Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)**

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

сборник учебно-методических материалов
для направления подготовки

44.03.02 – Психолого-педагогическое образование

2017 г.

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
Университета

Составители: Попова А.М., Лебедь О.А.

Основы математической обработки данных: сборник учебно-методических материалов для направления подготовки 44.03.02 – Психолого-педагогическое образование – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2017.

Рассмотрен на заседании кафедры общей математики и информатики 03.11.2017, протокол № 3.

ВВЕДЕНИЕ

Цель дисциплины: формирование готовности использовать математические и статистические методы обработки и анализа экспериментальных данных в практических и научных педагогических исследованиях.

Задачи дисциплины:

- на примерах математических понятий и методов продемонстрировать сущность научного подхода, специфику математики, ее роль в развитии педагогических исследований;
- научить аспирантов приемам исследования и решения, математически формализованных задач педагогики.

В результате освоения обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

1) Знать: основные математические и статистические методы обработки данных, полученных при решении основных профессиональных задач;
2) Уметь: получать, обрабатывать и интерпретировать данные исследований с помощью математико-статистического аппарата;
3) Владеть: навыками использования в профессиональной деятельности базовых знаний в области математической статистики.

1 КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ЛЕКЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1: Начала теории измерений

С точки зрения теории измерения, все множество различных измерительных процедур, применяемых в педагогики и психологии, является процедурами построения шкалы эмпирической переменной, иначе говоря, процедурами психологического шкалирования. В понимании большинства психологов шкалирование — это совокупность экспериментальных и математических приемов для измерения особенностей психических процессов и состояний. Вслед за С. С. Стивенсоном в настоящее время понятие «шкалирование» рассматривают в качестве синонима понятия «измерение». Под шкалированием психологических процессов, свойств, объектов или событий понимается процесс приравнивания к этим процессам, свойствам, объектам или событиям чисел по определенным правилам, а именно таким образом, чтобы в отношениях чисел отображались отношения явлений, подлежащих измерению.

Итак, измерение состоит в отображении эмпирических систем с помощью математических систем, а целью такого рода отображения является частичная замена действий, производимых с реальными предметами, формальными действиями с числами. Область чисел выполняет функцию модели определенных свойств предметов и в качестве средства познания дает возможность более глубоко проникать в объективно существующие свойства и взаимосвязи. В этом смысле шкалирование (измерение) служит главной силой, преобразующей психологию из науки описательной, следующей за фактами, в науку, уме куцую предсказывать новые факты.

Понятно, что относительно разных эмпирических систем мы должны использовать разные методики измерения, т. е. применять измерительные шкалы разных типов. Понимание исследователем формальных аспектов измерения является необходимым условием для адекватного выбора им измерительных инструментов и процедур, а также для применения адекватных методов анализа полученных в наблюдении и эксперименте данных. Основываясь на правилах измерения, принято различать несколько типов шкал, с каждым из которых могут быть соотнесены конкретные процедуры шкалирования. При этом каждый тип шкалы может быть охарактеризован соответствующими числовыми свойствами. Рассмотрим более подробно основные свойства разных типов шкал, эмпирические операции, допустимые на уровне этих шкал, а также статистические приемы обработки и анализа исходных или, как их чаще называют, первичных результатов исследования.

Шкалы наименований, или номинативные шкалы. Шкала наименований представляет собой взаимнооднозначное отображение некоторой эмпирической системы в числовой системе. Таким образом, шкала наименований отображает взаимнооднозначное соответствие между классами эквивалентности, т. е. классами эмпирических объектов — обозначений. Само название «шкала наименований» указывает на то, что в этом случае шкальные значения играют роль лишь названий классов эквивалентности.

Шкалы порядка, или ординальные шкалы. В порядковых измерениях символы, в частности числа, присваивают классам объектов так, чтобы первые отображали не только равенство или неравенство, эквивалентность или неэквивалентность, но и упорядоченность объектов в отношении измеряемого свойства. В шкалах порядка массы объектов, как и в случае шкал наименовании, являются дискретными. И хотя числа можно сравнивать, всегда надо помнить, что в шкалах порядка их величины имеют лишь относительное, а не абсолютное значение. Например, если какой-то один класс объектов обозначен большим числом, чем другой, то мы понимаем, что по измеряемой характеристике первый превосходит второй, но при этом нам неизвестно, насколько велико это различие. Дело в том, что в самих измерительных операциях, связанных с установлением порядка, не содержится никаких данных о величине различий. Шкала порядка отображает монотонное возрастание или убывание измеряемого признака с помощью монотонно возрастающих или монотонно уменьшающихся чисел. Оценить направление изменения признака можно только в том случае, если шкала порядки содержит не меньше трех классов, которые образуют последовательность. Из-за того, что в шкале порядка устанавливается последовательность классов, любые преобразования, связанные с перестановками элементов этой шкалы, недопустимы.

Шкалы интервалов. Когда шкала обладает всеми свойствам к порядковой шкалы и дополнительно к этому определены еще расстояния между ее единицами, то такую шкалу называют шкалой интервалов. Иначе говоря, классы объектов шкал интервалов всегда дискретны и упорядочены по степени возрастания (или убывания) измеряемого свойства. Кроме того, в эти шкалах одинаковым разностям степени выраженности измеряемого свойства соответствуют равные разности между приписываемыми им числам. Шкалы интервалов имеют равные единицы измерения, однако способ их определения является произвольным, следовательно, и сами единицы произвольны. При этом неизвестна абсолютная величина отдельных значений по шкале, поскольку шкала интервалов не имеет естественной нулевой точки отсчета. Последняя может быть произвольно смещена. Шкалам интервалов присущи все те отношения, которые характерны для номинативных и порядковых шкал. Кроме того, для них возможно использование арифметических действий.

Шкалы отношений. Конструирование шкал отношений предполагает наряду с наличием свойств предыдущих шкал существование постоянной естественной нулевой точки отсчета, в которой измеряемый признак полностью отсутствует. Следовательно, шкалы отношений характеризуются тем, что в них, во-первых, классы объектов разделены и упорядочены согласно измеряемому свойству, во-вторых, равным разностям между классами объектов соответствуют равные разности между приписываемыми им числами, в-третьих, числа, приравниваемые классам объектов, пропорциональны степени выраженности измеряемого свойства. Последнее не было свойственно рассмотренным выше шкалам.

Тема 2: Описательная статистика

В процессе статистического анализа иногда бывает необходимо сформулировать и проверить предположения относительно величины независимых параметров или закона распределения изучаемой генеральной совокупности (совокупностей). Такие предположения называются статистическими гипотезами.

Статистические гипотезы подразделяются на нулевые и альтернативные.

Выдвинутая гипотеза называется нулевой (основной). Ее принято обозначать H0. Обычно нулевая гипотеза – это гипотеза об отсутствии различий.

По отношению к высказанной нулевой гипотезе всегда можно сформулировать альтернативную (конкурирующую), противоречащую ей. Альтернативную гипотезу принято обозначать H1 .

Цель статистической проверки гипотез состоит в том, чтобы на основании выборочных данных принять решение о справедливости нулевой гипотезы H0.

Так как проверка статистических гипотез осуществляется на основании выборочных данных, то такое решение неизбежно сопровождается некоторой, хотя возможно и очень малой, ошибкой.

Ошибка, состоящая в том, что мы отклонили нулевую гипотезу, в то время как она верна, называется ошибкой I рода, а ее вероятность – уровнем значимости α.

Ошибка, состоящая в том, что мы приняли нулевую гипотезу, в то время как она неверна, называется ошибкой II рода, а ее вероятность обозначают β. Величину равную $1 -\beta$ называют мощностью критерия.

Мощность критерия определяется эмпирическим путем, а уровень значимости задается исследователем. В психологических и социологических исследованиях низшим уровнем значимости принято считать α.=0,05 а достаточным α= 0,01.

Статистический критерий — это правило (формула), по которому определяется мера расхождения результатов выборочного наблюдения с высказанной гипотезой H0.

Значение критерия, рассчитываемое по специальным правилам на основании выборочных данных, называется наблюдаемым значением критерия.

Значения критерия, определяемые на заданном уровне значимости α по таблицам распределения случайной величины, выбранной в качестве критерия, называются критическими точками.

