Министерство образования и науки Российской Федерации

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДЕФОРМАЦИИ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Учебное пособие

Благовещенск

2018

УДК 539.2

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензент:

Милинский А.Ю., доцент кафедры физики БГПУ, канд. физ.-мат. наук

Копылова И.Б, Нещименко В.В. (составители)

Деформации в твердых телах. Учебное пособие / И.Б. Копылова, В.В. Нещименко. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2018.

Учебное пособие содержит краткую теорию деформаций и напряжений в твердых телах, качественные вопросы для закрепления теории, описание опытного определения модуля Юнга для различных материалов по изгибу балки и методом колебаний. Эксперимент проводится с использованием типового комплекта ЛКМ-2.

Для специальности 03.03.02 – «физика». Для студентов физических отделений высших учебных заведений, выполняющих лабораторный практикум по физике.

В авторской редакции

ДЕФОРМАЦИИ И НАПРЯЖЕНИЯ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Все твердые тела под действием сил деформируются, т.е. изменяют объем и форму. Различаются деформации однородные и неоднородные. Однородные деформации это деформации растяжения (сжатия), сдвига относятся деформации; к неоднородным - изгиба, кручения.

Если деформации исчезают после прекращения действия приложенных сил, то они называются упругими. Деформации, частично сохраняющиеся после снятия нагрузки, называются пластическими. Разделение деформаций на упругие и пластические условно. Строго говоря, после любой нагрузки, сохраняются остаточные деформации. Но если они пренебрежимо малы, то деформации считаются упругими.

Если вызывающая деформацию сила не слишком велика, то выполняется закон Гука: относительная деформация в пределах упругости пропорционально вызывающему ее усилию. Каждый вид деформации характеризуется своим коэффициентом, или модулем (величиной, обратной коэффициенту). Так как видов деформации может быть много, то столько же будет коэффициентов и модулей. Однако в теории упругости показано, что различные коэффициенты (модули) связаны между собой определенными соотношениями. При этом число соотношений на два меньше, чем число коэффициентов. Это значит, что любое тело всегда имеет два независимых коэффициента, характеризующих его упругие свойства. Физически это объясняется следующим образом. Всякая деформация представляет собой смещение молекул тела, а всякое движение может быть сведено к поступательному и вращательному движению. Так как эти движения независимы, то и деформации, связанные с ними, например, удлинение и кручение, будут независимы. Все остальные деформации можно будет свести к этим двум.

Для упругих тел между действующими силами и вызванными ими деформациями существует однозначная зависимость (при пластических деформациях такой однозначности нет).

Рассмотрим стержень длиной l и поперечным сечением S, один конец которого жестко закреплен, а второй конец подвергается действию некоторой внешней силы $F_{внеш}$. Под действием внешней силы длина стержня увеличивается на величину Δl. Величинами, характеризующими степень деформации, являются абсолютная деформация Δl и относительная деформация ε, равная соотношению абсолютной деформации Δl к первоначальной длине стержня l

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (1)$$

Относительная деформация не зависит от размеров деформируемого объема и в случае неоднородной деформации определяется в бесконечно малой окрестности *каждой* точки, т.е. является функцией координат.

Наличие деформации стержня приводит к изменению расстояния между частицами, а это, в свою очередь, приводит к появлению упругих сил в стержне. Упругая сила будет препятствовать дальнейшей деформации стержня. Радиус действия сил между частицами твердого тела составляет несколько межатомных расстояний, поэтому для объемов, включающих очень большое число атомов, силы можно считать приложенными к поверхности, разделяющей две части тела.

Проведем мысленно в стержне сечение *ab* (рис.1). Это сечение разделит стержень на правую и левую части. Левая часть стержня будет действовать на правую часть с некоторой силой $F'_{упр}$, а правая часть - на левую с силой $F''_{упр}$.

