ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АмГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой ОМиИ

____________Г.В.Литовка

«___» __________2007г.

Факультет Математики и информатики

Кафедра Общей математики и информатики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС по дисциплине *«Математика»* часть IV

для специальностей:

260704 – Технология текстильных изделий

260901– Технология швейных изделий

260902 – Конструирование швейных изделий

280101 – Безопасность жизнедеятельности

330301 – Геология природопользования

Составители: И.Н. Шевченко
О.С. Попова

Благовещенск, 2007 г.

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики информатики

Авторы-составители: Шевченко И.Н. Попова О.С.

Учебно-методический комплекс «Математика» часть IV для специальностей:260704 – Технология текстильных изделий, 260901– Технология швейных изделий, 260902 – Конструирование швейных изделий, 280101 – Безопасность жизнедеятельности. 330301 – Геология природопользования. Благовещенск:АмГУ, 2007.– 90с.

Введение

Учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Математика» предназначен для студентов первого курса специальностей 260901, 260902, 260704, 280101, 130301.

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но так же и элементом общей культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки специалиста.

Учебно-методический комплекс дисциплины (УМКД) разработан в помощь студентам первого и второго курсов обучения. Он создан в связи с необходимостью культивирования в стенах учебного заведения полноценной среды интеллектуального, творческого общества, атмосферы нравственного самосовершенствования как преподавателей, так и студентов, необходимостью развития их самостоятельности активности, повышения математической культуры, привлечения широкого круга вопросов, касающихся работы учебного заведения, в том числе и учебного процесса, формирования и воспитания у молодежи чувства ответственности за свое будущее.

УМКД включает требования к обязательному минимуму содержания дисциплины по государственному образовательному стандарту, учебную программу, тематический план занятий, вопросы к экзамену и зачету, образцы контрольных работ, рекомендуемую литературу.

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Цели и задачи учебной дисциплины «Математика» и ее место в учебном процессе.

1.1. Цели преподавания учебной дисциплины «Математика»

•формирование личности студента, развитие его интеллекта и способностей к логическому мышлению;

•обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске решений.

1.2. Задачи изучения дисциплины.

•на примерах математических понятий и методов продемонстрировать сущность научного подхода, специфику математики, ее роль в развитии других наук;

•научить студентов приемам исследования и решения, математически формализованных задач;

• выработать умения анализировать полученные результаты, привить навыки самостоятельного изучения литературы по математике.

1.3. Перечень учебных дисциплин с указанием разделов, усвоение которых необходимо для изучения осознания учебных тем, вопросов курса «Математика».

- основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории функций комплексного переменного, операционного исчисления, основы теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики;
- математические модели простейших систем и процессов в естествознании;
- математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов;
- основные приемы обработки экспериментальных данных;
- методы аналитического и численного решения алгебраических уравнений;
- методы исследования решений обыкновенных дифференциальных уравнений;
- исследование математических моделей решения прикладных задач.

1.4.После изучения дисциплины студент должен знать и уметь использовать:

•основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, дискретной математики и теории множеств, функционального анализа, векторной алгебры, линейной алгебры, основы теории вероятностей; теории функции комплексного переменного, операционное исчисление;

•математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов;

•основные приемы обработки экспериментальных данных;

•методы аналитического и численного решения алгебраических уравнений;

- методы статистического оценивания и проверки гипотез.

Содержание учебной дисциплины «Математика».

Согласно государственному стандарту математических и естественных дисциплин студент должен изучить:

для специальности: 260901, 260902

- аналитическая геометрия и линейная алгебра; последовательности и ряды; Дифференциальное и интегральное исчисления; векторный анализ и элементы теории поля; гармонический анализ; дифференциальные уравнения; численные методы; функции комплексного переменного; элементы функционального анализа; вероятность и статистика: теория вероятностей, случайные процессы, статическое оценивание и проверка гипотез, статистические методы обработки экспериментальных данных; вариационное исчисление и оптимальное управление; уравнения математической физики.

для специальностей: 260704, 280101

- алгебра (основные алгебраические структуры, векторные пространства и линейные отображения, булевы алгебры);
- геометрия (аналитическая геометрия, многомерная евклидова геометрия, дифференциальная геометрия кривых и поверхностей, элементы топологий); дискретная математика (логические исчисления. Графы, теория алгоритмов, языки грамматики, автоматы, комбинаторика);
- математический анализ (дифференциальное и интегральное исчисления);
- элементы теории функций и функционального анализа, теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения;
- вероятность и статистика (элементарная теория вероятностей, математические основы теории вероятностей, модели случайных процессов, проверка гипотез, принцип максимального правдоподобия, статистические методы обработки экспериментальных данных);
- математические методы в текстильной технологии.

для специальности 330301

- Аналитическая геометрия и линейная алгебра; последовательности и ряды; дифференциальное и интегральное исчисления; векторный анализ и элементы теории поля, гармонический анализ; дифференциальные уравнения; численные методы; функции комплексного переменного; элементы функционального анализа; вероятность и статистика – теория вероятностей, случайные процессы статистическое оценивание и проверка гипотез, статистические метолы обработки экспериментальных данных.

2. ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

	4 СЕМЕСТР **лекций – 36час., практических занятий – 36час.**	Лек	Прак	С/Р
1.	**ВЕКТОРНАЯ ФУНКЦИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО**. - кривизна плоской и пространственной кривой	4	4	
2.	**ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ** – числовые ряды. Сумма ряда, сходимость ряда, действия с рядами. – методы исследования сходимости рядов – функциональные ряды; область сходимости, степенные ряды. – разложение функций в степенные ряды Тейлора и Маклорена. – тригонометрические ряды Фурье.	10	10	13
3.	**ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО** – понятие функций комплексной переменной; предел; непрерывность; – производная функции комплексного переменного; условие Коши-Римана; дифференцируемость элементарных функций; – интегрирование по комплексному аргументу; теорема Коши; интегральная формула Коши; ряд Тейлора; – элементарные функции комплексного переменного; – изолированные особые точки функций комплексного переменного; их классификация; Ряд Лорана; – вычеты; основная теорема о вычетах; применение вычетов к вычислению интегралов.	18	10	13
4.	**ЭЛЕМЕНТЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**	2	0	
5.	**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ** – методы решения нелинейных уравнений. – интерполяция аппроксимация функций. – численное дифференцирование и интегрирование. – численное дифференцирование и интегрирование уравнений.		10	13
	ВСЕГО	34	34	39

3. ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ И ФОРМЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

	4 СЕМЕСТР – 34 час.		
	Векторные функции действительного переменного –6час.	2	
1.	Кривизна плоской кривой, радиус кривизны, эволюта, эвольвента.	2	
2.	Кривизна пространственной кривой, формулы Френе	2	
	Числовые и функциональные ряды – 10час.		
3.	Числовой ряд, сходимость числового ряда. Признаки сходимости.	2	
4.	Функциональные ряды.	2	
5.	Степенные ряды и их приложения.	2	ТР
6.	Ряды Фурье и их приложения.	2	КР
7.	Контрольная работа	2	
	Функции комплексного переменного – 10час.		
8.	Комплексные числа и действия над ними		
9.	Производная функции комплексного переменного; Условия Коши-Римана; дифференцируемость элементарных функций;	2	
10.	Интегрирование по комплексному аргументу; Теорема Коши; интегральная формула Коши; ряд Тейлора.	4	
11.	Изолированные особые точки функции комплексного переменного; их классификация; ряд Лорана.	2	ТР
12.	Вычеты; основная теорема о вычетах; применение вычетов к вычислению интегралов.	2	КР
	Численные методы – 10ч.		
13.	Методы решения нелинейных уравнений	2	
14.	Интерполяция и аппроксимация функций	2	
15.	Численное дифференцирование и интегрирование.	2	
16.	Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений.	2	
76	Приближенное нахождение сумм числовых рядов.	2	

4. ГРАФИК САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

№ недели / подготовка к	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	Σ
Лекциям		1		1		1		1		1		1		1		1		8
Практическим занятиям	0,5	0,5	0,5	0,5	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	15
РГР							6					6						12

Контр работа.								2					2					4
																		39

5. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Понятие функции комплексного переменного. Предел непрерывность.
2. Дифференцируемость и аналитичность функции. Условия Деламбера-Эйлера.
3. Определение интеграла и его свойства.
4. Теорема Коши о независимости интеграла от формы кривой.
5. Интегральная формула Коши.
6. Ряд Тейлора. Теорема о единственности определения аналитических функций.
7. Элементарные функции комплексной переменной.
8. Нули аналитической функции.
9. Ряд Лорана.
10. Классификация изолированных особых точек.
11. Вычеты. Основная теорема о вычетах.
12. Комплексные функции действительного переменного, их дифференцирование.
13. Кривизна плоской кривой, радиус кривизны, эволюта, эвольвента.
14. Кривизна пространственной кривой, формулы Френе.
15. Метод решения нелинейных уравнений.
16. Интерполяция и аппроксимация функций.
17. Численной дифференцирование и интерполирование.
18. Численной интегрирование дифференциальных уравнений.
19. Бинарные отношения, их свойства. Отношения эквивалентности и частичного порядка.
20. Логические операции, их свойства. Алгебра высказываний и предикатов. Кванторы.
21. Булевы функции. Полиномы Жегалкина.
22. Основные понятия теории графов.
23. Обходы графов. Эйлеровы и гамильтоновы циклы в графах.
24. Паросочитания в двудольных графах.
25. Изоморфизм графов. Планарные графы. Раскраска графов.
26. Прикладные задачи и алгоритмы анализа графов.
27. Числовой ряд. Необходимое условие сходимости ряда. Действия с рядами.
28. Признаки сходимости числовых рядов.
29. Знакопеременные ряды.
30. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов.
31. Функциональный ряд. Область сходимости функционального ряда.
32. Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда.
33. Свойства степенного ряда.
34. Ряд Тейлора.

35.Разложение функций в ряд Тейлора.
36.Условие сходимости ряда Тейлора к порождающей функции.
37.Применение рядов приближенных вычислениям значений функций.
38.Вычисление определенных интегралов с помощью степенных рядов.
39.Ряд Фурье. Вывод формул коэффициентов.
40.Условие разложения функций в ряд Фурье.
41.Разложение в ряд Фурье периодических функций.
42.Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.

6. Общие рекомендации по изучению математических дисциплин

0Чтение учебника

1. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления (в том числе, и те, которые из-за их простоты в учебнике опущены), а также воспроизводя имеющиеся в учебнике чертежи и схемы.

2. Особое внимание следует обратить на определение основных понятий. Студент должен подробно разобрать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь привести аналогичные примеры самостоятельно.

3. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое из предположений теоремы. Полезно составить схемы доказательства сложных теорем. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем.

4. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т. п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные для письменной или устной консультации с преподавателем.

5. Письменное оформление работы студента имеет исключительно важное значение. Записи в конспекте должны быть сделаны аккуратно. Хорошее внешнее оформление конспекта по изученному материалу не только приучит студента к необходимому в работе порядку, но и позволит ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных, беспорядочных записей.

6. Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы при перечитывании конспекта они

выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и теоремы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы и теоремы, но и может служить постоянным справочником для студента.

