Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

ОБЩИЙ КУРС МАТЕМАТИКИ

сборник учебно-методических материалов

для направлений подготовки:

13.03.01 – Теплоэнергетика и теплотехника
13.03.02 – Электроэнергетика и электротехника
15.03.04 – Автоматизация технологических процессов и производств

2017 г.

Печатается по решению

редакционно-издательского совета

факультета математики и информатики

Амурского государственного

Университета

Составители: Юрьева Т.А.

Высшая математика: сборник учебно-методических материалов для направлений подготовки: 13.03.01 – Теплоэнергетика и теплотехника, 15.03.04 – Автоматизация технологических процессов и производств

и специальностей. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2017.

Рассмотрен на заседании кафедры общей математики и информатики 03.11.2017, протокол № 3.

ВВЕДЕНИЕ

Целью дисциплины «Общий курс математики» является развитие логического и алгоритмического мышления студентов, способностей, необходимых для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений, при поиске решений практических задач, обучение студентов математическим методам принятия решения, необходимым при решении задач оптимизации, возникающих во всех областях человеческой деятельности; формирование компетенций, соответствующих ОП.

Задачи дисциплины:

– раскрыть роль и значение математических методов исследования при решении профессиональных задач;

– ознакомить с основными понятиями и методами классической и современной математики;

– научить студентов применять методы математического анализа для построения математических моделей реальных процессов и явлений.

В результате освоения обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

Знать: основы дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких переменных, основные понятия и методы аналитической геометрии, линейной алгебры, векторного анализа, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, элементы теории функций комплексного переменного.

Уметь: использовать математический аппарат при изучении естественнонаучных дисциплин.

3) Владеть: методами дифференцирования, интегрирования функций, основными аналитическими и численными методами решения алгебраических и дифференциальных уравнений и систем.

1 **КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ЛЕКЦИОННОГО МАТЕРИАЛА**

Тема 1 Линейная алгебра

Ключевые вопросы

Матрицы, действия с ними.

Определители, их свойства. Алгебраические дополнения и миноры. Определители n-го порядка. Правило Крамера.

Понятие обратной матрицы. Матричный способ решения систем линейных уравнений.

Ранг матрицы. Метод Гаусса.

Исследование систем линейных уравнений на совместность.

Основные определения и методы

Прямоугольная таблица чисел расположенных в m строк и n столбцов, называется матрицей размера m×n. Матрицы A= (a_{ij}) и B= (b_{ij}) одного размера называются равными, если все их соответствующие элементы равны, т.е. A=B, если $a_{ij} = b_{ij}$ для всех i и j.

Суммой двух матриц A и B одного размера m×n называется матрица C= A+B, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для i= 1,2,…,m; j=1,2,…,n. Произведением матрицы A на число α называется матрица, элементы которой получены умножением всех элементов матрицы A на число α, т. е. $\alpha A = A\alpha = (\alpha a_{ij})$.

Произведением матриц $\underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B}$ называется такая матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B: $c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{ik}\, b_{kj}$.

Определитель порядка n: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_j (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$, суммирование ведется по всем перестановкам $j=(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ из чисел 1, 2, …, n; t – число инверсий в перестановке вторых индексов произведения $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$.

К свойствам определителя относятся следующие: величина определителя не меняется при транспонировании; определитель меняет знак, если поменять местами две строки (два столбца); определитель, у которого две строки (два столбца) одинаковы, равен 0; общий множитель элементов какой-нибудь строки (столбца) можно выносить за знак определителя; определитель равен произведению элементов главной диагонали, если все элементы определителя, находящиеся ниже (выше) главной диагонали, равны 0; определитель не изменится, если элементам какой-нибудь строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же произвольное число, не равное нулю; определитель равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на их алгебраические дополнения: $\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$ $(i = \overline{1,n})$, $\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$ $(j = \overline{1,n})$.

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение; и несовместной, если система не имеет решений. Совместная система уравнений имеет либо одно решение - и, в таком случае, называется определенной, либо больше одного решения, и тогда она называется неопределенной.

Системы уравнений называются эквивалентными, если имеют одно и то же множество решений. Элементарные преобразования системы на практике заменяют соответствующими преобразованиями расширенной матрицы системы, содержащей коэффициенты при неизвестных и свободные члены.

Рангом матрицы А называется наивысший порядок минора матрицы А, отличного от нуля. Обозначается ранг матрицы А символами: $rangA$ или $r(A)$. Из определения следует, что если $r(A)=k$, то существует минор порядка k матрицы А, отличный от нуля, а все миноры порядка (k+1) равны нулю или не существуют.

Чтобы система была совместной, необходимо и достаточно, чтобы $r(A)=r(B)$, при этом: а) если $r(A)=r(B)$=n − система имеет единственное решение, б) если $r(A)=r(B)$<n система имеет множество решений, в которой r независимых уравнений, r базисных переменных и n-r свободных переменных.

Метод Гаусса − метод последовательного исключения переменных −заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к эквивалентной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Элементарными преобразованиями системы являются: умножение уравнения на число отличное от нуля; сложение уравнения умноженного на любое число, с другим уравнением; перестановка уравнений; отбрасывание уравнений вида 0 = 0. Элементарные преобразования системы на практике заменяют соответствующими преобразованиями расширенной матрицы системы, содержащей коэффициенты при неизвестных и свободные члены.

Матрица A^{-1} называется обратной квадратной матрице A, если $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$, где E - единичная матрица.

Обратная матрица $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\widetilde{A}^T=\dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, где – $\widetilde{A}^T$ присоединенная транспонированная матрица, элементы которой являются алгебраическими дополнениями элементов матрицы A.

Система уравнений в матричной форме примет вид AX = B. Пусть матрица системы А является невырожденной, т.е. существует обратная матрица A^{-1}. Умножив обе части этого уравнения слева на A^{-1}, получаем решение системы уравнений. $X = A^{-1}B$, где A^{-1} обратная матрица.

Тема 2 Аналитическая геометрия

Ключевые вопросы

Векторы. Линейные операции над векторами. Базис. Координаты вектора в данном базисе.

Скалярное произведение векторов и его свойства. Длина вектора и угол между векторами в координатной форме. Условие ортогональности двух векторов. Проекция вектора на ось.

Векторное произведение векторов, его свойства и применение. Смешанное произведение векторов, его применение.

Уравнения линий на плоскости. Различные формы уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой

Кривые 2-го порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола, их геометрические свойства и уравнения.

Полярные координаты на плоскости.

Уравнения прямой и плоскости в пространстве. Угол между плоскостями. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью

Уравнение поверхности в пространстве. Сфера. Эллипсоид. Гиперболоиды. Параболоиды. Конусы. Цилиндрические поверхности. Геометрические свойства этих поверхностей, исследование методом сечений.

Основные определения и методы

Вектором называется направленный отрезок, то есть отрезок, для которого указано, какая из его концевых точек считается первой, а какая – второй. Обозначаются векторы символами $\vec{a}$, $\vec{b}$,…, или $\vec{AB}$, $\vec{CD}$,… Длиной (модулем) вектора $\vec{AB}$ называется длина отрезка *AB*.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются коллинеарными, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются равными, если они сонаправленные и модули (длины) их равны: $\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, \\ \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|. \end{cases}$

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называются компланарными, если существует плоскость, которой они параллельны.

Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, начало которого находится в начале вектора $\vec{a}$, а конец – в конце вектора $\vec{b}$, при условии, что вектор $\vec{b}$ отложен от конца вектора $\vec{a}$.

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на действительное число $\alpha \in R$ (α≠0) называется вектор $\alpha\vec{a}$, удовлетворяющий следующим условиям: 1) $\left|\alpha\vec{a}\right| = |\alpha|\cdot\left|\vec{a}\right|$; 2) $\alpha\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если α>0, $\alpha\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если α<0.

Координатами вектора в данном базисе называются коэффициенты его разложения по векторам базиса: $\vec{a}$=(a_1, a_2) ($\vec{a}$=(a_1, a_2, a_3)).

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов и косинуса угла между ними. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то скалярное произведение этих векторов по определению равно нулю. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\vec{a}^{\,2} = \left|\vec{a}\right|^2$. В самом деле, $\vec{a}^{\,2} = (\vec{a},\vec{a}) = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\cos 0 = \left|\vec{a}\right|^2$. Два ненулевых вектора ортогональны (взаимно перпендикулярны) тогда и только тогда, когда их скалярное произведение рано нулю.

Векторным произведением двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый [$\vec{a}$, $\vec{b}$] (или $\vec{a}\times\vec{b}$), удовлетворяющий следующим условиям: $\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ (0<$\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$<π); [$\vec{a}$, $\vec{b}$]$\perp\vec{a}$, [$\vec{a}$, $\vec{b}$]$\perp\vec{b}$; $\vec{a}$, $\vec{b}$, [$\vec{a}$, $\vec{b}$] – правая тройка векторов.

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, взятых в указанном порядке, называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор векторного произведения векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Обозначение ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) – смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

Ax + By + C = 0, причем постоянные А, В не равны нулю одновременно, т.е. A2 + B2 ≠ 0. Это уравнение первого порядка называют общим уравнением прямой.

Если общее уравнение прямой Ax + By + C = 0 привести к виду:

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ и обозначить $-\frac{A}{B} = k;\quad -\frac{C}{B} = b;\quad т.е.\quad y = kx + b$, то полученное уравнение называется уравнением прямой с угловым коэффициентом k.

Пусть на плоскости заданы две точки M1(x1, y1) и M2(x2, y2), тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Выше записанное уравнение прямой можно упростить: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ если x1 ≠ x2 и x = x1, если x1 = x2. Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ = k называется угловым коэффициентом прямой. $y - y_1 = \kappa(x - x_1)$-уравнение прямой проходящей через данную точку в данном направлении.

Если в общем уравнении прямой Ах + Ву + С = 0 С ≠ 0, то, разделив на –С, получим: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ или $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $a = -\frac{C}{A};\quad b = -\frac{C}{B}$.

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент а является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а b – координатой точки пересечения прямой с осью Оу.

Если заданы две прямые y = k1x + b1, y = k2x + b2, то острый угол между этими прямыми будет определяться как $tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$.

Две прямые параллельны, если k1 = k2.

Две прямые перпендикулярны, если k1 = -1/k2.

Кривая второго порядка может быть задана уравнением $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

Существует система координат (не обязательно декартова прямоугольная), в которой данное уравнение может быть представлено в одном из видов, приведенных ниже.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение эллипса.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение гиперболы.

$y^2 = 2px$ – уравнение параболы.

$(x - a)^2 + (y - b)^2$ = R2 – уравнение окружности.

Окружностью радиуса R с центром в точке M_0 называется множество всех точек M плоскости удовлетворяющих условию $M_0M=R$.

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами есть величина постоянная, большая чем расстояние между фокусами.

Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.

Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

Уравнением данной поверхности в прямоугольной системе координат $OXYZ$ называется такое уравнение $F(x, y, z) = 0$ с тремя переменными x, y, z, которому удовлетворяет координаты каждой точки лежащей на поверхности и не удовлетворяют координаты точки не лежащие на этой поверхности.

Простейшей поверхностью является плоскость.

Общее уравнение плоскости имеет вид: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Угол между плоскостями находится по формуле:

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Выбор знака косинуса зависит от того, какой угол между плоскостями следует найти – острый, или смежный с ним тупой.

Возьмем произвольную прямую и вектор $\vec{S}$(m, n, p), параллельный данной прямой. Вектор $\vec{S}$ называется направляющим вектором прямой. На прямой возьмем две произвольные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и M(x, y, z). Обозначим радиус- векторы этих точек как $\overrightarrow{r_0}$ и $\vec{r}$, очевидно, что $\vec{r}$ - $\overrightarrow{r_0}$ = $\overrightarrow{M_0M}$. Т.к. векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{S}$ коллинеарны, то верно соотношение $\overrightarrow{M_0M}$ = $\vec{S}$t, где t – некоторый параметр.

Итого, можно записать: $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{S}t$.

Т.к. этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки прямой, то полученное уравнение – параметрическое уравнение прямой.

Это векторное уравнение может быть представлено в координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

Преобразовав эту систему и приравняв значения параметра t, получаем канонические уравнения прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Угол между двумя прямыми в пространстве вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi = \pm\frac{\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}}{\left|\overrightarrow{S_1}\right|\left|\overrightarrow{S_2}\right|} = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Угол между прямой и плоскостью в пространстве вычисляется по формуле:

$$\sin\varphi = \pm\frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Поверхность, описываемая некоторой линией, вращающейся вокруг неподвижной прямой d, называется поверхностью вращения с осью вращения d.

Если уравнение поверхности в прямоугольной системе координат имеет вид: $F(x^2 + y^2, z) = 0$, то эта поверхность – поверхность вращения с осью вращения Oz.

Аналогично: $F(x^2 + z^2, y) = 0$ – поверхность вращения с осью вращения Oy, $F(z^2 + y^2, x) = 0$ – поверхность вращения с осью вращения Ox.

Запишем уравнения поверхностей вращения для некоторых частных случаев:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ - эллипсоид вращения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ - однополостный гиперболоид вращения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$ - двуполостный гиперболоид вращения

$$\frac{x^2+y^2}{p}=2z$$ - параболоид вращения

Аналогично могут быть записаны уравнения для рассмотренных выше поверхностей вращения, если осью вращения являются оси Ox или Oy.

Однако, перечисленные выше поверхности являются всего лишь частными случаями поверхностей второго порядка общего вида, некоторые типы которых рассмотрены ниже:

Сфера: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$.

Трехосный эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

В сечении эллипсоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получаются эллипсы с различными осями.

Однополостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Двуполостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

Эллиптический параболоид: $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \quad где\ p>0, q>0$.

Гиперболический параболоид: $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$.

Конус второго порядка: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

Тема 3 Введение в математический анализ

Ключевые вопросы

Вычисление пределов последовательностей.

Функция. Свойства функций.

Предел функции. Бесконечно малые функции, их свойства. Сравнение бесконечно малых.