В психолого-педагогических и социологических исследованиях принято определять значения критерия при α=0,01 и α=0,05. Полученные критические точки делят совокупность значений критерия на область допустимых значений или зону незначимости (область принятия нулевой гипотезы), критическую область или зону значимости (область принятия альтернативной гипотезы) и зону неопределенности.

Чаще всего критерии, используемые при психологических и социологических исследованиях, имеют положительные значения. Поэтому для простоты при решении прикладных задач изображают только неотрицательную часть оси значимости.

Основной принцип проверки статистических гипотез состоит в следующем:

- если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, то нулевая гипотеза H0 отклоняется и принимается конкурирующая H1;
- если наблюдаемое значение критерия принадлежит области допустимых значений, то нулевую гипотезу H0 нельзя отклонить;
-если наблюдаемое значение критерия принадлежит зоне неопределенности, то мы уже можем отклонить нулевую гипотезу H0, но еще не можем принять конкурирующую H1.

Критерии делятся на параметрические – включающие в формулу расчета параметры распределения (средние и дисперсии) и непараметрические – основанные на оперировании частотами или рангами.

Тема 3: Проверка статистических гипотез.

При изучении различных совокупностей перед исследователем могут возникать различные задачи. Если необходимо знать закон распределения генеральной совокупности и есть основание предполагать, что он имеет определенный вид (A), то выдвигают гипотезу: генеральная совокупность распределена по закону A. Если закон распределения известен, но неизвестен параметр распределения, однако есть основания предполагать, что неизвестный параметр Θ равен a, то выдвигают гипотезу: $\Theta = a$.

В первом случае речь идет о виде предполагаемого распределения, во втором – о предполагаемой величине параметра известного распределения. Возможны и другие гипотезы, например, о равенстве параметров двух или более распределений.

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0. Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

В итоге статистической проверки гипотезы в двух случаях могут быть приняты неправильные решения, то есть могут быть допущены ошибки двух родов. Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза. Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза. Последствия этих ошибок могут быть различными. Вероятность совершить ошибку первого рода принято обозначать через α; ее называют уровнем значимости. Наиболее часто уровень значимости принимают равным 0,05 или 0,01. Если принять уровень значимости α=0,05, то это означает, что в пяти случаях из 100 имеется риск допустить ошибку первого рода (отвергнуть правильную гипотезу).

Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную случайную величину, точное и приближенное распределение которой известно.

Статистическим критерием (критерием) называют случайную величину K, которая служит для проверки нулевой гипотезы. Например, если проверяют гипотезу о равенстве дисперсий двух нормальных распределений, то в качестве критерия K принимают отношение исправленных выборочных дисперсий: $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$. Эта величина случайная, так как в различных опытах дисперсии принимают различные значения, и распределена по закону Фишера-Снедекора.

Для проверки гипотезы по данным выборок вычисляют частные значения входящих в критерий величин и таким образом получают частное (наблюдаемое) значение критерия.

Наблюдаемым значением критерия $K_{набл}$ называется значение критерия, вычисленное по выборкам.

После выбора определенного критерия множество всех его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения, при которых нулевая гипотеза отвергается, а другое – при которых она принимается.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают. Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу принимают.

Основной принцип проверки статистических гипотез: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, то гипотезу отвергают. Если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы – гипотезу принимают.

Критическими точками (границами) $k_{кр}$ называются точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы. Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K>k_{кр}$, где $k_{кр}>0$. Левосторонней называют критическую область, определенную неравенством $K<k_{кр}$, где $k_{кр}<0$. Двусторонней называют критическую область, определяемую неравенствами $K<k_1$, $K>k_2$, где $k_2>k_1$.

Правосторонняя критическая область определяется исходя из требования, что при справедливости нулевой гипотезы выполняется соотношение $P(K>k_{кр})=\alpha$. Так как α – малая вероятность, то событие «$K>k_{кр}$» при справедливости нулевой гипотезы в силу принципа практической невозможности маловероятных событий в единичном испытании не должно произойти. Если же оно произошло, то это можно объяснить тем, что нулевая гипотеза ложна.
Левосторонняя критическая область определяется соотношением $P(K<k_{кр})=\alpha$. Двусторонняя критическая область определяется соотношением $P(K<k_1)+P(K<k_{кр})=\alpha$.

Если нулевая гипотеза принята, то это еще не значит, что она доказана, так как один пример этого не доказывает. Более правильно говорить, что данные наблюдений согласуются с нулевой гипотезой, и, следовательно, не дают оснований ее отвергнуть. Отвергают гипотезу более категорично, чем принимают, поскольку достаточно привести один пример, противоречащий некоторому общему утверждению, чтобы это утверждение отвергнуть.

Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Критерий согласия Пирсона

Проверка гипотезы о предполагаемом законе распределения производится при помощи специально подобранной случайной величины – критерия согласия.

Критерием согласия называется критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения. Рассмотрим критерий Пирсона. Будем рассматривать эмпирические (наблюдаемые) и теоретические (вычисленные в предположении нормального распределения) частоты. Обычно эмпирические и теоретические частоты различаются. Критерий Пирсона отвечает на вопрос: является ли распределение частот случайным (незначимым) или же расхождение вызвано тем, что теоретические частоты вычислены исходя из неверного предположения о нормальном распределении.

Пусть по выборке объема n получено эмпирическое распределение:

Варианты x_i	x_1	x_2	…	x_s
Эмпирические частоты n_i	n_1	n_2	…	n_s

В предположении нормального распределения генеральной совокупности вычислим теоретические частоты n'_i.

При уровне значимости α требуется проверить нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена нормально. В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину $\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$. Эта величина случайная, так как в различных опытах она принимает различные, заранее неизвестные значения.

Доказано, что при $n \to \infty$ закон распределения данной случайной величины независимо от того, какому закону распределения подчинена генеральная совокупность, стремится к закону распределения χ^2 с k степенями свободы. Число степеней свободы находится по формуле: $k=s-1-r$, где s – число групп выборки, r – число параметров предполагаемого распределения. В случае нормального распределения – 2 параметра (математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение), поэтому r=2 и число степеней свободы $k=s-3$.

Так как односторонний критерий более жестко отвергает нулевую гипотезу, чем двусторонний, строят правостороннюю критическую область (значения χ^2 положительны): $P(\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha;k)) = \alpha$.

Таким образом, правосторонняя критическая область определяется неравенством $\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha;k)$, а область принятия нулевой гипотезы определяется неравенством $\chi^2 < \chi^2_{кр}(\alpha;k)$.

Правило проверки нулевой гипотезы. Для того чтобы при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу H_0: генеральная совокупность распределена нормально, надо:
1) вычислить теоретические частоты;
2) найти наблюдаемое значение критерия по формуле $\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$;
3) по таблице критических точек распределения χ^2 (приложение 6) по указанному уровню значимости α и числу степеней свободы $k=s-3$ найти критические точки $\chi^2_{кр}(\alpha;k)$;
4) если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ – нулевую гипотезу отвергают.

Вычисление теоретических частот. Пусть эмпирическое распределение задано в виде вариационного ряда:

Варианты x_i	x_1	x_2	…	x_s
Эмпирические частоты n_i	n_1	n_2	…	n_s

Тогда теоретические частоты вычисляются по формуле: $n'_i = \frac{nh}{\sigma_B} \cdot \varphi(u_i)$, где n – объем выборки,

$h = x_{i+1} - x_i$, $u_i = \frac{x_i^* - \bar{x}_B}{\sigma_B}$, $\bar{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$, $\sigma_B = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_B)^2 \cdot n_i}$, $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$; $\varphi(u)$ – табулирована (приложение 1). σ_B можно найти и по формуле: $\sigma_B = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i - (\bar{x}_B)^2}$.

Проверка статистических гипотез о параметрах распределения

Пусть генеральные совокупности X и $У$ распределены нормально. Из совокупности X извлечена выборка объемом n_x, а из совокупности $У$ – объемом n_y. Пусть для этих выборок вычислены исправленные дисперсии S_x^2 и S_y^2 соответственно. Требуется проверить при уровне значимости α нулевую гипотезу о равенстве дисперсий генеральных совокупностей: H_0: $D_x=D_y$.

Для проверки гипотезу о равенстве дисперсий двух нормальных распределений используют случайную величину, распределенную по закону Фишера-Снедекора $F = \frac{S_x^2}{S_y^2}$, где в числителе большая из вычисленных исправленных выборочных дисперсий.