1Решение задач

1. Освоение материала дисциплины невозможно без умения решать практические задачи математическими методами. Поэтому чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.
2. При решении задач нужно обосновывать каждый этап решения исходя из теоретических положений дисциплины. Если студент видит несколько путей решения задачи, то он должен сравнить их и выбрать из них самый удобный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения.
3. Решения задач и примеров следует записывать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Ошибочные записи следует не стирать и не замазывать, а зачеркивать. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует особо тщательного выполнения (например, графическая проверка решения, полученного путем вычислений), то следует пользоваться линейкой, транспортиром, циркулем и указывать масштаб на координатных осях либо готовить чертежи при помощи компьютера.
4. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие.
5. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно решить задачу несколькими возможными способами и сравнить полученные результаты.
6. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.
7. При решении задач следует особое внимание уделять экономическому содержанию задачи, итоговых и промежуточных результатов и используемых при решении задачи формул, теорем и методов.

Самопроверка

1. После изучения определенной темы по учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется по памяти

воспроизвести определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем, проверяя себя каждый раз по учебнику. Вопросы для самопроверки, приведенные в настоящем пособии, должны помочь студенту в таком повторении, закреплении и проверке прочности усвоения изученного материала. В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале учебника и перерешать задачи.

2. Иногда недостаточность усвоения того или иного материала выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае нужно вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

3. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Однако здесь следует предостеречь студента от весьма распространенной ошибки, состоящей в том, что благополучное решение задач воспринимается им как признак усвоения теории. Часто правильное решение задачи получается в результате механического применения заученных форм без понимания существа дела. Можно сказать, что решение задач является необходимым, но недостаточным условием хорошего знания теории.

1Использование вычислительной техники

При решении задач полезно использовать вычислительную технику. Компьютер может помочь как при проведении простейших вычислений и оформления графических результатов, так и при решении сложных комплексных задач, которые без применения компьютера являются очень трудоемкими. Мы советуем студенту ориентироваться на распространенный пакет Microsoft Excel, и использовать его при изучении всех разделов математики.

Консультации

1. Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), то он может обратиться к преподавателю для получения от него указаний в виде письменной или устной консультации.

2. В своих запросах студент должен точно указать, в чем он испытывает затруднение. Если он не разобрался в теоретических объяснениях, в доказательстве теоремы или в выводе формулы по учебнику, то нужно указать название учебника, его авторов, год издания, номер страницы, где рассмотрен затрудняющий студента материал и описать, что именно затрудняет студента. Если студент испытывает затруднение при решении задачи, то следует указать характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения.

3. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы для самопроверки.

1Расчетно – графические работы

1. При изучении дисциплины «Математика» студент должен выполнить ряд расчетно – графические работы, главная цель которых — оказать помощь студенту в его работе. Рецензии на эти работы позволяют студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса, указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное исправление дальнейшей работы, помогают сформулировать вопросы для консультации с преподавателем.

2. Не следует приступать к выполнению контрольного задания до изучения теоретического материала, соответствующего данному заданию, и решения достаточного количества задач по этому материалу. Опыт показывает, что чаще всего неумение решить ту или иную задачу контрольного задания вызывается тем, что студент не выполнил это требование.

3. Расчетные работы должны выполняться самостоятельно. Выполненная не самостоятельно работа не дает возможности преподавателю указать студенту на недостатки в его работе, в усвоении им учебного материала, в результате чего студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться неподготовленным к экзамену.

4. Расчетно-графические работы выполняются аккуратно на одной стороне листа стандартного формата А4 либо рукописным способом, либо компьютерным (для компьютерного оформления работы рекомендуется использование пакета Microsoft Word). В любом случае необходимо приложение необходимых распечаток результатов работы компьютерных программ, которые требовалось использовать при выполнении заданий. Графики строятся либо при помощи компьютера (рекомендуется использование пакета Microsoft Excel), либо от руки (черными или цветными карандашами средней твердости на обычной или миллиметровой бумаге). Листы с текстом заданий и графики должны быть сшиты.

4. В работу должны быть включены все требуемые задания строго по положенному варианту. Работы, содержащие задания не своего варианта, не засчитываются.

6. Перед решением каждой задачи необходимо полностью выписать ее условие. В том случае, когда формулировка задачи одна для всех вариантов, а различаются лишь исходные данные, необходимо, переписывая общее условие задачи, заменять общие данные конкретными, соответствующими своему варианту.

7. Текст работы должен содержать все необходимые расчеты и пояснения. Обязательны оглавление и сквозная нумерация всех листов.

8.Работа сдается преподавателю до защиты для проверки. При указании рецензента на требуемую переработку все необходимые дополнения студент прилагает к первоначальному варианту работы, не делая в нем никаких исправлений. На защите студент должен показать умение ставить и исследовать конкретные финансовые задачи, которые он решал при выполнении контрольных заданий.

9.Прорецензированные контрольные задания вместе со всеми исправлениями и добавлениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления преподавателю прорецензированного контрольного задания студент не допускается к сдаче экзамена.

1Лекции и практические занятия

Студенты очной и заочной формы обучения изучают дисциплину «Математика» с помощью посещения лекций, работе на практических занятиях и самостоятельной работы. Темп лекций и практических занятий одинаков (2 ч. лекций и 2 ч. практических занятий в неделю для студентов очной формы обучения и по одному часу — для студентов, обучающихся по заочной форме). После изучения теоретического материала на лекциях этот материал закрепляется на практических занятиях с помощью решения задач из учебников и учебных пособий, приведенных в списке рекомендованной литературы. При этом студент должен систематически (перед каждым занятием) повторять изученный теоретический материал и регулярно решать самостоятельно задачи, рекомендованные преподавателем. Если для студентов очной лекции и практические занятия являются основной формой обучения и на них подробно рассматривается большая часть теоретического материала и разбирается большое количество задач, то студент-заочник эти виды работ должен выполнять самостоятельно.

Вместе с тем, для заочников организуются установочные лекции и практические занятия. Они носят преимущественно обзорный характер. Их цель — обратить внимание на цели и задачи дисциплины, ее место в профессиональной деятельности специалиста, заинтересовать студента изучением дисциплины, обратить внимание на схему построения курса или некоторых его наиболее важных разделов. Кроме того, на этих занятиях могут быть разобраны вопросы, изложение которых в рекомендуемых учебниках и учебных пособиях отсутствует или является недостаточно полным.

Таким образом, лекции и практические занятия не заменяют собой самостоятельной работы студента, а призваны оказать студенту помощь в его самостоятельной работе!

Экзамен

На экзамене выясняется усвоение всех теоретических и прикладных вопросов дисциплины, а также умение применять полученные знания к решению задач. Определения, теоремы, формулы должны формулироваться точно и с пониманием существа дела, задачи должны решаться безошибочно и уверенно, всякая письменная и графическая работа должна быть аккуратной и четкой. Только при выполнении этих условий знания студента могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявляемым программой.

При подготовке к экзамену учебный материал рекомендуется повторить по учебнику и конспекту. Экзамен проводится в устно-письменной форме, каждый студент получает в билете три теоретических вопроса (их список приведен в разделе 5) и 6 задач. Подготовку к ответу на билет следует начинать с решения задачи, так успешное решение задачи является наиболее важным при сдаче экзамена; без ее решения работа студента признается неудовлетворительной. Затем следует подробно ответить на теоретические вопросы билета. На подготовку теоретических вопроса студенту дается не более 1 ч. На решения задач 1,5ч.

После этого студент отвечает преподавателю в устной форме по подготовленному билету. Преподаватель может предложить студенту дополнительные вопросы и задачи, как относящиеся непосредственно к материалу билета, так и из других разделов дисциплины.

Организация самостоятельной работы студентов

Студентам с самого начала учебного года нужно настроиться на повседневную серьезную работу, не откладывая составить расписание занятий в институте (чтобы оно постоянно было на виду). Составить режим работы дома: когда работать, когда отдыхать, когда по дому помогать и заниматься уборкой помещений. Нельзя позволять себе откладывать выполнение текущей работы: написание рефератов, выступлений, выполнение контрольных работ, подготовку к лекциям, практическим и лабораторным занятиям.

Потом чаще всего не будет времени: оно будет бездарно упущено. При чтении лекций, конспектировании сразу учитесь думать, анализировать, выбирать. Старайтесь понять, а не запомнить материал лекции. Всякое настоящее образование добывается путем самообразования. Все, что делаешь и чего добиваешься самолично по своей воле и желанию – остается в голове всего крепче.

7. Формы контроля знаний студентов

Результативность работы обеспечивается системой контроля, которая при очной форме обучения включает опрос студентов на практических занятиях, проверку домашних заданий, контрольные работы, выполнения и защита РГР, проведение коллоквиумов, зачеты и экзамены. Каждое практическое занятие рекомендуется начинать с проверки домашнего задания, опроса по теоретическому материалу (10-15 мин.). На лекциях и практических занятиях рекомендуется проведение мини контрольных работ. Данная программа предусматривает в течении семестра проведение двух плановых контрольных работ и двух индивидуальных заданий (РГР). Контроль за выполнение РГР осуществляется в 2 этапа: проверка письменных отчетов и защита заданий в письменной или устной форме. Индивидуальные задания студентами выполняется по большинству тем курса. Выполнение каждого задания требует не менее 10 часов самостоятельной работы студентов.

Методика формирования результирующей оценки знаний по математики

Результатирующая оценка учитывает:

1) работу студента в течение всего периода изучения дисциплины;
2) получается на основе обобщения отдельных видов работы: работа в течении всего семестра; экзаменационная оценка за ответ по теории; экзаменационная оценка за выполнение практических заданий.
3) все оценки выставляются по пятибалльной системе;
4) для оценки относительной важности отдельных видов контроля вводиться их весовые коэффициенты:

0,4 – для работы в течении семестра;
0,4 – для экзаменационной оценки за теорию;
0,2 – для экзаменационной оценки по практике.

Критерии оценок

- ОТЛИЧНО – полно раскрыто содержание вопросов в объеме программы; четко и правильно даны определения; корректно использованы научные термины; для доказательства использованы различные теоретические знания; ответ самостоятельный и исчерпывающий, без наводящих вопросов.

- ХОРОШО – раскрыто основное содержание вопросов; в основном правильно даны определения и понятия, ответ самостоятельный, но допущены нарушения последовательности изложения, небольшие неточности при использовании научных терминов или выводы, которые исправляться по дополнительным вопросам экзаменатора.
- УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО – усвоено основное содержание учебного материала, но изложение не всегда последовательна; определение понятий нечеткое; допущены ошибки при изложении, в использовании научных терминов, определений.
- НЕУДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО – ответ неправильный, не раскрыто основное содержание программы, допущены грубые ошибки в определении понятий, при использовании терминологии.

8. Методические рекомендации профессорско-преподавательскому составу

Самостоятельная работа

Самостоятельная работа студентов (СРС) – это активны формы индивидуальной и коллективной деятельности, направленные на закрепление материала формирование умений и навыков быстро решать поставленные задачи. СРС предполагает не пассивное «поглощение» готовой информации, а ее поиск и творческое усвоение. Самостоятельная работа призвана подготовить студента к самостоятельной деятельности в будущем.

Строго говоря, все, что не является лекцией, можно отнести к практическим формам обучения. Главная функция практических занятий – организация и проведение отработки (интериоризация) учебного материала и формирование у студентов умений и навыков по применению знаний на практике, самостоятельного их приобретения и углубления.

Занятия такого типа, как правило, состоят из двух частей. Сперва проводится подготовка студентов к самостоятельной работе, затем они самостоятельно решают поставленные задачи. Эта форма занятий обеспечивает индивидуализацию обучения и способствует активизации познавательной деятельности студентов. Занятия должны быть организованны таким образом, чтобы все без исключения студенты были заняты решением посильной для них познавательной задачи. Значит, преподаватель должен хорошо знать (с позиции диагностики) индивидуальные особенности студентов. Желательно так организовать занятия, чтобы они содействовали предъявлению достаточно высоких требований к наиболее подготовленным студентам, обеспечивали их максимальное интеллектуальное развитие и в то же время создавали условия для успешного приобретения знаний и умений менее подготовленными студентами.