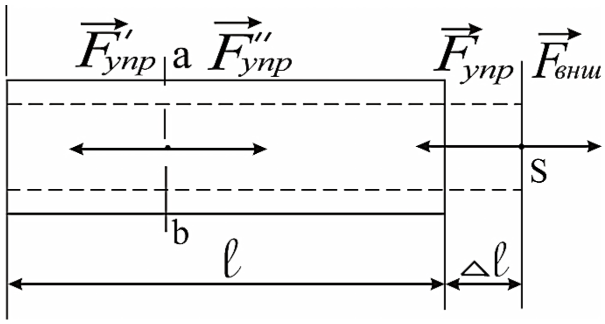


Рисунок 1. Деформация растяжения.

Эти внутренние силы будут равны между собой по третьему закону Ньютона, а из условия равновесия правой части стержня следует их равенство внешней силе:

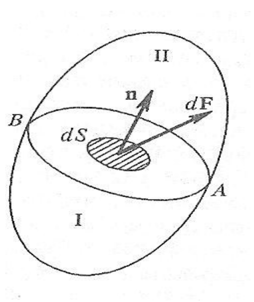
$$F'_{упр} = F''_{упр} = F_{внеш} \tag{2}$$

Величина упругой силы, приходящаяся на единицу площади сечения, называется *внутренним напряжением* σ:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{F}_{упр}/S = \boldsymbol{F}_{внеш}/S. \tag{3}$$

В СИ напряжение измеряется в Н/м^2.

Если выбрать произвольное сечение dS в твердом теле, то направление силы $d\boldsymbol{F}$ и нормали $\boldsymbol{n}$ к площадке в общем случае не совпадает, поэтому вектор напряжения можно разложить на две составляющие: тангенциальную и нормальную (по отношению к нормали).



$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_n + \vec{\sigma}_\tau$$

При деформации растяжения величина силы, приходящейся на единицу площади поперечного сечения, называется механическим напряжением (4). Для деформации сжатия – механическим давлением (5).

$$T = \frac{F}{S} \tag{4}$$

$$P = \frac{F}{S} \tag{5}$$

Так как при деформации растяжения размеры увеличиваются, а при сжатии уменьшаются механическое напряжение и механическое давление имеют различные знаки.

$$P = -T$$

Механические напряжения пропорциональны относительной деформации:

$$T = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

С учетом соотношения (1) получим выражение, которое является законом Гука для упругих деформаций.

$$T = E \cdot \varepsilon \tag{6}$$

где E - коэффициент пропорциональности, называемый *модулем Юнга*. Модуль Юнга численно равен нормальному напряжению, которое возникло бы в теле при его относительном удлинении, равном единице, если бы деформация оставалась упругой. При этом длина тела увеличилась бы в два раза.

При деформации растяжения (сжатия) изменяются не только продольные размеры тела, но и поперечные.

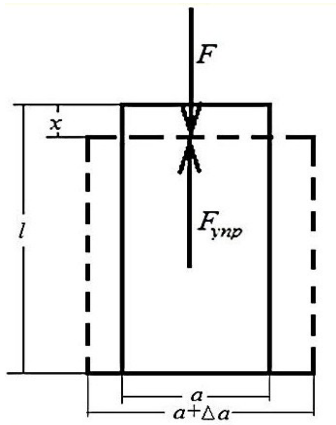


Рисунок 3. Изменение поперечных размеров при деформации сжатия.

Обозначим отношение относительного изменения поперечных размеров к относительному удлинению через $\boldsymbol{\mu}$.

$$-\frac{\Delta a}{a} \div \frac{\Delta l}{l_0} = \mu \tag{7}$$

Относительная деформация поперечных размеров:

$$-\frac{\Delta a}{a} = \varepsilon_n$$

Исходя из выше приведенных соотношений можно записать соотношение между относительной деформацией и относительном изменением поперечных размеров

$$\varepsilon_n = \mu \cdot \varepsilon \tag{8}$$

Коэффициент пропорциональности $\boldsymbol{\mu}$ называется модулем Пуассона

Объем деформированного элемента стержня

$$V = \pi \cdot a^2 \cdot l.$$

Прологарифмируем, а затем продифференцируем данное соотношение.

$$\ln V = \ln \pi + 2\ln a + \ln l$$

$$\frac{dV}{V} = 0 + 2\frac{da}{a} + \frac{dl}{l}$$

В результате получим:

$$2\frac{\Delta a}{a} = \mu \frac{\Delta l}{l}$$

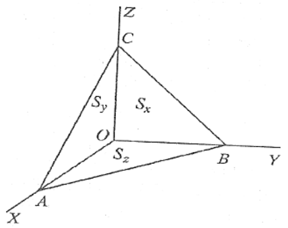
Откуда следует, что модуль Пуассона может принимать значение

$$\mu \le \frac{1}{2} \tag{9}$$

Модули Юнга и Пуассона полностью характеризуют деформации растяжения и сжатия.

