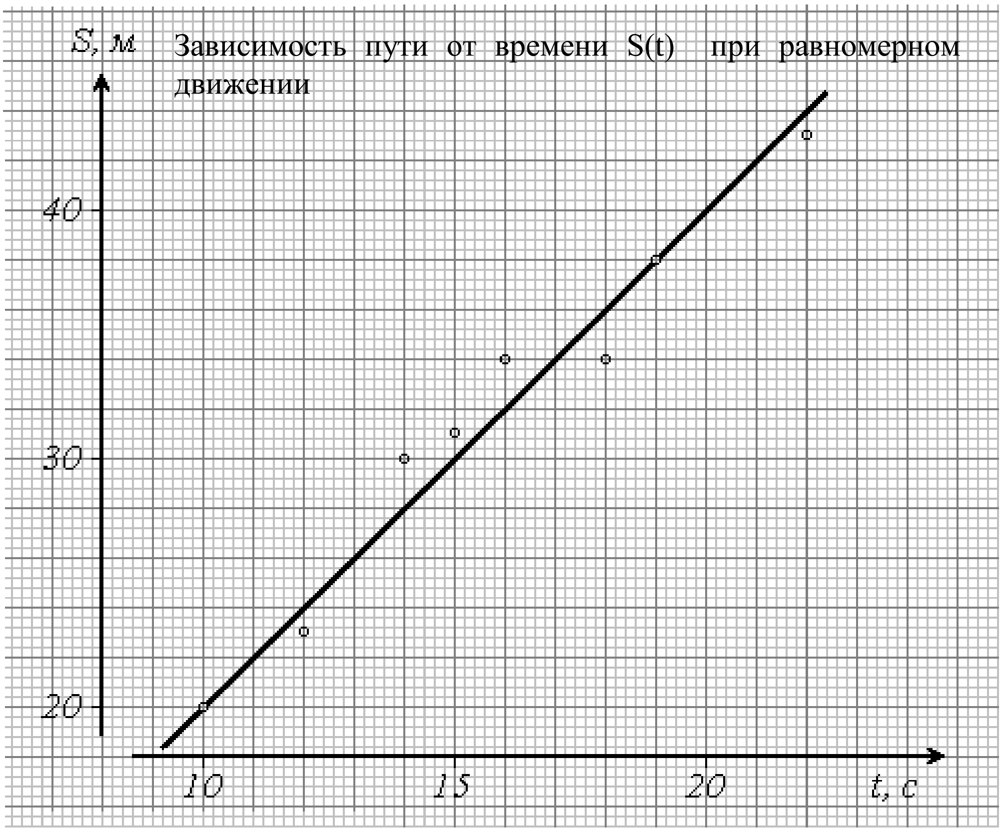


Рисунок 1 − **<u>Правильное</u>** построение графической зависимости

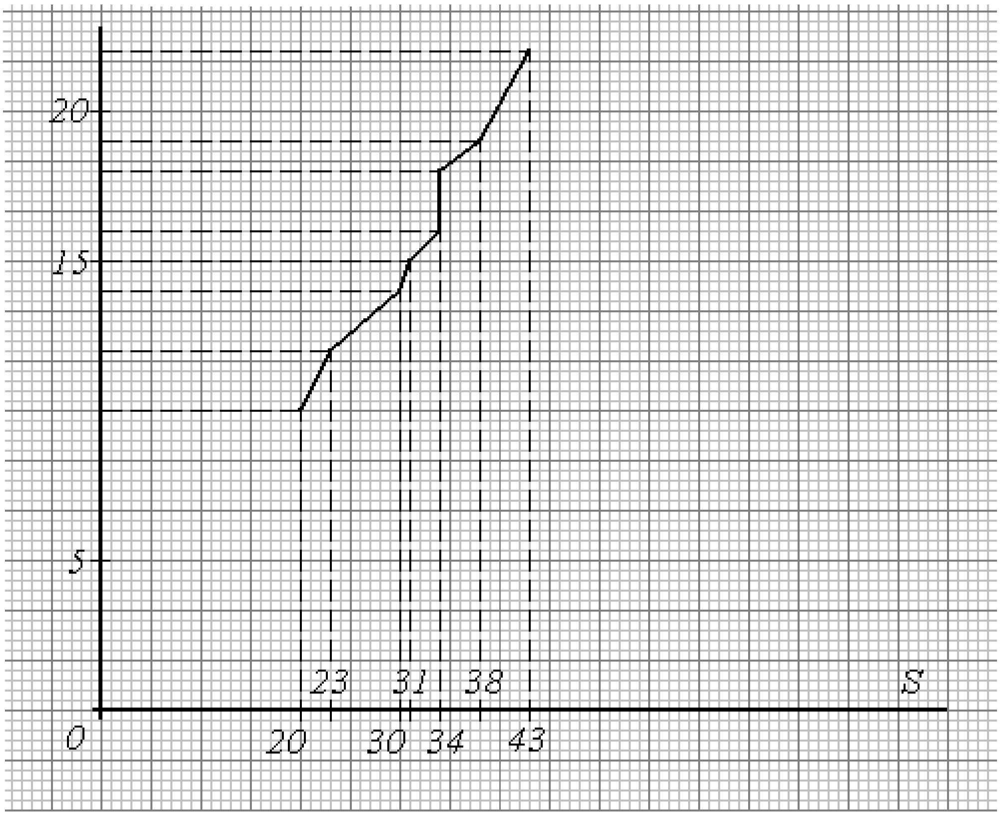


Рисунок 2 − <u>Неправильное</u> построение графической зависимости

4. Масштабные деления на координатных осях следует наносить равномерно (рисунок 1). Масштабная шкала должна легко читаться, а для этого необходимо выбрать удобную для восприятия ***цену деления шкалы***: производить отсчет значений исследуемых величин будет удобно, если одному сантиметру (или делению) соответствует 1, 2, 5, 10, 100 и т.д. единиц измеряемой величины. Т.е. числа 0,02, 2; 0,5; 100 – подходят в качестве цены деления масштабной шкалы, а числа 0,15, 3; 7;– не подходят для этой цели.

5. Рядом с каждой осью указывают название или символ откладываемой по оси величины, а через запятую – единицы ее измерения, причем все единицы измерения приводят в русском написании в системе СИ.

Десятичный множитель масштаба, как в таблицах, относится к единицам измерения, например, вместо 1000; 2000; 3000 … можно указать 1; 2; 3 … с общим множителем $10^3$, указанным перед единицей измерения.

6. Экспериментальные точки аккуратно наносят на поле графика карандашом, чтобы они были отчетливо различимы. ***Координаты экспериментальных точек на осях не указывают, и линии, определяющие эти координаты, не проводят!***

7. Если на одной координатной сетке строят различные зависимости, полученные, например, при измененных условиях эксперимента или на разных этапах работы, то точки таких зависимостей должны отличаться друг от друга. Их следует отмечать разными значками (квадратами, кружками, крестиками и т.п.) или наносить карандашами разного цвета (рисунок 3).

8. Экспериментальные точки, как правило, **не соединяются** между собой ни отрезками прямой, ни произвольной кривой (рисунок 2). Если наблюдается значительный разброс экспериментальных точек, то прямую (или кривую) следует проводить не по точкам, а между ними – так, чтобы количество точек по обе стороны от нее было одинаковым (рисунок 1 и рисунок 3), а кривая должна быть плавной (рисунок 3).

9. Графики обязательно нужно подписывать. Подпись должна отражать содержание графика (рисунок 1).