Аудиторные практически занятия

Преподаватель спрашивает основной теоретический материал, относящийся к данной теме либо опросом каждого студента, либо организацией математического диктанта, либо опросом доказательства теорем, вывода формул. После чего педагог предлагает студентам проделать ряд упражнений для усвоения и закрепления рассматриваемого вопроса. Студенты работают под наблюдением преподавателя, который проверяет результаты деятельности и указывает ошибки.

Все виды работы на практическом занятии оцениваются по пятибалльной системе.

Консультация – форма учебного занятия, в процессе которого студент получает ответы от преподавателя на конкретные вопросы или пояснения по соответствующим теоретическим положениям или аспектам их практического применения.

Консультация может быть индивидуальной или групповой, в зависимости от учебной ситуации: индивидуальное занятие, выполняемое студентам, может потребовать индивидуальной консультации, теоретические вопросы по учебному предмету – соответственно групповой консультации.

9. ЗАДАНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

Варианты контрольной работы по теме
«Функции комплексного переменного»
Вариант 1.

1. Представить значение функции в алгебраической форме.
$Ln(2\sqrt{3}-2i)$; 3^{-1+i}.
2. Найти производную от функции W=f(z).
$W=e^{z}Cos2z$; $W=i\bar{z}+2z^{2}$
3. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой.
$\int_{AB}(z^{2}+1)dz$, $AB: y=x^{2}$, $z_{A}=0$, $z_{B}=1+i$.
4. Вычислить интеграл, применяя интегральную формулу Коши.
$$\int_{|z-1|=1}\frac{dz}{(z-1)^{2}(z-9)}.$$
5. Найти область сходимости ряда. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n}n}{(z+1)^{n}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{n}}{(i+n)^{n}}$.
6. Найти вычеты функции W=f($\bar{z}$) в ее особых изолированных точках.
$F(z)=\frac{e^{z}}{z^{2}-1}$

Вариант 2.

1. Выполнить действия с комплексными числами $z_1=3-2i$, $z_2=-2+4i$,

   1) z_1+z_2, 2) z_1-z_2, 3) $z_1\cdot z_2$, 4) $z_1:z_2$
2. Записать в тригонометрической и показательной формах комплексные

   числа: $-2+2\sqrt{3}i$, $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$, $-1-i\sqrt{3}$, $\frac{2\sqrt{2}}{1+i}$, $\frac{-4}{\sqrt{3}-3}$
3. Выполнить действия с комплексными числами в тригонометрической и показательной формах :

   $Z_1=\frac{4}{1+i\sqrt{3}}$ $Z_2=\frac{1}{\sqrt{3}-i}$ $Z_1\cdot Z_2$, $z_1:z_2$ Z_1^{3}; Z_2^{6}
4. Решить уравнения : $Z^{2}-3z+25=0$ $2z^{2}+5z+6{,}25=0$ $Z^{2}-2z+4=0$.

5. Найти производную от функции $W = f(z)$

1) $W = Z^2 - 5z^2 + z \cdot e^z$; 2) $W = \overline{Z} \cdot z + 2ixy$; 3) $W = 2\cos 5z - z^2 e^{-z^2}$;

4) $W = xy - \frac{i}{2}(x^2 - y^2)$; 5) $W = e^z \cdot \cos 2z$; 6) $W = z \cdot \operatorname{Im} z$

6. Показать, что $f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2 y - y^3)$ дифференцируема и найти ее производную.
7. Дана мнимая часть $V(x, y) = x + y$ дифференцируемой функции $f(z)$. Найти эту функцию.

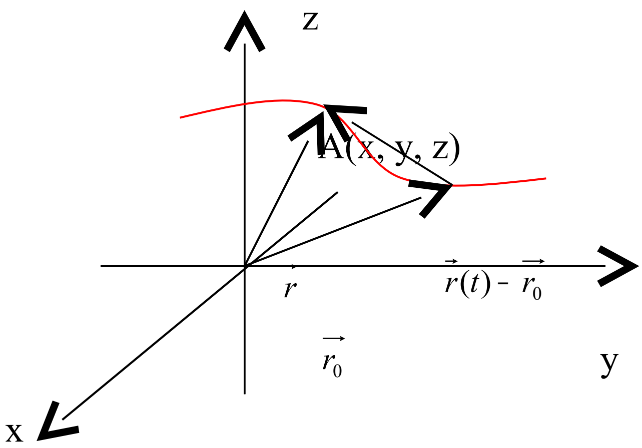
Числовые и функциональные ряды

Вариант 1

1. Исследовать на сходимость ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n+2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+1} \right)^n$.
2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ и, если он сходится, то вычислить его сумму с точностью до 0,001.
3. Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$.
4. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sqrt{x}} dx$.

10. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Лекция 1. Векторная функция действительного переменного .



Пусть некоторая кривая в пространстве задана параметрическими уравнениями: x = φ(t); y = ψ(t); z = f(t);

Радиус- вектор произвольной точки кривой: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + f(t)\vec{k}$.

Таким образом, радиус- вектор точки кривой может рассматриваться как некоторая векторная функция скалярного аргумента t. При изменении параметра t изменяется величина и направление вектора $\vec{r}$.

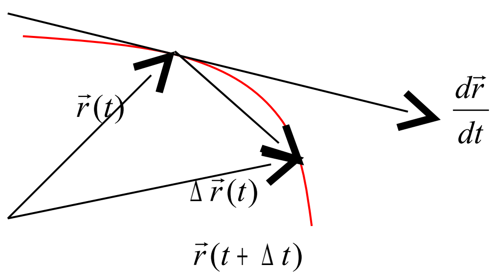
Запишем соотношения для некоторой точке t_0:

$\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t) = \varphi_0$; $\lim\limits_{t\to t_0}\psi(t) = \psi_0$; $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = f_0$;

Тогда вектор $\vec{r}_0 = \varphi_0\vec{i} + \psi_0\vec{j} + f_0\vec{k}$ - предел функции $\vec{r}$ (t). $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t) = \vec{r}_0$.

Очевидно, что $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\vec{r}(t) - \vec{r}_0\right| = \lim\limits_{t\to t_0}\sqrt{(\varphi(t)-\varphi_0)^2 + (\psi(t)-\psi_0)^2 + (f(t)-f_0)^2} = 0$, тогда $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\vec{r}(t)\right| = \left|\vec{r}_0\right|$.

Чтобы найти производную векторной функции скалярного аргумента, рассмотрим приращение радиус- вектора при некотором приращении параметра t.



$$\vec{r}(t+\Delta t)=\varphi(t+\Delta t)\vec{i}+\psi(t+\Delta t)\vec{j}+f(t+\Delta t)\vec{k}; \qquad \Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t);$$

$$\Delta\vec{r}=(\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t))\vec{i}+(\psi(t+\Delta t)-\psi(t))\vec{j}+(f(t+\Delta t)-f(t))\vec{k}$$

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}\vec{i}+\frac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{\Delta t}\vec{j}+\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\vec{k}$$

или, если существуют производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $f'(t)$, то

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\varphi'(t)\vec{i}+\psi'(t)\vec{j}+f'(t)\vec{k}=\vec{r}'$$

Это выражение – вектор производная вектора $\vec{r}$.

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[f'(t)]^2}$$

Если имеется уравнение кривой: $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$; $z=f(t)$,

то в произвольной точке кривой $A(x_A, y_A, z_A)$ с радиус- вектором

$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=\varphi(t)\vec{i}+\psi(t)\vec{j}+f(t)\vec{k}$ можно провести прямую с уравнением

$\dfrac{x-x_A}{m}=\dfrac{y-y_A}{n}=\dfrac{z-z_A}{p}$, т.к. производная $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ - вектор, направленный по

касательной к кривой, то имеем $\dfrac{x-x_A}{\frac{dx_A}{dt}}=\dfrac{y-y_A}{\frac{dy_A}{dt}}=\dfrac{z-z_A}{\frac{dz_A}{dt}}$.

<u>Свойства производной векторной функции скалярного аргумента.</u>

1) $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}_1+\vec{r}_2-\vec{r}_3)=\dfrac{d\vec{r}_1}{dt}+\dfrac{d\vec{r}_2}{dt}-\dfrac{d\vec{r}_3}{dt}$

2) $\dfrac{d(\lambda\vec{r})}{dt}=\lambda\dfrac{d\vec{r}}{dt}$, где $\lambda=\lambda(t)$ – скалярная функция

3) $\dfrac{d(\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2)}{dt}=\dfrac{d\vec{r}_1}{dt}\cdot\vec{r}_2+\vec{r}_1\cdot\dfrac{d\vec{r}_2}{dt}$

4) $\dfrac{d(\vec{r}_1\times\vec{r}_2)}{dt}=\dfrac{d\vec{r}_1}{dt}\times\vec{r}_2+\vec{r}_1\times\dfrac{d\vec{r}_2}{dt}$

Уравнение нормальной плоскости к кривой будет иметь вид:

$$\frac{dx_A}{dt}(x-x_A)+\frac{dy_A}{dt}(y-y_A)+\frac{dz_A}{dt}(z-z_A)=0$$

Пример. Составить уравнения касательной и нормальной плоскости к линии, заданной уравнением $\vec{r} = \vec{i}\cos t + \vec{j}\sin t + \sqrt{3}t\vec{k}$ в точке $t = \pi/2$.

Уравнения, описывающие кривую, по осям координат имеют вид:

$$x(t) = cost; \quad y(t) = sint; \quad z(t) = \sqrt{3}t;$$

Находим значения функций и их производных в заданной точке:

$$x'(t) = -sint; \qquad y'(t) = cost; \qquad z'(t) = \sqrt{3}$$

$$x'(\pi/2) = -1; \qquad y'(\pi/2) = 0; \qquad z'(\pi/2) = \sqrt{3}$$

$$x(\pi/2) = 0; \qquad y(\pi/2) = 1; \qquad z(\pi/2) = \pi\sqrt{3}/2$$

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z - \frac{\pi\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}$$ – это уравнение касательной.

Нормальная плоскость имеет уравнение: $-1\cdot(x-0) + 0 + \sqrt{3}(z - \frac{\pi\sqrt{3}}{2}) = 0$,

$-x + \sqrt{3}z - \frac{3\pi}{2} = 0$.

Параметрическое задание функции.

Исследование и построение графика кривой, которая задана системой уравнений вида: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, производится в общем то аналогично исследованию функции вида y = f(x). Находим производные: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \\ \frac{dy}{dt} = \psi'(t) \end{cases}$

Теперь можно найти производную $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. Далее находятся значения параметра t, при которых хотя бы одна из производных φ′(t) или ψ′(t) равна нулю или не существует. Такие значения параметра t называются **критическими**.

Для каждого интервала $(t_1, t_2), (t_2, t_3), \dots, (t_{k-1}, t_k)$ находим соответствующий интервал $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{k-1}, x_k)$ и определяем знак производной $\frac{dy}{dx}$ на каждом из полученных интервалов, тем самым определяя промежутки возрастания и убывания функции.

Далее находим вторую производную функции на каждом из интервалов и, определяя ее знак, находим направление выпуклости кривой в каждой точке.

Для нахождения асимптот находим такие значения t, при приближении к которым или x или y стремится к бесконечности, и такие значения t, при приближении к которым и x и y стремится к бесконечности.