Критическое значение $F_{крит}$ следует находить с помощью таблицы распределения Фишера-Снедекора (приложение 7) по уровню значимости α и числу степеней свободы $k_1 = n_x - 1$ и $k_2 = n_y - 1$,
где k_1 — число степеней свободы большей (по величине) дисперсии;
k_2 — число степеней свободы меньшей (по величине) дисперсии;
n_x — объем выборки большей (по величине) дисперсии;
n_y — объем выборки меньшей (по величине) дисперсии.
При этом, если в качестве альтернативной гипотезы выступает H_1: $D_x > D_y$, то $F_{крит} = F(\alpha, k_1, k_2)$, если H_1: $D_x \neq D_y$, то $F_{крит} = F\left(\frac{\alpha}{2}, k_1, k_2\right)$. Если вычисленное значение $F < F_{крит}$, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу.

Пусть требуется проверить нулевую гипотезу о равенстве математических ожиданий нормально распределенных генеральных совокупностей H_0: $M_x = M_y$.

Здесь возможны случаи:
1) дисперсии генеральных совокупностей известны;
2) дисперсии генеральных совокупностей неизвестны и выборки имеют объем больший 30;
3) дисперсии генеральных совокупностей неизвестны и выборки имеют объем меньший 30.

В первом случае используется нормированная нормально распределенная случайная величина $Z = \dfrac{\bar{x}_B - \bar{y}_B}{\sqrt{\dfrac{D_x}{n_x} + \dfrac{D_y}{n_y}}}$. Если альтернативная гипотеза H_1: $M_x > M_y$ или H_1: $M_x < M_y$,то $Z_{крит}$ находят по таблице функции Лапласа (приложение 2) из соотношения $\Phi(Z_{крит}) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$. Если H_1: $M_x \neq M_y$, то по той же таблице $Z_{крит}$ находят из соотношения $\Phi(Z_{крит}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$. При $|Z| < Z_{крит}$ нет оснований отвергать нулевую гипотезу.

Во втором случае используется приближенно нормально распределенная величина $Z' = \dfrac{\bar{x}_B - \bar{y}_B}{\sqrt{\dfrac{(D_x)_B}{n_x} + \dfrac{(D_y)_B}{n_y}}}$, для вычисления которой находят выборочные дисперсии $(D_x)_B$ и $(D_y)_B$.
Вычисление критического значения, в зависимости от вида конкурирующей гипотезы, и правило принятия нулевой гипотезы аналогичны первому случаю.

В третьем случае предварительно требуется выполнить проверку гипотез о равенстве дисперсий генеральных совокупностей. Гипотеза о равенстве математических ожиданий генеральных совокупностей (в случае равенства дисперсий) проверяется с помощью случайной величины имеющей распределение t-Стьюдента: $T = \dfrac{\bar{x}_B - \bar{y}_B}{\sqrt{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}} \sqrt{\dfrac{n_x n_y (n_x + n_y - 2)}{n_x + n_y}}$. Критическое значение $t_{крит}$ следует находить с помощью таблицы распределения Стьюдента (приложение 3) по уровню значимости α и числу степеней свободы $k = n_x + n_y - 2$. Если альтернативная гипотеза H_1: $M_x > M_y$ или H_1: $M_x < M_y$, то α выбирают по нижней строке таблицы приложения 3. Если H_1: $M_x \neq M_y$, то α выбирают по верхней строке таблицы приложения 3. При $|T| < t_{крит}$ нет оснований отвергать нулевую гипотезу.

Тема 4: Параметрические критерии

1. t-критерий Стьюдента используется
для сравнения выборочной средней $\bar{x}$ с некоторым известным числовым значением a_0.

Возможны гипотезы:

H_0: $\overline{x} = a_0$ выборочная средняя генеральной совокупности равна заданному числу a_0.

H_1: $\overline{x} \neq a_0$ ($\overline{x} < a_0$, $\overline{x} > a_0$)выборочная средняя генеральной совокупности не равна (меньше, больше) заданному числу a_0.

Наблюдаемое значение t-критерия рассчитывается по формуле:
если дисперсия генеральной совокупности неизвестна

$$t_{набл} = \frac{\overline{x} - a_0}{S}\sqrt{n} \qquad (1)$$

если дисперсия генеральной совокупности известна

$$t_{набл} = \frac{\overline{x} - a_0}{\sigma_{ген}}\sqrt{n} \qquad (2)$$

где $\overline{x}$ - выборочная средняя;
a_0 — числовое значение генеральной средней;
S — исправленное среднее квадратическое отклонение;
$\sigma^2_{ген}$ - известная дисперсия генеральной совокупности;
n — объем выборки.

Критическое значение $t_{кр}$ следует находить с помощью таблиц распределения Стьюдента по уровню значимости α и числу степеней свободы $k = n - 1$.
для обнаружения различия между средними значениями $\overline{x}$, $\overline{y}$ двух выборок.

Возможны гипотезы:

H_0: $\overline{x} = \overline{y}$ средние значения двух выборок равны,

H_1: $\overline{x} \neq \overline{y}$ средние значения двух выборок не равны.

Наблюдаемое значение t-критерия рассчитывается по формуле:
для независимых выборок

$$t_{набл} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n_1 - 1)S_x^2 + (n_2 - 1)S_y^2}}\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \qquad (3)$$

для зависимых выборок

$$t_{эмп} = \frac{\sum d}{\sqrt{\frac{n\sum d^2 - (\sum d)^2}{n-1}}} \qquad (4)$$

где $S_x^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum\left(x - \bar{x}\right)^2$ - выборочная дисперсия 1 выборки;

$S_y^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum\left(y - \overline{y}\right)^2$ - выборочная дисперсия 2 выборки;

$\overline{x}$ - среднее значение признака для 1 выборки;
$\overline{y}$ - среднее значение признака для 2 выборки;
n_1 – объем 1 выборки;
n_2 – объем 2 выборки;
d — разность между результатами в каждой паре («после»минус «до»);
n —число пар данных в зависимых выборках

Критическое значение $t_{кр}$ следует находить с помощью таблиц распределения Стьюдента по уровню значимости α и числу степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2$.
t-критерий для независимых выборок можно использовать для сравнения средних показателей экспериментальной группы с контрольной группой.

t-критерий для зависимых выборок очень полезен в тех ситуациях, когда две сравниваемые группы основываются на одной и той же совокупности наблюдений (субъектов), которые тестировались дважды (например, до и после эксперимента).

2. F — критерий Фишера-Снедекора используют

а) для сравнения разброса значений двух выборок, т.е. для проверки гипотезы о равенстве дисперсий.

Возможны гипотезы:

H_0 : $S_x^2 = S_y^2$ - разброс значений признака относительно среднего одинаковый в обеих выборках.

H_1: $S_x^2 \neq S_y^2$ - разброс значений признака не совпадает.

Наблюдаемое значение F — критерия рассчитывается по формуле:

$$F_{набл} = \frac{S_x^2}{S_y^2}, \qquad (5)$$

где S_x^2 — большая (по величине) выборочная дисперсия;

S_y^2 — меньшая (по величине) выборочная дисперсия.

Критическое значение $F_{крит}$ следует находить с помощью таблицы распределения Фишера-Снедекора по уровню значимости α и числу степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$,

где k_1 — число степеней свободы большей (по величине) дисперсии;

k_2 — число степеней свободы меньшей (по величине) дисперсии;

n_1 — объем выборки большей (по величине) дисперсии;

n_2 — объем выборки меньшей (по величине) дисперсии.

Тема 5: Непараметрические критерии

а) Q-критерий Розенбаума

Критерий используется для оценки различий между двумя выборками по уровню какого-либо признака, количественно измеренного.

Возможны гипотезы:

H_0: Уровень признака в выборке 1 не превышает уровня признака в выборке 2.

H_1: Уровень признака в выборке 1 превышает уровень признака в выборке 2.

Ограничения критерия Q

В каждой из сопоставляемых выборок должно быть не менее 11 наблюдений. При этом объемы выборок должны примерно совпадать. Если в обеих выборках меньше 50 наблюдений, то абсолютная величина разности между объемами выборок n_1 и n_2, соответственно, не должна быть больше 10 наблюдений. Если в каждой из выборок больше 51 наблюдения, но меньше 100, то абсолютная величина разности между объемами выборок n_1 и n_2, соответственно, не должна быть больше 20 наблюдений. Если в каждой из выборок больше 100 наблюдений, то допускается, чтобы одна из выборок была больше другой не более чем в 1,5-2 раза.

