Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

сборник учебно-методических материалов

для направлений подготовки

13.03.01 – Теплоэнергетика и теплотехника
13.03.02 – Электроэнергетика и электротехника
15.03.04 – Автоматизация технологических процессов и производств

2017 г.

Печатается по решению

редакционно-издательского совета

факультета математики и информатики

Амурского государственного

Университета

Составитель: Юрьева Т.А.

Специальные главы математики: сборник учебно-методических материалов для направлений подготовки: 13.03.01 – Теплоэнергетика и теплотехника, 13.03.02 – Электроэнергетика и электротехника, 15.03.04 – Автоматизация технологических процессов и производств. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2017.

Рассмотрен на заседании кафедры общей математики и информатики 03.11.2017, протокол № 3.

ВВЕДЕНИЕ

– Целью дисциплины «Специальные главы математики» является формирование способности применять математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач; формирование компетенций, соответствующих ОП.

– Задачи дисциплины:

– раскрыть роль и значение математических методов исследования при решении профессиональных задач;

– ознакомить с основными понятиями и методами классической и современной математики;

– научить студентов применять методы математического анализа для построения математических моделей реальных процессов и явлений.

В результате освоения обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

1) Знать: основы дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких переменных, основные понятия и методы аналитической геометрии, линейной алгебры, векторного анализа, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, элементы теории функций комплексного переменного, теории рядов, теории вероятностей и математической статистики.

2) Уметь: использовать математический аппарат при изучения естественнонаучных дисциплин и в решении профессиональных задач.

3) Владеть*:* методами дифференцирования, интегрирования функций, основными аналитическими и численными методами решения алгебраических и дифференциальных уравнений и систем, методами математической статистики.

1 КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ЛЕКЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1 Ряды

Ключевые вопросы

Числовые ряды, их свойства. Сходимость числовых рядов.

Функциональные ряды, область сходимости. Степенные ряды. Ряд Тейлора.

Тригонометрические ряды. Ряд Фурье

Основные определения и методы

Числовым рядом называется составленное из этих чисел выражение: $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

Числа $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ называются членами ряда, член, u_n с произвольным номером n – общим членом ряда. Сумма $S_n= u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$ называется частичной, или n-ой суммой ряда. Частичные суммы ряда образуют числовую последовательность $\{S_n\}$: $S_1= u_1$, $S_2= u_1+u_2$, $S_3= u_1+u_2+u_3$, …, $S_n= u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$. Если существует предел последовательности $\{S_n\}$: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется сходящимся, в противном случае – расходящимся. Число $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ называется суммой ряда.

Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$, то ряд расходится.

Признак Даламбера: пусть дан ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ с положительными членами. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, то: 1) при $l<1$ ряд сходится; 2) при $l>1$ ряд расходится; 3) при $l=1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Признак Коши: пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ с положительными членами. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u^n}=l$, то : 1) при $l<1$ ряд сходится; 2) при $l>1$ ряд расходится; 3) при $l=1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Первый признак сравнения: пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ с неотрицательными членами, причем члены первого ряда не превосходят соответствующих членов второго ряды: $u_n\le v_n$, тогда:

1) если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$;

2) если расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, то расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$.

Второй признак сравнения: пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ с неотрицательными членами. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k\neq 0$, то данные ряды сходятся или расходятся одновременно. Если

k=0, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ вытекает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Ряд, содержащий бесконечное число отрицательных и положительных членов, называется знакопеременным.

Знакопеременный ряд $u_1+u_2+u_3+ \ldots +u_n+\ldots =\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из абсолютных величин его членов: $|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$.

Сходящийся знакопеременный ряд называется условно сходящимся, если ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда: если для знакопеременного ряда $u_1+u_2+u_3+ \ldots +u_n+\ldots$ сходится ряд $|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots$, составленный из абсолютных величин его членов, то данный знакопеременный ряд сходится. Иными словами, абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Теорема Лейбница: если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине и общий член ряда стремится к нулю, то этот ряд сходится. Ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница, называется рядом Лейбница.

Функциональный ряд – это ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$, члены которого – функции $u_n(x)$, определенные в некоторой области V.

Определим частичную сумму ряда – тоже функцию $S_n(x)=u_1(x)+\ldots+u_n(x)$.

Зафиксировав некоторую точку x, мы имеем дело с обычным числовым рядом.

Функциональный ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$ называется сходящимся в точке x, если $\{S_n(x)\}$ сходится к $S(x)$.

Все точки, в которых ряд сходится, составляют область сходимости ряда.

Пусть $u_n(x)$ непрерывны в V, пусть ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в V. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx \text{ сходится к } \int_{ф}^{u} S(x)dx, \text{ где } S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \left(\forall a,b\in V, a\le b\right)$, то есть функциональный ряд можно почленно интегрировать.

Пусть $u_n(x), u_n{}'(x)$ непрерывны в V. Пусть ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в V, а ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_n{}'(x)$.равномерно сходится в V. Тогда ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$ можно почленно дифференцировать, причем $(\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x))' = \sum_{m=1}^{\infty} u_n{}'(x)$.

Рядом Фурье для функции f(x) называется тригонометрический ряд, коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье. Если ряд Фурье функции f(x) сходится к ней во всех ее точках непрерывности, то говорят, что функция f(x) разлагается в ряд Фурье.

Теорема Дирихле: если функция f(x) имеет период 2π и на отрезке [-π;π] непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода, и отрезок [-π;π] можно разбить на конечное число отрезков так, что внутри каждого из них функция f(x) монотонна, то ряд Фурье для функции f(x) сходится при всех значениях x, причем в точках непрерывности функции f(x) его сумма равна f(x), а в точках разрыва его сумма равна $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, т.е. среднему арифметическому предельных значений слева и справа. При этом ряд Фурье функции f(x) сходится равномерно на любом отрезке, который принадлежит интервалу непрерывности функции f(x).

Функция f(x), для которой выполняются условия теоремы Дирихле называется кусочно – монотонной на отрезке [-π;π].

Если функция f(x) имеет период 2π, кроме того, f(x) и ее производная f'(x) – непрерывные функции на отрезке [-π;π] или имеют конечное число точек разрыва первого рода на этом отрезке, то ряд Фурье функции f(x) сходится при всех значениях x, причем в точках непрерывности его сумма равна f(x), а в точках разрыва она равна $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. При этом ряд Фурье функции f(x) сходится равномерно на любом отрезке, который принадлежит интервалу непрерывности функции f(x).

Функция, удовлетворяющая условиям этой теоремы, называется кусочно – гладкой на отрезке [-π;π].

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

.

Если функция f(x) – любая периодическая функция периода 2π, непрерывная на отрезке [-π; π] или имеющая на этом отрезке конечное число точек разрыва первого рода, то коэффициенты $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx; \quad n = 0,1,2,...$ и $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad n = 1,2,...$ существуют и называются коэффициентами Фурье для функции f(x).

Задача разложения непериодической функции в ряд Фурье в принципе не отличается от разложения в ряд Фурье периодической функции.

Допустим, функция f(x) задана на отрезке [a, b] и является на этом отрезке кусочно – монотонной. Рассмотрим произвольную периодическую кусочно – монотонную функцию $f_1(x)$ с периодом $2T \geq |b-a|$, совпадающую с функцией f(x) на отрезке [a, b].

Таким образом, функция f(x) была дополнена. Теперь функция $f_1(x)$ разлагается в ряд Фурье. Сумма этого ряда во всех точках отрезка [a, b] совпадает с функцией f(x), т.е. можно считать, что функция f(x) разложена в ряд Фурье на отрезке [a, b]. Таким образом, если функция f(x) задана на отрезке, равном 2π ничем не отличается от разложения в ряд периодической функции. Если же отрезок, на котором задана функция, меньше, чем 2π, то функция продолжается на интервал (b, a + 2π) так, что условия разложимости в ряд Фурье сохранялись.

Вообще говоря, в этом случае продолжение заданной функции на отрезок (интервал) длиной 2π может быть произведено бесконечным количеством способов, поэтому суммы получившихся рядов будут различны, но они будут совпадать с заданной функцией f(x) на отрезке [a,b].

Если f(x) – четная периодическая функция с периодом 2π, удовлетворяющая условиям разложимости в ряд Фурье, то можно записать:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0; \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

Таким образом, для четной функции ряд Фурье записывается:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

Аналогично получаем разложение в ряд Фурье для нечетной функции:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx; \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx; \qquad (n = 1,2,...)$$

Тема 2 Кратные, криволинейные, поверхностные интегралы

Ключевые вопросы

Двойной и тройной интегралы, их свойства. Вычисление кратных интегралов. Определение криволинейных интегралов первого и второго рода, их свойства, примеры вычисления. Определение поверхностных интегралов, их свойства. Приложение кратных интегралов к решению задач.

Основные определения и методы

Совокупность всех точек, лежащих внутри кривой и на самой кривой назовем замкнутой областью Δ. Если выбрать точки области без учета точек, лежащих на кривой, область будет называется незамкнутой область Δ.

С геометрической точки зрения Δ - площадь фигуры, ограниченной контуром.

Разобьем область Δ на n частичных областей сеткой прямых, отстоящих друг от друга по оси x на расстояние Δx_i, а по оси y – на Δy_i. Вообще говоря, такой порядок разбиения необязателен, возможно разбиение области на частичные участки произвольной формы и размера.

Получаем, что площадь S делится на элементарные прямоугольники, площади которых равны $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$.

В каждой частичной области возьмем произвольную точку $P(x_i, y_i)$ и составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i$; где f – функция непрерывная и однозначная для всех точек области Δ.

Если бесконечно увеличивать количество частичных областей Δ_i, тогда, очевидно, площадь каждого частичного участка S_i стремится к нулю.