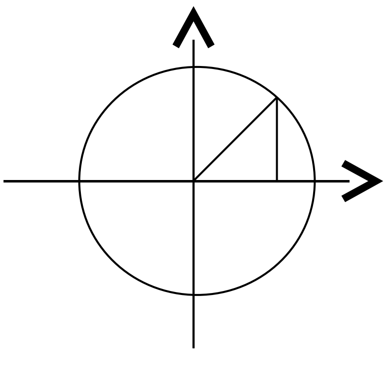
В остальном исследование производится аналогичным также, как и исследование функции, заданной непосредственно.

На практике исследование параметрически заданных функций осуществляется, например, при нахождении траектории движущегося объекта, где роль параметра t выполняет время.

Ниже рассмотрим подробнее некоторые широко известные типы параметрически заданных кривых.

Уравнения некоторых типов кривых в параметрической форме.

Окружность.



Если центр окружности находится в начале координат, то координаты любой ее точки могут быть найдены по формулам:

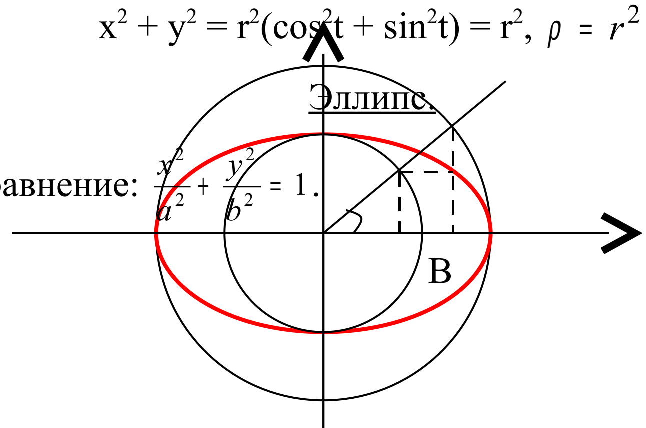
$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \qquad 0 \le t < 360^0$$

Если исключить параметр t, то получим каноническое уравнение окружности:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2, \ \rho = r^2$$

Эллипс.

Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$



C M(x, y)

t

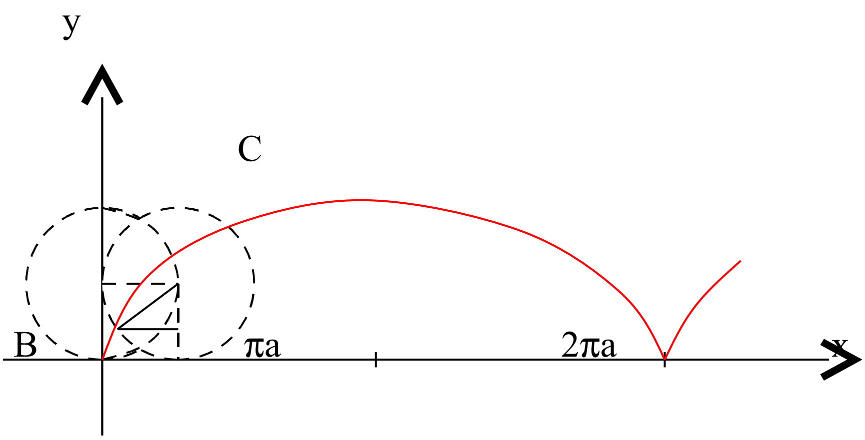
O N P

Для произвольной точки эллипса M(x, y) из геометрических соображений можно записать: $\frac{x}{\cos t} = a$ из ΔOBP и $\frac{y}{\sin t} = b$ из ΔOCN, где a- большая полуось эллипса, а b- меньшая полуось эллипса, x и y – координаты точки M.

Получили параметрические уравнения эллипса: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$

Угол t называется **эксцентрическим углом**.

<u>Циклоида.</u>



<u>Определение.</u> Циклоидой называется кривая, которую описывает некоторая точка, лежащая на окружности, когда окружность без скольжения катится по прямой.

Пусть окружность радиуса a перемещается без скольжения вдоль оси x. Тогда из геометрических соображений можно записать: OB = $\cup MB$ = at; PB = MK = asint;

∠MCB = t; Тогда y = MP = KB = CB – CK = a – acost = a(1 – cost).

x = at – asint = a(t – sint).

Итак: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ при $0 \le t \le 2\pi$ - это параметрические уравнения циклоиды.

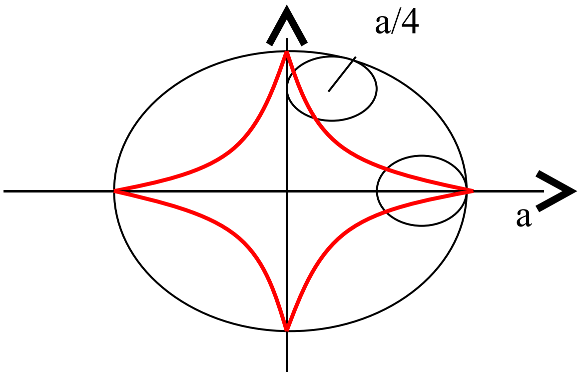
Если исключить параметр, то получаем:

$$x = 2\pi a - \left(a \cdot \arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2} \right), \qquad \pi a \le x \le 2\pi a$$

$$x = a \cdot \arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}, \qquad 0 \le x \le \pi a$$

Астроида.

Данная кривая представляет собой траекторию точки окружности радиуса а/4, вращающейся без скольжения по внутренней стороне окружности радиуса а.



Параметрические уравнения, задающие изображенную выше кривую,

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \le t < 2\pi,$$

Преобразуя, получим: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^{2/3}$

Производная функции, заданной параметрически.

Пусть $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad t_0 \le t \le T$

Предположим, что эти функции имеют производные и функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$.

Тогда функция $y = \psi(t)$ рассматривается как сложная функция $y=\psi[\Phi(x)]$.

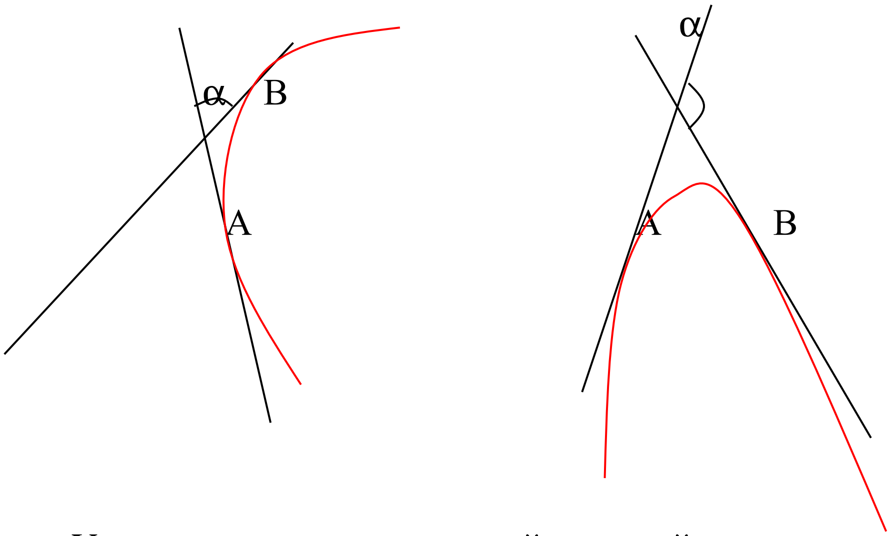
$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt}\frac{d\Phi(x)}{dx}$ т.к. $\Phi(x)$ – обратная функция, то $\frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{d\varphi(t)}{dt}}$

Окончательно получаем: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d\psi(t)}{dt}}{\frac{d\varphi(t)}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

Таким образом, можно находить производную функции, не находя непосредственной зависимости у от х.

Лекция 2. Кривизна плоской и пространственной кривой.

<u>Кривизна плоской кривой.</u>



<u>Определение:</u> Угол α поворота касательной к кривой при переходе от точки А к точке В называется **углом смежности**.

Соответственно, более изогнута та кривая, у которой при одинаковой длине больше угол смежности.

<u>Определение:</u> Средней кривизной $K_{ср}$ дуги $\overset{\cup}{AB}$ называется отношение соответствующего угла смежности α к длине дуги $\overset{\cup}{AB}$.

$$K_{cp} = \frac{\alpha}{\overset{\cup}{AB}}$$

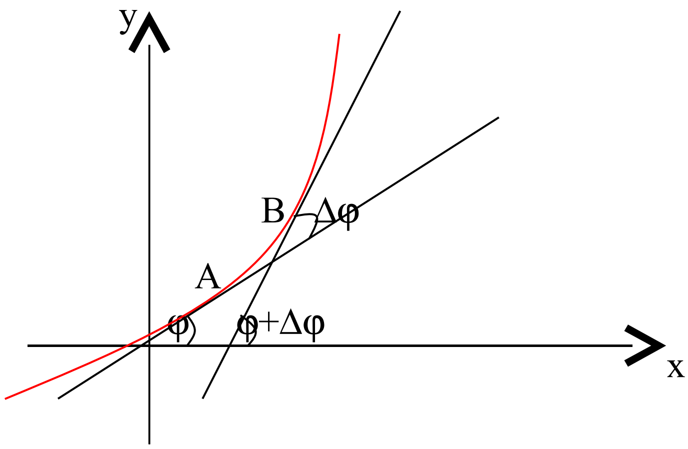
Отметим, что для одной кривой средняя кривизна ее различных частей может быть различной, т.е. данная величина характеризует не кривую целиком, а некоторый ее участок.

<u>Определение:</u> Кривизной дуги в точке K_A называется предел средней кривизны при стремлении длины дуги $\overset{\cup}{AB} \to 0$. $K_A = \lim\limits_{A\to B} K_{cp} = \lim\limits_{AB\to 0} \frac{\alpha}{\overset{\cup}{AB}}$

Легко видеть, что если обозначить $\overset{\cup}{AB}$ = S, то при условии, что угол α - функция, которая зависит от S и дифференцируема, то $K_A = \frac{d\alpha}{dS}$

<u>Определение:</u> Радиусом кривизны кривой называется величина $R = \left|\frac{1}{K_A}\right|$.

Пусть кривая задана уравнением y = f(x).



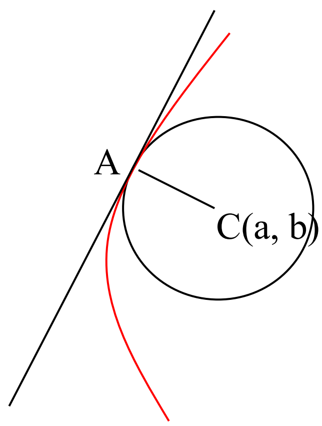
$K_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta S}$; $\lim_{\Delta S\to 0} K_{ср} = \frac{d\varphi}{dS}$; Если φ = φ(x) и S = S(x), то $\frac{d\varphi}{dS} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{dS}{dx}}$.

$\frac{dy}{dx} = tg\varphi$; $\Rightarrow$ $\varphi = arctg\frac{dy}{dx}$ $\Rightarrow$ $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. Для дифференциала дуги:

$\frac{dS}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, тогда $\frac{d\varphi}{dS} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{dS}{dx}} = \frac{\frac{d^2y/dx^2}{1+(dy/dx)^2}}{\sqrt{1+(dy/dx)^2}} = \frac{d^2y/dx^2}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$

Т.к. $|K_A| = \left|\frac{d\varphi}{dS}\right| = \frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$. В других обозначениях: $|K_A| = \frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}$.

Рассмотрим кривую, заданную уравнением: y = f(x).



Если построить в точке А кривой нормаль, направленную в сторону выпуклости, то можно отложить отрезок АС = R, где R – радиус кривизны кривой в точке А. Тогда точка С(a, b) называется **центром кривизны** кривой в точке А.