Диапазоны разброса значений в двух выборках должны не совпадать между собой, в противном случае применение критерия бессмысленно.

Измерение может быть проведено по шкале порядка, интервалов или отношений.

Выборки должны быть независимыми.

Эмпирическое значение критерия подсчитывается по формуле:

$$Q_{эмп} = S_1 + S_2, \qquad (17)$$

где S_1 – количество наблюдений в выборке 1, которые выше максимального значения в выборке 2;

S_2 - количество наблюдений в выборке 2, которые ниже минимального значения выборки 1.

Значения в выборках должны быть упорядочены по возрастанию признака.

Критические значения Q-критерия определяются по таблице для данных n_1 и n_2 и для выбранного уровня значимости. Если $Q_{эмп}$ не меньше $Q_{кр}$, то H_o отвергается.

б) U- критерий Манна-Уитни

Критерий предназначен для оценки различий между двумя выборками по уровню какого-либо признака, количественно измеренного.

Возможны гипотезы:

H_0: Уровень признака в группе 2 не ниже уровня признака в группе 1.

H_1: Уровень признака в группе 2 ниже уровня признака в группе 1.

Ограничения критерия U

В каждой выборке должно быть не менее 3 наблюдений. Допускается, чтобы в одной выборке было 2 наблюдения, но тогда во второй их должно быть не менее 5.

В каждой выборке должно быть не более 60 наблюдений.

Измерение может быть проведено по шкале интервалов или отношений.

Выборки должны быть несвязными.

Наблюдения обеих выборок необходимо объединить и проранжировать по степени нарастания признака.

Эмпирическое значение критерия рассчитывается по формуле:

$$\mathrm{U}_{\text{эмп}} = \left(n_1 \cdot n_2\right) + \frac{n_x \cdot (n_x + 1)}{2} - \mathrm{T}_x, \tag{18}$$

где n_1, n_2 - количество испытуемых в выборках 1 и 2 соответственно,

T_x – большая из ранговых сумм,

n_x – количество испытуемых в группе с большей суммой рангов.

Критическое значение критерия определяется по таблице для данных n_1 и n_2 и выбранного уровня значимости. Если $U_{эмп}$ больше $U_{кр}$, то принимается H_o.

в) Н - критерий Крускала – Уоллиса

Критерий предназначен для оценки различий между тремя и более выборками по уровню какого-либо признака. Он позволяет установить, что уровень признака изменяется при переходе от группы к группе, но не указывает направление этих изменений.

Возможны гипотезы:

H_o: Между выборками 1, 2, 3 и т. д. существуют лишь случайные различия по уровню исследуемого признака.

H_1: Между выборками 1, 2, 3 и т. д. существуют неслучайные различия по уровню исследуемого признака.

Ограничения критерия Н

Измерение может быть проведено по шкале интервалов или отношений.

Выборки должны быть независимыми.

При сопоставлении 3-х выборок допускается, чтобы в одной из них *n=3*, а в двух других *n=2*. Но при таких численных составах установить различия можно лишь на низшем уровне значимости.

При большем 5 количестве выборок и испытуемых в каждой выборке необходимо пользоваться таблицей критических значений критерия χ^2. Число степеней свободы при этом определяется как ν=c-1, где c –количество сопоставляемых выборок.

Наблюдения всех выборок необходимо объединить и проранжировать по степени нарастания признака.

Эмпирическое значение критерия Н подсчитывается по формуле:

$$H_{эмп} = \frac{12}{N(N+1)} \cdot \sum_{i=1}^{c} \frac{T_i^2}{n_i} - 3 \cdot (N+1), \tag{19}$$

где N – общее количество испытуемых в объединенной выборке,

n_i – количество испытуемых в каждой выборке,

T_i^2 – квадраты сумм рангов по каждой i–ой выборке.

Если эмпирическое значение критерия меньше критического значения, то H_o принимается.

г) S – критерий тенденций Джонкира

Критерий S предназначен для выявления тенденций изменения признака при переходе от выборки к выборке при сопоставлении трех и более выборок.

Гипотезы:

H_0: Тенденция возрастания значений признака при переходе от выборки к выборке является случайной.

H_1: Тенденция возрастания значений признака при переходе от выборки к выборке не является случайной.

Ограничения критерия

Измерение может быть проведено по шкале интервалов или отношений.

Выборки должны быть независимыми.

Количество наблюдений в каждой выборке должно быть одинаковым.

Нижняя граница применимости критерия: не менее трех выборок и не менее двух элементов в каждом наблюдении. Верхняя граница определяется таблицей приложения: не более 6 выборок и не более 10 наблюдений в каждой выборке.

Выборки необходимо располагать по возрастанию суммы значений признака слева на право.

Эмпирическое значение критерия рассчитывается по формуле:

$$S_{эмп}=2A-B, \qquad (20)$$

где A – общая сумма инверсий,

$B = \frac{c \cdot (c-1)}{2} \cdot n^2$ – максимально возможное значение величины А.

Под числом инверсий понимается число значений признака, больших каждого конкретного значения рассматриваемой выборки и расположенных правее от нее.

Критические значения критерия определяются по таблице, в соответствии с выбранным уровнем значимости, количеством выборок (c) и числом наблюдений (n) в каждой выборке.

Если эмпирическое значение критерия меньше критического значения, то принимается гипотеза H_0.

д) G-критерий знаков

Критерий знаков предназначен для установления общего направления сдвига исследуемого признака. Он позволяет установить, в какую сторону в выборке в целом изменяются значения признака при переходе от первого измерения ко второму: изменяются ли показатели в сторону улучшения, повышения или усиления или, наоборот, в сторону ухудшения, понижения или ослабления.

Возможны гипотезы:

H_0: Преобладание типичного направление сдвига является случайным.

H_1: Преобладание типичного направление сдвига не является случайным.

Ограничения критерия G

Измерение может быть проведено по шкале порядка, интервалов или отношений.

Выборка должна быть однородной и связной.

Объем выборки должен быть равным от 5 до 300.

При равенстве типичных и нетипичных сдвигов критерий знаков неприменим.

Эмпирическое значение критерия $G_{эмп}$ принимают равным числу нетипичных сдвигов, т. е. не преобладающих сдвигов в сторону увеличения или уменьшения показателя.

Критическое значение критерия $G_{кр}$ определяют по таблице в соответствии с выбранным уровнем значимости и объемом выборки без учета нулевых сдвигов. Если $G_{эмп}$ не превосходит $G_{кр}$, то гипотеза H_0 отвергается.

ж) Парный критерий Т – Вилкоксона

Критерий применяется для сопоставления показателей, измеренных в двух разных условиях на одной и той же выборке испытуемых. Он позволяет установить не только направленность изменений, но и их выраженность. С его помощью мы определяем, является ли сдвиг показателей в каком-то одном направлении более интенсивным, чем в другом.

Возможны гипотезы:

H_0: Интенсивность сдвигов в типичном направлении не превосходит интенсивности сдвигов в нетипичном направлении.
H_1: Интенсивность сдвигов в типичном направлении превышает интенсивности сдвигов в нетипичном направлении.
Ограничения критерия Т
Измерение может быть проведено по любой шкале, кроме номинальной.
Выборка должна быть связной.
Объем выборки должен быть равным от 5 до 50.
Эмпирическое значение критерия подсчитывают по формуле:

$$T_{эмп} = \sum R_r \ , \qquad (21)$$

где R_r – ранговые значения сдвигов с более редким знаком.
Критическое значение критерия $T_{кр}$ определяется для данного объема выборки и выбранного уровня значимости по таблице. Если $T_{эмп}$ не превосходит $T_{кр}$, то гипотеза H_0 отвергается.

з) Критерий χ_r^2 Фридмана

Критерий применяется для сопоставления показателей, измеренных в трех или более условиях на одной и той же выборке испытуемых. Он позволяет установить, что величины показателей от условия к условию изменяются, но при этом не указывает на направление изменений.