Если деформируется твердое тело, то напряжения возникают во всех направлениях. В координатах XYZ нормальное напряжение имеет три компоненты:

$$\sigma_n = \sigma_{nx} + \sigma_{ny} + \sigma_{nz} \qquad (10)$$



Тогда на каждую грань будут действовать силы упругости (знак минус означает, что нормаль всегда направлена наружу).

$$\overrightarrow{F_x} = \overrightarrow{\sigma_{-x}} \cdot S_x, \quad \overrightarrow{F_y} = \overrightarrow{\sigma_{-y}} \cdot S_y, \quad \overrightarrow{F_z} = \overrightarrow{\sigma_{-z}} \cdot S_z.$$

Каждое слагаемое в соотношении (10) в координатах XYZ имеет три проекции, поэтому в общем случае внутренние напряжения можно представить в виде тензора напряжений.

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \qquad (11)$$

Компоненты тензора, стоящие в главной диагонали, имеющие одинаковые индексы соответствуют главным осям тензора напряжений. Тензор напряжений является симметричным $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ $(i,j=x,y,z)$.

Зависимость нормального напряжения σ от относительного удлинения ε изображена на рисунке 2. При малых деформациях (от 0 до ε_n) выполняется закон Гука; это практически линейный участок *0a* . Максимальное напряжение σ_n, соответствующее этому участку, называется пределом пропорциональности. Предел упругости σ_y - это максимальное напряжение, при котором еще сохраняются упругие свойства тела. На участке *ab* деформация нелинейная, но еще упругая (обычно этот участок очень малый: σ_y больше σ_n на доли процента.) При напряжениях, больших σ_y, деформация становится пластической: в теле после снятия нагрузки наблюдается остаточная деформация ε_0. При напряжениях σ_T удлинение нарастает практически без увеличения нагрузки. Это область текучести материала (участок *cd*). На участке *de* происходит некоторое упрочнение образца. После достижения максимального значения σ_d – предела прочности – напряжение резко уменьшается, и образец разрушается (точка f на графике).