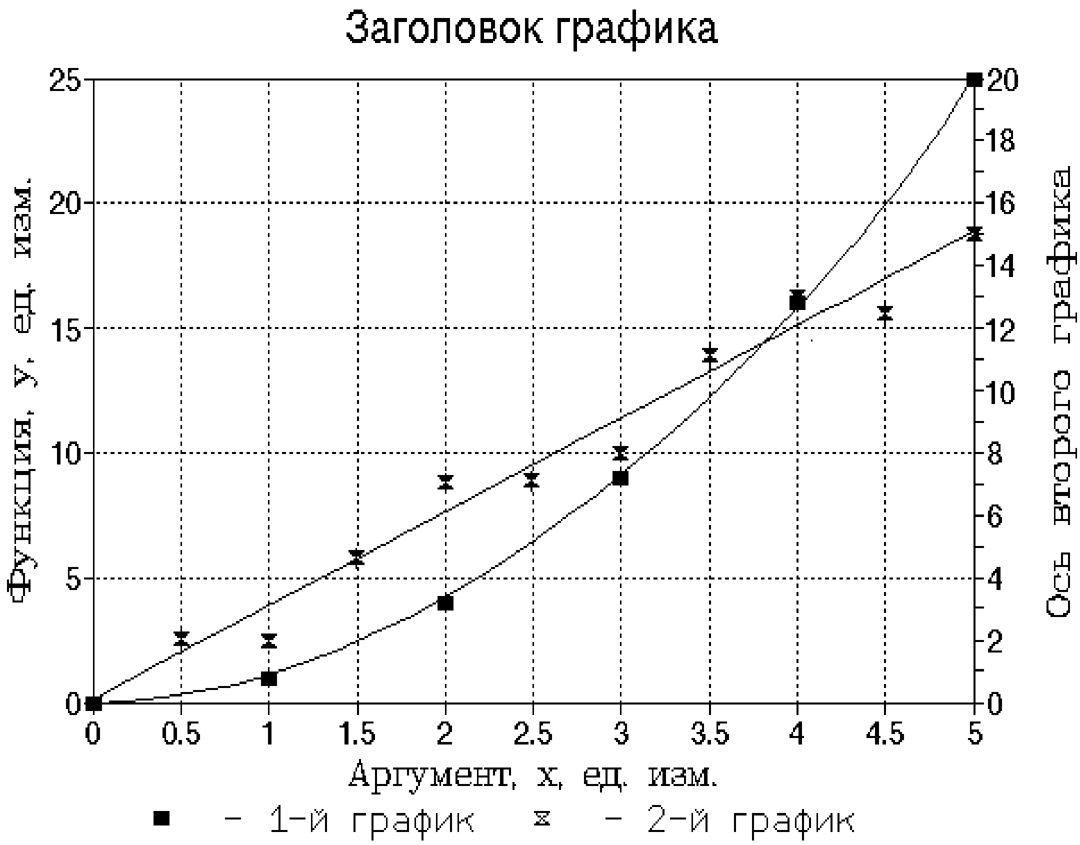


Рисунок 3 − Пример построения нескольких графических зависимостей на одной сетке

### 6.2 Вычисление углового коэффициента прямой

Если одна из физических величин (условно назовем ее $y$) связана с другой величиной (назовем ее $x$) зависимостью вида $y=Ax+B$, то графическое представление экспериментальных данных позволяет найти значение физической величины (А). Для этого необходимо определить ***угловой коэффициент А наклона графика функции*** $y=f(x)$.

Для этого необходимо:

1) Выбрать две произвольные точки, *лежащие на прямой*, которые должны отстоять *друг от друга* *на возможно большем расстоянии*.

2) Определить координаты этих точек по оси абсцисс $x_1$ и $x_2$, и соответствующие им значения функции $y_1$ и $y_2$ (рисунок 4).

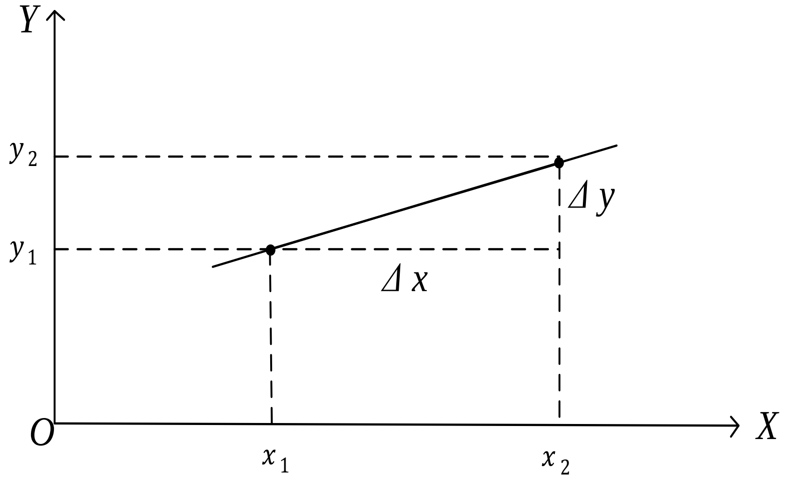


Рисунок 4 – Определение углового коэффициента линейной зависимости

3) ***Угловой коэффициент*** А ***наклона графика функции*** $y=Ax+B$ определяется отношением приращения функции к приращению аргумента <u>с учетом размерности</u> величин $x$ и $y$ и <u>масштаба</u> по координатным осям:

$$A = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

*ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ*

Согласно заданному преподавателем варианту провести обработку прямых и косвенных измерений по приведенным значениям, полученным в результате гипотетического эксперимента.