Возможны гипотезы:
H_0: Между показателями, полученными (измеренными) в разных условиях, существуют лишь случайные различия.
H_1: Между показателями, полученными (измеренными) в разных условиях, существуют неслучайные различия.
Ограничения критерия χ_r^2
Измерение может быть проведено по шкале интервалов или отношений.
Выборка должна быть связной.
В выборке должно быть не менее двух испытуемых, каждый из которых имеет не менее трех показателей. Количество измерений не может превышать 100.
Эмпирическое значение критерия вычисляется по формуле:

$$\chi^2_{r\ эмп} = \left[\frac{12}{n \cdot c \cdot (c+1)} \cdot \sum_{i=1}^{c} T_i^2 \right] - 3 \cdot n \cdot (c+1) \ , \qquad (22)$$

где c – количество условий,
n – количество испытуемых,
T_i – суммы рангов по каждому из условий.
Критическое значение критерия $\chi^2_{r\ кр}$ определяем при выбранном уровне значимости и данном объеме выборки по правилам:
При $c=3$ и $n \leq 9$, критические значения определяются по таблице 8-А приложения.
При $c=4$ и $n \leq 4$, критические значения определяются по таблице 8-Б приложения.
При большем числе измерений и испытуемых критические определяются по таблице для критерия χ^2. В этом случае число степеней свободы определяется по формуле $\nu = c - 1$.
Если $\chi^2_{r\ эмп}$ не меньше $\chi^2_{r\ кр}$ то гипотеза H_0 отклоняется.

и) L – критерий тенденций Пейджа.

Критерий L Пейджа применяется для сопоставления показателей, измеренных в трех и более условиях на одной и той же выборке испытуемых. Критерий позволяет выявить тенденции в изменении величин признака при переходе от условия к условию, а также указывает на направление этих изменений.

Возможны гипотезы:
H_0: Увеличение индивидуальных показателей при переходе от первого условия ко второму, а затем к третьему и далее, случайно.
H_1: Увеличение индивидуальных показателей при переходе от первого условия ко второму, а затем к третьему и далее, неслучайно.

Ограничения критерия L

Измерение может быть проведено по ранговой шкале, шкале интервалов или отношений.

Выборка должна быть связной.

В выборке должно быть не менее двух и не больше 12 испытуемых, каждый из которых имеет не менее трех показателей. Максимальное число условий – 6.

Эмпирическое значение критерия определяется по формуле:

$$L_{эмп} = \sum_{i=1}^{c} (T_i \cdot i), \qquad (23)$$

где c – количество условий,

T_i – суммы рангов по каждому из условий,

i –порядковый номер, приписанный каждому условию, после упорядочения по возрастанию сумм рангов.

Критическое значение критерия $L_{кр}$ определяем при выбранном уровне значимости, данном объеме выборки и данном количестве условий по таблице. Если $L_{эмп}$ не меньше $L_{кр}$, то гипотеза H_0 отклоняется.

Тема 6: Основы корреляционного анализа

Задача корреляционного анализа сводится к установлению направления и формы между варьирующими признаками, измерению тесноты, и, наконец, к проверке значимости коэффициентов корреляции.

Переменные x и y могут быть измерены в разных шкалах. Это обстоятельство определяет выбор соответствующего коэффициента линейной корреляции.

Тип шкалы		Мера связи
Переменная x	Переменная y	
Интервальная или отношений	Интервальная или отношений	Коэффициент Пирсона r_{xy}
Ранговая, интервальная или отношений	Ранговая, интервальная или отношений	Коэффициент Спирмена g_{xy}
Ранговая	Ранговая	Коэффициент τ Кендалла
Дихотомическая	Дихотомическая	Коэффициент ассоциации φ
Дихотомическая	Ранговая	Рангово-бисериальный $R_{гв}$
Дихотомическая	Интервальная или отношений	Бисериальный $R_{бис}$

Все коэффициенты по абсолютной величине не могут превосходить 1.

а) Коэффициент корреляции Пирсона вычисляется по формуле:

$$r_{xy} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x}) * (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 * \sum_i (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{n * \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i * \sum_i y_i}{\sqrt{(n * \sum_i x_i^{\,2} - (\sum_i x_i)^2) * (n * \sum_i y_i^{\,2} - (\sum_i y_i)^2)}} \qquad (9)$$

где x_i – значения, переменных принимаемые переменной x,

y_i - значения, переменных принимаемые переменной y,

$\bar{x}$ – средняя по x,

$\bar{y}$ - средняя по y.

Оценка значимости осуществляется при числе степеней свободы $k=n-2$.

б) Коэффициент корреляции рангов Спирмена вычисляется по формуле:

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot \sum_i (d_i)^2}{n \cdot (n^2 - 1)}, \qquad (6)$$

где n – количество ранжируемых признаков

d_i – разность между рангами по двум переменным для каждого испытуемого.

При наличии одинаковых рангов в числитель добавляются поправки на одинаковые ранги:

$$D_1 = \frac{n^3 - n}{12} , \qquad (7)$$

$$D_2 = \frac{k^3 - k}{12} , \qquad (8)$$

где n – число одинаковых рангов в первом столбце,

k – число одинаковых рангов во втором столбце.

По каждой группе одинаковых рангов вводится своя поправка.

Критически значения определяются при уровне значимости равном числу значений признака, по таблице критических значений ρ Спримена.

в) Коэффициент ассоциации φ вычисляется по формуле:

$$\varphi = \frac{p_{xy} - p_x \cdot p_y}{\sqrt{p_x \cdot (1 - p_x) \cdot p_y \cdot (1 - p_y)}} , \qquad (9)$$

где p_x – частота или доля признака, имеющего 1 по x, $(1\text{-}p_x)$ – частота или доля признака, имеющего 0 по x, p_y – частота или доля признака, имеющего 1 по y, $(1\text{-}p_y)$ – частота или доля признака, имеющего 0 по y, p_{xy} – частота или доля признака, имеющих 1 и по x и по y.

г) Коэффициент корреляции τ Кендалла вычисляется по формуле:

$$\tau = 1 - \frac{4 \cdot Q}{N \cdot (N - 1)} , \qquad (10)$$

где Q – число инверсий (подсчет инверсий осуществляется суммированием числа рангов второго признака меньше каждого из рангов второго признака, при условии, что ранги первого признака упорядочены по возрастанию);

N – число ранжируемых признаков.

д) Бисериальный коэффициент корреляции вычисляется по формуле:

$$R_{бис\,эмп} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_0}{\sigma_y} * \sqrt{\frac{n_1 * n_0}{N * (N - 1)}} , \qquad (11)$$

где $\bar{x}_1$ - среднее по тем элементам переменной y, которым соответствует признак 1 в переменной x,

$\bar{x}_0$ - среднее по тем элементам переменной y, которым соответствует признак 0 в переменной x,

n_1 – число единиц в переменной x,

n_0 – число нулей в переменной x,

$N = n_1 + n_0$,

σ_y - среднее квадратическое отклонение переменной y.

е) Рангово-бисерный коэффициент корреляции вычисляется по формуле:

$$R_{rb\,эмп} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)^2}{N} , \qquad (12)$$

где $\bar{x}_1$ - средний ранг по тем элементам переменной y, которым соответствует признак 1 в переменной x;

$\bar{x}_0$ - средний ранг по тем элементам переменной y, которым соответствует признак 0 в переменной x;

N – количество элементов в переменной x.

Тема 7: Регрессионный анализ

Взаимосвязь между переменными величинами может быть описана разными способами. Например, эту связь можно описать с помощью различных коэффициентов корреляции (линейных, частных, корреляционного отношения и т. п.). В то же время эту связь можно выразить по-другому: как зависимость между аргументом (величиной *X*) и функцией *Y*. В этом случае задача будет состоять в нахождении зависимости вида *X*=*F*(*Y*) или, напротив, в нахождении зависимости вида *X*=*F*(*Y*). При этом изменение функции в зависимости от изменений одного или нескольких аргументов называется регрессией.
Графическое выражение регрессионного уравнения называют линией регрессии. Линия регрессии выражает наилучшее предсказание зависимой переменной (*Y*) по независимым переменным (*X*). Эти независимые переменные, а их может быть много, носят название *предикторов*.