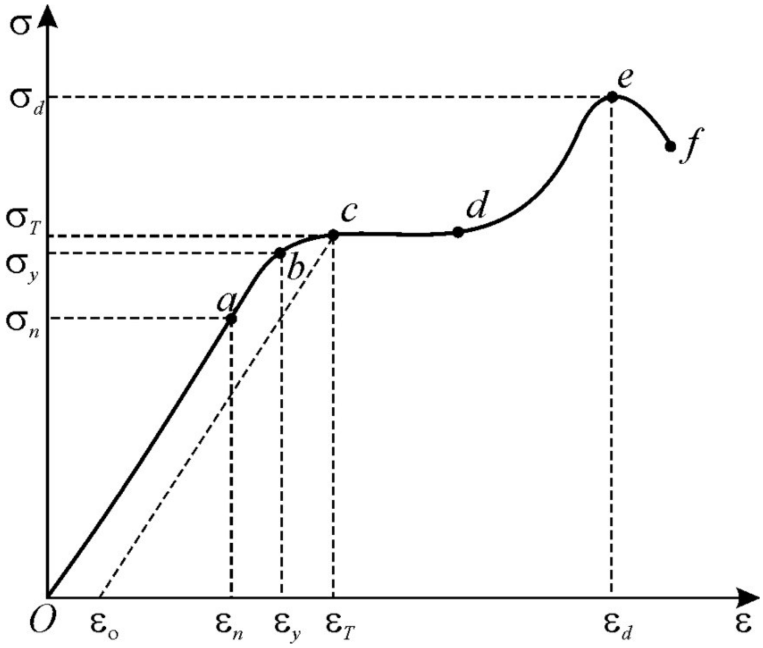


Рисунок 4. Зависимость нормального напряжения σ от относительного удлинения ε

Качественные вопросы

1. Почему упругие силы считают поверхностными силами? Что это значит?
2. В каком случае для описания упругих взаимодействий используется вектор напряжений? Тензор напряжений?
3. Какой смысл имеют компоненты тензора напряжений? Какие из них описывают нормальные напряжения, а какие- тангенциальные?
4. Что такое главные оси тензора напряжений? Какие напряжения существуют в главных осях?
5. Создают ли деформацию в некотором направлении поперечные к этому направлению напряжения? Запишите соответствующую формулу.
6. Какие напряжения возникают при изгибе балки?
7. Какие напряжения возникают при растяжении пружины,

скручивании стержня?

8. Почему коэффициент Пуассона μ не может быть больше 0,5?

9. Почему при одностороннем растяжении среды деформации меньше, чем при свободном растяжении стержня?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ ЮНГА

ЦЕЛЬ: Определение модуля Юнга для различных материалов по изгибу балки и методом колебаний.

ОБОРУДОВАНИЕ: лабораторный комплекс ЛКМ-2, набор металлических стержней, набор грузов, фотодатчик.

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Общий вид установки, основными частями которой являются лабораторный стол и измерительная система, показан на рисунке 5.

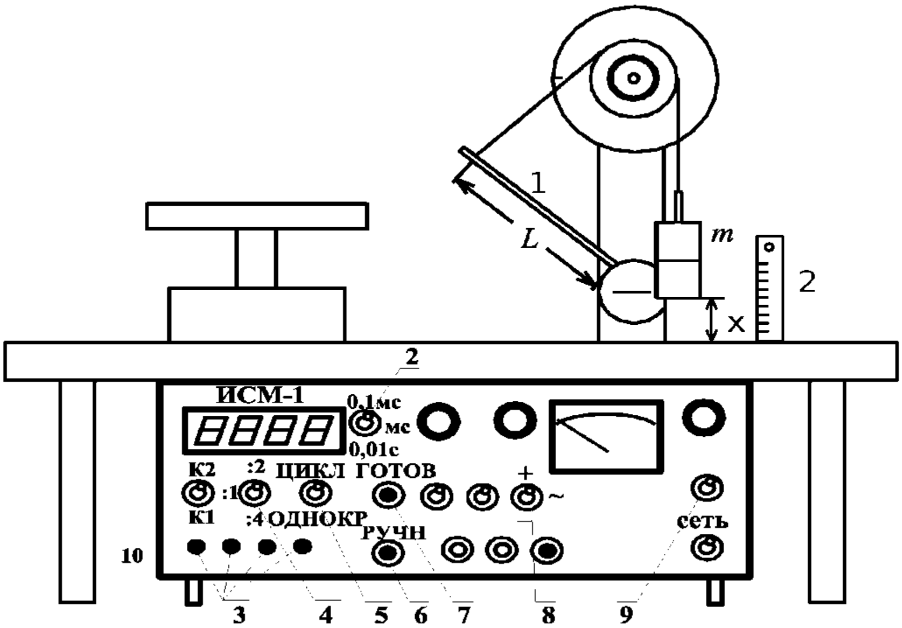


Рисунок 5. Лабораторный комплекс ЛКМ-2.

Одним из методов нахождения модуля Юнга служит метод измерения жесткости балки при изгибе. Исследуемая балка (стержень, проволока) *3* закрепляется с помощью кронштейна *1* на колонне стойки *2* (рисунок 6). За проточку вблизи свободного конца балки закрепляется нить *4*, перекинутая через шкив *5* стойки. К концу нити подвешивается груз *6*. Балку необходимо сориентировать перпендикулярно нити (погрешность может составлять не больше 5^0). Прижимаем нить к шкале шкива *5*, при этом устанавливаем указатель шкива на нулевое деление шкалы. По свечение индикатора ИСМ убеждаемся в том, что щель диска шкива стойки находится в зазоре фотодатчика.