Круг радиуса R с центром в точке С называется **кругом кривизны**. Очевидно, что в точке А кривизна кривой и кривизна окружности равны.

Можно показать, что координаты центра кривизны могут быть найдены по формулам: $a = x - \dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}$; $b = y + \dfrac{1+y'^2}{y''}$;

<u>Определение:</u> Совокупность всех центров кривизны кривой линии образуют новую линию, которая называется **эволютой** по отношению к данной кривой. По отношению к эволюте исходная кривая называется **эвольвентой**.

Приведенные выше уравнения, определяющие координаты центров кривизны кривой определяют уравнение эволюты.

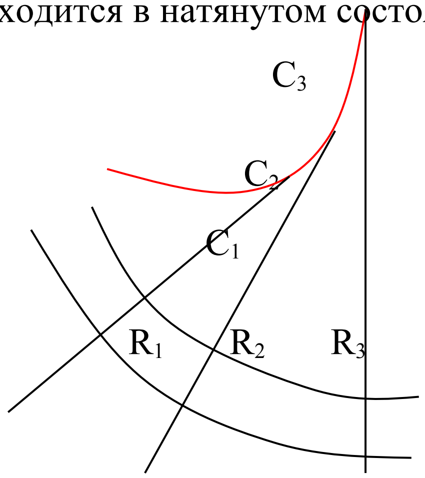
<u>Свойства эволюты.</u>

<u>Теорема 1:</u> Нормаль к данной кривой является касательной к ее эволюте.

<u>Теорема 2:</u> Модуль разности радиусов кривизны в любых точках кривой равен модулю длины соответствующей эволюты.

Надо отметить, что какой – либо эволюте соответствует бесконечное число эвольвент.

Указанные выше свойства можно проиллюстрировать следующим образом: если на эволюту натянута нить, то эвольвента получается как траекторная линия конца нити при ее сматывании или разматывании при условии, что нить находится в натянутом состоянии.



$$|R_2 - R_1| = \overset{\cup}{C_1C_2}$$

$$|R_3 - R_2| = \overset{\cup}{C_2C_3}$$

M_1

M'_1 M_2 M_3

M'_2 M'_3

<u>Пример:</u> Найти уравнение эволюты кривой, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$$

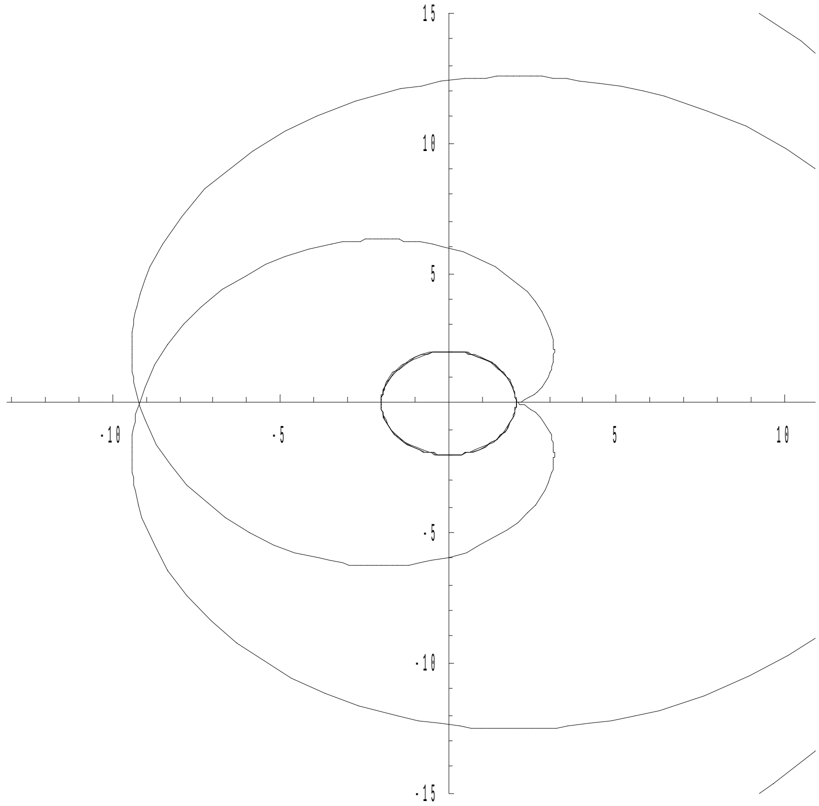
$$\begin{cases} \dot{x} = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t \\ \dot{y} = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t \end{cases}$$

$$y'' = \frac{d(tgt)}{dx} = \frac{d(tgt)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \sec^2 t\cdot\frac{1}{\dot{x}} = \frac{\sec^3 t}{at}$$

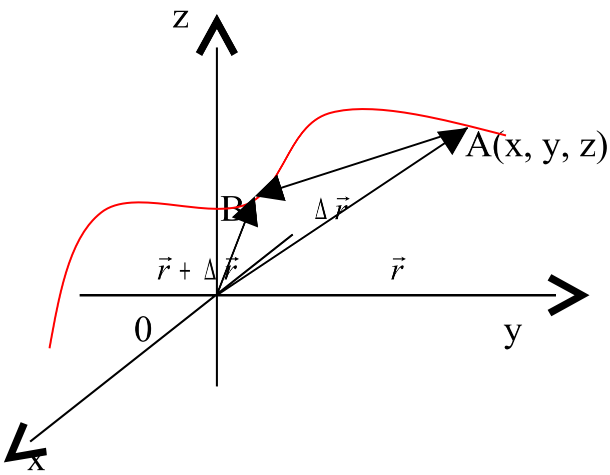
Уравнения эволюты: $\begin{cases} p = a(\cos t + t\sin t) - \dfrac{at\sec^2 t}{\sec^3 t}\cdot tgt = a\cos t \\ q = a(\sin t - t\cos t) + \dfrac{at\sec^2 t}{\sec^3 t} = a\sin t \end{cases}$

Окончательно: $\begin{cases} p = a\cos t \\ q = a\sin t \end{cases}$ - это уравнения окружности с центром в начале координат радиуса а. Исходная кривая получается своего рода разверткой окружности.

Ниже приведены графики исходной кривой и ее эволюты.


15
10
5
-5
-10
-15
-10
-5
5
10

Кривизна пространственной кривой.



Для произвольной точки А, находящейся на пространственной кривой, координаты могут быть определены как функции некоторой длины дуги S.

$$x = \varphi(S); \qquad y = \psi(S); \qquad z = f(S);$$

$$\vec{r} = \vec{r}(S) = \varphi(S)\vec{i} + \psi(S)\vec{j} + f(S)\vec{k};$$

Приведенное выше уравнение называют **векторным уравнением линии в пространстве.**

Определение: Линия, которую опишет в пространстве переменный радиус – вектор $\vec{r}(S)$ при изменении параметра S, называется **годографом** этого вектора.

$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta S} = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{\overset{\cup}{AB}}$, тогда $\frac{d\vec{r}}{dS} = \lim\limits_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta S}$ - вектор, направленный по касательной к кривой в точке А(x, y, z), но т.к. $\lim\limits_{A\to B}\frac{|\overrightarrow{AB}|}{\overset{\cup}{AB}} = 1$, то $\vec{a} = \frac{d\vec{r}}{dS}$ - единичный вектор, направленный по касательной.

Если принять $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то $\vec{a} = \frac{dx}{dS}\vec{i} + \frac{dy}{dS}\vec{j} + \frac{dz}{dS}\vec{k}$.

Причем $\sqrt{\left(\frac{dx}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dS}\right)^2} = 1$.

Рассмотрим вторую производную $\frac{d^2\vec{r}}{dS^2} = \frac{d}{dS}\left[\frac{d\vec{r}}{dS}\right] = \frac{d\vec{a}}{dS}$;

<u>Определение:</u> Прямая, имеющая направление вектора $\frac{d\vec{a}}{dS}$ называется **главной нормалью** к кривой. Ее единичный вектор обозначается $\vec{n}$.

$$\frac{d\vec{a}}{dS} = K \cdot \vec{n}\text{, где К – кривизна кривой, } \frac{d^2\vec{r}}{dS^2} = \frac{\vec{n}}{R};$$

Кривизна пространственной кривой может быть найдена по формуле:

$$K = \frac{\sqrt{(\vec{r}' \times \vec{r}'')^2}}{\sqrt{\left[(\vec{r}')^2\right]^3}}$$

Возможна и другая запись формулы для кривизны пространственной кривой (она получается из приведенной выше формулы):

$$K = \sqrt{\left(\frac{d^2\vec{r}}{dS^2}\right)^2} = \left|\frac{d^2\vec{r}}{dS^2}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dS^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dS^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dS^2}\right)^2}$$

<u>Определение:</u> Вектор $\frac{d^2\vec{r}}{dS^2}$ называется **вектором кривизны.** Величина

$\rho = \frac{1}{K}$ называется **радиусом кривизны.**

<u>О формулах Френе.</u>

Формулами Френе называются соотношения:

$\frac{d\vec{a}}{dS} = \frac{\vec{n}}{R}$; $\frac{d\vec{b}}{dS} = \frac{\vec{n}}{T}$; $\frac{d\vec{n}}{dS} = -\frac{\vec{a}}{R} - \frac{\vec{b}}{T}$; $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{a}$; Последняя формула получена из двух первых.

В этих формулах: $\vec{n}$ - единичный вектор главной нормали к кривой,

$\vec{b}$ - единичный вектор бинормали,

R – радиус кривизны кривой $\left\{R = \frac{1}{K}\right\}$,

Т – радиус кручения кривой.

<u>Определение:</u> Плоскость, проходящая через касательную и главную нормаль к кривой в точке А называется **соприкасающейся плоскостью.**

Определение: Нормаль к кривой, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, называется **бинормалью.** Ее единичный вектор- $\vec{b}$.

$$\left|\frac{d\vec{b}}{dS}\right| = \frac{1}{T}; \qquad \frac{d\vec{b}}{dS} = \frac{1}{T}\cdot\vec{n};$$

Величина $\frac{1}{T}$ называется **кручением кривой.**

Лекция 3. Числовые ряды. Сумма ряда. Признаки сходимости.

Основные определения.

Определение. Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называется **числовым рядом**. $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

При этом числа $u_1, u_2, \ldots$ будем называть членами ряда, а u_n – общим членом ряда.

Определение. Суммы $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $\quad n = 1, 2, \ldots$ называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Таким образом, возможно рассматривать последовательности частичных сумм ряда $S_1, S_2, \ldots, S_n,$

Определение. Ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim S_n = S, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Определение. Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

Свойства рядов.

1) Сходимость или расходимость ряда не нарушится если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.

2) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum Cu_n$, где С – постоянное число.

<u>Теорема.</u> *Если ряд* $\sum u_n$ *сходится и его сумма равна S, то ряд* $\sum Cu_n$ *тоже сходится, и его сумма равна CS. (C ≠ 0)*

3) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$. **Суммой** или **разностью** этих рядов будет называться ряд $\sum (u_n \pm v_n)$, где элементы получены в результате сложения (вычитания) исходных элементов с одинаковыми номерами.

<u>Теорема.</u> *Если ряды* $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *сходятся и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд* $\sum (u_n \pm v_n)$ *тоже сходится и его сумма равна S+ σ.*

$$\sum (u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n = S + \sigma$$

Разность двух сходящихся рядов также будет сходящимся рядом.
Сумма сходящегося и расходящегося рядов будет расходящимся рядом.
О сумме двух расходящихся рядов общего утверждения сделать нельзя.