Регрессию выражают с помощью двух уравнений регрессии, которые в самом простом случае выглядят, как уравнения прямой, а именно так:

$$Y = a0 + a1 \cdot X \qquad (13)$$

$$X = b0 + b1 \cdot Y \qquad (14)$$

В уравнении 1 *Y* – зависимая переменная, а *X* – независимая переменная, *a*0 свободный член, а *a*1 – коэффициент регрессии, или угловой коэффициент, определяющий наклон линии регрессии по отношению к осям координат.
В уравнении 2 *X* – зависимая переменная, а *Y* – независимая переменная, *b*0 свободный член, а *b*1 – коэффициент регрессии, или угловой коэффициент, определяющий наклон линии регрессии по отношению к осям координат.
Линии регрессии пересекаются в точке *O* ($\bar{x}$, $\bar{y}$), с координатами, соответствующими средним арифметическим значениям корреляционно связанных между собой переменных *X* и *Y*. Линия *AB*, проходящая через точку *O*, соответствует линейной функциональной зависимости между переменными величинами *X* и *Y* равен $r_{x\,y}$= 1. При этом наблюдается такая закономерность: чем сильнее связь между *X* и *Y* , тем ближе обе линии регрессии к прямой *AB*. При отсутствии связи между *X* и *Y* линии регрессии оказываются под прямым углом по отношению друг к другу и в этом случае r_{xy}=0.
Количественное представление связи (зависимости) между *X* и *Y* (между *Y* и *X*) называется регрессионным анализом. Главная задача регрессионного анализа заключается , собственно говоря, в нахождении коэффициентов *a*0, *b*0, *a*1 и *b*1 и определении уровня значимости полученных аналитических выражений (13) и (14), связывающих между собой переменные *X* и *Y* .
При этом коэффициенты регрессии *a*1 и *b*1 показывают, насколько в среднем величина одной переменной изменяется при изменении на единицу меры другой. Коэффициент регрессии *a*1 в уравнении (1) можно подсчитать по формуле:

$$a1 = r_{xy} \cdot \frac{S_y}{S_x} \qquad (15)$$

а коэффициент *b*1 в уравнении (2) по формуле (4)

$$b1 = r_{xy} \cdot \frac{S_x}{S_y} \qquad (16)$$

где r_{yx} – коэффициент корреляции между переменными *X* и *Y*;
S_x – среднеквадратическое отклонение, подсчитанное для переменной *X*;
S_y – среднеквадратическое отклонение, подсчитанное для переменной *Y*.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Практические занятия сопровождают лекционный курс дисциплины. Теоретические знания, представления, образы должны быть прожиты. Афоризм одного из известных физиков М. Лауэ: «знание есть то, что остается, когда все выученное уже забыто», характеризует важную роль практики.

Практические занятия должны проводиться в логичном единстве с теоретическим курсом, подкрепляя и уточняя понятийный аппарат.

Каждый практическое занятие начинается с теоретического опроса необходимого материала и проверки домашнего задания. Далее на конкретных примерах рассматриваются пути и способы применения тех математических методов, которые не требуют использования электронных вычислительных машин. При этом необходимо активизировать самостоятельную работу студентов. Задания и методические указания к ним выдаются студентам, каждый из которых выбирает оптимальный для себя темп работы. Преподавателю отводится роль консультанта и помощника. Задания, вызвавшие трудности у большинства студентов, разбираются на доске.

В конце занятия выдается домашнее задание, состоящее из теоретических вопросов, уяснение которых необходимо для следующего занятия и практических заданий по пройденному материалу.

При выполнении домашнего задания решать задачи удобнее поэтапно, в той последовательности, в какой эти задания сформулированы. В этом случае при возникновении трудностей будет легче обратиться к анализу тех тем, которые изложены в лекции и задач, разобранных на практическом занятии.

После выполнения практической части задания следует найти ответы на теоретические вопросы, заданные преподавателем и таким образом подготовится к осознанному восприятию следующего материала.

Активная, регулярная самостоятельная работа над домашним заданием – путь к успешному усвоению дисциплины.

Тема 1:Начала теории измерений.

Типовые задания:

Амперметром с диапазоном измерения от 0 до 50 А произведен ряд измерений (табл. 1):

Таблица 1

Порядковый номер наблюдений	Значение величины тока *I*, А	Порядковый номер наблюдений	Значение величины тока *I*, А
1	20,5	9	20,5
2	20,1	10	20,7
3	20,5	11	20,5
4	20,5	12	20,3
5	20,2	13	20,9
6	20,6	14	20,1
7	20,3	15	20,6
8	20,7		

Произвести оценку результатов измерений (найти абсолютную, относительную и приведенные погрешности);
За нормирующее значение принять верхний предел шкалы.
Решение:

№	Значение величины тока *I*, А	Истинное значение величины тока *I*, А	Абсолютная погрешность(Δ) *I*, А	Относительная погрешность(δ) %	Приведенная погрешность (γ) %
1	20,50		0,03	0,0015	0,0006
2	20,10		-0,37	-0,0184	-0,0074
3	20,50		0,03	0,0015	0,0006
4	20,50		0,03	0,0015	0,0006
5	20,20		-0,27	-0,0134	-0,0054
6	20,60		0,13	0,0063	0,0026
7	20,30		-0,17	-0,0084	-0,0034
8	20,70	20,47	0,23	0,0111	0,0046
9	20,50		0,03	0,0015	0,0006
10	20,70		0,23	0,0111	0,0046
11	20,50		0,03	0,0015	0,0006
12	20,30		-0,17	-0,0084	-0,0034
13	20,90		0,43	0,0206	0,0086
14	20,10		-0,37	-0,0184	-0,0074
15	20,60		0,13	0,0063	0,0026

Истинное значение: $X_{ист} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$

Абсолютная погрешность: $\Delta = X_Д - X_{ист}$

Относительная погрешность: $\delta = \pm\frac{\Delta}{X_Д} \cdot 100\%$

Приведенная погрешность: $\gamma = \pm\frac{\Delta}{X_N} \cdot 100\%$

Варианты задач:

Задача 1:

Вольтметром с диапазоном измерения от 0 до 250 Впроизведен ряд измерений (табл. 1):

Таблица 1

Порядковый	Значение	Порядковый	Значение

номер наблюдений	величины напряженияU, В	номер наблюдений	величины напряженияU, В
1	220	9	220
2	219	10	220
3	220	11	222
4	218	12	221
5	221	13	219
6	220	14	219
7	219	15	220
8	220		

Произвести оценку результатов измерений (найти абсолютную, относительную и приведенные погрешности);

За нормирующее значение принять верхний предел шкалы.

Задача 2:

Омметром с диапазоном измерения от 0 до 300 МОм произведен ряд измерений (табл. 1):

Таблица 1

Порядковый номер наблюдений	Значение величины сопротивленияR, МОм	Порядковый номер наблюдений	Значение величины сопротивленияR, МОм
1	125	9	123
2	126	10	125
3	124	11	126
4	125	12	124
5	126	13	123
6	125	14	127
7	125	15	122
8	124		

Произвести оценку результатов измерений (найти абсолютную, относительную и приведенные погрешности);

За нормирующее значение принять верхний предел шкалы.

** Верхний предел измерений. Значения величины, ограничивающие диапазон измерений снизу и сверху (слева и справа), называют соответственно «нижним пределом измерений» или «верхним пределом измерений».

* * Диапазон измерений - это область значений величины, в пределах которой нормированы допускаемые пределы погрешности средства измерений.

* * * Длина шкалы - это длина линии, проходящей через центры всех коротких отметок шкалы средства измерений и ограниченной начальной и конечной отметками. Она выражается в единицах длины, независимо от единиц, указанных на шкале.

Тема 2: Описательная статистика.

Типовые задания

Примеры интервальных оценок

Пример 1. Доверительное оценивание по вариационному ряду.

Пусть задана выборка $X^n=(x_1,\cdots,x_n)$некоторойслучайной величины x.Построим вариационный ряд выборки $x^{(1)}<\cdots<x^{(n)}$:

Очевидно, что вероятность попасть в любой из $(n+1)$- го интервалов значений случайной величины X одинакова и равна $\frac{1}{n+1}$. Тогда вероятность того, что случайная величина X приняла значение из интервала $(x^{(k)},x^{(l)})$, где$l>k$будет равна:

$P_{X^n,x}\left\{x\in(x^{(k)},x^{(l)})\right\}=\frac{l-k}{n+1}$.

Вопрос: чему должен быть равен размер выборки n чтобы вероятность попасть в интервал $(\min_i(x_i),\max_i(x_i))$составила 95%.

Подставляя значение для доверительной вероятности в формулу выше, получим:

$0.95=P_{X^n,x}\left\{x\in(x^{(1)},x^{(n)})\right\}=\frac{n-1}{n+1}$,

откуда $n=39$.