Если при стремлении к нулю шага разбиения области Δ интегральные суммы $\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i$ имеют конечный предел, то этот предел называется двойным интегралом от функции f(x, y) по области Δ.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) S_i = \iint_{\Delta} f(x, y) dxdy$$

С учетом того, что $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ получаем:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) S_i = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)\Delta y_i \Delta x_i$$

В приведенной выше записи имеются два знака Σ, т.к. суммирование производится по двум переменным x и y.

Т.к. деление области интегрирования произвольно, также произволен и выбор точек P_i, то, считая все площади S_i одинаковыми, получаем формулу:

$$\iint_{\Delta} f(x,y)dydx = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum\sum_{\Delta} f(x,y)\Delta y \Delta x$$

Условия существования двойного интеграла.

Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, то двойной интеграл $\iint_{\Delta} f(x,y)d\Delta$ существует.

Если функция f(x, y) ограничена в замкнутой области Δ и непрерывна в ней всюду, кроме конечного числа кусочно – гладких линий, то двойной интеграл $\iint_{\Delta} f(x,y)d\Delta$ существует.

Свойства двойного интеграла.

1) $\iint_{\Delta}[f_1(x,y)+f_2(x,y)-f_3(x,y)]dydx = \iint_{\Delta} f_1(x,y)dydx + \iint_{\Delta} f_2(x,y)dydx - \iint_{\Delta} f_3(x,y)dydx$

2) $\iint_{\Delta} kf(x,y)dydx = k\iint_{\Delta} f(x,y)dydx$

3) Если $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, то $\iint_{\Delta} f(x,y)dydx = \iint_{\Delta_1} f(x,y)dydx + \iint_{\Delta_2} f(x,y)dydx$

4) Теорема о среднем. Двойной интеграл от функции f(x, y) равен произведению значения этой функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования. $\iint_{\Delta} f(x,y)dydx = f(x_0,y_0)\cdot S$

5) Если f(x, y) ≥ 0 в области Δ, то $\iint_{\Delta} f(x,y)dydx \ge 0$.

6) Если $f_1(x, y) \le f_2(x, y)$, то $\iint_{\Delta} f_1(x,y)dydx \le \iint_{\Delta} f_2(x,y)dydx$.

7) $\left|\iint_{\Delta} f(x,y)dydx\right| \le \iint_{\Delta}|f(x,y)|dydx$.

Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями x = a, x = b, (a < b), y = φ(x), y = ψ(x), где φ и ψ - непрерывные функции и φ ≤ ψ, тогда $\iint_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx = \int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$

Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями y = c, y = d (c < d), x = Φ(y), x = Ψ(y) (Φ(y) ≤ Ψ(y)), то $\iint_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)dx$

Рассмотрим двойной интеграл вида $\iint_{\Delta} F(x,y)dydx$, где переменная x изменяется в пределах от a до b, а переменная y – от $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$.

Положим x = f(u, v); y = φ(u, v)

Тогда dx = $\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv$; dy = $\frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv$;

$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)dydx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x,y)dy$ т.к. при первом интегрировании переменная x принимается за постоянную, то dx = 0.

$\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = 0$, т.е. $du = -\frac{\partial f/\partial v}{\partial f/\partial u}\cdot dv$ подставляя это выражение в записанное выше соотношение для dy, получаем:

$$dy = -\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial f/\partial v}{\partial f/\partial u}dv + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial u}}\cdot dv$$

Выражение $\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \end{vmatrix} = |i|$ называется определителем Якоби или Якобианом функций f(u, v) и φ(u, v).

Тогда $\iint\limits_{\Delta} F(x,y)dydx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} F(f(x,y),\varphi(x,y))\cdot\frac{|i|}{\partial f/du}dv$

Т.к. при первом интегрировании приведенное выше выражение для dx принимает вид $dx = \frac{\partial f}{\partial u}du$ (при первом интегрировании полагаем v = const, dv = 0), то при изменении порядка интегрирования, получаем соотношение:

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)dydx = \int\limits_{V_1}^{V_2} dv \int\limits_{\Theta_1(v)}^{\Theta_2(v)} F(f(u,v),\varphi(u,v))\cdot|i|\cdot du$$

При нахождении тройного интеграла интегрирование ведется не по двум, а по трем переменным, а областью интегрирования является не часть плоскости, а некоторая область в трехмерном пространстве.

$$\iiint\limits_{r} f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}} \sum\sum\limits_{v}\sum f(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z$$

Суммирование производится по области v, которая ограничена некоторой поверхностью φ(x, y, z) = 0.

$\iiint\limits_{r} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2}\int\limits_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)dzdydx$ здесь x_1 и x_2 – постоянные величины, y_1 и y_2 – могут быть некоторыми функциями от x или постоянными величинами, z_1 и z_2 – могут быть функциями от x и y или постоянными величинами.

Операция замены переменных в тройном интеграле аналогична соответствующей операции для двойного интеграла.

Можно записать:

$$\iiint\limits_{r} F(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\tau} F(f(u,v,w),\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w))\cdot|i|\cdot dudvdw$$

$$|i| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Наиболее часто к замене переменной в тройном интеграле прибегают с целью перейти от декартовой прямоугольной системы координат к цилиндрической или сферической системе.

Связь координат произвольной точки Р пространства в цилиндрической системе с координатами в декартовой прямоугольной системе осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \theta = arctg\frac{y}{x}; \qquad z = z.$$

$$\iiint\limits_{r} F(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\tau} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho d\theta d\rho dz$$

Связь координат произвольной точки Р пространства в сферической системе с координатами в декартовой прямоугольной системе осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \theta = arctg\frac{y}{x}; \qquad \varphi = arctg\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z};$$

Окончательно получаем:

$$\iiint\limits_{r} F(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\tau} f(\rho,\varphi,\theta)\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

Тема 3 Элементы теории поля

Ключевые вопросы

Потенциальное поле и его характеристики. Дивергенция, ротор, поток и циркуляция векторного поля. Операторы Гамильтона и Лапласа.

Основные определения и методы

Рассмотрим функцию u(x, y, z) в точке M(x, y, z) и точке M_1(x + Δx, y + Δy, z + Δz).

Проведем через точки M и M_1 вектор $\vec{S}$. Углы наклона этого вектора к направлению координатных осей x, y, z обозначим соответственно α, β, γ. Косинусы этих углов называются направляющими косинусами вектора $\vec{S}$.

Расстояние между точками M и M_1 на векторе $\vec{S}$ обозначим ΔS. $\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$

Пусть функция u(x, y, z) непрерывна и имеет непрерывные частные производные по переменным x, y и z. Тогда правомерно записать следующее выражение:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z$$

, где величины ε_1, ε_2, ε_3 – бесконечно малые при $\Delta S \to 0$.

Из геометрических соображений очевидно:

$$\frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos\alpha; \qquad \frac{\Delta y}{\Delta S} = \cos\beta; \qquad \frac{\Delta z}{\Delta S} = \cos\gamma;$$

Таким образом, приведенные выше равенства могут быть представлены следующим образом:

$$\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1 \cos\alpha + \varepsilon_2 \cos\beta + \varepsilon_2 \cos\gamma;$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Заметим, что величина s является скалярной. Она лишь определяет направление вектора $\vec{S}$.

Из этого уравнения следует следующее определение:

Предел $\lim\limits_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S}$ называется производной функции u(x, y, z) по направлению вектора $\vec{S}$ в точке с координатами (x, y, z).

Поясним значение изложенных выше равенств на примере.

Если в некоторой области D задана функция u = u(x, y, z) и некоторый вектор, проекции которого на координатные оси равны значениям функции u в соответствующей точке $\frac{\partial u}{\partial x}; \ \frac{\partial u}{\partial y}; \ \frac{\partial u}{\partial z}$, то этот вектор называется градиентом функции u. $grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{dy}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$

При этом говорят, что в области D задано поле градиентов.

Связь градиента с производной по направлению.

Пусть задана функция u = u(x, y, z) и поле градиентов

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{dy}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

. Тогда производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ по направлению некоторого вектора $\vec{S}$ равняется проекции вектора grad u на вектор $\vec{S}$.

Доказательство: Рассмотрим единичный вектор $\vec{S} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ и некоторую функцию u = u(x, y, z) и найдем скалярное произведение векторов $\vec{S}$ и *grad u*.

$$grad u \cdot \vec{S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства является производной функции u по направлению s. Т.е. $grad\, u \cdot \vec{S} = \frac{\partial u}{\partial s}$. Если угол между векторами *grad u* и $\vec{S}$ обозначить через φ, то скалярное произведение можно записать в виде произведения модулей этих векторов на косинус угла между ними. С учетом того, что вектор $\vec{S}$ единичный, т.е. его модуль равен единице, можно записать: $|grad\,u| \cdot \cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial s}$.

Выражение, стоящее в правой части этого равенства и является проекцией вектора *grad u* на вектор $\vec{S}$.

Для иллюстрации геометрического и физического смысла градиента скажем, что градиент – вектор, показывающий направление наискорейшего изменения некоторого скалярного поля u в какой- либо точке. В физике существуют такие понятия как градиент температуры, градиент давления и т.п. Т.е. направление градиента есть направление наиболее быстрого роста функции.

С точки зрения геометрического представления градиент перпендикулярен поверхности уровня функции.

Если каждой точке пространства M ставится в соответствие некоторая скалярная величина U, то таким образом задается скалярное поле U(M). Если каждой пространства M ставится в соответствие вектор $\vec{F}$, то задается векторное поле $\vec{F}$ (M).

Пусть в пространстве M задана поверхность Δ. Будем считать, что в каждой точке P определяется положительное направление нормали единичным вектором $\vec{n}(P)$.