Непрерывность функции. Классификация точек разрыва. Асимптоты графика функций

Основные определения и методы

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана последовательность: $x_1, x_2, \ldots, x_n = \{x_n\}$. Общий элемент последовательности является функцией от n: $x_n = f(n)$.

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного ε>0 существует такой номер N, что для всех n > N выполняется условие: $|a - x_n| < \varepsilon.$ Это записывается: $\lim x_n = a$.

Определение предела последовательности геометрически можно сформулировать так: число a предел последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε-окрестности точки a найдётся натуральное число N, такое что все значения $\{x_n\}$ для которых n > N попадут в ε-окрестности точки a.

Число A называется пределом функции f(x) при x→a, если для любого ε>0 существует такое число Δ>0, что для всех x таких, что $0 < |x - a| < \Delta$ верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Если f(x) → A1 при x → a только при x < a, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A_1$ - называется пределом функции f(x) в точке x = a слева, а если f(x) → A2 при x → a только при x > a, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A_2$ называется пределом функции f(x) в точке x = a справа.

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при x→a.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Теорема 5. Если f(x)>0 вблизи точки x = a и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то A>0.

Теорема 6. Если g(x) ≤ f(x) ≤ u(x) вблизи точки x = a и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$, то и $\lim\limits_{x\to a} = A$.

Функция называется бесконечно большой при x→a, где a – число или одна из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, где A – одна из величин ∞, +∞ или -∞.

Функция f(x) называется бесконечно малой при x→a, где a может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Свойства бесконечно малых функций:

1. Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при x→a тоже бесконечно малая функция при x→a.

2. Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при x→a тоже бесконечно малая функция при x→a.

3. Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки x = a является бесконечно малой функцией при x→a.

4. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю, есть величина бесконечно малая.

Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=0$, то функция α называется бесконечно малой более высокого порядка, чем функция β.

Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=A, \quad A\neq 0, \quad A=const$, то α и β называются бесконечно малыми одного порядка.

Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=1$, то функции α и β называются эквивалентными бесконечно малыми. Записывают α ~ β.

Функция f(x), определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется непрерывной в точке x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.

Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что g(x) не равна нулю в точке x_0.

Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:

Если u = f(x), v = g(x) – непрерывные функции в точке x = x_0, то функция v = g(f(x)) – тоже непрерывная функция в этой точке.

Точка x_0 называется точкой разрыва функции f(x), если f(x) не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

Точка x_0 называется точкой разрыва 1- го рода, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)\neq \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке x = x_0, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Точка x_0 называется точкой разрыва 2 – го рода, если в этой точке функция f(x) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

Тема 4 Производная и ее приложения

Ключевые вопросы

Производная функции, ее физический и геометрический смысл. Правила нахождения производной и дифференциала.

Производная сложной и обратной функции. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Производные и дифференциалы высших порядков

Применение производной и дифференциала. Правило Лопиталя

Точки экстремума функции. Условия монотонности функции. Исследование выпуклости функции. Точки перегиба Общая схема исследования функции и построения ее графика

Основные определения и методы

Производной функции f(x) в точке x = x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Уравнение касательной к кривой: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

Уравнение нормали к кривой: $y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

Обозначим f(x) = u, g(x) = v- функции, дифференцируемые в точке x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Пусть $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $t_0 \le t \le T$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$- производная функции, заданной параметрически.

Пусть функция f(x)- дифференцируема на некотором интервале.

Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

Если найти производную функции f′(x), получим вторую производную функции f(x). $y'' = f''(x) = \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$ т.е. $y'' = (y')'$ или $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n $\dfrac{d^n y}{dx^n} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$.

Дифференциалом функции f(x) в точке x называется главня линейная часть приращения функции. Обозначается dy или df(x).

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или $dy = f'(x)dx$. Можно также записать: $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Если u = f(x) и v = g(x)- функции, дифференцируемые в точке x, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

$d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$;

$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$;

$d(Cu) = Cdu$;

$d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

Формула, для вычисления приближенных значений функции:

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

Теорема Роля. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], дифференцируема на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны f(a) = f(b), то на интервале (a, b) существует точка ε, a < ε < b, в которой производная функция f(x) равная нулю, $f'(\varepsilon) = 0$.

Теорема Лагранжа. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b), то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка ε a < ε < b, такая, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\varepsilon)$.

Теорема Коши. Если функции f(x) и g(x) непрерывны на отрезке [a, b] и дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b), то существует по крайней мере одна точка ε, a < ε < b, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.$$

Теорема (правило Лопиталя). Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы в вблизи точки a, непрерывны в точке a, g′(x) отлична от нуля вблизи a и f(a) = g(a) = 0, то предел отношения функций при $x \to a$ равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на промежутке (a, b), причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке [a, b].

Если $f'(x)<0$ в промежутке (a, b), то f(x) убывает на отрезке [a, b].

Функция f(x) имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Функция f(x) имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Кривая обращена выпуклостью вверх на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется выпуклой, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется вогнутой.

Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется точкой перегиба.

План нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

1) Найти критические точки функции.
2) Найти значения функции в критических точках.
3) Найти значения функции на концах отрезка.
4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

1) Область существования функции.

Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.

2) Точки разрыва. (Если они имеются).
3) Интервалы возрастания и убывания.
4) Точки максимума и минимума.
5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.
6) Области выпуклости и вогнутости.
7) Точки перегиба. (Если они имеются).
8) Асимптоты. (Если они имеются).
9) Построение графика.

Тема 5 Функции нескольких переменных

Ключевые вопросы

Функции нескольких переменных. Область определения. Предел. Непрерывность. Частные производные. Полный дифференциал. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала

Частные производные и полные дифференциалы высших порядков. Неявные функции, дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Производная по направлению и градиент.

Экстремумы функций нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значения функций в замкнутой области. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Примеры применений при поиске оптимальных решений

Основные определения и методы

Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому - либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z, то переменная z называется функцией двух переменных z = f(x, y).

Областью определения функции z называется совокупность пар (x, y), при которых функция z существует.

Число А называется пределом функции f(x, y) при стремлении точки M(x, y) к точке M0(x0, y0), если для каждого числа ε > 0 найдется такое число r >0, что для любой точки M(x, y), для которых верно условие: $MM_0 < r$,также верно и условие $|f(x,y)-A|<\varepsilon$. Записывают: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$.

Пусть в некоторой области задана функция z = f(x, y). Возьмем произвольную точку М(х, у) и зададим приращение Δх к переменной х. Тогда величина Δxz = f(x + Δx, y) – f(x, y) называется частным приращением функции по х. Можно записать $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется частной производной функции z = f(x, y) по х. Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$; $f'_x(x,y)$.

Полным дифференциалом функции z = f(x, y) называется главная линейная относительно Δх и Δу приращения функции Δz в точке (х, у) $dz=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$.

Если функция f(x, y) определена в некоторой области D, то ее частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ тоже будут определены в той же области или ее части. Будем называть эти производные частными производными первого порядка. Производные этих функций будут частными производными второго порядка.

Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство $f(x_0,y_0)>f(x,y)(f(x_0,y_0)<f(x,y))$,то точка M_0 называется точкой максимума (минимума).