При изучении рядов решают в основном две задачи: исследование на сходимость и нахождение суммы ряда.

1. Если ряд $\sum u_n$ сходится, то необходимо, чтобы общий член u_n стремился к нулю. Однако, это условие не является достаточным. Можно говорить только о том, что если общий член не стремится к нулю, то ряд точно расходится. Например, так называемый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является расходящимся, хотя его общий член и стремится к нулю.

2. Если ряд сходится, то последовательность его частных сумм ограничена.

Однако, этот признак также не является достаточным.

Например, ряд 1-1+1-1+1-1+ … $+(-1)^{n+1}+$… расходится, т.к. расходится последовательность его частных сумм в силу того, что

$$S_n = \begin{cases} 0, & при \quad четных \quad n \\ 1, & при \quad нечетных \quad n \end{cases}$$

Однако, при этом последовательность частных сумм ограничена, т.к. $|S_n| < 2$ при любом n.

Ряды с неотрицательными членами.

При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с неотрицательными членами, т.к. при простом умножении на –1 из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами.

Теорема. *Для сходимости ряда $\sum u_n$ с неотрицательными членами необходимо и достаточно, чтобы частные суммы ряда были ограничены.*

Признак сравнения рядов с неотрицательными членами.

Пусть даны два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$ при $u_n, v_n \geq 0$.

Теорема. Если $u_n \leq v_n$ при любом n, то из сходимости ряда $\sum v_n$ следует сходимость ряда $\sum u_n$, а из расходимости ряда $\sum u_n$ следует расходимость ряда $\sum v_n$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n} + \ldots$

Т.к. $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, а гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum \frac{1}{\ln n}$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Т.к. $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum \frac{1}{2^n}$ сходится (как убывающая геометрическая прогрессия), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ тоже сходится.

Также используется следующий признак сходимости:

Теорема. *Если* $u_n > 0,\ \ v_n > 0$ *и существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = h$, *где* h *– число, отличное от нуля, то ряды* $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *ведут одинаково в смысле сходимости.*

Признак Даламбера.

(Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик)

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ *, то при* ρ *< 1 ряд сходится, а при* ρ *> 1 – расходится. Если* ρ *= 1, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.*

Пример. Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$.

$$u_n = \frac{n}{2^n}; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}; \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} + \ldots$

$u_n = \dfrac{1}{n!}; \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}; \quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} = 0 < 1$. Ряд сходится.

Радикальный признак Коши

Если для ряда $\sum u_n$ *с неотрицательными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство*

$\sqrt[n]{u_n} \le q$,

то ряд $\sum u_n$ *сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется неравенство* $\sqrt[n]{u_n} \ge 1$, *то ряд* $\sum u_n$ *расходится.*

Следствие. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$, то при ρ<1 ряд сходится, а при ρ>1 ряд расходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}} = \frac{2}{3} < 1.$$ Ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$

Т.е. признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим выполнение необходимых условий сходимости. Как было сказано выше, если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0,$$

таким образом, необходимое условие сходимости не выполняется, значит, ряд расходится.

Интегральный признак Коши.

Если $\varphi(x)$ *– непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке* $[1;\infty)$, *то ряд* $\varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ *и несобственный интеграл* $\int_1^{\infty}\varphi(x)dx$ *одинаковы в смысле сходимости.*

Пример. Ряд $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$ сходится при $\alpha>1$ и расходится $\alpha\le 1$ т.к. соответствующий несобственный интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha>1$ и расходится $\alpha\le 1$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ – **обобщенный гармонический ряд**.

Следствие. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – непрерывные функции на интервале (a, b] и $\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = h,\quad h\neq 0,$ то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b \varphi(x)dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости.

Лекция 4 . Знакопеременные ряды. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Знакочередующийся ряд можно записать в виде:

$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1}u_n + \ldots$ где $u_n > 0, \quad n = 1,2,3,\ldots$

Признак Лейбница.

Если у знакочередующегося ряда $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1}u_n + \ldots$ *абсолютные величины* u_i *убывают* $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ *и общий член стремится к нулю* $u_n \to 0$*, то ряд сходится, его сумма* $S < u_1$.

Абсолютная и условная сходимость рядов.

Рассмотрим знакопеременный ряд: $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \qquad (2)$$

Теорема. *Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).*

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum |u_n|$ (2).

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд $\sum |u_n|$ (2) расходится.

Признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.

Пусть $\sum u_n$ - знакопеременный ряд.

Признак Даламбера. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho$, то при ρ<1 ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при ρ>1 ряд будет расходящимся. При ρ=1 признак не дает ответа о сходимости ряда.

Признак Коши. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho$, то при ρ<1 ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при ρ>1 ряд будет расходящимся. При ρ =1 признак не дает ответа о сходимости ряда.

Свойства абсолютно сходящихся рядов.

1) **Теорема.** *Для абсолютной сходимости ряда* $\sum u_n$ *необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами.*

Следствие. Условно сходящийся ряд является разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.

2) В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость и величину ряда.

3) Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

4) **Теорема.** *При любой группировке членов абсолютно сходящегося ряда (при этом число групп может быть как конечным, так и бесконечным и число членов в группе может быть как конечным, так и бесконечным) получается сходящийся ряд, сумма которого равна сумме исходного ряда.*

5) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_k, \quad i,k = 1,2,...$ взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S\cdot\sigma$ - произведению сумм перемножаемых рядов.

Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.

Лекция 5. Функциональные ряды. Степенные ряды.

Определение. Если членами ряда будут не числа, а функции от x, то ряд называется **функциональным**. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (1)

Исследование на сходимость функциональных рядов сложнее исследования числовых рядов. Один и тот же функциональный ряд может при одних значениях переменной *x* сходиться, а при других – расходиться. Поэтому вопрос сходимости функциональных рядов сводится к определению тех значений переменной *x*, при которых ряд сходится.

Совокупность таких значений называется **областью сходимости**.
Так как пределом каждой функции, входящей в область сходимости ряда, является некоторое число, то пределом функциональной последовательности будет являться некоторая функция: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

<u>Определение.</u> Последовательность $\{f_n(x)\}$ **равномерно сходится** к функции $f(x)$ на отрезке [a,b], если для любого числа ε>0 существует номер N = N(ε), такой, что неравенство $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$
выполняется при n>N для всех точек отрезка [a,b].

<u>Определение.</u> **Частными (частичными) суммами** функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называются функции $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1,2,...$

<u>Определение.</u> Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **сходящимся** в точке ($x=x_0$), если в этой точке сходится последовательность его частных сумм.

Предел последовательности $\{S_n(x_0)\}$ называется **суммой** ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в точке x_0.

<u>Определение.</u> Совокупность всех значений *x*, для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **областью сходимости** ряда.

<u>Определение.</u> Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **равномерно сходящимся** на отрезке [a,b], если равномерно сходится на этом отрезке последовательность частных сумм этого ряда.

<u>Теорема.</u> (Критерий Коши равномерной сходимости ряда)

Для равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого числа* $\varepsilon>0$ *существовал такой номер N(*ε*), что при n>N и любом целом p>0 неравенство* $\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)\right|<\varepsilon$ *выполнялось бы для всех x на отрезке [a,b].*

__Теорема.__ (Признак равномерной сходимости Вейерштрасса)

(Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815 – 1897) – немецкий математик)

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно и притом абсолютно на отрезке [a,b], если модули его членов на том же отрезке не превосходят соответствующих членов сходящегося числового ряда с положительными членами:* $M_1+M_2+\ldots+M_n+\ldots$ *т.е. имеет место неравенство:* $\left|u_n(x)\right|\le M_n$.

Еще говорят, что в этом случае функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **мажорируется** числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$.

__Пример.__ Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$.

Так как $\left|\cos nx\right|\le 1$ всегда, то очевидно, что $\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right|\le\frac{1}{n^3}$.

При этом известно, что общегармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha=3>1$ сходится, то в соответствии с признаком Вейерштрасса исследуемый ряд равномерно сходится и притом в любом интервале.

__Свойства равномерно сходящихся рядов.__

1) Теорема о непрерывности суммы ряда.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *- непрерывные на отрезке [a,b] функции и ряд сходится равномерно, то и его сумма S(x) есть непрерывная функция на отрезке [a,b].*

2) Теорема о почленном интегрировании ряда.

Равномерно сходящийся на отрезке [a,b] ряд с непрерывными членами можно почленно интегрировать на этом отрезке, т.е. ряд, составленный из интегралов от его членов по отрезку [a,b] , сходится к интегралу от суммы ряда по этому отрезку.

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} u_n(x)dx; \quad \alpha,\beta \in [a,b]$$

3) Теорема о почленном дифференцировании ряда.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходящегося на отрезке [a,b] представляют собой непрерывные функции, имеющие непрерывные производные, и ряд, составленный из этих производных* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *сходится на этом отрезке равномерно, то и данный ряд сходится равномерно и его можно дифференцировать почленно.*

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{du_n(x)}{dx}$$

На основе того, что сумма ряда является некоторой функцией от переменной *x*, можно производить операцию представления какой – либо функции в виде ряда (разложения функции в ряд), что имеет широкое применение при интегрировании, дифференцировании и других действиях с функциями.

На практике часто применяется разложение функций в степенной ряд.

Степенные ряды.

Определение. **Степенным рядом** называется ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n .$$

Для исследования на сходимость степенных рядов удобно использовать признак Даламбера.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+\frac{x^n}{n}+...$

Применяем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{1+\frac{1}{n}}\right|=|x|.$$

Получаем, что этот ряд сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|>1$.

Теперь определим сходимость в граничных точках 1 и –1.

При x = -1: $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-...$ ряд сходится по признаку Лейбница.

При x = 1: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ ряд расходится (гармонический ряд). Ряд сходится для $x\in[-1,1)$

Теоремы Абеля.

(Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829) – норвежский математик)

Теорема. *Если степенной ряд* $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ *сходится при* $x = x_1$*, то он сходится и притом абсолютно для всех* $|x|<|x_1|$.

Таким образом, если степенной ряд $\sum a_nx^n$ сходится в точке x_1, то он абсолютно сходится в интервале длинной $2|x_1|$ с центром в точке x=0.

Следствие. Если при $x = x_1$ ряд расходится, то он расходится для всех $|x|>|x_1|$.

Таким образом, для каждого степенного ряда существует такое положительное число R, что при всех x таких, что $|x|<R$ ряд абсолютно сходится, а при всех $|x|>R$ ряд расходится. При этом число R называется **радиусом сходимости**. Интервал (-R, R) называется **интервалом сходимости**.

Отметим, что этот интервал может быть как замкнутым с одной или двух сторон, так и не замкнутым.

Радиус сходимости может быть найден по формуле: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$

<u>Пример.</u> Найти область сходимости ряда $x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$

Находим радиус сходимости $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n-1)!}}{\frac{1}{n!}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n-1)!}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}|n|=|\infty|$.

Следовательно, данный ряд сходится при любом значении *x*. Общий член этого ряда стремится к нулю.

<u>Действия со степенными рядами.</u>

1) Интегрирование степенных рядов.

Если некоторая функция *f(x)* определяется степенным рядом: $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, то интеграл от этой функции можно записать в виде ряда:

$$\int f(x)dx=\int\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ndx=\sum_{n=0}^{\infty}\int a_nx^ndx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+C$$

2) Дифференцирование степенных рядов.

Производная функции, которая определяется степенным рядом, находится по формуле: $f'(x)=\frac{d}{dx}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(a_nx^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$

3)Сложение и вычитание степенных рядов сводится к соответствующим операциям с их членами: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$

4) Произведение двух степенных рядов выражается формулой:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

Коэффициенты c_i находятся по формуле: $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+...+a_{n-1}b_1+a_nb_0$

Лекция 6. Разложение функций в степенные ряды.