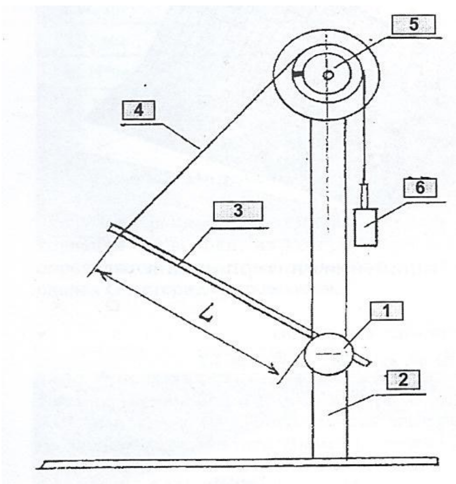


Рисунок 6.

В пределах упругой деформации удлинение проволоки прямо пропорционально растягивающей силе, первоначальной длине l и обратно пропорционально площади ее поперечного сечения S:

$$\Delta l = k\frac{F}{S}l, \tag{12}$$

где Δl - удлинение, k – постоянная величина (коэффициент упругости), зависящая от материала проволоки. Обычно в формулу вводят не k, а величину, обратную ей: $E = 1/k$. Величина E - модуль упругости (модуль Юнга). Подставляя в уравнение (1) вместо k величину E, получим

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES},$$

откуда

$$E = \frac{F}{S} : \frac{\Delta l}{l} \tag{13}$$

и величина $P = F / S$ носит название усилия и характеризует величину упругих сил, развивающихся в деформируемом материале (напряжение). Внутри твердого тела возникает сопротивление такому усилию, которое есть внутренне напряжение σ.

Для определения модуля Юнга необходимо измерить удлинение, а так как оно обычно очень мало, то нужны особые предосторожности и большая тщательность в производстве отсчетов.

Коэффициент жесткости *k* численно равен величине упругой силы, которая возникает при единичной абсолютной деформации, которая зависит как от свойств, так и от размеров тела.

$$k = S \cdot E / l \qquad (14)$$

Жесткость балки определяется ее размерами, формой, способом закрепления и модулем упругости *E* (модулем Юнга) ее материала. Для круглого стержня диметром *d* и длиной *L*,жесткость будет рассчитываться как:

$$k = E \cdot 3\pi d^4/64L^3, \qquad (15)$$

Для балки прямоугольного сечения шириной *a* и толщиной *b*:

$$k = E \cdot ab^3/4L^3, \qquad (16)$$

Вместе с этим жесткость балки может быть оценена по изменению смещения груза на величину Δx, при изменении массы груза Δm по соотношению:

$$k = g \cdot \Delta m/\Delta x \qquad (17)$$

Другим надежным методом установления жесткости балки служит метод измерения периода ее колебания T_1 с грузом m_1, в соотношении с периодом колебанием T_2 с грузом m_2.

$$k = 4\pi^2 \cdot (m_2 - m_1)/(T_2^2 - T_1^2) \qquad (18)$$

Внутреннее напряжение σ вычисляется по формуле:

$$\sigma = \frac{4mg}{\pi D^2}, \qquad (19)$$

где *D* - диаметр проволоки, *m* - масса груза, растягивающего проволоку.

Таким образом, модуль Юнга E имеет смысл коэффициента пропорциональности между напряжением σ и относительной деформацией ε.

ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

1. Подготовить таблицы:

Таблица 1.

№ п/п	Образец 1	Образец 2	Образец 3	Образец 4
Материал	Сталь	Латунь	Латунь	Алюминий (Д16)
Размеры сечения, мм	d =	d =	d=	a= b=
Длина, мм	L =	L =	L =	L =
Масса груза m_1, г				
Масса груза m_2, г				
Положение груза x_1, мм				
Положение груза x_2, мм				
k, Н·м				
E, 10^9 Н/м^2				

Таблица 2.