Условный экстремум находится, когда переменные x и y, входящие в функцию u = f(x, y), не являются независимыми, т.е. существует некоторое соотношение φ(x, y) = 0, которое называется уравнением связи

Тема 6 Интегральное исчисление

Ключевые вопросы

Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов. Непосредственное интегрирование

Методы интегрирования подстановкой, по частям, простейших дробей

Методы интегрирования дробно-рациональных, иррациональных, тригонометрических функций

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл, его свойства. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов

Несобственные интегралы, их основные свойства

Основные определения и методы

Функция *F(x)* называется первообразной для функции *f(x)* на некотором промежутке *X*, если для всех значений *x* из этого промежутка выполняется равенство $F'(x)$ = *f(x)* или $dF(x)=f(x)dx$.

Если функция *F(x)* – первообразная для функции *f(x)* на промежутке *X*, то множество функций *F(x)* + *C,* где *C* – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции *f(x)* на этом промежутке и обозначается символом $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Неопределенный интеграл обладает следующими его свойствами: $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$; $d\int f(x)dx=f(x)dx$; $\int dF(x)=F(x)+C$;

$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)\,dx,$ $\quad \kappa = const \neq 0$; $\quad$ 5) $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$;

$\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a} F(ax+b) + C$; $\int f(u)du = F(u) + C$.

Таблица неопределенных интегралов, где $u = \varphi(x)$

1. $\int du = u + C.$ $\qquad$ 2. $\int\limits_{n \neq -1} u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C.$

3. $\int\limits_{u \neq 0} \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C.$ $\qquad$ 4. $\int\limits_{a \neq 1,\, a > 0} a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C.$

5. $\int e^u du = e^u + C.$ $\qquad$ 6. $\int \sin u du = -\cos u + C.$

7. $\int \cos u du = \sin u + C.$ $\qquad$ 8. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tgu + C.$

9. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C.$ $\qquad$ 10. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{u}{a} + C.$

11. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + C.$ $\qquad$ 12. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C.$

Метод подстановки или метод замены переменной основан на формуле $\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{vmatrix} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$. Данная формула называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

Метод интегрирования по частям основан на использовании формулы $\int udv = uv - \int vdu$. Эта формула позволяет свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться более простым.

Если существует конечный предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$, то этот предел называется определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [a,b]:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \,.$$

Сама функция f(x) на отрезке [a,b] называется интегрируемой подынтегральной функцией, a – верхний предел интегрирования, b – нижний предел интегрирования, а x – переменная интегрирования.

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и функция F(x) является ее некоторой первообразной на этом отрезке, то имеет место формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пусть функция $y = f(x)$ задана на луче $[a, \infty)$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a,b]$, где $a < b < \infty$. Если существует предел $\lim\limits_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$, то он называется несобственным интегралом I рода от функции $f(x)$ на промежутке $[a, \infty)$ и обозначается символом: $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$. Если функция $y = f(x)$ непрерывна при $a < x \le b$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$, $(\varepsilon > 0)$.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a,b]$. В силу геометрического смысла определенного интеграла площадь криволинейной трапеции численно равна интегралу от данной функции по данному отрезку, т.е. $S = \int\limits_a^b f(x)dx$. Длина L дуги кривой, заданной уравнением y=f(x), a ≤ x ≤ b вычисляется по формуле: $L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$.

Объем тела вращения определяется формулой $V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

2. Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью v=v(t). Путь S, пройденный точкой за промежуток времени от t_1 до t_2 вычисляется по формуле: $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.

Тема 7 Функции комплексного переменного

Ключевые вопросы

Комплексные числа. Изображение комплексных чисел. Действия над комплексными числами. Три формы записи

Возведение в степень и извлечение корня из комплексных чисел.

Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Гармонические функции. Дифференцируемость элементарных функций.

Основные определения и методы

Число, квадрат которого равен -1, называется мнимой единицей и обозначается буквой i. Т.е. $i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$.

Число вида $z = x + iy$, где x и y - действительные числа, а i – мнимая единица, называется комплексным числом. Число x называется действительной частью комплексного числа, число y называется мнимой частью числа.

Два числа вида $z_1 = x + iy$ и $z_2 = x - iy$ называются комплексно сопряженными.

Любому комплексному числу $z = x + iy$ можно поставить в соответствие единственную точку плоскости XOY M с координатами M(x,y). И, наоборот, каждой точке M(x,y) плоскости можно поставить в соответствие единственное комплексное число.

Пусть комплексное число $z = x + iy$ изображено вектором $\overline{OM}$ с началом в т. O(0,0) и концом в точке z. Длина этого вектора, т.е. расстояние от точки z до начала координат, называется модулем комплексного числа и обозначается $|z|$:

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ - модуль комплексного числа.

Угол φ, образованный вектором z с положительным направлением оси OX, называется аргументом числа z и обозначается φ: $\varphi = Argz$. Для аргумента φ справедливы формулы: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, $\varphi = arctg\frac{y}{x}$ - аргумент комплексного числа .Значение Arg z, в отличии от $|z|$, определяется неоднозначно, а с точностью до $2\pi k (k=0;\pm1;\pm2;...)$. Фиксируя один предел изменения φ, выделяют главную часть аргумента, обозначаемую через arg z, так что Arg z = arg z + $2\pi k (k=0;\pm1;\pm2;...)$.

$z = x + iy$ - алгебраическая форма записи комплексного числа.

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ - тригонометрическая форма записи комплексного числа.

$z = re^{i\varphi}$ - показательная форма записи комплексного числа.

Операция сложения (вычитания) и умножения (деления) комплексных чисел определяется естественным образом из правила сложения (вычитания), умножения (деления) многочленов:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x^2 + y^2}$$

Умножать и делить комплексные числа удобнее всего, когда они записаны в тригонометрической или показательной формах. При этом пользуются следующими теоремами.

Пусть даны два комплексных числа

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$

$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$

Теорема 1. Произведение двух комплексных чисел есть такое комплексное число, модуль которого есть произведение модулей сомножителей, а аргумент равен сумме аргументов сомножителей, то есть

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Или в показательной форме

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Теорема 2. Частное двух комплексных чисел есть такое комплексное число, модуль которого есть частное модулей сомножителей, а аргумент равен разности аргументов сомножителей, то есть

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Или в показательной форме

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Из формулы произведения следует, что если n – натуральное число, то

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

В показательной форме $z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$

Эта формула называется формулой Муавра. Она показывает, что при возведении комплексного числа в натуральную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.

Корнем n –ой степени (n – натуральное число) из комплексного числа:

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), (k = 0,1,...,n-1)$- n различных корней.

В показательной форме $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i(\varphi + 2\pi k)}} = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}, (k = 0,1,...,n-1)$.