Таким образом, при достаточном для заданной доверительной вероятности числе измерений случайной величины Xпо набору ее порядковых статистик может быть оценен диапазон принимаемых ею значений.

Пример 2. Доверительный интервал для медианы.

Пусть задана выборка $X^n=(x_1,\cdots,x_n)$некоторойслучайной величины X

При $n>50$доверительный интервал для медианы $\tilde{x}$определяетсяпорядковыми статистиками

$x_k\leq\tilde{x}\leq x_{n-k+1}$,

где

$k=\frac{1}{2}(n-1.64\sqrt{n}-1)$при $\alpha=0.1$;

$k=\frac{1}{2}(n-1.96\sqrt{n}-1)$при $\alpha=0.05$;

$k=\frac{1}{2}(n-2.58\sqrt{n}-1)$при $\alpha=0.01$.

Для значений $n\leq 50$номера порядковых статистик, заключающих в себе медиану, при$\alpha=0.05$и$\alpha=0.01$приведены в таблице 1, взятой из [3].

Пример 3. Доверительный интервал для математического ожидания.

Пусть задана выборка $X^n=(x_1,\cdots,x_n)$некоторойслучайной величины X, арактеристики которой (дисперсия D и математическое ожидание M) неизвестны. Эти параметры оценим так:

$$M^*=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

$$D^*=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-M^*)^2}{n-1}$$- несмещенная оценка дисперсии.

Величину $\sqrt{D^*}$называют оценкой среднего квадратического отклонения. Воспользуемся тем, что величинаM^*представляет собой сумму n независимых случайных величин, и, согласно центральной предельной теореме, при достаточно большом n ее закон близок к нормальному. Поэтому будем считать, что величинаM^*распределена по нормальному закону. Характеристики этого закона - математическое ожидание и дисперсия - равны соответственно M (настоящее МО случайной величиныX) и$\frac{D}{n}$.

Найдем такую величину δ, для которой$P(|M^*-M|<\delta)=\alpha$. Перепишем это в эквивалентном виде$P(\frac{|M^*-M|}{\sqrt{D/n}}<\frac{\delta}{\sqrt{D/n}})=\alpha$ и скажем, что случайная величина перед знаком неравенства есть модуль от стандартной нормальной. Получаем, что $2\Phi(\frac{\delta}{\sqrt{D/n}})-1=\alpha$, и $\delta=\sqrt{\frac{D}{n}}*\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$. В случае неизвестной дисперсии ее можно заменить на оценку D^*.

Например, выбирая $\alpha=0.05$, получаем коэффициент $\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=1.96$

Окончательно: с вероятностью α можно сказать, что $M\in\left(M^*-\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\frac{D^*}{\sqrt{n}},M^*+\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\frac{D^*}{\sqrt{n}}\right)$.

Тема 3: Параметрические критерии

Типовые задания

Построить частотное распределение, подсчитать стандартное отклонение для следующих рядов значений: (результаты тестирования интеллекта по тесту Векслера 2-х групп испытуемых, численностью 50 человек) :

Результаты тестирования 1-ой группы испытуемых:

85,93,93,99,101,105,109,110,111,115,115,116,116,117,117,117,118,119,121,121,122,124,124,124,124,125,125,125,127,127,127,127,127,128,130,131,132,132,133,134,134,135,138,138,140,143,144,146,150,158.

Результаты тестирования 2-й выборки:

70,75,76,78,78,81,82,82,83,84,84,84,85,86,86,86,89,89,90,91,91,91,91,92,92,93,93,95,95,95,96,96,98,98,100,101,103,103,103,105,108,110, 115,118,119,123,124,125,127,129.

Подсчитать t- критерий Стьюдента для двух выборок.

Проверить результаты на статистическую значимость.

Подсчитайте критерий Фишера для следующих результатов измерения тревожности 2-х различных групп

х	У
90	41
29	49
39	56
79	64
88	72
88	58
72	59
76	62
91	68
78	48

Тема 4: Непараметрические критерии различий.

Типовые задания.

1. Подсчитайте критерий Крускала-Уоллиса для следующих данных

23	45	34	21
20	12	24	22
34	34	25	26
35	11	40	27

2. Подсчитайте критерий Манна-Уитни для следующих данных:

х	у
6	
	8
25	

25	
30	
	31
	32
38	
39	
	41
	41
43	
44	
	45
	46
	50
	55

3.Две группы испытуемых решали техническую задачу. Показателем успешности было время решения задачи. Испытуемые 1 группы получали за выполнение денежное вознаграждение, испытуемые 2 группы – нет. Психолога интересует вопрос: влияет ли денежное вознаграждение на успешность решения задачи?
Результаты получены следующие (в секундах) :
1 группа: 39. 38..44. 6. 25.25.30.43.
2 группа: 46.8.50.45.32.41.41.31.55.
Подсчитайте критерий Манна – Уитни.

Тема 5: Основы корреляционного анализа

Типовые задания.

1. Был проведен опрос о количестве времени (в часах), которое тратит каждый студент на изучение учебной литературы и на просмотр художественных фильмов. Можно ли сделать вывод о существовании связи между 2-мя этими переменными?

№	Время на изучение учебной литературы	Время на просмотр фильмов
1	7	0
2	8	4
3	5	10
4	1	7
5	15	0
6	5	1
7	2	10
8	4	6
9	1	9
10	1	8

2. Зависимость между величинами выражается в виде экспериментально полученной таблицы. Определить коэффициент корреляции Пирсона. Сделать выводы.

Х	0,5	1	1,5	2	2,5	3
У	0,01	0,11	0,35	0,6	1,58	2,31

3. Подсчитайте корреляцию между физической привлекательностью студенток и их академическими достижениями.

№	Ранг по красоте	Ранг по академическим достижениям
1	3	7.5
2	2	2

3	6	9
4	8	4
5	4	4
6	10	10
7	7	6
8	1	1
9	9	7.5
10	5	4

4. Существует ли связь между лидерством и дружелюбностью? Исследователи отмечали наличие или отсутствие у человека лидерской позиции в группе, одновременно относя его либо к дружелюбным, либо к недружелюбным людям. Результаты показаны в таблице

Лидерская позиция	Дружелюбные	Недружелюбные	Всего
Лидер	2	4	6
Не явл. лидером	10	4	14
Всего	12	8	20

Что можно сказать о связи между этими переменными? Рассчитайте коэффициент ассоциации.

Тема 6: Регрессионный анализ

Типовые задания.

1. По заданной выборке найти линейную функцию методом наименьших квадратов. Построить чертеж. Обосновать правильность выбора степени многочлена, если относительная погрешность данных равна одному проценту среднего значения зависимой переменной.

x_i	68	62	65	70	63	63	67	68	55	66	58
y_i	-264	-240	-253	-275	-248	-243	-264	-267	-213	-218	-223

2. Врач исследователь выясняет зависимость площади пораженной части легкого у людей, заболевших эмфиземой легких, от числа лет курения. Статистические данные, собранные им в некоторой области, имеют следующий вид:

Число лет курения	25	36	22	15	48	39	42	31	28	33
Площадь пораженной части легкого, %	55	60	50	30	75	70	70	55	30	35

Постройте график исходных данных и определите по нему характер зависимости. Постройте уравнение регрессии и дайте интерпретацию полученных результатов. Если человек курил 30 лет, то сделайте прогноз о степени поражения лёгких у случайно выбранного пациента.

3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ ЗАНЯТИЯМ

Важной составной частью учебного процесса в университете являются лабораторные занятия.

Задачей преподавателя при проведении лабораторных работ является грамотное и доступное разъяснение принципов и правил проведения работ, побуждение обучающихся к самостоятельной работе, определения места изучаемой дисциплины в дальнейшей профессиональной работе будущего выпускника.

Основная цель лабораторных занятий заключается в организации студентов на осмысление, углубление и закрепление теоретических знаний, полученных на лекциях и при самостоятельной подготовке, в приобретении опыта и необходимых навыков анализа случайных событий и явлений, их моделирования на ЭВМ, в решении конкретных статистических задач.

Прежде чем приступить к выполнению лабораторной работы, обучающемуся необходимо ознакомиться с теоретическим материалом, соответствующим данной теме.

Выполнение лабораторной работы целесообразно разделить на несколько этапов:
формулировка и обоснование цели работы;
определение теоретического аппарата, применительно к данной теме;
выполнение заданий;
анализ результата;
выводы.

Индивидуальные задания для лабораторных работ представлены конкретно-практическими и творческими задачами.