Разложение функций в степенной ряд имеет большое значение для решения различных задач исследования функций, дифференцирования, интегрирования, решения дифференциальных уравнений, вычисления пределов, вычисления приближенных значений функции.

Возможны различные способы разложения функции в степенной ряд. Такие способы как разложение при помощи рядов Тейлора и Маклорена были рассмотрены ранее.

Существует также способ разложения в степенной ряд **при помощи алгебраического деления.** Это – самый простой способ разложения, однако, пригоден он только для разложения в ряд алгебраических дробей.

<u>Пример.</u> Разложить в ряд функцию $\frac{1}{1-x}$.

Суть метода алгебраического деления состоит в применении общего правила деления многочленов:

$$
\begin{array}{l|l}
-1 & 1 - x \\ \cline{2-2}
\underline{1 - x} & 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \\
-\underline{x} & \\
\quad x - \underline{x^2} & \\
\quad\quad x^2 & \\
\quad\quad x^2 - x^3 & \\
\quad\quad\quad x^3 & \\
\quad\quad \ldots\ldots\ldots &
\end{array}
$$

<u>Если применить к той же функции формулу Маклорена</u>

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

то получаем: $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$; $\quad f'(0) = 1$;

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}; \quad f''(0) = 2;$$

$$f'''(x)=\frac{2\cdot 3}{(1-x)^4};\quad f'''(0)=3!;$$

……………………………….

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}};\quad f^{(n)}(0)=n!;$$

то, получаем: $f(x)=1+x+x^2+...+x^n+...$

Рассмотрим способ разложения функции в ряд **при помощи интегрирования.**

С помощью интегрирования можно разлагать в ряд такую функцию, для которой известно или может быть легко найдено разложение в ряд ее производной.

Находим дифференциал функции $df(x)=f'(x)dx$ и интегрируем его в пределах от 0 до *x*.

$$\int_0^x df(x)=\int_0^x f'(x)dx;\qquad f(x)\Big|_0^x=\int_0^x f'(x)dx;$$

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx;$$

Пример. Разложить в ряд функцию $f(x)=\ln(1+x)$.

Разложение в ряд этой функции по формуле Маклорена было рассмотрено выше.

(См. Функция y = ln(1 + x).) Теперь решим эту задачу при помощи интегрирования.

При $f(0)=0,\quad f'(x)=\frac{1}{1+x}$ получаем по приведенной выше формуле:

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx$$

Разложение в ряд функции $\frac{1}{1+x}$ может быть легко найдено способом алгебраического деления аналогично рассмотренному выше примеру.

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-...+(-1)^n x^n+...$$

Тогда получаем: $\ln(1+x) = \int\limits_0^x \frac{1}{1+x}dx = \int\limits_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^x (-1)^n x^n dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Окончательно получим: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$

<u>Пример.</u> Разложить в степенной ряд функцию $arctgx$.

Применим разложение в ряд с помощью интегрирования.

$$f(x) = arctgx; \quad f(0) = 0; \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2};$$

$$arctgx = \int\limits_0^x \frac{1}{1+x^2}dx$$

Подинтегральная функция может быть разложена в ряд методом алгебраического деления:

$$\begin{array}{r|l}
-\ 1 & 1 + x^2 \\ \cline{2-2}
\underline{1 + x^2} & 1 - x^2 + x^4 - \ldots \\
-\ -x^2 & \\
\underline{-x^2 - x^4} & \\
-\ x^4 & \\
\underline{x^4 + x^6} & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots$$

Тогда $arctgx = \int\limits_0^x \frac{1}{1+x^2}dx = \int\limits_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^x (-1)^n x^{2n} dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Окончательно получаем: $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$

Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

С помощью степенных рядов возможно интегрировать дифференциальные уравнения.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y = f(x)$$

Если все коэффициенты и правая часть этого уравнения разлагаются в сходящиеся в некотором интервале степенные ряды, то существует решение этого уравнения в некоторой малой окрестности нулевой точки, удовлетворяющее начальным условиям.

Это решение можно представить степенным рядом: $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$

Для нахождения решения остается определить неизвестные постоянные c_i.

Эта задача решается **методом сравнения неопределенных коэффициентов**. Записанное выражение для искомой функции подставляем в исходное дифференциальное уравнение, выполняя при этом все необходимые действия со степенными рядами (дифференцирование, сложение, вычитание, умножение и пр.)

Затем приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения. В результате с учетом начальных условий получим систему уравнений, из которой последовательно определяем коэффициенты c_i.

Отметим, что этот метод применим и к нелинейным дифференциальным уравнениям.

<u>Пример.</u> Найти решение уравнения $y'' - xy = 0$ с начальными условиями *y(0)=1, y'(0)=0.*

Решение уравнения будем искать в виде $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \ldots$$

Подставляем полученные выражения в исходное уравнение:

$$(2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \ldots) - (c_0 x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + c_3 x^4 + \ldots) = 0$$

$$2c_2 + x(6c_3 - c_0) + x^2(12c_4 - c_1) + x^3(20c_5 - c_2) + x^4(30c_6 - c_3) + \ldots = 0$$

Отсюда получаем: $2c_2 = 0$

$$6c_3 - c_0 = 0$$
$$12c_4 - c_1 = 0$$
$$20c_5 - c_2 = 0$$
$$30c_6 - c_3 = 0$$

………………

Получаем, подставив начальные условия в выражения для искомой функции и ее первой производной: $\begin{matrix} c_0 = 1 \\ c_1 = 0 \end{matrix}$. Окончательно получим:

$c_0 = 1;\quad c_1 = 0;\quad c_2 = 0;\quad c_3 = \dfrac{1}{6};\quad c_4 = 0;\quad c_5 = 0;\quad c_6 = \dfrac{1}{180};\quad \ldots$ Итак: $y = 1 + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^6}{180} + \ldots$

Существует и другой метод решения дифференциальных уравнений с помощью рядов. Он носит название **метод последовательного дифференцирования.**

Рассмотрим тот же пример. Решение дифференциального уравнения будем искать в виде разложения неизвестной функции в ряд Маклорена.

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

Если заданные начальные условия *y(0)=1, y'(0)=0* подставить в исходное дифференциальное уравнение, получим, что $y''(0) = 0.$

Далее запишем дифференциальное уравнение в виде $y'' = xy$ и будем последовательно дифференцировать его по *x*.

$$\begin{aligned}
&y''' = y + xy'; \qquad y'''(0) = y(0) = 1;\\
&y^{IV} = y' + y' + xy''; \quad y^{IV}(0) = 0;\\
&y^{V} = 2y'' + y'' + xy'''; \quad y^{V}(0) = 0;\\
&y^{VI} = 3y''' + y''' + xy^{IV}; \quad y^{VI}(0) = 4;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

После подстановки полученных значений получаем: $y = 1 + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^6}{180} + \ldots$

Лекция 7. Ряды Фурье. Разложение функций в ряд Фурье.

Ряды Фурье.

(Жан Батист Жозеф Фурье (1768 – 1830) – французский математик)

Тригонометрический ряд.

Определение. Тригонометрическим рядом называется ряд вида:

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\ldots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\ldots$$

или, короче, $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$

Действительные числа a_i, b_i называются коэффициентами тригонометрического ряда.

Если ряд представленного выше типа сходится, то его сумма представляет собой периодическую функцию с периодом 2π, т.к. функции sinnx и cosnx также периодические функции с периодом 2π.

Пусть тригонометрический ряд равномерно сходится на отрезке [-π; π], а следовательно, и на любом отрезке в силу периодичности, и его сумма равна $f(x)$.

Определим коэффициенты этого ряда.

Для решения этой задачи воспользуемся следующими равенствами:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx=\begin{cases}0, & m\neq n,\quad m=0,1,2,..\\ \pi, & m=n,\quad m,n=1,2,...\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nxdx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n,\quad m,n=1,2,...\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nxdx=0,\quad m=0,1,2,...,\quad n=1,2,...$$

Справедливость этих равенств вытекает из применения к подынтегральному выражению тригонометрических формул. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [-π; π], то существует интеграл

$\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\dfrac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}dx+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)dx=\pi a_0$. Получаем: $a_0=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$.

Далее умножаем выражение разложения функции в ряд на cosnx и интегрируем в пределах от -π до π.

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos^2 nx+b_n\cos nx\sin nx)dx=\pi a_n$$

Отсюда получаем: $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx; \quad n = 1,2,...$

Аналогично умножаем выражение разложения функции в ряд на sinnx и интегрируем в пределах от -π до π. Получаем: $b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad n = 1,2,...$

Выражение для коэффициента a_0 является частным случаем для выражения коэффициентов a_n.

Таким образом, если функция *f(x)* – любая периодическая функция периода 2π, непрерывная на отрезке [-π; π] или имеющая на этом отрезке конечное число точек разрыва первого рода, то коэффициенты

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx; \quad n = 0,1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad n = 1,2,...$$

существуют и называются **коэффициентами Фурье** для функции *f(x)*.

<u>Определение.</u> **Рядом Фурье** для функции *f(x)* называется тригонометрический ряд, коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье. Если ряд Фурье функции *f(x)* сходится к ней во всех ее точках непрерывности, то говорят, что функция *f(x)* разлагается в ряд Фурье.

<u>Достаточные признаки разложимости в ряд Фурье.</u>

<u>Теорема.</u> (Теорема Дирихле) *Если функция f(x) имеет период 2π и на отрезке [-π;π] непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода, и отрезок [-π;π] можно разбить на конечное число отрезков так, что внутри каждого из них функция f(x) монотонна, то ряд Фурье для функции f(x) сходится при всех значениях x, причем в точках непрерывности функции f(x) его сумма равна f(x), а в точках разрыва его сумма равна* $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, *т.е. среднему арифметическому предельных значений слева и справа. При этом ряд*

Фурье функции f(x) сходится равномерно на любом отрезке, который принадлежит интервалу непрерывности функции f(x).

Функция f(x), для которой выполняются условия теоремы Дирихле называется **кусочно – монотонной** на отрезке [-π;π].

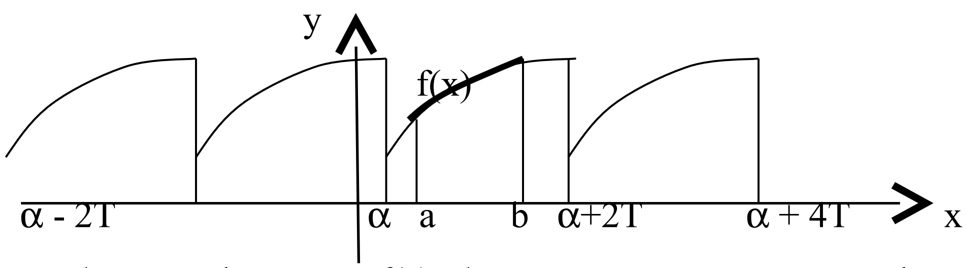
<u>Теорема.</u> *Если функция f(x) имеет период 2π, кроме того, f(x) и ее производная f'(x) – непрерывные функции на отрезке [-π;π] или имеют конечное число точек разрыва первого рода на этом отрезке, то ряд Фурье функции f(x) сходится при всех значениях x, причем в точках непрерывности его сумма равна f(x), а в точках разрыва она равна* $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. *При этом ряд Фурье функции f(x) сходится равномерно на любом отрезке, который принадлежит интервалу непрерывности функции f(x).*

Функция, удовлетворяющая условиям этой теоремы, называется **кусочно – гладкой** на отрезке [-π;π].