*Вариант 1:* $x_1=4{,}33;\ x_2=4{,}32;\ x_3=4{,}31;\ x_4=4{,}32;\ x_5=4{,}35$

$y_1=7{,}3;\ y_2=7{,}4;\ y_3=7{,}2;\ y_4=7{,}5;\ y_5=7{,}2$

$z_1=12;\ z_2=13;\ z_3=11;\ z_4=12;\ z_5=11$

$$F = x + \frac{y^2}{z}$$

*Вариант 2:* $x_1=1{,}25;\ x_2=1{,}26;\ x_3=1{,}21;\ x_4=1{,}18;\ x_5=1{,}22$

$y_1=10{,}1;\ y_2=10{,}2;\ y_3=10{,}1;\ y_4=10{,}3;\ y_5=10{,}2$

$z_1=5{,}3;\ z_2=5{,}6;\ z_3=5{,}7;\ z_4=5{,}4;\ z_5=5{,}2$

$$F = xy^2 + \frac{x}{z}$$

*Вариант 3:* $x_1=5{,}3;\ x_2=5{,}6;\ x_3=5{,}4;\ x_4=4{,}9;\ x_5=5{,}1$

$y_1=11{,}01;\ y_2=11{,}02;\ y_3=11{,}04;\ y_4=11{,}07;\ y_5=15{,}1$

$z_1=6;\ z_2=7;\ z_3=6;\ z_4=8;\ z_5=9$

$$F = x + \frac{y}{z^2}$$

*Вариант 4:* $x_1=5{,}3;\ x_2=5{,}6;\ x_3=5{,}4;\ x_4=5{,}4;\ x_5=5{,}2$

$y_1=2{,}7;\ y_2=2{,}8;\ y_3=2{,}9;\ y_4=2{,}7;\ y_5=2{,}6$

$z_1=0{,}11;\ z_2=0{,}12;\ z_3=0{,}13;\ z_4=0{,}11;\ z_5=0{,}12$

$$F = zy^3 + \frac{x}{y}$$

*Вариант 5:* $x_1=13{,}3;\ x_2=13{,}2;\ x_3=13{,}4;\ x_4=13{,}1;\ x_5=13{,}2$

$y_1=15{,}13;\ y_2=15{,}12;\ y_3=15{,}14;\ y_4=15{,}13;\ y_5=15{,}12$

$z_1=8{,}3;\ z_2=8{,}4;\ z_3=9{,}8;\ z_4=8{,}4;\ z_5=8{,}3$

$$F = yx^2 + zx$$

*Вариант 6:* $x_1=7{,}8;\ x_2=7{,}9;\ x_3=7{,}8;\ x_4=7{,}5;\ x_5=7{,}7$

$y_1=13{,}3;\ y_2=13{,}2;\ y_3=13{,}4;\ y_4=13{,}3;\ y_5=13{,}2$

$z_1=0{,}01;\ z_2=0{,}02;\ z_3=0{,}01;\ z_4=0{,}01;\ z_5=0{,}02$

$$F = 3zy^2 + x\sqrt{y}$$

*Вариант 7:* $x_1=4{,}33;\ x_2=4{,}32;\ x_3=4{,}31;\ x_4=4{,}32;\ x_5=4{,}35$

$y_1=7{,}3;\ y_2=7{,}4;\ y_3=7{,}2;\ y_4=7{,}5;\ y_5=7{,}2$

$z_1=11;\ z_2=12;\ z_3=13;\ z_4=11;\ z_5=12$

$$F = x + \frac{y^2}{z}$$

*Вариант 8:* $x_1=5{,}3;\ x_2=6{,}5;\ x_3=5{,}4;\ x_4=4{,}9;\ x_5=5{,}1$

$y_1=11{,}01;\ y_2=11{,}02;\ y_3=11{,}07;\ y_4=11{,}04;\ y_5=11{,}03$

$z_1=6;\ z_2=7;\ z_3=8;\ z_4=9;\ z_5=6$

$$F = \frac{y}{z^2} - x$$

*Вариант 9:* $x_1=12{,}1;\ x_2=12{,}4;\ x_3=12{,}3;\ x_4=11{,}9;\ x_5=12{,}0$

$y_1=8{,}31;\ y_2=8{,}32;\ y_3=8{,}31;\ y_4=8{,}33;\ y_5=8{,}29$

$z_1=0{,}01;\ z_2=0{,}03;\ z_3=0{,}04;\ z_4=0{,}02;\ z_5=0{,}03$

$$F = 4x + 5y^2z$$

*Вариант 10:* $x_1=14{,}51$; $x_2=14{,}52$; $x_3=14{,}51$; $x_4=14{,}53$; $x_5=14{,}52$