В пространстве M зададим векторное поле, поставив в соответствие каждой точке пространства вектор, определенный координатами:

$$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

Если разбить каким – либо образом поверхность на частичные участки Δ_i и составить сумму $\sum_i (\vec{F}(P_i)\vec{n}(P_i))\Delta_i$, где $\vec{F}\vec{n}$ - скалярное произведение, то предел этой суммы при стремлении к нулю площадей частичных участков разбиения (если этот предел существует) будет поверхностным интегралом. $\iint_\Delta \vec{F}\vec{n}d\Delta$

Поверхностный интеграл $\iint_\Delta \vec{F}\vec{n}d\Delta$ называется потоком векторного поля $\vec{F}$ через поверхность Δ.

Если поверхность разбита на конечное число частичных поверхностей, то поток векторного поля через всю поверхность будет равен сумме потоков через частичные поверхности.

Если преобразовать скалярное произведение в координатную форму, то получаем соотношение:

$$\iint_\Delta \vec{F}\vec{n}d\Delta = \iint_\Delta [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]d\Delta = \iint_\Delta Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

Если на области Δ существует функция *f(x, y, z)*, имеющая непрерывные частные производные, для которых выполняются свойства: $\frac{\partial f}{\partial x} = P$; $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$; $\frac{\partial f}{\partial z} = R$; то такую функцию называют потенциальной функцией или потенциалом вектора $\vec{F}$.

Тогда вектор $\vec{F}$ является градиентом функции *f*.

$$\vec{F} = gradf = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Потенциал может быть найден по формуле:

$$f(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz$$

В этой формуле x_0, y_0, z_0 – координаты некоторой начальной точки. В качестве такой точки удобно брать начало координат.

Для того, чтобы поле вектора $\vec{F}$, заданного в некоторой области, имело потенциал, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из двух условий:

1) Интеграл от вектора $\vec{F}$ по любому кусочно – гладкому контуру, принадлежащему области, равен нулю.

2) Интеграл по любому кусочно – гладкому пути, соединяющему две любые точки поля не зависит, от пути интегрирования.

Формула Стокса связывает криволинейные интегралы второго рода с поверхностными интегралами второго рода.

Пусть в пространстве задана некоторая поверхность S. L – непрерывный кусочно – гладкий контур поверхности S.

Предположим, что функции P,Q и R непрерывны на поверхности S вместе со своими частными производными первого порядка. Применим формулу, выражающую криволинейный интеграл через определенный.

$$\oint_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+$$

$$+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt=\int_\alpha^\beta [Px'(t)+Qy'(t)+R\left(\frac{\partial z}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial z}{\partial y}y'(t)\right)]dt=$$

$$=\int_\alpha^\beta\left\{\left[P+R\frac{\partial z}{\partial x}\right]x'(t)+\left[Q+R\frac{\partial z}{\partial y}\right]y'(t)\right\}dt=\oint_L\left[P+R\frac{\partial z}{\partial x}\right]dx+\left[Q+R\frac{\partial z}{\partial y}\right]dy$$

Введем обозначения: $p=\frac{\partial z}{\partial x}$; $q=\frac{\partial z}{\partial y}$;

Применив формулу Грина – Остроградского, можно заменить криволинейный интеграл равным ему двойным интегралом. После преобразований устанавливается следующее соответствие между криволинейным и поверхностным интегралом:

$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$ эта формула и называется формула Стокса.

Вектор $\vec{B}$, компоненты которого равны соответственно равны $B_x=\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}$; $B_y=\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}$; $B_z=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$; называется вихрем (ротором) вектора $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ и обозначается: $rot\vec{F}$

Символический вектор $\vec{\nabla}=\left\{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right\}=\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$ называется оператором Гамильтона. Символ ∇ - «набла».

С учетом этого обозначения можно представить себе понятие ротора вектора $\vec{F}$ как векторного произведения оператора Гамильтона на вектор $\vec{F}$.

$$rot\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Криволинейный интеграл, представляющий собой работу векторного поля вдоль некоторой кривой L называется линейным интегралом от вектора $\vec{F}$ по ориентированной кривой L.

$$\int_L \vec{F} d\vec{s} = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

Если кривая L представляет собой замкнутый контур, то линейный интеграл по такому контуру называется циркуляцией векторного поля $\vec{F}$ вдоль контура L.

$$Ц = \oint_L \vec{F} d\vec{s} = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

В векторной форме теорему Стокса можно сформулировать так:

Циркуляция вектора вдоль контура некоторой поверхности равна потоку вихря (ротора) через эту поверхность.

$$\int_\lambda \vec{F} d\vec{s} = \iint_\Delta \vec{n} rot\vec{F} d\Delta$$

Отметим, что рассмотренная выше формула Грина – Остроградского является частным случаем формулы Стокса.

Также при условии равенства нулю всех компонент ротора вектора, получаем, что криволинейный интеграл по любой пространственной кривой равен нулю, т.е. криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования.

Выражение $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$ называется дивергенцией вектора (дивергенцией векторной функции) $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ и обозначается $div\vec{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$

Формула Гаусса – Остроградского может быть записана в виде: $\oiint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iiint_V \left(\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$ или $\iiint_V div\vec{F} dv = \oiint_S \vec{F}\vec{n} dS$ т.е. интеграл от дивергенции векторного поля $\vec{F}$ по объему равен потоку вектора через поверхность, ограниченную этим объемом.

Векторное поле $\vec{F}$ называется соленоидальным (трубчатым), если div $\vec{F}$ =0.

С помощью описанного выше оператора Гамильтона можно представить определенные нами понятия следующим образом:

$$gradf = \vec{\nabla} f; \quad div\vec{F} = \vec{\nabla}\vec{F}; \quad rot\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F};$$

Выражение $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ называется оператором Лапласа.

Справедливы следующие соотношения: $div(gradf) = \Delta f$; $\quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \Delta f$

Справедливость этих равенств легко проверить непосредственной подстановкой.

Тема 4 Теория вероятностей и математическая статистика

Ключевые вопросы

Случайные события и их классификация.

Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Повторные испытания.

Случайные величины. Закон распределения дискретных случайных величин. Функция распределения и ее свойства. Плотность распределения и ее свойства. Математическое ожидание случайной величины, свойства математического ожидания. Дисперсия случайной величины, свойства дисперсии.

Равномерное распределение. Нормальное распределение. Показательное распределение.

Основные задачи математической статистики. Статистический ряд. Гистограмма. Числовые характеристики статистического распределения. Свойства точечных оценок. Доверительный интервал. Доверительная вероятность.

Понятие регрессии, регрессионные зависимости. Ковариация. Коэффициент корреляции. Метод наименьших квадратов как метод аналитического сглаживания и определения параметров регрессионной зависимости.

Статистические гипотезы.

Основные определения и методы

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений.

Классической вероятностью *P(A)* события *A* называется отношение числа благоприятствующих этому событию исходов (т.е. таких, при которых событие А обязательно произойдет) к общему числу несовместных единственно возможных и равновозможных исходов. Геометрической вероятностью события *A* называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события А, к мере пространства элементарных исходов. Статистической вероятностью события А называется число, около которого колеблются частости W(A) появления этого события во многих сериях выборочных испытаний больших объемов, проводимых в одинаковых условиях.

К основным типам комбинаторных задач относятся отыскание числа перестановок, размещений, сочетаний, перестановок с повторениями, размещений с повторениями, сочетаний с повторениями.

Объединением (или суммой) нескольких случайных событий называется событие, состоящее в осуществлении, по крайней мере, одного из данных событий.

Совмещением (или произведением) двух событий А и В называется событие, состоящее в одновременном осуществлении обеих событий.

Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A)_2 + ... + P(A_n)$.

Вероятность суммы совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий: $P(A_1, A_2, ..., A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \, ... P(A_n)$.

Вероятность совместного появления нескольких зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятности каждого последующего события вычисляются в предположении, что все предыдущие события произошли: $P(A_1, A_2, ..., A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) \, ... P_{A_1 A_2 ... A_{n-1}}(A_n)$.

Вероятность события А, которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий, образующих полную группу событий, равна сумме произведений вероятности каждого из событий на соответствующую условную вероятность события А: $P(A) = P(H_1) P_{H_2}(A) + P(H_2) P_{H_2}(A) + \, ... + P(H_n) P_{H_n}(A)$.

Условные вероятности гипотез определяются по формулам Байеса: $P_A(H_i)=\dfrac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_n)P_{H_n}(A)}$.

Вероятность появления события A m раз в n независимых испытания, в каждом из которых вероятность этого события постоянна и равна p, находится по формуле Бернулли: $P_n(m)=C_n^m\, p^m q^{\,n-m}$. Если число испытаний n велико, то применение формулы Бернулли приводит к очень громоздким вычислениям. В таких случаях пользуются приближенными формулами, основанными на теоремах Лапласа и Пуассона.

Локальная теорема Лапласа: вероятность Pn (m) того, что в n испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, событие наступит ровно m раз приближённо равна $P_n(m)\approx\dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$, где $x=\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Формула Пуассона: если вероятность p наступления события постоянна и мала, а число испытаний n велико, то Pn (m) $\approx\dfrac{\lambda^m\cdot e^{-\lambda}}{m!}$, где λ = n p.

Интегральная теорема Лапласа: если вероятность p наступления некоторого события в каждом испытании постоянна (0 < p <1), а число испытаний n достаточно велико, то вероятность того, что это событие наступит не менее a раз и не более b приближенно равна $P(a\le m\le b)=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$, где $\alpha=\dfrac{a-np}{\sqrt{npq}}$, $\beta=\dfrac{b-np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – функция Лапласа.