Тема 8 Дифференциальные уравнения

Ключевые вопросы

Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными. Частное и общее решение. Однородные уравнения первого порядка и сводящиеся к ним

Линейные, дифференциальные уравнения. Методы решения

Уравнения в полных дифференциалах, интегрирующий множитель

Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения. Общее решение

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнения с правой частью специального вида. Методы решения

Системы дифференциальных уравнений

Основные определения и методы

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнения вида: $F(x,y,y')=0$, $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, $y'=f(x)$. Решением дифференциального уравнения первого порядка называется дифференцируемая функция $y=\varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение, обращает его в тождество. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка $y'=f(x,y)$ в некоторой области Д называется функция $y=\varphi(x,c)$, обладающая следующими свойствами: функция $\varphi(x,c)$ является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной С, принадлежащих некоторому множеству; для любого начального условия $y(x_0)=y_0$ такого, что $(x_0, y_0)\in Д$, существует единственное значение $C=C_0$, при котором решение $y=\varphi(x,c_0)$ удовлетворяет начальному условию. Всякое решение $y=\varphi(x,c_0)$, получающееся из общего решения $y=\varphi(x,c)$ при конкретном значении $C=C_0$, называется частным решением.

Уравнение вида $f_1(x)f_2(y)dx-\varphi_1(x)\varphi_2(y)dy=0$ называется уравнением с разделяющимися переменными.

Уравнение первого порядка $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ или $y'=f(x,y)$ называется однородным, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$- однородные функции одной степени однородности или $f(x,y)$- однородная функция нулевой степени однородности. Функция $P(x,y)$ называется однородной степени k, если $P(\lambda x,\lambda y)=\lambda^k\cdot P(x,y)$. Однородное уравнение может быть приведено к виду $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Уравнение вида $y'+P(x)y=Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$- непрерывные функции аргумента x, называется линейным уравнением первого порядка.

Уравнение вида $y^{(n)}=f(x)$ решается последовательным интегрированием обеих частей уравнения n раз. Общий интеграл уравнения содержит n произвольных постоянных.

Уравнение 2-го порядка $F(x,y',y'')=0$, не содержащее явно функцию y, преобразуется в уравнение 1-го порядка посредством подстановки $y'=p$, $y''=p$, где $p=p(x)-$функция от x.

Уравнение 2-го порядка $F(y,y',y'')=0$, не содержащее явно аргумент x, преобразуется в уравнение 1-го порядка посредством подстановки $y'=p$, $y''=p\dfrac{dp}{dy}$, где p = p(y).

Необходимым этапом решения любой прикладной задачи является построение математической модели изучаемого объекта или процесса. Обыкновенные дифференциальные уравнения составляют основу сравнительно простых, но весьма распространенных математических моделей, применяемых в самых разных областях науки. Наиболее распространенными задачами на составление и решение дифференциальных уравнений являются: а) на плоскости xOy найти кривую, проходящую через (x_0,y_0), у которой угловой коэффициент касательной в любой точке кривой пропорционален абсциссе (ординате) точки касания; б) задача о радиоактивном распаде; в) задача о размножении популяции; г) задача о скорости химической реакции; д) задача о законе охлаждения тела и др.

Линейным неоднородным уравнением называется уравнение первой степени относительно искомой функции и всех ее производных $y^{(n)}+ a_1 y^{(n-1)}+\ldots+ a_{n-1} y'+ a_n y= f(x)$, где f(x) непрерывная функция непрерывная. Общее решение такого уравнения $y=y^*+\bar{y}$, где y^* - общее решение соответствующего однородного уравнения, $\bar{y}$ - какое-либо частное решение неоднородного уравнения. Частное решения $\bar{y}$ можно найти методом подбора. Если $f(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]$, то $\bar{y}=e^{\alpha x}[M_S(x)\cos\beta x+N_S(x)\sin\beta x]\cdot x^r$, где $M_S(x)$ и $N_S(x)$ – многочлены степени $S=max\{n,m\}$, а r – кратность корня $\alpha+\beta i$ характеристического уравнения.

Линейным однородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида $y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+a_2 y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1} y'+a_n y=0$.

Общее решение линейного однородного уравнения n-го порядка (1) имеет вид $y=C_1 y_1(x)+C_2 y_2(x)+\ldots+C_n y_n(x)$, где $y_1(x), y_2(x), \ldots,y_n(x)$ – линейно независимые частные решения этого уравнения.

Для нахождения общего решения уравнения составляют характеристическое уравнение $k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} +\ldots+ a_{n-1}k + a_n = 0$.

В зависимости от корней характеристического уравнения возможны случаи: если все корни характеристического уравнения $k_1, k_2, \ldots ,k_n$ – действительные и различные, то общее решение имеет вид: $y=C_1e^{k1x} + C_2e^{k2x} + \ldots+C_ne^{knx}$; если среди корней характеристического уравнения $k_1, k_2,\ldots, k_n$ имеются кратные ($k_1=k_2=\ldots=k_n=k$), а остальные различные, то общее решение примет вид $y=e^{kx}(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_mx^{m-1})+C_{m+1}e^{km+1\cdot x}+\ldots+C_ne^{km-n\cdot x}$, где m- кратность корня; если среди корней характеристического уравнения имеется пара комплексных корней $k_{1,2} = \alpha\pm\beta i$, то общее решение примет вид у= $e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Практические занятия сопровождают лекционный курс дисциплины.

Каждый практическое занятие начинается с теоретического опроса необходимого материала и проверки домашнего задания. Далее на конкретных примерах рассматриваются пути и способы применения тех математических методов, которые не требуют использования электронных вычислительных машин. При этом необходимо активизировать самостоятельную работу студентов. Задания и методические указания к ним выдаются студентам, каждый из которых выбирает оптимальный для себя темп работы. Преподавателю отводится роль консультанта и помощника. Задания, вызвавшие трудности у большинства студентов, разбираются на доске.

В конце занятия выдается домашнее задание, состоящее из теоретических вопросов, уяснение которых необходимо для следующего занятия и практических заданий по пройденному материалу.

При выполнении домашнего задания решать задачи удобнее поэтапно, в той последовательности, в какой эти задания сформулированы. В этом случае при возникновении трудностей будет легче обратиться к анализу тех тем, которые изложены в лекции и задач, разобранных на практическом занятии.

После выполнения практической части задания следует найти ответы на теоретические вопросы, заданные преподавателем и таким образом подготовится к осознанному восприятию следующего материала.

Активная, регулярная самостоятельная работа над домашним заданием – путь к успешному усвоению дисциплины.

Тема 1 Линейная алгебра

Основные вопросы

Матрицы, операции над ними.

Определители, их свойства, вычисление определителей.

Метод Крамера решения линейных систем. Метод Гаусса решения линейных систем.

Обратные матрицы, матричные уравнения. Решение систем линейных уравнений матричным методом.

Ранг матрицы. Исследование систем на совместность. Решение систем однородных и неоднородных систем линейных уравнений

Типовые задания

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{3} & 2-\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{2} & 1-\sqrt{3} \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} a+в & a-в \\ a-в & a+в \end{vmatrix}$, д) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

е) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;и) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.

2. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$.

3. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 5 & -6 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $C=2A-3B$.

4. Дано матричное равенство $2A+B-A^T \cdot B^T=\Theta+C$, где $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3a & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Найти a.

5. Перемножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 7 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Найти A^{-1}:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Исследовать и решить систему. Найти общее решение и одно из частных решений в случае совместности неопределенной системы.

а) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1, \\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=2, \\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4=-1, \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1+3x_2-3x_4=1, \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3. \end{cases}$

8. Показать, что система имеет единственное решение. Найти решение методом Крамера.