$y_1=7{,}8$; $y_2=7{,}9$; $y_3=7{,}7$; $y_4=7{,}8$; $y_5=7{,}9$

$z_1=6{,}73$; $z_2=6{,}75$; $z_3=6{,}74$; $z_4=6{,}73$; $z_5=6{,}75$

$$F = 3x + y^2 z$$

*Вариант 11:* $a_1=0{,}12$; $a_2=0{,}16$; $a_3=0{,}13$; $a_4=0{,}14$; $a_5=0{,}15$

$b_1=4{,}13$; $b_2=4{,}11$; $b_3=4{,}15$; $b_4=4{,}12$; $b_5=5{,}11$

$c_1=6{,}1$; $c_2=6{,}2$; $c_3=6{,}1$; $c_4=6{,}3$; $c_5=6{,}4$

$$F = 8b^2 - \frac{a}{c}$$

*Вариант 12:* $a_1=7{,}8$; $a_2=7{,}9$; $a_3=7{,}8$; $a_4=7{,}5$; $a_5=7{,}7$

$b_1=13{,}3$; $b_2=13{,}2$; $b_3=13{,}4$; $b_4=13{,}2$; $b_5=13{,}4$

$c_1=0{,}01$; $c_2=0{,}02$; $c_3=0{,}01$; $c_4=0{,}03$; $c_5=0{,}02$

$$F = 3b + \frac{a^2}{c}$$

*Вариант 13:* $a_1=4{,}12$; $a_2=4{,}13$; $a_3=4{,}11$; $a_4=4{,}16$; $a_5=4{,}13$