Случайная величина X – это некоторая функция элементарного события $\omega: X=\varphi(\omega)$, где $\omega\in U$. Значение этой функции зависит от того, какое элементарное событие ω появилось в результате опыта. Случайные величины часто обозначают большими буквами, а их значения малыми. Случайная величина называется дискретной, если ее возможные значения могут быть пронумерованы числами натурального ряда. Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Законом распределения случайной величины называется любое правило, позволяющее находить вероятность возможных событий (значений), связанных со случайной величиной. Закон распределения дискретных случайных величин может быть задан в форме ряда, многоугольника и функции (интегрального закона) распределения.

Непрерывную случайную величину можно задать функцией распределения F(x) действительной переменной x, определяемой формулой F(x) = P (X < x) и функцией, которая называется плотностью распределения или дифференциальной функций и определяется формулой f(x) = F'(x).

Основные числовые характеристики и формулы приведены в таблице:

Характеристика	Обозначение	Случайная величина	
		Дискретная	Непрерывная
Математическое ожидание	M (X)	$M(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot p_i$	$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx$

Дисперсия	D (X)	$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2\cdot p_i$ $\quad D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2\cdot f(x)dx$ $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$
Среднее квадратичное отклонение (стандарт)	σ_x	$\sigma_x=\sqrt{D(X)}$

Дискретная случайная величина X имеет биномиальный закон распределения, если она принимает значения 0, 1, 2, …, m, …, n с вероятностями $P_n(m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}$, где 0 < p < 1, q=1-p, m=0, 1, …, n.

Дискретная случайная величина X имеет закон распределения Пуассона, если она принимает значения 0, 1, 2, …, m, … (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями $P_n(m)=\dfrac{\lambda^m\cdot e^{-\lambda}}{m!}$, $\quad \lambda=n\cdot p$.

Дискретная случайная величина X имеет геометрическое распределение, если она принимает значения 0, 1, 2, …, m, … (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями $P_n(m)=p\cdot q^{m-1}$, где $0<p<1,\ q=1-p,\ m=1,2,...$.

Распределение вероятностей называют нормальным, если оно описывается дифференциальной функцией $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

Равномерным распределением называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, дифференциальная функция f (x) которой сохраняет постоянное значение на сегменте [a; b] и равна нулю вне этого сегмента, т. е. $f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<a,\\ \dfrac{1}{b-a} & при \quad a\le x\le b,\\ 0 & при \quad x>b.\end{cases}$

Непрерывная случайная величина х распределена по показательному закону, если ее плотность вероятности имеет вид: $f(x)=\begin{cases}0 & при \ x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & при \ x\ge 0. \quad где \ \lambda>0.\end{cases}$

Математическая статистика – это направление математики, которое опирается на теорию вероятностей, позволяющую оценить надёжность и точность выводов, делаемых на основании ограниченного статистического материала.

Выборкой или выборочной совокупностью называется совокупность случайно отобранных объектов. Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Вариационным рядом называется ряд значений исследуемого признака с указанием соответствующих весов (частот или относительных частот). Выделяют дискретные и вариационные ряды.

Гистограммой частот сгруппированной выборки называется кусочно-постоянная функция, постоянная на интервалах группировки и принимающая на каждом из них соответственно значения $\dfrac{n_i}{\Delta x_i}$, i = 1,2, …, k. Площадь ступенчатой фигуры под графиком гистограммы равна объему выборки *n*. Полигоном частот называется ломаная с вершинами в точках $(x_i, \frac{n_i}{\Delta x_i})$, *i* – 1,2 ,…, *k*, где *k* – число интервалов вариационного ряда.

Эмпирической функцией распределения случайной величины X называется функция $F_n(x) = \frac{n_x}{n}$, где *n* – объем выборки; n_x – число значений x_i из выборки, удовлетворяющих неравенству $x_i < x$.

Выборочная средняя вычисляется по формуле: $\bar{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}$. Выборочная дисперсия вычисляется по формуле: $D_в(x) = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_в)^2 n_i}{n}$. Выборочные начальные моменты вычисляются по формулам: $\overline{m}_к(x) = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i)^к n_i}{n}$. Выборочные центральные моменты вычисляются по формулам: $\mu_к(x) = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_b)^к n_i}{n}$. Эксцесс: $E_x = \frac{\mu_4}{S^4} - 3$. Асимметрия: $a_x = \frac{\mu_3}{S^3}$.

Точечной оценкой параметра называется оценка, определяемая одним числом.

Оценка $\tilde{\Theta} = \tilde{\Theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$–должна приближаться к оцениваемому параметру Θ по мере увеличения объема выборки. Если оценка стремится по вероятности к оцениваемому параметру, то она называется состоятельной.

Оценка параметра $\tilde{\Theta}$ называется несмещенной, если она при любом объеме выборки имеет математическое ожидание, совпадающее с оцениваемым параметром, т.е. M ($\tilde{\Theta}$) = Θ.

Несмещенная оценка $\tilde{\Theta}$ параметра Θ называется эффективной, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок параметра Θ, вычисленных по выборкам одного и того же объема n.

Доверительным интервалом для параметра θ называется интервал (θ_1, θ_2), содержащий (покрывающий) истинное значение θ с заданной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$. Число $\gamma = 1 - \alpha$ называется доверительной вероятностью, а значение γ − уровнем значимости, границы θ_1 и θ_2 являющимися случайными величинами − соответственно нижней и верхней границами доверительного интервала.

Величина $\alpha = 1 - \gamma$ указывает на то, что те значения параметра θ, для которых $|\theta - \tilde{\theta}| > \varepsilon$ нужно признать противоречащими опытным данным.

Доверительный интервал для оценки математического ожидания *a* при неизвестном σ: $\left(\bar{x}_в - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x}_в + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ с надежностью γ покрывает неизвестный параметр a; точность оценки $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

Доверительный интервал для оценки математического ожидания a при неизвестном σ для заданной доверительной вероятности γ вычисляется по формуле: $\bar{x}_в - t_\gamma S/\sqrt{n} < a < \bar{x}_в + t_\gamma S/\sqrt{n}$, где $\bar{x}_в = \dfrac{\sum_{i-1}^{n} x_i}{n}$, $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2 n_i}{n-1}$.

Доверительный интервал для дисперсии записан скобках: $P\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}} \le \sigma^2 \le \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}}\right) = \gamma$

Функциональная зависимость среднего значения результативного признака от изменения факторного признака называют регрессией. Уравнение $\bar{y}_x = f(x)$ называют уравнением регрессии *У* на X, функцию $f(x)$ называют регрессией *У* на X, а её график - линейной регрессией *У* на *X*. Задачами регрессивного анализа являются: установление формы зависимости (линейная или нелинейная; положительная или отрицательная и т. д.); определение функций регрессии и установление влияния факторов на зависимую переменную. Важно не только определить форму регрессии, указать общую тенденцию изменения зависимой переменной, но и выяснить, каково было бы действие на зависимую переменную главных факторов, если бы прочие не изменялись и если бы были исключены случайные элементы. Для этого определяют функцию регрессии в виде математического уравнения того или иного типа.

Уравнение парной линейной регрессии: $\bar{y}_x = a_0 + a_1 x$, где a_0 и a_1 - параметры, которые подлежат определению. Эти параметры могут быть определены методом наименьших квадратов из системы уравнений: $\begin{cases} a_0 + a_1\bar{x} = \bar{y}, \\ a_0\bar{x} + a_1\bar{x}^2 = \overline{xy}, \end{cases}$ где $\bar{x}$, $\bar{y}$ –средние выборочные величины.

Оценка качества регрессионной модели осуществляется посредством применения t-критерия Стьюдента и F-критерия Фишера.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Практические занятия сопровождают лекционный курс дисциплины. Практические занятия должны проводиться в логичном единстве с теоретическим курсом, подкрепляя и уточняя понятийный аппарат.

Каждый практическое занятие начинается с теоретического опроса необходимого материала и проверки домашнего задания. Далее на конкретных примерах рассматриваются пути и способы применения тех математических методов, которые не требуют использования электронных вычислительных машин. При этом необходимо активизировать самостоятельную работу студентов. Задания и методические указания к ним выдаются студентам, каждый из которых выбирает оптимальный для себя темп работы. Преподавателю отводится роль консультанта и помощника. Задания, вызвавшие трудности у большинства студентов, разбираются на доске.

В конце занятия выдается домашнее задание, состоящее из теоретических вопросов, уяснение которых необходимо для следующего занятия и практических заданий по пройденному материалу.

При выполнении домашнего задания решать задачи удобнее поэтапно, в той последовательности, в какой эти задания сформулированы. В этом случае при возникновении трудностей будет легче обратиться к анализу тех тем, которые изложены в лекции и задач, разобранных на практическом занятии.

После выполнения практической части задания следует найти ответы на теоретические вопросы, заданные преподавателем и таким образом подготовится к осознанному восприятию следующего материала.

Активная, регулярная самостоятельная работа над домашним заданием – путь к успешному усвоению дисциплины.

Тема 1. Ряды

Основные вопросы

Числовые ряды, их свойства

Сходимость числовых рядов.

Функциональные ряды, область сходимости.

Степенные ряды. Ряд Тейлора.

Тригонометрические ряды. Ряд Фурье

Типовые задания

1. Исследовать на сходимость числовые ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{n^5+4};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^5+4n+1}.;\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+4}{3n+1}\right)^n;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{4^n};$$

2. На отрезке $[-\pi, \pi]$ разложить в ряд Фурье функции $f(x) = \{1$, если $-\pi \le x < 0; -1$, если $0 \le x < \pi\}$ и $f(x) = x$.

3. Найти область сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

4. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \arcsin x$, используя разложение функции $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. Найти первые пять членов разложения в ряд решения уравнения $y' = x^2 + y^2$, удовлетворяющего условию $y = \frac{1}{2}$ при $x = 0$.