а) $\begin{cases} 2x-5y=1, \\ 3x+y=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1-3x_2=7, \\ 2x_1-5x_2=1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3=3, \\ x_1-5x_2+3x_3=0, \\ x_1-x_2+x_3=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2. \end{cases}$

9. Решить систему матричным способом:

а) $\begin{cases} 3x+7y+4z-3=0, \\ x+2y+2z-3=0, \\ 2x+3y+5z-10=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1+x_2+4x_3=-2, \\ x_1+x_2+2x_3=-1, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1+x_2+4x_3=1, \\ -x_1+3x_2=-1, \\ x_1-3x_2+x_3=2 \end{cases}$

Тема 2. Аналитическая геометрия

Основные вопросы

Операции над векторами, скалярное произведение векторов, его свойства.
Векторное произведение векторов, приложение.
Смешанное произведение векторов, его применение
Линии на плоскости. Уравнения прямой.
Кривые второго порядка.
Уравнения плоскости. Частные случаи
Уравнения прямой в пространстве
Решение задач на взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве
Уравнения поверхностей второго порядка

Типовые задания

1. Дана трапеция $ABCD$ (рис. 10), MN – ее средняя линия. Известно, что $\left|\vec{BC}\right|=1$. Указать орты векторов $\vec{MN}$, $\vec{NM}$, $\vec{AD}$, $\vec{DA}$.

2. $ABCD$ – параллелограмм (рис. 18), O – точка пересечения диагоналей этого параллелограмма. Построить вектор, равный $\vec{CO}-\vec{OB}$.

3. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 22) заданы векторы: $\vec{AB}=\vec{m}$, $\vec{AD}=\vec{n}$, $\vec{AA_1}=\vec{p}$. Разложить векторы $\vec{AC_1}$, $\vec{AK}$ (K – середина ребра CC_1) по векторам $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$.

4. ABC – произвольный треугольник, точки E и F – середины сторон AB и BC соответственно. Найти координаты векторов сторон треугольника в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, где $\vec{a}=\vec{AE}$, $\vec{b}=\vec{AF}$.

5. Дан треугольник ABC: $A(3, 1)$, $B(-1, 4)$, $C(2, 5)$. Найти координаты векторов $\vec{AB}$, $\vec{BA}$, $\vec{AC}$, $\vec{CB}$, $\vec{AK}$ (K – середина стороны BC).

6. Даны векторы $\vec{a}=-\vec{i}+5\vec{j}$, $\vec{b}=3\vec{i}+5\vec{j}$, $\vec{c}=-2\vec{i}+8\vec{j}$, $\vec{d}=3\vec{i}+\vec{j}$. Вычислить ($\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}-\vec{d}$), $\left|2\vec{a}-\vec{c}\right|$, $\left|-\vec{b}+3\vec{d}\right|$.

7. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.

8. Дан треугольник ABC: $A(1, 1)$, $B(-1, 8)$, $C(0, -1)$ (рис. 34). Найти угол $\hat{A}$ треугольника ABC и площадь S.

9. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=5\vec{i}$.

10. Найти объем тетраэдра $ABCD$: $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$, $D(4, 1, 3)$.

11. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, удовлетворяющие условию $[\vec{a}, \vec{b}]+[\vec{b}, \vec{c}]+[\vec{c}, \vec{a}]=\vec{0}$, компланарны.

12. Даны вершины треугольника: A(2, 3), B(6, 1), C(2, -2). Найти: длину стороны AB; уравнения сторон AB, BC, AC; уравнение высоты из вершины A; уравнение медианы из вершины B; расстояние от точки C до прямой AB.

13. Составить уравнение прямой проходящей через точку $M(-2;-5)$, параллельно прямой $3x+4y+2=0$.

14. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M\left(\frac{5}{2};\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$, $N\left(-2;\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$.

15. Построить линии:

а) $y=\sqrt{9-x^2}$; б) $x-4y^2-12=0$; в) $x^2-y^2+2x+2=0$; г) $2x+y-4=0$. д) $36x^2+4y^2+144x-40y+100=0$; е) $x^2-4y^2-4x-8y+8=0$.

16. Найти расстояние от точки A до плоскости, проходящей через точки $B, C, D.$, если $A(1,-6,-5), B(-1,2,-3), C(4,-1,0), D(2,1,-2)$.

17. Построить плоскости:

а) $y=4$; б) $x-4y-12=0$; в) $x-y+2x+2=0$; г) $x-3y+2z=6$.

18. Определить взаимное расположение прямых (параллельны или перпендикулярны)?

$$\frac{x+4}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-5}{-8}\ ,\ \frac{x}{-1}=\frac{y+8}{-1}=\frac{z-6}{4}.$$

19. При каком значении k данные прямые перпендикулярны?

$$\frac{x+4}{-5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}\ ,\ \frac{x+7}{\mathrm{k}}=\frac{y}{4}=\frac{z-3}{3}.$$

Тема 3 Введение в математический анализ

Основные вопросы

Числовые последовательности и их пределы. Второй замечательный предел.

Предел функции. Бесконечно большие и бесконечно малые величины, свойства бесконечно малых величин. Замечательные пределы

Раскрытие неопределенностей при вычислении пределов функций

Непрерывность функции, исследование функций на непрерывность.

Асимптоты графика функции

Типовые задания

1. Найти область определения функций:

1) $f(x)=\log_3(3x-2)+\lg(3-x)$;   2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+12-x^2}}{x^2-9}+\lg(x-3)$.

2. Выяснить четность(нечётность) функций:

1) $\mathrm{y}=\dfrac{\cos 3\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2}$;   2) $y=-\lg|2x|\cdot tgx$;   3) $y=5^{\mathrm{x}+1}-x^2$.

3. Построить графики функций:

1) y=$3^{|x|}$; 2) y=$\log_{\frac{1}{3}}$(x+3); 3) y=$\dfrac{2x+1}{4x+5}$; 4) y=3cos(2x-1); 5) y=$3\mathrm{x}^2+9x+11$.

4. Вычислить пределы функций:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^2-1};\quad \lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right);\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-3x^3+5}{3x^4-5x^2+1};\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\ln(1+x)};\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x};$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+x-1}{x^4+2x};\quad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{\sin 2x},\quad \lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2};\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^5-7x+1}{3x^2+x+3};\quad \lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n\cdot(n-1)!}{n!+(n+1)!};\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x};\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{x+1};\quad \lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}};\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x};$$

$$\lim_{x\to+\infty}(2x+1)[\ln(x+3)-\ln(x)]\ .$$

5. Исследовать функции на непрерывность и сделать чертёж.

1) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0;\\ x^2+1, & 0<x<1;\\ x, & x\ge 1.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{4x+2}{x-1}$.

6. Найти точки разрыва функций и определить их тип:

1) y=$5^{\frac{2x}{x-1}}$;   2) y=$\dfrac{4x^2-25}{2x-5}$.

Тема 4 Производная и ее приложения

Основные вопросы

Нахождение производной и дифференциала.

Производные и дифференциалы высших порядков. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

Производная сложной и обратной функций.

Дифференцирование функций, заданных параметрически, логарифмическое дифференцирование.