$b_1=6$; $b_2=8$; $b_3=7$; $b_4=9$; $b_5=7$

$c_1=7{,}31$; $c_2=7{,}32$; $c_3=7{,}33$; $c_4=7{,}36$; $c_5=7{,}34$

$$F = c^2 a b^3$$

*Вариант 14:* $a_1=5{,}3$; $a_2=5{,}6$; $a_3=5{,}7$; $a_4=5{,}4$; $a_5=5{,}2$

$b_1=26$; $b_2=28$; $b_3=27$; $b_4=29$; $b_5=27$

$c_1=0{,}11$; $c_2=0{,}12$; $c_3=0{,}11$; $c_4=0{,}13$; $c_5=0{,}12$

$$F = ca^3 + \frac{b}{a}$$

*Вариант 15:* $a_1=6{,}3$; $a_2=6{,}6$; $a_3=6{,}7$; $a_4=6{,}4$; $a_5=6{,}5$

$b_1=11{,}1$; $b_2=10{,}2$; $b_3=10{,}3$; $b_4=10{,}2$; $b_5=10{,}1$

$c_1=1{,}22$; $c_2=1{,}21$; $c_3=1{,}19$; $c_4=1{,}20$; $c_5=1{,}23$

$$F = 4a + bc^2$$

*Вариант 16:* $a_1=7{,}3$; $a_2=7{,}4$; $a_3=7{,}2$; $a_4=7{,}4$; $a_5=7{,}5$

$b_1=16{,}12$; $b_2=16{,}13$; $b_3=16{,}12$; $b_4=16{,}11$; $b_5=16{,}13$

$c_1=5$; $c_2=6$; $c_3=7$; $c_4=5$; $c_5=6$

$$F = 5a(a + bc^2)$$

*Вариант 17:* $a_1$=4,33; $a_2$=4,32; $a_3$=4,31; $a_4$=4,34; $a_5$=4,35

$b_1$=24; $b_2$=25; $b_3$=24; $b_4$=23; $b_5$=25

$c_1$=1,12; $c_2$=1,17; $c_3$=1,14; $c_4$=1,13; $c_5$=1,14

$$F = ab + c^3$$

*Вариант 18:* $a_1$=44,3; $a_2$=44,4; $a_3$=44,1; $a_4$=44,3; $a_5$=44,2

$b_1$=4,12; $b_2$=4,13; $b_3$=4,11; $b_4$=4,15; $b_5$=4,12

$c_1$=0,11; $c_2$=0,12; $c_3$=0,11; $c_4$=0,13; $c_5$=0,12

$$F = ac + b^2$$

*Вариант 19:* $a_1$=1,25; $a_2$=1,26; $a_3$=1,21; $a_4$=1,22; $a_5$=1,24

$b_1$=10,1; $b_2$=10,2; $b_3$=10,1; $b_4$=10,3; $b_5$=10,9

$c_1$=5,3; $c_2$=5,6; $c_3$=5,7; $c_4$=5,4; $c_5$=5,2

$$F = ab^2 + \frac{b}{c}$$

*Вариант 20:* $a_1$=1,25; $a_2$=1,26; $a_3$=1,21; $a_4$=1,22; $a_5$=1,24

$b_1$=4,33; $b_2$=4,31; $b_3$=4,32; $b_4$=4,34; $b_5$=4,33

$c_1$=12; $c_2$=13; $c_3$=12,5; $c_4$=11; $c_5$=12,5

$$F = \frac{c + a^2}{b}$$

*Вариант 21:* $a_1$=7,8; $a_2$=7,9; $a_3$=7,5; $a_4$=7,8; $a_5$=7,6

$b_1$=13,3; $b_2$=13,2; $b_3$=13,4; $b_4$=12,9; $b_5$=13,1

$c_1$=0,2; $c_2$=0,3; $c_3$=0,4; $c_4$=0,2; $c_5$=0,8

$$F = \frac{3c}{a} + b^2$$

*Вариант 22:* $a_1$=5,3; $a_2$=5,6; $a_3$=5,4; $a_4$=5,2; $a_5$=5,1

$b_1$=11,01; $b_2$=11,02; $b_3$=11,03; $b_4$=11,04; $b_5$=11,07

$c_1$=6; $c_2$=7; $c_3$=5; $c_4$=7; $c_5$=8

$$F = \frac{b^2}{c^2} + a$$

*Вариант 23:* $a_1$=12; $a_2$=13; $a_3$=11; $a_4$=12; $a_5$=14

$b_1$=6,3; $b_2$=6,7; $b_3$=6,4; $b_4$=6,6; $b_5$=6,4

*$c_1$=0,12; $c_2$=0,13; $c_3$=0,15; $c_4$=0,11; $c_5$=0,14*

$$F = b^2 + ac^3$$

*Вариант 24:* *$a_1$=12,1; $a_2$=13,2; $a_3$=12,1; $a_4$=12,3; $a_5$=12,4*

*$b_1$=8,3; $b_2$=8,4; $b_3$=8,2; $b_4$=8,3; $b_5$=8,4*

*$c_1$=1,2; $c_2$=1,3; $c_3$=1,2; $c_4$=1,1; $c_5$=1,5*

$$F = ac^2 + 5b$$

*Вариант 25:* *$a_1$=7,3; $a_2$=7,2; $a_3$=7,5; $a_4$=7,3; $a_5$=7,4*

*$b_1$=4,33; $b_2$=4,31; $b_3$=4,32; $b_4$=4,34; $b_5$=4,33*

*$c_1$=12; $c_2$=13; $c_3$=12,5; $c_4$=11,5; $c_5$=12,5*

$$F = \frac{ca^2 - b^2}{4}$$

## *КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ*

1. Какие существуют средства и методы измерения? Приведите примеры применения таких методов.

2. В чем состоит задача измерений? Что понимается под неопределённостью и погрешностью измерения?

3. Почему погрешности делят на случайные и систематические? Чем различается их характер проявления? Что называют промахами и как они устраняются?

4. Как различаются погрешности по форме представления? С какой целью определяется относительная погрешность? В каких единицах измерения она может быть представлена?

5. Какие измерения называются однократными? Как оценивается погрешность таких измерений? К какому типу по характеру проявления от носится эта погрешность?

6. С какой целью производят многократные измерения? Для какой серии результатов можно проводить операцию усреднения?

7. Сформулируйте правила расчета погрешностей многократных прямых измерений. Что такое доверительная вероятность и доверительный интервал? Как записывается окончательный результат измерения?

8. Сформулируйте правила округления погрешности и результата многократных измерений. Что такое значащая цифра? Сколько значащих цифр следует брать при вычислениях?

9. Сформулируйте правила расчета погрешностей при косвенных измерениях. От чего зависит погрешность косвенных измерений?

10. С какой целью результаты эксперимента представляют графически? Сформулируйте правила построения графиков. Как вычислить угловой коэффициент наклона прямой построенной по результатам измерений?

**Зотова Оксана Васильевна,**

*доцент кафедры физики АмГУ, канд. физ.-мат. наук*

**Голубева Ирина Анатольевна**,

*доцент кафедры физики АмГУ, канд. физ.-мат. наук*

**Стукова Елена Владимировна,**

*профессор кафедры физики АмГУ, канд. физ.-мат. наук*

**Лабораторная работа 1-0. Обработка результатов измерений.**