6. Запишите уравнение гармонических колебаний, зная что их амплитуда равна 47, частота 3, а начальная фаза 12.

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $y=x^2$ с периодом 2, заданную на отрезке [-1, 1].

8. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $y=x-x^2$, заданную на полупериоде [0, 1], продолжив ее: а) четным; б) нечетным образом.

9. Дана функция $f(x)=\cos 2x$ с периодом 2π, заданная на интервале $[0,\pi]$. Определить коэффициент a_3 разложения $f(x)$ в ряд Фурье.

Тема 2 Кратные, криволинейные, поверхностные интегралы

Основные вопросы

Двойной и тройной интегралы, их свойства. Вычисление кратных интегралов

Определение криволинейных интегралов первого и второго рода, их свойства, примеры вычисления.

Определение поверхностных интегралов, их свойства.

Приложение кратных интегралов к решению задач.

Типовые задания

1. Вычислить: а) $\iint_D x \ln y\,dxdy$, где $D: \begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 1 \le y \le e \end{cases}$;

б) $\iiint_T x^2 yz\,dxdydz$, где $T: \begin{cases} x = 0,\ y = 0,\ z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$;

в) $\iiint_T (x+y+z)^2 yz\,dxdydz$ где $T: \begin{cases} z \ge (x^2 + y^2)/2 \\ x^2 + y^2 + z^2 \le 3 \end{cases}$;

г) $\iint_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2 + 1}$, где $D: \begin{cases} y = \sqrt{1-x^2} \\ y = 0 \end{cases}$;

д) $\oint_L y\,dx$ где $L: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$

е) $\int_{AB} (x^2 - y^2)dx + xydy,$ если путь от A(1; 1) до B (3; 4) отрезок прямой.

2. Определить координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y^2=4x+4$ и $y^2=-2x+4$.

3. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=4$, вырезанной цилиндром $x^2/4+y^2=1$

4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$ и $z=1$.

Тема 3 Элементы теории поля

Основные вопросы

Вычисление характеристик потенциального поля.

Вычисление характеристик векторного поля.

Вычисление потока.

Вычисление циркуляции.

Типовые задания

1. Найти векторные линии в векторном поле $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{k}$.

2. Найти работу силы $\vec{F} = (x^2 - 2y) \cdot \vec{i} + (y^2 - 2x) \cdot \vec{j}$ вдоль отрезка *MN* от точки *M (-4;0)* до точки *N (0;2).*

3. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = (y - z) \cdot \vec{i} + (z - x) \cdot \vec{j} + (x - y) \cdot \vec{k}$ вдоль контура $L: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 2 \cdot (1 - \cos t) \end{cases}$ в направлении, соответствующем возрастанию параметра t.

4. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{a} = (y^2 + z^2) \cdot \vec{i} + (z^2 + x^2) \cdot \vec{j} + (x^2 + y^2) \cdot \vec{k}$ в точке *M (1,1,1).*

5. Найти ротор векторного поля $\vec{a} = (x + z) \cdot \vec{i} + (x + y) \cdot \vec{k}$.

Тема 4 Теория вероятностей и математическая статистика

Основные вопросы

Случайные события и их классификация.

Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Повторные испытания.

Случайные величины. Закон распределения дискретных случайных величин. Функция распределения и ее свойства. Плотность распределения и ее свойства. Математическое ожидание случайной величины, свойства математического ожидания. Дисперсия случайной величины, свойства дисперсии.

Равномерное распределение. Нормальное распределение. Показательное распределение.

Основные задачи математической статистики. Статистический ряд. Гистограмма. Числовые характеристики статистического распределения. Свойства точечных оценок. Доверительный интервал. Доверительная вероятность.

Понятие регрессии, регрессионные зависимости. Ковариация. Коэффициент корреляции. Статистические гипотезы.

Метод наименьших квадратов как метод аналитического сглаживания и определения параметров регрессионной зависимости

Типовые задания

1. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

2. Два студента условились встретиться в определенном месте между 8 и 9 часами. Пришедший первым ждет второго в течение 10 минут. Чему равна вероятность встречи студентов, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти наудачу и момент прихода независим.

3. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень: попадет только один, попадут оба, ни один не попадет.

4. Одинаковые детали обрабатываются тремя рабочими на трёх станках. Вероятность брака у них равна 0,01; 0,02; 0,03. Обработанные детали откладываются в один ящик. Какова вероятность того, что наугад взятая деталь будет бракованной, если производительности станков относятся как 2:3:5. Иначе говоря, каков общий процент бракованных деталей производится тремя рабочими?

5. Завод выпускает за три декады месяца соответственно 20 %, 30 %, 50 % задания, причём вероятности брака соответственно составляют 0,01, 0,012, 0,015. Найти вероятность того, что изделие выпущено в первой декаде, если в нём обнаружен дефект.

6. Два равносильных соперника играют в шахматы. Что вероятнее выиграть:

а) одну партию из двух или две из четырёх?

б) не менее двух партий из четырёх или не менее трёх партий из пяти?

Ничьи во внимание не принимаются.

7. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Найти вероятность 100 попаданий из 320 выстрелов.

8. Торговая база получила 10 000 электрических лампочек. Вероятность повреждения электрической лампочки в пути равна 0,0001. Определить вероятность того, что в пути повреждено 4 электрических лампочки.

9. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 120 испытаниях событие наступит не менее 70 раз и не более 90 раз.

10. Два стрелка сделали по два выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, для второго - 0,7. Необходимо: а) составить закон распределения общего числа попаданий; б) найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

11. Случайная величина X в интервале (3, 5) задана дифференциальной функцией $f(x)=\frac{3}{4}x^2+6x-\frac{45}{4}$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание X.

12. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ x^2/4 & при\ 0<x\le 2,\\ 1 & при\ x>2.\end{cases}$$

Найти плотность вероятности *f(x)*; построить графики *f (x)* и *F(x)*; вычислить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X).

13. Средний рост взрослых женщин некоторого национального округа равен 167,3 см; σ = 5,8 см. Каков общий процент женщин ростом: не превышающим 170 см, не меньшим, чем 165 см.

14. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.

15. Предприятие получает сырье, характеризующееся процентным содержанием в нем полезного вещества А, а также стабильностью этого показателя. Для поступившей партии сырья были произведены анализы концентрации вещества А по 40 опытам: 2,17; 2,27; 2,60; 2,76; 2,81; 3,00; 3,05; 3,06; 3,22; 3,28; 3,37; 3,60; 3,63; 3,68; 3,69; 3,90; 4,27; 4,39; 4,67; 4,69; 4,84; 5,02; 5,02; 5,02; 5,17; 5,29; 5,35; 5,61; 5,62; 5,62; 6,01; 6,64; 6,68; 7,07; 7,12; 7,35; 7,36; 7,40; 7,99; 8,19.

Пусть концентрация вещества А может быть рассмотрена как случайная величина X, распределенная по нормальному закону.

Найти выборочные точечные характеристики: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, эксцесс, асимметрию, моду, коэффициент вариации; выдвинуть гипотезу относительно близости распределения к нормальному; записать плотность вероятности и функцию распределения; найти доверительный интервал, покрывающий математическое ожидание с заданной доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha = 0{,}95$, считая σ неизвестным; найти доверительный интервал, покрывающий среднее квадратическое отклонение σ с заданной доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha = 0{,}95$.

16. В результате таможенного контроля 4 тыс. мужчин и 5 тыс. женщин выявлено, что 60 мужчин и 40 женщин нарушили правила таможенных перевозок. Можем ли мы, на основании экспериментальных данных, утверждать, что мужчины достоверно чаще нарушают правила таможенных перевозок, чем женщины? Принять уровень значимости равным 0,05.

17. Изучается зависимость себестоимости одного изделия (Y, р.) от величины выпуска продукции (X, тыс. шт.) по группе предприятий за отчётный период. Получены следующие данные:

X	2	3	4	5	6
Y	1,9	1,7	1,8	1,6	1,4

Провести корреляционно-регрессивный анализ зависимости себестоимости одного изделия от выпуска продукции.

18. По заданной выборке найти линейную функцию методом наименьших квадратов. Построить чертеж. Обосновать правильность выбора степени многочлена, если относительная погрешность данных равна одному проценту среднего значения зависимой переменной.

xi	68	62	65	70	63	63	67	68	55	66	58
yi	-264	-240	-253	-275	-248	-243	-264	-267	-213	-218	-223

19. Задание. Даны наблюдавшиеся значения некоторой случайной величины:

34	25	29	34	12	28	13	28	28	17
23	31	32	23	16	22	34	22	25	28
24	24	25	28	26	19	29	21	30	18
30	30	21	30	19	20	30	34	20	36
28	36	27	17	27	26	26	19	29	24
37	28	31	25	23	33	35	31	22	30
25	26	22							

Требуется:

1) построить сгруппированный статистический ряд;

2) построить гистограмму и полигон относительных частот;

3) найти выборочные точечные характеристики: среднюю, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

20. Приводятся результаты измерения некоторой величины, которую будем рассматривать как n реализаций случайной величины X.

20,58	22,80	25,4	26,08	23,25	21,42
23,1	24,09	24,02	26,12	22,84	25,10

В предположении, что X имеет нормальное распределение, требуется:

1) найти точечные несмещенные оценки математического ожидания a и среднего квадратического отклонения σ;

2) найти доверительный интервал, покрывающий математическое ожидание с заданной доверительной вероятностью γ=0,95;

3) найти погрешность, с которой среднее арифметическое оценивает математическое ожидание a случайной величины X, если доверительная вероятность γ=0,99; γ=0,999;

4) найти минимальный объем выборки, чтобы с доверительной вероятностью γ=0,95 можно было утверждать, что, принимая среднее арифметическое за математическое ожидание случайной величины X, допускаем погрешность $\varepsilon = \frac{1}{3}\sigma$.