Исследование функций с помощью производной.

Общая схема исследования функций. Построение графиков функций.

Правило Лопиталя.

Типовые задания

1. Вычислить производные: 1) $y=\dfrac{\cos x}{1+2\sin x}$; 2) $y=\ln\dfrac{x^2}{1-x^2}$; 3) $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$; 4) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$; 5) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; 6) $y=tg(x)\cdot\sin^2(3x)$; 7) $y=\ln\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)$; 8) $y=tg^3x-3tgx+3x$; 9) $y=arctg\dfrac{x+3}{x-3}$.

2. Вычислите y'', если $y=\ln(x^2+1)$.

3. Найти производную n-го порядка: $y=2^x+2^{-x}$, $y^{(n)}=?$

4. Найти дифференциал функции $y=\sqrt{x^2-1}+\arcsin\dfrac{1}{x}$.

5. Вычислить приращение функции $y=2x^4-3x^3-4x-43$, получаемое ею при переходе аргумента от значения $x=3$ к значению $x=3{,}0012$.

6. Движение происходит прямолинейно по закону $S=t^3-6t^2+9t$, где S выражается в метрах, а время t - в секундах. Найти ускорение движения в моменты времени $t=1$ и $t=2$.

7. Вычислить пределы используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^3 x}{x^4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\arcsin x}-\dfrac{1}{arctgx}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$ е) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\sin x}$.

8. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

9. Исследовать функцию на экстремум $y=5x^3-15x^2+4$.

10. Найти интервалы вогнутости и точки перегиба графиков функции $y=x^4+3x^3$.

11. Определить асимптоты кривой $y=\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}$.

12. Провести полное исследование функций и построить их графики:

1) $y=2x^3-12x^2+18x$; 2) $y=\dfrac{x}{x^2-16}$; 3) $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$; 4) $y=x\sin x$.

Тема 5. Функции нескольких переменных

Основные вопросы

Область определения линии и поверхности уровня. Предел, непрерывность функций нескольких переменных.

Частные производные первого и высших порядков

Полный дифференциал, его применение к приближенным вычислениям.

Градиент и производная по направлению скалярного поля.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности Экстремум функции двух переменных.

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области

Типовые задания

1. Найти частные производные I порядка:

1) $z = x^3 + 5x^2y^2 - y^3$; 2) $z = \cos(x + 4y)$; 3) $z = arcctg\frac{y}{x}$; 4) $z = \ln(x + yx)$;

5) $z = xe^{xy}$; 6) $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2. Найти полный дифференциал: $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

3. Найти частные производные II порядка:

1) $z = \dfrac{x^2}{1 + 2y^2}$; 2) $z = \ln\left(x + e^{xy}\right)$; 3) $z = arctgxy$.

4. Показать что функция $z = \ln(x^2 + y^2 + 2y + 1)$ удовлетворяет условию $Z''_{xx} + Z''_{yy} = 0$.

5. Исследовать функцию z = $y^4 - 2xy^2 + x^2 + 2y + y^2$ на экстремум.

6. Найти экстремум функции f(x, y) = xy, если уравнение связи: 2x + 3y – 5 = 0.

Тема 6. Интегральное исчисление

Основные вопросы

Неопределенный интеграл. Табличные интегралы

Методы замены переменных.

Интегрирования по частям

Интегрирование рациональных функций

Метод неопределенных коэффициентов и частных решений

Интегрирование тригонометрических функций

Интегрирование иррациональных и др. функций

Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.

Вычисление определенных интегралов.

Несобственные интегралы

Геометрические и физические приложения определенного интеграла.

Типовые задания

1. Вычислить интеграл:

$\int(4\sin x + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x} + 5^x)dx.$ $\int(\frac{3}{\sin^2 x} + e^x + 3x^3 - \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}})dx.$ $\int\frac{cos2x}{\cos x - \sin x}dx.$

$\int(\frac{1}{1 + x^2} + 2^{3x} + \frac{1}{2x} + e^x)dx.$ $\int\frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1 - x^2}}dx$. $\int\frac{arctg^5 x}{1 + x^2}dx$. $\int\cos^5 x\sin 2xdx$. $\int\frac{\cos xdx}{\sin^2 x + 1}$.

$\int\frac{dx}{1 + 4x^2}$. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1 - x^6}}$. $\int\frac{1 + x}{\sqrt{1 - x^2}}dx$. $\int\frac{3x + 4}{x^2 + 9}dx$. $\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$. $\int\frac{\sqrt{tgx + 3}}{\cos^2 x}dx$. $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. $\int\frac{dx}{x^2 + 2x - 10}$.

$\int\frac{dx}{\sqrt{1 - (2x + 3)^2}}$. $\int\cos^2 4xdx$. $\int\frac{\sin(arctgx)}{1 + x^2}dx$. $\int\sin^3 xdx$ $\int(x + 2)\sin xdx$. $\int x^2\ln xdx$.

$\int\arcsin 2xdx$. $\int x^2\ell^{4x}dx$. $\int\sin(\ln x)dx.$ $\int e^{3x}\sin xdx.$ $\int\frac{dx}{(x + 1)(x - 2)}$ $\int\frac{dx}{(x - 1)^2 x}$. $\int\frac{xdx}{(x - 3)(x^2 + 25)}$

$\int\frac{x^5 - 2x^3 + 4}{x^3 - 4x}dx$ $\int\frac{2x + 3}{x^2 + 6x + 13}dx$

2. Вычислить определенный интеграл:

1) $\int_1^2\left(x^2 + 1\right)dx$; 2) $\int_0^3 e^{-\frac{x}{3}}dx$; 3) $\int_0^3\frac{x}{\sqrt{x + 1}}dx$; 4) $\int_1^e\ln xdx$; 5) $\int_{1/2}^1 x^2\cdot(2x - 1)^8 dx$

3. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$; $\int_3^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+4}dx$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

а) $y = 2x - x^2$; $y = 0$; б) $y = x^2$; $y = 1$; в) $y = \ell^x$; $y = \ell^{-x}$; $x = 1$; г) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

4. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной данными кривыми.

а) $y = \sqrt{x}$; $y = 0$; $x = 4$. б) $y = \sin 2x$; $y = 0$; $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Тема 7 Функции комплексного переменного

Основные вопросы

Комплексные числа. Изображение комплексных чисел. Действия над комплексными числами. Три формы записи

Возведение в степень и извлечение корня из комплексных чисел.

Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Гармонические функции. Дифференцируемость элементарных функций

Типовые задания

1. Перевести в тригонометрическую и показательную формы комплексные числа:

а) $z = -\sqrt{3} + i$; б) $z = 2i$; в) $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

2. Перевести в алгебраическую форму комплексные числа:

а) $z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$; б) $z = e^{-i120^0}$; в) $z = 6e^{i210^0}$.

3. Выполнить действие: $\frac{i-4}{1-i} + (2+2i)(-1-4i)$.

4. Возвести в степень: $\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)^{10}$.

5. Найти корни: $\sqrt[3]{-1-i}$.

6. Решить уравнения: а) $x^4 + 16 = 0$; б) $\mathrm{x}^3 - 27 = 0$; в) $z^3 + \frac{2\sqrt{2}}{1+i} = 0$.