На первой ступени изучения темы выполняются конкретно-практические задачи, при решении которых формируется минимальный набор умений. Преподаватель опосредованно руководит познавательной деятельностью обучающихся, консультирует и подробно разбирает со обучающимися возникшие затруднения в ходе решения задачи, обращает внимание группы на возможные ошибки.

Вторая ступень изучения темы дифференцируется в зависимости от степени усвоения его обязательного уровня. Обучающиеся, усвоив содержание типовых методов и приемов решения задач, приступают к решению творческих задач. Если уровень знаний и умений, демонстрируемых обучающимся при контрольном обследовании, не соответствует установленным требованиям, обучающийся вновь возвращается к стандартным упражнениям, но под более пристальным наблюдением преподавателя.

Выполнение лабораторных работ актуально и значимо для текущей и промежуточной аттестации.

Тема 1: Описательная статистика

Типовые задания.

Лабораторная работа №1.1.

Задание. Даны наблюдавшиеся значения некоторой случайной величины:

185	151	187	211	155	208	178	193	149	175	193	169
163	166	131	200	173	145	166	216	216	156	174	219
174	161	225	178	188	157	177	183	206	187	209	189
157	180	163	189	196	204	199	242	192	160	123	134
181	172	183	120	164	197	134	204	148	157	133	157

Требуется:
построить сгруппированный статистический ряд;
построить гистограмму и полигон относительных частот;
Найти выборочные точечные характеристики: среднюю, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

Лабораторная работа №1.2.

Задание. Даны наблюдаемые значения некоторой случайной величины. Требуется:
Найти выборочные точечные характеристики: асимметрию, эксцесс, моду, коэффициент вариации;
Проверить гипотезу относительно близости распределения к нормальному.

Тема 2: Параметрические критерии.

Типовые задания.

Лабораторная работа №2.

Задание. Приводятся результаты измерения некоторой величины, которую будем рассматривать как *n* реализаций случайной величины *X*. В предположении, что *X* имеет нормальное распределение, требуется:

1) найти точечные несмещенные оценки математического ожидания *a* и среднего квадратического отклонения σ;

2) найти доверительный интервал, покрывающий математическое ожидание с заданной доверительной вероятностью γ=0,95;

3) найти погрешность, с которой среднее арифметическое оценивает математическое ожидание*a* случайной величины *X*, если доверительная вероятность γ=0,99; γ=0,999;

4) найти минимальный объем выборки, чтобы с доверительной вероятностью γ=0,95 можно было утверждать, что, принимая среднее арифметическое за математическое ожидание случайной величины *X*, допускаем погрешность $\varepsilon = \frac{1}{3}\sigma$.

Тема 3: Непараметрические критерии.

Типовые задания.

Лабораторная работа №3.

Задание. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости α=0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности с эмпирическим распределением выборки.

Дана выборка объема*n*=60:

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9
n_i	4	6	7	8	10	9	7	5	4

Тема 4: Основы корреляционного анализа.

Типовые задания.

Лабораторная работа №4.

Задание. По корреляционной таблице 1

1) в прямоугольной системе координат построить эмпирическую линию регрессии*У*на *X*;

2) оценить тесноту линейной связи;

3) провести гипотезу о значимости коэффициента корреляции при уровне значимости 0,05;

4) составить линейное уравнение регрессии*У*на *X* и построить линию регрессии в той же системе координат, где построена эмпирическая линия регрессии;

5) используя полученное уравнение регрессии, оценить ожидаемое среднее значение признака*У* при $x = x_0 = 45$.

Таблица 1 – Корреляционная таблица

У \ *X*	20	30	40	50	60	n_y
1	8	2				10
3	12	20	8			40
5			10	1		11
7			9	6	2	17
9			10	4	8	22
n_x	20	22	37	11	10	100

Тема 5: Регрессионный анализ

Типовые задания.

Лабораторная работа №5.

Задание. Даны результаты эксперимента

x_i	10	12	13	14	15	16	18	19	20	21
y_i	32	34	35	36	36	37	38	40	39	40

Требуется:
1) в предположении, что между x и y существует линейная зависимость, определить ее эмпирическое уравнение;
2) в предположении, что между x и y существует квадратичная зависимость, определить ее эмпирическое уравнение;
3) найти сумму квадратов отклонений для найденных зависимостей сравнить качество приближений.

4 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа студентов предназначена для углубления сформированных знаний, умений, навыков. Самостоятельная работа развивает мышление, позволяет выявить причинно-следственные связи в изученном материале, решить теоретические и практические задачи. Самостоятельная работа студентов проводится с целью: систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов; углубления и расширения теоретических знаний; формирования умений использовать справочную документацию и специальную литературу; развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;- формированию самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;- развития исследовательских умений. Роль самостоятельной работы возрастает, т.к. перед учебным заведением стоит задача в т. ч. и по формированию у студента потребности к самообразованию и самостоятельной познавательной деятельности

Студентами практикуется два вида самостоятельной работы:
- аудиторная;
- внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию. В этом случае студенты обеспечиваются преподавателем необходимой учебной литературой, дидактическим материалом, в т. ч. методическими пособиями и методическими разработками.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия. Видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы могут быть:
- для овладения знаниями: чтение текста (учебника, методической литературы); составления плана текста; графическое изображение структуры текста, графическое изображение последовательности выполнения графической работы, выполнение графических работ; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочниками; ознакомление с нормативными документами; учебно-исследовательская работа; использование компьютерной техники, интернета и др.;
- для закрепления систематизации знаний: работа с конспектом лекции (обработки текста); повторная работа над учебным материалом (учебника, первоисточника, дополнительной литературы); составление плана выполнения работы в соответствие с планом, предложенным преподавателем; изучение ГОСТов; ответы на контрольные вопросы; тестирование, выполнение упражнений и графических работ;
- для формирования умений: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; выполнение чертежей, схем.

Основное содержание самостоятельной работы составляет выполнение индивидуальных заданий, подготовка к тестированию и зачету.

Прежде чем приступать к выполнению индивидуального задания, необходимо ознакомиться с содержанием теоретических вопросов по представленному списку литературы и по лекциям.

Работа пишется на стандартных листах писчей бумаги. Все листы заполняются только с одной стороны. Оформление индивидуального задания осуществляется в соответствии со стандартом. Каждая работа начинается с титульного листа, который служит обложкой работы. Сверху на нем указывается принадлежность студента к учебному заведению, факультету, специализации или кафедре. В середине листа указывается название изучаемой темы или раздела и название учебного задания, номер варианта. Ниже и справа указывается фамилия и инициалы студента, номер академической группы, фамилия и инициалы преподавателя. Внизу титульного листа отмечают год выполнения работы.

Эта страница служит также для отметок преподавателя о выполнении учебного задания и замечаний по поводу подготовленного студентом отчета.

При оформлении работы необходимо соблюдать нумерацию заданий. Задание переписывается полностью и ниже оформляется решение. Работа должна быть сдана на кафедру к назначенному преподавателем сроку.

Каждый учебный семестр заканчивается аттестационными испытаниями: зачетно - экзаменационной сессией.

Подготовка к экзаменационной сессии и сдача зачетов и экзаменов является ответственейшим периодом в работе студента. Серьезно подготовиться к сессии и успешно сдать все экзамены - долг каждого студента. Рекомендуется так организовать свою учебу, чтобы перед первым днем начала сессии были сданы и защищены все лабораторные работы, сданы все зачеты, выполнены другие работы, предусмотренные графиком учебного процесса.

Основное в подготовке к сессии - это повторение всего материала, курса или предмета, по которому необходимо сдавать зачет или экзамен. Только тот успевает, кто хорошо усвоил учебный материал.

Если студент плохо работал в семестре, пропускал лекции, слушал их невнимательно, не конспектировал, не изучал рекомендованную литературу, то в процессе подготовки к сессии ему придется не повторять уже знакомое, а заново в короткий срок изучать весь материал. А это зачастую, оказывается, невозможно сделать из-за нехватки времени. Для такого студента подготовка к экзаменам будет трудным, а иногда и непосильным делом, а финиш - отчисление из учебного заведения.

Оглавление

Ангелина Михайловна Попова,
Старший преподаватель каф. общей математики и информатики АмГУ,
Ольга Анатольевна Лебедь,
Старший преподаватель каф. общей математики и информатики АмГУ