21. Из двух нормально распределенных генеральных совокупностей извлечены выборки.

$_i$:	17	18	19	20	20			D_x=2
$_i$:	18	18	19	20	20	21		D_y=1

Требуется при уровне значимости α=0,05 проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий генеральных совокупностей, если:

а) дисперсии генеральных совокупностей D_x и D_y;

б) дисперсии генеральных совокупностей неизвестны.

В качестве конкурирующей гипотезы принять Н1: Мх≠Му.

22. Даны результаты эксперимента

X	7,5	7	8,3	8,4	6,9	7,7	8,1	7,6	7,9	8,2
Y	26	27	22	21	27	25	21	21	23	22

Требуется:

1) в предположении, что между х и у существует линейная зависимость, определить ее эмпирическое уравнение;

2) в предположении, что между х и у существует квадратичная зависимость, определить ее эмпирическое уравнение;

3) найти сумму квадратов отклонений для найденных зависимостей сравнить качество приближений.

23. Дана выборка

X	51	50	33	40	42	51	52	51	55	36	53
У	70	56	31	48	73	72	40	66	76	34	63

По заданной выборке:

1) найти уравнение прямой линии регрессии У на X;

2) оценить тесноту линейной связи, вычислив выборочный коэффициент корреляции;

3) проверить гипотезу о значимости коэффициента корреляции при уровне значимости 0,1.

3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа студентов предназначена для углубления сформированных знаний, умений, навыков. Самостоятельная работа развивает мышление, позволяет выявить причинно-следственные связи в изученном материале, решить теоретические и практические задачи. Самостоятельная работа студентов проводится с целью: систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов; углубления и расширения теоретических знаний; формирования умений использовать справочную документацию и специальную литературу; развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;- формированию самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;- развития исследовательских умений. Роль самостоятельной работы возрастает, т.к. перед учебным заведением стоит задача в т. ч. и по формированию у студента потребности к самообразованию и самостоятельной познавательной деятельности

Студентами практикуется два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию. В этом случае студенты обеспечиваются преподавателем необходимой учебной литературой, дидактическим материалом, в т. ч. методическими пособиями и методическими разработками.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия. Видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы могут быть:

- для овладения знаниями: чтение текста (учебника, методической литературы); составления плана текста; графическое изображение структуры текста, графическое изображение последовательности выполнения графической работы, выполнение графических работ; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочниками; ознакомление с нормативными документами; учебно-исследовательская работа; использование компьютерной техники, интернета и др.;
- для закрепления систематизации знаний: работа с конспектом лекции (обработки текста); повторная работа над учебным материалом (учебника, первоисточника, дополнительной литературы); составление плана выполнения работы в соответствие с планом, предложенным преподавателем; изучение ГОСТов; ответы на контрольные вопросы; тестирование, выполнение упражнений и графических работ;
- для формирования умений: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; выполнение чертежей, схем.

Основное содержание самостоятельной работы составляет выполнение домашних заданий, расчетно-графических работ и подготовку к контрольным работам и экзамену.

Прежде чем приступать к выполнению расчетно-графической работы, необходимо ознакомиться с содержанием теоретических вопросов по представленному списку литературы и по лекциям.

Работа пишется на стандартных листах писчей бумаги. Все листы заполняются только с одной стороны. Оформление расчетно-графической работы осуществляется в соответствии со стандартом. Каждая расчетно-графическая работа начинается с титульного листа, который служит обложкой работы. Сверху на нем указывается принадлежность студента к учебному заведению, факультету, специализации или кафедре. В середине листа указывается название изучаемой темы или раздела и название учебного задания, номер варианта. Ниже и справа указывается фамилия и инициалы студента, номер академической группы, фамилия и инициалы преподавателя. Внизу титульного листа отмечают год выполнения работы.

Эта страница служит также для отметок преподавателя о выполнении учебного задания и замечаний по поводу подготовленного студентом отчета.

При оформлении работы необходимо соблюдать нумерацию заданий. Задание переписывается полностью и ниже оформляется решение. Работа должна быть сдана на кафедру к назначенному преподавателем сроку.

Каждый учебный семестр заканчивается аттестационными испытаниями: зачетно - экзаменационной сессией.

Подготовка к экзаменационной сессии и сдача зачетов и экзаменов является ответственейшим периодом в работе студента. Серьезно подготовиться к сессии и успешно сдать все экзамены - долг каждого студента. Рекомендуется так организовать свою учебу, чтобы перед первым днем начала сессии были сданы и защищены все лабораторные работы, сданы все зачеты, выполнены другие работы, предусмотренные графиком учебного процесса.

Основное в подготовке к сессии - это повторение всего материала, курса или предмета, по которому необходимо сдавать экзамен. Только тот успевает, кто хорошо усвоил учебный материал.

Если студент плохо работал в семестре, пропускал лекции, слушал их невнимательно, не конспектировал, не изучал рекомендованную литературу, то в процессе подготовки к сессии ему придется не повторять уже знакомое, а заново в короткий срок изучать весь материал. А это зачастую, оказывается, невозможно сделать из-за нехватки времени. Для такого студента подготовка к экзаменам будет трудным, а иногда и непосильным делом, а финиш - отчисление из учебного заведения.

В дни подготовки к экзаменам избегай чрезмерной перегрузки умственной работой, чередуй труд и отдых.

Задание для расчетно-графической работы

Вариант №1

1. Дан интеграл $\int_0^2 dx \int_{x^2}^{2\sqrt{x}} dy$. Требуется: а) построить на плоскости xOy область интегрирования заданного интеграла; б) изменить порядок интегрирования; в) вычислить площадь области интегрирования.

2. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $z = 1 - x$, $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

3. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$.

4. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+5}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} x^n$.

6. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем предварительного разложения подынтегральной функции в ряд: $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sqrt{x}} dx$.

7. Вероятности отличной сдачи экзаменов для студента по трем предметам соответственно равны 0,8; 0,7; 0,75. Найти вероятность того, что во время сессии он сдаст: а) только один предмет; б) хотя бы один предмет.

8. В районе 24 человека обучается на заочном факультете института, из них шесть на факультете механизации, двенадцать на – агрономическом факультете и шесть – на экономическом факультете. Вероятность успешно сдать все экзамены на предстоящей сессии для студентов факультета механизации равна 0,6, агрономического факультета – 0,76 и экономического факультета – 0,8. а) найти вероятность того, что наудачу взятый студент, сдавший успешно все экзамены, окажется студентом экономического факультета; б) студент сдал все экзамены. Какова вероятность того, что он учится на агрономическом факультете?

9. Игральный кубик подбросили 125 раз. Какова вероятность того, что цифра 6 появится: а) 120 раз; б) не более 60 раз?

10. Вероятность того, что необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. Составить закон распределения X – числа библиотек, которые посетит студент, если в городе четыре библиотеки. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Найти и построить функцию распределения $F(X)$.

11. Случайная величина задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ \frac{1}{6}x^2+\frac{5}{6}x & при \quad 0<x\le 1, \\ 1 & при \quad x>1; \end{cases}$. Найти: 1) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3})$; 2) функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$; 3) числовые характеристики случайной величины X–$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 4) построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

12. Найти выборочное уравнение прямой $\bar{y}_x-\bar{y}=r_b\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})$ регрессии y на x по данной корреляционной таблице:

Y	X						
	5	10	15	20	25	30	n_y
10	2	3					5
20		7	3				10
30			2	50	2		54
40			1	10	6		17
50				4	7	3	14
n_y	2	10	6	64	15	3	$n=100$

Вариант №2

1. Дан интеграл $\int_0^3 dx \int_{8-3x}^{8-x^2} dy$. Требуется: а) построить на плоскости xOy область интегрирования заданного интеграла; б) изменить порядок интегрирования; в) вычислить площадь области интегрирования.

2. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $z=2x^2+y^2+1$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

3. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n5^{n+1}}$.

4. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^3+3}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}x^n$.

6. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем предварительного разложения подынтегральной функции в ряд: $\int_0^1 x^4 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$.

7. По мишени стреляют три стрелка. Вероятности попадания для них соответственно равны 0,8; 0,85; 0,9. Найти вероятность того, что при залпе в мишень попадут: а) все три стрелка; б) только один стрелок; в) хотя бы один стрелок.

8. Стрелковое отделение получило 10 винтовок, из которых 8 пристрелянных, две нет. Вероятность попадания в цель из пристрелянной винтовки равна 0,6, а из не пристрелянной 0,4. а) найти вероятность, что стрелок из наудачу взятой винтовки попадет в цель при одном выстреле; б) стрелок поразил цель. Какова вероятность, что он стрелял из пристреленной винтовки?

9. Вероятность появления изделия высшего сорта в партии равна 0,8.Найти вероятность того, что в партии из 900 изделий число изделий высшего сорта: а) ровно 560; б) заключено между 600 и 700.

10. Всхожесть семян гороха составляет 80%. Составить закон распределения случайной величины X – число взошедших семян из четырех посеянных. Составить функцию распределения $F(X)$ и построить ее график. Найти числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

11. Случайная величина задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \frac{x^2}{25} \text{ при } 0 < x \le 5, \\ 1 \text{ при } x > 5. \end{cases}$.