7. Показать, что данные функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ гармонические. Найти по заданной функции $u(x,y)$ или $v(x,y)$ ей сопряженную: $u(x,y)=\cos x\,\mathrm{ch}\,y$, $v(0,0)=0$.

8. Найти аналитическую функцию f(z), если задана ее мнимая часть Imf(z)=10xy−6y, f(1/5)=−1.

Тема 8. Дифференциальные уравнения

Основные вопросы

Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными

Решение однородных уравнений первого порядка и уравнений, сводящихся к ним

Решение линейных уравнений первого порядка

Решение простейших дифференциальных уравнений высших порядков

Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков

Метод вариации произвольной постоянной

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с правой частью специального вида

Решение систем линейных дифференциальных уравнений

Типовые задания

1. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:

а) $y'x^2 = 2xy + 3$; б) $y'\cos x + y\sin x = 1$; в) $xy' - y = x^2\cos x$; г) $xy' + 2y = x^2$;

д) $y' - yctgx = \sin^3 x$; е) $dy = (x^2 - 2x - 2y)dx$; ж) $y' - y = e^x \sin x$; з) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{e^{2x}}{x}$;

и) $y' - ytgx = \dfrac{1}{\cos x}$; к) $y' - \dfrac{y}{x-2} = x + 2$; л) $(x^2 - 1)y' - xy = x^2 - x$; м) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x\cos y + \sin 2y}$;

н) $x^2 y' + xy = -1$.

2. Проинтегрировать уравнения

а) $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$; б) $y'' - 3y' + 2y = e^x$;

в) $y'' + 16y = -24\sin 4x$; г) $y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$;

д) $y'' - 2y' = x^2 - x$; е) $y'' + y = x\cos x$;

ж) $y'' - 3y' = 3^x \sin x$; з) $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$;

и) $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$; к) $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$;

л) $y'' - 6y' + 12y = e^x(x^2 - 5x + 2)$; м) $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$;

н) $y'' - 2y' + y = x^3$; о) $y'' + 2y = x^2 + 2$.

3. Решить задачи:

1) Скорость размножения бактерий пропорциональна количеству бактерий, имеющихся в наличии в рассматриваемый момент времени t. Количество бактерий утроилось в течение 5 часов. Найти зависимость количества бактерий от времени.

2) Найти кривую, если отрезок любой касательной к ней, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам.

4. Решить дифференциальные уравнения высших порядков:

$y'''=6x+1$; $y'''=4\cos 2x$, если $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=1$; $xy'' = y'$; $y'' + \dfrac{y}{x} = 0$;

$yy'' = (y')^2$, $y'' + 4y' = 0$; $y'' - 4y' + 4y = 0$; $y^{V} - y''' = 0$; $y''-4y'+13y=0$; $y'' + y' - 2y = 3xe^{-x}$; $y'' + 4y' + 5y = x^2 - 1$; $y'' - 4y' + 4y = \sin 3x$.

3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа студентов предназначена для углубления сформированных знаний, умений, навыков. Самостоятельная работа развивает мышление, позволяет выявить причинно-следственные связи в изученном материале, решить теоретические и практические задачи. Самостоятельная работа студентов проводится с целью: систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов; углубления и расширения теоретических знаний; формирования умений использовать справочную документацию и специальную литературу; развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;- формированию самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;- развития исследовательских умений. Роль самостоятельной работы возрастает, т.к. перед учебным заведением стоит задача в т. ч. и по формированию у студента потребности к самообразованию и самостоятельной познавательной деятельности

Виды и формы самостоятельных работ по дисциплине «Высшая математика».

Студентами практикуется два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию. В этом случае студенты обеспечиваются преподавателем необходимой учебной литературой, дидактическим материалом, в т. ч. методическими пособиями и методическими разработками.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия. Видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы могут быть:

- для овладения знаниями: чтение текста (учебника, методической литературы); составления плана текста; графическое изображение структуры текста, графическое изображение последовательности выполнения графической работы, выполнение графических работ; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочниками; ознакомление с нормативными документами; учебно-исследовательская работа; использование компьютерной техники, интернета и др.;
- для закрепления систематизации знаний: работа с конспектом лекции (обработки текста); повторная работа над учебным материалом (учебника, первоисточника, дополнительной литературы); составление плана выполнения работы в соответствие с планом, предложенным преподавателем; изучение ГОСТов; ответы на контрольные вопросы; тестирование, выполнение упражнений и графических работ;
- для формирования умений: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; выполнение чертежей, схем.

Основное содержание самостоятельной работы составляет выполнение домашних заданий, расчетно-графических работ и подготовку к контрольным работам и экзамену.

Прежде чем приступать к выполнению расчетно-графической работы, необходимо ознакомиться с содержанием теоретических вопросов по представленному списку литературы и по лекциям.

Работа пишется на стандартных листах писчей бумаги. Все листы заполняются только с одной стороны. Оформление расчетно-графической работы осуществляется в соответствии со стандартом. Каждая расчетно-графическая работа начинается с титульного листа, который служит обложкой работы. Сверху на нем указывается принадлежность студента к учебному заведению, факультету, специализации или кафедре. В середине листа указывается название изучаемой темы или раздела и название учебного задания, номер варианта. Ниже и справа указывается фамилия и инициалы студента, номер академической группы, фамилия и инициалы преподавателя. Внизу титульного листа отмечают год выполнения работы.

Эта страница служит также для отметок преподавателя о выполнении учебного задания и замечаний по поводу подготовленного студентом отчета.

При оформлении работы необходимо соблюдать нумерацию заданий. Задание переписывается полностью и ниже оформляется решение. Работа должна быть сдана на кафедру к назначенному преподавателем сроку.

Каждый учебный семестр заканчивается аттестационными испытаниями: зачетно - экзаменационной сессией.

Подготовка к экзаменационной сессии и сдача зачетов и экзаменов является ответственейшим периодом в работе студента. Серьезно подготовиться к сессии и успешно сдать все экзамены - долг каждого студента. Рекомендуется так организовать свою учебу, чтобы перед первым днем начала сессии были сданы и защищены все лабораторные работы, сданы все зачеты, выполнены другие работы, предусмотренные графиком учебного процесса.

Основное в подготовке к сессии - это повторение всего материала, курса или предмета, по которому необходимо сдавать экзамен. Только тот успевает, кто хорошо усвоил учебный материал.

Если студент плохо работал в семестре, пропускал лекции, слушал их невнимательно, не конспектировал, не изучал рекомендованную литературу, то в процессе подготовки к сессии ему придется не повторять уже знакомое, а заново в короткий срок изучать весь материал. А это зачастую, оказывается, невозможно сделать из-за нехватки времени. Для такого студента подготовка к экзаменам будет трудным, а иногда и непосильным делом, а финиш - отчисление из учебного заведения.

В дни подготовки к экзаменам избегай чрезмерной перегрузки умственной работой, чередуй труд и отдых.

СОДЕРЖАНИЕ

Татьяна Александровна Юрьева,

доц. каф. общей математики и информатики АмГУ, канд. пед. наук