№ п/п	Образец 1	Образец 2	Образец 3	Образец 4

Материал	Сталь	Латунь	Латунь	Алюминий (Д16)
Размеры сечения, мм	d =	d =	d=	a= b=
Длина, мм	L =	L =	L =	L =
Масса груза m_1, г				
Масса груза m_2, г				
Период колебаний T_1, мс				
Период колебаний T_2, мс				
k, Н·м				
E, 10^9 Н/м^2				

2. Установите стрежень, нить и груз в соответствии с методикой эксперимента. Зафиксируйте наблюдаемое без нагрузки деление. Добавьте дополнительный груз и измерьте расстояние, пройденное двумя грузами. Результаты запишите в таблицу 1.

3. Установите стрежень, нить и груз в соответствии с методикой эксперимента. Слегка нажав на балку, отпустите ее и измерьте период T_1 ее колебаний с грузом массой m_1. Измените массу груза на m_2 и измерьте период T_2 колебаний с грузом. Повторите опыт 2 раза, запишите среднее значение периода в таблицу 2.

4. Аналогично повторите опыты для стержней и балок из различных материалов (сталь, латунь, дюралюминий). Результаты запишите в таблицу отчета.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ

1. Рассчитать значение жесткости измеренной методом 1 по формуле (17) и методом 2 по формуле (18). Занести данные в таблицу 1 и 2.

2. Рассчитать значения модуля Юнга для балки и стержня, исходя из выражений (15) и (16). Занести данные в таблицу 1 и 2.

3. Определить значения внутреннего напряжения по формуле (19).

4. Найти соотношение между внутренним напряжением и относительным удлинением согласно закону Гука (формула (6)).

5. Начертите оси графика зависимости σ от ε для метода 1 и метода 2, выберите масштаб и нанесите экспериментальные точки (σ_i, ε_i).

6. Проведите через начало координат прямую так, чтобы по обе стороны от прямой располагалось одинаковое количество точек.

7. Определить угловой коэффициент зависимости σ (ε), который определяет значение модуля Юнга.

8. Сравнить значение модуля Юнга для метода 1 и метода 2. Сделать выводы о точности методов определения модуля Юнга, сравнив полученные значения с табличными.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение абсолютного и относительного удлинения стержня. Какая деформация называется упругой?
2. Дайте определение механического напряжения. Как определить напряжение в стержне в нашем случае, если растягивающая сила равна F?
3. Сформулируйте закон Гука. Начертите график зависимости относительного удлинения от растягивающего напряжения, наблюдаемой в экспериментах. Укажите на графике область упругой деформации.
4. Дайте определение модуля Юнга. В каких единицах он измеряется? Запишите значение модулей Юнга для некоторых материалов.
5. Как определяется жесткость проволоки?

Литература

1.Сивухин, Дмитрий Васильевич**.** Общий курс физики [Текст] : учеб. пособие : в 5 т. : рек. Мин. обр. РФ / Д. М. Сивухин. - 5-е изд., стер. - М. : Физматлит, 2006. **Т. 1** : Механика. - 2006. - 560 с.

2. Стрелков, С.П. Механика [Электронный ресурс] : учебное пособие. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2005. — 560 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=589 — Загл. с экрана.

3. Иродов И. Е. Задачи по общей физике: учеб. пособие: рек. УМО/ И. Е. Иродов СПб.: Лань, 2006, 2007. - 416 с.

4. Хайкин С. Э. Физические основы механики: учеб. пособие. / С. Э Хайкин. – 2-е изд., испр. и доп. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат.лит., 1971. -752 с.

5. Фейнман Р. Феймановские лекции по физике: пер. с англ./ Р.Фейнман, Р.Лейтон, М. Сэндс; под ред. Я.А. Смородинского. 3-е изд..- М.: Мир, 1976. -496 с.

6. Сборник качественных вопросов и задач по общей физике: учеб. пособие Е. И. Бабаджан [и др.]. М.: Наука. 1990. - 398 с.

7. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности: учеб./ А. Н. Матвеев. - 4-е изд., стер., -М.: Лань, 2009. - 325с.

Копылова Ирина Борисовна,

доцент кафедры физики АмГУ, канд. физ.-мат. наук,

Нещименко Виталий Владимирович,

доцент кафедры физики АмГУ, д-р физ.-мат. наук

Деформации в твердых телах. *Учебное пособие*

Заказ 67