Найти: 1) вероятность попадания случайной величины X в интервал ($\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$); 2) функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$; 3) числовые характеристики случайной величины X - $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 4) построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

12. Найти выборочное уравнение прямой $\bar{y}_x - \bar{y} = r_b \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$ регрессии y на x по данной корреляционной таблице:

Y	X						
	15	20	25	30	35	40	n_y
30	2	6					8
40		4	4				8
50			7	35	8		50
60			2	10	8		20
70				5	6	3	14
n_y	2	10	13	50	22	3	$n = 100$

Вариант №3

1. Дан интеграл $\int_0^3 dx \int_{x^2-3}^{3x-3} dy$. Требуется: а) построить на плоскости xOy область интегрирования заданного интеграла; б) изменить порядок интегрирования; в) вычислить площадь области интегрирования.

2. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $z^2 + x^2 = a^2$, $y = x$, $y = 0$, $z = 0$.

3. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)5^n}$.

4. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} x^n$.

6. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем предварительного разложения подынтегральной функции в ряд: $\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx$.

7. Устройство состоит из трёх независимо работающих узлов, вероятности отказа которых за время работы соответственно равны 0,1; 0,15; 0,3. Найти вероятность того, что время работы откажут: а) два элемента; б) хотя бы один элемент.

8. Для посева заготовлены семена 4 сортов пшеницы. Причем, 20% всех семян 1-го сорта, 30% - 2-го сорта, 10% - 3-го сорта и 40 % всех семян – 4-го сорта. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 40 зерен, для первого сорта равна 0,5, для второго - 0,3, для третьего - 0,2, для четвертого - 0,1. а) найти вероятность того, что наудачу взятое зерно даст колос, содержащий не менее 40 зерен; б) из зерна вырос колос, содержащий не менее 40 зерен. Какова вероятность того, что посаженное зерно было третьего сорта?

9. При проведении эксперимента монету подбрасывали 4096 раз, причем герб выпал 2068 раз. С какой вероятностью можно было ожидать результат?

10. Проводится три независимых опыта, в каждом из которых событие А появляется с вероятностью 0,4. Построить ряд распределения случайной величины X – числа появлений события А в трех опытах. Найти M(X), D(X), σ(X). Составить функцию распределения F(X), построить ее график.

11. Случайная величина задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \frac{x^2}{36} \text{ при } 0 < x \le 6, \\ 1 \text{ при } x > 6. \end{cases}$

Найти: 1) вероятность попадания случайной величины X в интервал ($\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$); 2) функцию плотности распределения вероятностей *f(x)*; 3) числовые характеристики случайной величины *X* - M(X), D(X), σ(X); 4) построить графики *F(x)* и *f(x)*.

12. Найти выборочное уравнение прямой $\bar{y}_x - \bar{y} = r_b \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$ регрессии у на х по данной корреляционной таблице:

Y	X						
	4	9	14	19	24	29	n_y
5	4	2					6
10		6	4				10
15			6	45	2		53
20			2	8	6		16
25				4	7	4	15
n_y	4	8	12	57	15	4	$n = 100$

Вариант №4

1. Дан интеграл $\int_{0}^{3} dx \int_{\frac{2x^2}{3}}^{2\sqrt{3x}} dy$. Требуется: а) построить на плоскости xOy область интегрирования заданного интеграла; б) изменить порядок интегрирования; в) вычислить площадь области интегрирования.

2. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $x^2 = 4 - z^2$, $y = x$, $y = 0$, $z = 0$.

3. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n+2}}$.

4. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$.

6. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем предварительного разложения подынтегральной функции в ряд: $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x^2}{x} dx$.

7. Для сигнализации о возгорании установлены два независимо работающих датчика. Вероятности того, что при возгорании датчик сработает, для первого и второго датчиков соответственно равны 0,9 и 0,95. Найти вероятность того, что при пожаре сработает: а) один датчик; б) оба датчика; в) хотя бы один датчик.

8. В первой бригаде проводятся в три раза больше продукции, чем во второй. Вероятность того, что производимая продукция окажется стандартной, для первой бригады равна 0,7, для второй - 0,8. а) найти вероятность того, что взятая наугад единица продукции будет стандартной; б) взятая наугад единица продукции будет стандартной. Взятая наугад единица продукции оказалась стандартной. Какова вероятность того, что она произведена второй бригадой?

9. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена: а) 125 раз; б) не менее 100 и не более 160 раз.

10. В лифт шестиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью может выйти на любом этаже, начиная со второго. Дискретная случайная величина - число пассажиров, вышедших на четвертом этаже. Найти закон распределения, числовые характеристики, функцию распределения и построить её график.

11. Случайная величина задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \frac{x^2}{16} \text{ при } 0 < x \le 4, \\ 1 \text{ при } x > 4. \end{cases}$.

Найти: 1) вероятность попадания случайной величины X в интервал ($\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$); 2) функцию плотности распределения вероятностей *f(x)*; 3) числовые характеристики случайной величины X - M(X), D(X), σ(X); 4) построить графики *F(x)* и *f(x)*.

12. Найти выборочное уравнение прямой $\bar{y}_x - \bar{y} = r_b \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$ регрессии у на х по данной корреляционной таблице:

Y	X

	2	7	12	17	22	27	n_y
6	4	2					6
12		6	2				8
18			5	40	5		50
24			2	8	7		17
30				4	7	8	19
n_y	4	8	9	52	19	8	$n=100$

Вариант №5

1. Дан интеграл $\int_0^4 dx \int_{\frac{x^2}{8}}^{4\sqrt{x}} dy$. Требуется: а) построить на плоскости xOy область интегрирования заданного интеграла; б) изменить порядок интегрирования; в) вычислить площадь области интегрирования.

2. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

3. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$.

4. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$.

6. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем предварительного разложения подынтегральной функции в ряд: $\int_0^{\frac{1}{3}} x \ln\left(1+\sqrt{x}\right) dx$.

7. Студент пришёл на зачёт, зная из 40 вопросов программы только 30. Чему равна вероятность сдачи зачёта, если для этого надо ответить на случайно доставшийся ему вопрос, а в случае неудачи ответить на дополнительный вопрос, предложенный ему преподавателем случайным образом?

8. Среди студентов института – 30% первокурсники, 35% студентов учатся на 2-м курсе, на 3-м и 4-м курсе их 20% и 15% соответственно. По данным деканатов известно, что на первом курсе 20% студентов сдали сессию только на отличные оценки, на 2-м – 30%, на 3-м – 35%, на 4-м – 40% отличников. а) найти вероятность того, что случайно выбранный студент сдал сессию на отлично; б) наудачу вызванный студент оказался отличником. Какова вероятность того, что он (или она) – третьекурсник?

9. Чему равна вероятность того, что среди 100 случайных прохожих окажутся 32 женщины. Предполагается, что число мужчин и женщин в городе одинаково.

10. Устройство состоит из трёх независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Дискретная случайная величина - число отказавших элементов в одном опыте. Найти закон распределения, числовые характеристики, функцию распределения и построить её график.

11. Случайная величина задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \frac{x^2}{4} \text{ при } 0<x\le 2,\\ 1 \text{ при } x>2.\end{cases}$.

Найти: 1) вероятность попадания случайной величины X в интервал ($\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$); 2) функцию плотности распределения вероятностей *f(x)*; 3) числовые характеристики случайной величины X - M(X), D(X), σ(X); 4) построить графики *F(x)* и *f(x)*.

12. Найти выборочное уравнение прямой $\bar{y}_x-\bar{y}=r_b\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x-\bar{x}\right)$ регрессии y на x по данной корреляционной таблице:

Y	X						
	11	16	21	26	31	36	n_y
20	1	5					6
30		5	3				8
40			9	40	2		51
50			4	11	6		21
60				4	7	3	14
n_y	1	10	16	55	15	3	$n=100$

Вариант №6

1. Дан интеграл $\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{4\sqrt{x}} dy$. Требуется: а) построить на плоскости *xOy* область интегрирования заданного интеграла; б) изменить порядок интегрирования; в) вычислить площадь области интегрирования.

2. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $y=\frac{b}{a}x$, $y=0$, $z=0$.

3. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)7^n}$.

4. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n^2+1}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}x^n$.

6. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем предварительного разложения подынтегральной функции в ряд: $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} x^2e^{-\sqrt{x}}dx$.

7. Для сигнализации о возгорании установлены два независимо работающих датчика. Вероятность того, что при возгорании датчик сработает, для первого и второго датчиков соответственно равны 0,9 и 0,95. Найти вероятность того, что при пожаре сработает: а) один датчик; б) оба датчика; в) хотя бы один датчик.

8. Покупатель с равной вероятностью посещает каждый из трех магазинов. Вероятность того, что покупатель купит товар в первом магазин, равна 0,4, во втором – 0,6 и в тре-

тьем – 0,8. а) найти вероятность того, что покупатель купит товар; б) покупатель купил товар. Какова вероятность того, что он купил его во втором магазине?

9. Вероятность того, что пассажир опоздает на отправлению поезда, равна 0,2. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 625 пассажиров и вероятность этого события.

10. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Имеется 4 патрона. При попадании в мишень стрельба прекращается. Дискретная случайная величина – число израсходованных патронов. Найти закон распределения, числовые характеристики, функцию распределения и построить её график.

11. Случайная величина задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{x}{7} \text{ при } 0<\mathrm{x}\le 7,\\ 1 \text{ при } \mathrm{x}>7.\end{cases}$

Найти: 1) вероятность попадания случайной величины X в интервал ($\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$); 2) функцию плотности распределения вероятностей *f(x)*; 3) числовые характеристики случайной величины X - M(X), D(X), σ(X); 4) построить графики *F(x)* и *f(x)*.

12. Найти выборочное уравнение прямой $\bar{y}_x-\bar{y}=r_b\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x-\bar{x}\right)$ регрессии у на х по данной корреляционной таблице:

Y	X						
	2	7	12	17	22	27	n_y
8	2	4					6
12		3	7				10
16			5	30	10		45
20			7	10	8		25
24				5	6	3	14
n_y	2	7	19	45	24	3	$n=100$

Вариант №7

1. Дан интеграл $\int\limits_0^6 dx\int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{3x}{2}} dy$. Требуется: а) построить на плоскости *xOy* область интегрирования заданного интеграла; б) изменить порядок интегрирования; в) вычислить площадь области интегрирования.

2. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $x+y+z=1$, $3x+y=1$, $\frac{3}{2}x+y=1$, $y=0$, $z=0$.

3. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7^n}{n+3}$.

4. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n5^n}x^n$.

6. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем предварительного разложения подынтегральной функции в ряд: $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x}} dx$.

7. Вероятность попадания в некоторую цель при стрельбе из первого орудия равна 0,8, при стрельбе из другого орудия – 0,7. Найти вероятность поражения цели при одновременном выстреле обоих орудий. Цель будет поражена, если будет хотя бы одно попадание из какого – либо орудия.

8. Два предприятия выпускают однотипные изделия. Причем второе выпускает 55% всех изделий. Вероятность нестандартного изделия первым предприятием равна 0,1, вторым – 0,15. а) определить вероятность того, что взятое наудачу изделие окажется нестандартным; б) взятое изделие оказалось нестандартным. Какова вероятность того, что оно выпущено на втором предприятии.

9. Вероятность наступления события А в каждом из 100 независимых испытаний Равна 0,8. Найти вероятность того, что событие А появится в этих испытаниях: 1) 90 раз; 2) не менее 80 и не более 90 раз.

10. По каналу связи передаются последовательно три сообщения, каждое их которых может быть искажено. Вероятности искажения первого, второго и третьего сообщений соответственно равны 0,1, 0,15 и 0,2. Дискретная случайная величина – число правильно переданных сообщений. Найти закон распределения, числовые характеристики, функцию распределения и построить её график.

11. Случайная величина задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \frac{x}{2} \text{ при } 0 < x \le 2, \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$.

Найти: 1) вероятность попадания случайной величины X в интервал ($\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$); 2) функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$; 3) числовые характеристики случайной величины X - M(X), D(X), σ(X); 4) построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

12. Найти выборочное уравнение прямой $\overline{y}_x - \overline{y} = r_b \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$ регрессии у на х по данной корреляционной таблице:

Y	X						
	11	16	21	26	31	36	n_y
10	2	4					6
20		6	2				8
30			3	50	2		55
40			1	10	6		17
50				4	7	3	14
n_y	2	10	6	64	15	3	$n = 100$

Вариант №8

1. Дан интеграл $\int_0^4 dx \int_{\frac{3x^2}{8}}^{3\sqrt{x}} dy$. Требуется: а) построить на плоскости xOy область интегрирования заданного интеграла; б) изменить порядок интегрирования; в) вычислить площадь области интегрирования.

2. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $y^2 = 4-3x$, $y^2 = x$, $z = 4$, $z = 0$.

3. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^2}$.

4. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{n+2}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} x^n$.

6. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем предварительного разложения подынтегральной функции в ряд: $\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x} \cos 2x dx$.

7. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта по телевидению, равна 0,04. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу того же продукта на рекламном стенде, равна 0,06. Предполагается, что оба события – независимы. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит: а) обе рекламы; б) хотя бы одну рекламу?

8. В магазин поступают телевизоры четырех заводов. Вероятность того, что в течение года телевизор не будет иметь неисправность, равна: для первого завода - 0,9; для второго - 0,8; для третьего - 0,8; для четвертого - 0,99. а) найти вероятность того, что случайно выбранный телевизор выйдет из строя в течении года; б) случайно выбранный телевизор в течение года вышел из строя. Какова вероятность того, что он изготовлен на первом заводе?

9. Вероятность получения по лотерее безвыигрышного билета равна 0,1. Какова вероятность того, что среди 400 наугад купленных билетов: а) ровно 260 безвыигрышных; б) не менее 50 и не более 60 безвыигрышных?

10. В партии из 6 деталей имеется 4 стандартные. Наудачу отобраны 3 детали. Дискретная случайная величина – число стандартных деталей среди отобранных. Найти закон распределения, числовые характеристики, функцию распределения и построить её график.

11. Случайная величина задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -1, \\ \frac{1}{3}(x+1) \text{ при } -1 < x \le 2, \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$. Найти: 1) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$; 2) функцию плотности распределения вероятностей *f(x)*; 3) числовые характеристики случайной величины X - M(X), D(X), σ(X); 4) построить графики *F(x)* и *f(x)*.

12. Найти выборочное уравнение прямой $\bar{y}_x - \bar{y} = r_b \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$ регрессии у на х по данной корреляционной таблице:

Y	X						
	4	9	14	19	24	29	n_y
25	2	4					6
35		9	3				9
45			6	45	4		55
55			2	8	6		16
65				4	7	3	14

n_y	2	10	11	57	17	3	$n=100$

Вариант №9

1. Дан интеграл $\int\limits_{1}^{7} dx \int\limits_{\frac{(x-1)^2}{6}}^{x-1} dy$. Требуется: а) построить на плоскости xOy область интегрирования заданного интеграла; б) изменить порядок интегрирования; в) вычислить площадь области интегрирования.

2. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $y = x^2$, $x+y+z=9$, $y=2$, $z=0$.

3. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^n}$.

4. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} x^n$.

6. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем предварительного разложения подынтегральной функции в ряд: $\int\limits_{0}^{\frac{1}{5}} x^3 e^{-x^3} dx$.

7. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором, третьем справочнике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что формула содержится: а) только в одном справочнике; б) только в двух справочниках; в) во всех трех справочниках.

8. Перед посевом 95% всех семян обрабатываются специальным раствором. Всхожесть семян после обработки равна 99%, необработанных – 85%. а) найти вероятность того, что случайно взятое семя взойдет; б) случайно взятое семя взошло. Какова вероятность того, что оно выращено из обработанного семени?

9. Игральную кость подбрасывают 320 раз. Какова вероятность того, что цифра 5 при этом выпадет: а) ровно 245 раз; б) не менее 70 и не более 83 раз?

10. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Имеется три патрона. При попадании в мишень стрельба прекращается. Дискретная случайная величина – число израсходованных патронов. Найти закон распределения, числовые характеристики, функцию распределения и построить её график.

11. Случайная величина задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -1, \\ \frac{3x}{4} + \frac{3}{4} \text{ при } -1 < x \le \frac{1}{3}, \\ 1 \text{ при } x > \frac{1}{3}. \end{cases}$. Найти: 1) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3})$; 2) функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$; 3) числовые характеристики случайной величины X - M(X), D(X), σ(X); 4) построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

12. Найти выборочное уравнение прямой $\bar{y}_x - \bar{y} = r_b \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \bar{x}\right)$ регрессии y на x по данной корреляционной таблице:

Y	X						
	5	10	15	20	25	30	n_y
8	3	3					6
18		5	4				9
28			40	1	8		50
38			5	10	6		21
48				4	7	3	14
n_y	3	8	49	16	21	3	$n = 100$

Вариант №10

1. Дан интеграл $\int\limits_0^9 dx \int\limits_{\frac{x^3}{9}+1}^{x+1} dy$. Требуется: а) построить на плоскости xOy область интегрирования заданного интеграла; б) изменить порядок интегрирования; в) вычислить площадь области интегрирования.

2. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного заданными поверхностями: $x^2 + y^2 = a^2$, $x + y + z = 2a$, $z = 0$.

3. Исследовать числовой ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^{n+1}}{n^2}$.

4. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n}{n+3}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n 7^{n+1}} x^n$.

6. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем предварительного разложения подынтегральной функции в ряд: $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x}} dx$.

7. Вероятность потери письма в почтовом отделении равна 0,03, а телеграммы – 0,01. Отправлено два письма и одна телеграмма. Какова вероятность того, что дойдет: а) только телеграмма; б) хотя бы одно из отправлений?

8. Число грузовых автомобилей, проезжающих по шоссе, на котором расположено кафе, относится к числу легковых автомобилей, проезжающих по этому же шоссе, как 3:5. Вероятность остановки в кафе для грузового автомобиля равна 0,3; для легкового - 0,45. а) Найти вероятность того, что проезжающий автомобиль остановится в кафе; б) Автомобиль остановился в кафе. Какова вероятность, что это легковой автомобиль?

9. Химчистка выполняет в срок в среднем 70% заказов. Какова вероятность того, что из 150 заказов будут выполнены в срок: а) 90 заказов; б) не менее 100 заказов?

10. Из 10 телевизоров на выставке 4 оказались фирмы «Sony». Наугад для осмотра выбрано 3 телевизора. Составить закон распределения X – числа телевизоров фирмы «Sony» среди трех отобранных. Найти M(X), D(X), σ(X). Найти и построить функцию распределения F(X).

11. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{4}(x+1)^2, & -1\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$. Найти: а) функцию плотности распределения вероятностей f(X); б) числовые характеристики случайной величины X - M(X), D(X), σ(X); в) вероятность попадания случайной величины X в интервал ($\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$); г) построить графики F(X) и f(X).

12. Найти выборочное уравнение прямой $\bar{y}_x-\bar{y}=r_b\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})$ регрессии y на x по данной корреляционной таблице:

Y	X					
	80	90	100	110	120	n_y
100	2	3	5			10
110	2	6	20	7		35
120	1	3	10	9	5	28
130	1	2	5	4	7	19
140			2	3	3	8
n_y	6	14	42	23	15	$n=100$

СОДЕРЖАНИЕ

Татьяна Александровна Юрьева,

доц. каф. общей математики и информатики АмГУ, канд. пед. наук