<u>Разложение в ряд Фурье непериодической функции.</u>

Задача разложения непериодической функции в ряд Фурье в принципе не отличается от разложения в ряд Фурье периодической функции.

Допустим, функция *f(x)* задана на отрезке [a, b] и является на этом отрезке кусочно – монотонной. Рассмотрим произвольную периодическую кусочно – монотонную функцию $f_1(x)$ с периодом $2T \geq |b-a|$, совпадающую с функцией f(x) на отрезке [a, b].



Таким образом, функция *f(x)* была дополнена. Теперь функция $f_1(x)$ разлагается в ряд Фурье. Сумма этого ряда во всех точках отрезка [a, b] совпадает с функцией *f(x),* т.е. можно считать, что функция *f(x)* разложена в ряд Фурье на отрезке [a, b].

Таким образом, если функция f(x) задана на отрезке, равном 2π ничем не отличается от разложения в ряд периодической функции. Если же отрезок, на котором задана функция, меньше, чем 2π, то функция продолжается на интервал (b, a + 2π) так, что условия разложимости в ряд Фурье сохранялись.

Вообще говоря, в этом случае продолжение заданной функции на отрезок (интервал) длиной 2π может быть произведено бесконечным количеством способов, поэтому суммы получившихся рядов будут различны, но они будут совпадать с заданной функцией f(x) на отрезке [a,b].

<u>Ряд Фурье для четных и нечетных функций.</u>

Отметим следующие свойства четных и нечетных функций:

1) $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & f(x) - \textit{нечетная} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(x) - \textit{четная} \end{cases}$$

2) Произведение двух четных и нечетных функций является четной функцией.

3) Произведение четной и нечетной функций – нечетная функция.

Справедливость этих свойств может быть легко доказана исходя из определения четности и нечетности функций.

Если f(x) – четная периодическая функция с периодом 2π, удовлетворяющая условиям разложимости в ряд Фурье, то можно записать:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 0,1,2,...)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0; \qquad (n = 1,2,...)$$

Таким образом, для четной функции ряд Фурье записывается:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 0,1,2,...)$$

Аналогично получаем разложение в ряд Фурье для нечетной функции:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx;$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx; \qquad (n=1,2,...)$$

<u>Пример.</u> Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=x^3$ с периодом Т = 2π на отрезке [-π;π].

Заданная функция является нечетной, следовательно, коэффициенты Фурье ищем в виде: $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx; \qquad (n=1,2,...)$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3\sin nxdx=\left\{\begin{aligned} &u=x^3; \quad dv=\sin nxdx; \\ &du=3x^2dx; \quad v=-\frac{\cos nx}{n}; \end{aligned}\right\}=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^3\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{3}{n}\int_0^{\pi} x^2\cos nxdx\right)=$$

$$=\left\{\begin{aligned} &u=x^2; \quad dv=\cos nxdx; \\ &du=2xdx; \quad v=\frac{\sin nx}{n}; \end{aligned}\right\}=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n}+\frac{3}{n}\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{2x\sin nx}{n}dx\right]\right)=$$

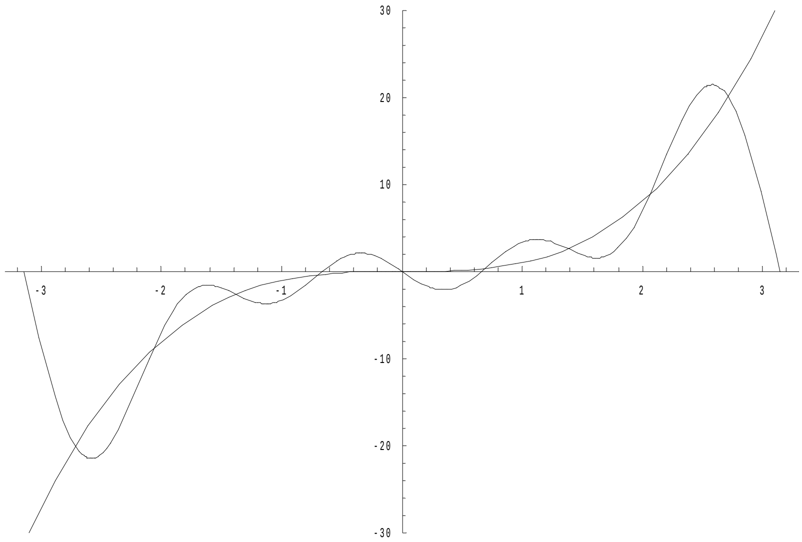
$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n}-\frac{6}{n^2}\int_0^{\pi} x\sin nxdx\right)=\left\{\begin{aligned} &u=x; \quad dv=\sin nxdx; \\ &du=dx; \quad v=-\frac{\cos nx}{n}; \end{aligned}\right\}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n}-\frac{6}{n^2}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n}+\frac{6\pi\cos\pi}{n^3}-\frac{6}{n^3}\left(\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}\right)\right)=-\frac{2\pi^2\cos\pi n}{n}+\frac{12\cos\pi n}{n^3}=(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)$$

Получаем: $x^3=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx$.

Построим графики заданной функции и ее разложения в ряд Фурье, ограничившись первыми четырьмя членами ряда.



30
20
10
-10
-20
-30
-3
-2
-1
1
2
3

Ряды Фурье для функций с любым периодом.

Ряд Фурье для функции *f(x)* периода $T = 2l$, непрерывной или имеющей конечное число точек разрыва первого рода на отрезке $[-l, l]$ имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n}{l}x + b_n \sin\frac{\pi n}{l}x\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx, \quad n = 1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx, \quad n = 1,2,...$$

Для четной функции произвольного периода разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n}{l}x;$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx; \quad n = 1,2,...$$

Для нечетной функции:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n}{l}x;$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx; \quad n = 1,2,...$$

Ряд Фурье по ортогональной системе функций.

Определение. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенные на отрезке [a, b], называются **ортогональными** на этом отрезке, если $\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0$

Определение. Последовательность функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$, непрерывных на отрезке [a, b], называется **ортогональной системой функций** на этом отрезке, если все функции попарно ортогональны.

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0; \qquad i \neq j$$

Отметим, что ортогональность функций не подразумевает перпендикулярности графиков этих функций.

<u>**Определение.**</u> Система функций называется **ортогональной и нормированной (ортонормированной)**, если $\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

<u>**Определение.**</u> **Рядом Фурье по ортогональной системе функций** $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …,$\varphi n(x)$ называется ряд вида: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$, коэффициенты которого

определяются по формуле: $a_n = \dfrac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b [\varphi_n(x)]^2 dx}$, где $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ - сумма равномерно сходящегося на отрезке [a, b] ряда по ортогональной системе функций. *f(x)* – любая функция, непрерывная или имеющая конечное число точек разрыва первого рода на отрезке [a, b].

В случае ортонормированной системы функций коэффициенты определяются: $a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx$

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Лекция 8. Области и границы. Открытые и замкнутые области.

Рассмотрим еще одно геометрическое представление комплексного числа.

Поместим сферу произвольного радиуса так, чтобы она касалась комплексной плоскости в начале координат. Точку касания назовем южным полюсом, а диаметрально противоположную – северным полюсом.

Началу координат комплексной плоскости поставим в соответствие южный полюс и припишем ему значение Z=0. Каждой другой точке Z комплексной плоскости поставим в соответствие на сфере т. Z пересечения со сферой луча, проведенного из северного полюса в точки плоскости. Так устанавливается взаимнооднозначное соответствие между точками сферы с выколотым полюсом P и множеством всех точек комплексной плоскости.

Изображение комплексной плоскости на сфере называется стереографической проекцией комплексной плоскости, а сама сфера – числовой сферой.

Точке 0 припишем Z=0, а противоположной точке Z=∞. Комплексная плоскость вместе с бесконечно удаленной точкой называется расширенной или полной комплексной плоскостью, а без такой точки – открытой комплексной плоскостью.

Определение: Множество Д точек комплексной плоскости называется областью если, вместе с каждой точкой из Д множеству принадлежит и достаточно малый круг с центром в заданной точке.

Определение: Окрестностью C (δ , Z○) точки Z○ комплексной плоскости называется множество точек Z, удовлетворяющих неравенству $|Z - Z_○|<\delta$ с центром в точке Z○.

Определение: Всякую область Д с присоединенной к ней границей называют замкнутой областью и обозначают $\overline{\dot{A}}$. Так множество точек, удовлетворяющих неравенству $|Z| \le r$ есть замкнутое множество.

Определение: Непрерывной кривой называется кривая, которую можно задать уравнением Z=x(t)+iy(t), где x(t) и y(t) непрерывная функция действительного аргумента t, t∊ $[\grave{a},\hat{a}]$.

На каждой кривой можно зафиксировать одно из двух направлений – в сторону возрастания или убывания параметра. В первом случае Z(a) – начало кривой, $Z(\hat{a})$ – конец. Если начало и конец кривой совпадают, то кривая называется замкнутой.

Определение: Точка, соответствующая одному значению параметра, называется простой точкой. Точка, соответствующая двум и более значениям параметра называется кратной точкой.

Кривая, состоящая только из простых точек, называется простой или жордановой кривой.

Определение: Область Д называется односвязной, если любая простая замкнутая кривая целиком принадлежащая области Д, может быть стянута в точку, с помощью непрерывной деформации без выведения из области Д.

Определение: Область Д называется односвязной, если любая непрерывная замкнутая кривая, проведенная в этой области ограничивает некоторую область, целиком принадлежащую Д

Лекция 9. Основные элементарные функции комплексного переменного.

Элементарными функциями комплексного переменного называют функции, которые получаются из элементарных функций действительного переменного, определяемых разложением в степенной ряд.

1. ***Показательная функция e^z*** определяется как сумма абсолютно сходящегося степенного ряда на всей комплексной плоскости.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

Показательная функция обладает свойствами:

а) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$, где z_1 и z_2-любые комплексные величины

б) $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$

в) $e^{z+2k\pi i} = e^z$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$, т.е. является периодической функцией с периодом $2\pi i$

г) $e^{iz} = \cos z + i\sin z$

д) $e^{-iz} = \cos z - i\sin z$ Формулы Эйлера.

2. ***Общая показательная функция a^z*** (a≠0, z-любое комплексное число) определяется равенством: $a^z = e^{z\,\mathrm{Ln}\,a}$.Главное значение этой функции:

$a^z = e^{z\ln a}$ при k=0.

3. ***Логарифмическая функция Lnz*** (z≠0) определяется как функция обратная показательной.

$Lnz = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi)$, $\varphi = \arg z$, (k=0, ±1, ±2…), lnz- многозначная функция.

Главное значение lnz при k=0 обозначается $\ln z = \ln|z| + i\varphi$, $\varphi = \arg z$.

Справедливы формулы: $\ln z_1 \cdot z_2 = \ln z_1 + \ln z_2$, $\ln\dfrac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2$,

$\ln z^n = n\ln z + 2k\pi i$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$.

4. ***Тригонометрические функции*** $\sin z$ и $\cos z$ определяются степенными рядами

$$Sinz = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$Cosz = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Абсолютно сходящиеся при любом z функции $\sin z$ и $\cos z$ - периодические с периодом 2π и имеют только действительные нули: для $\sin z - z = k\pi$

для $\cos z - z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$

В комплексной плоскости функции $\sin z$ и $\cos z$ могут принимать значения по модулю больше единицы.

Известные из элементарной математики формулы:

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$

справедливы и для комплексных значений z_1и z_2

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cdot chy + ishy \cdot \cos x$$

$$\cos z = (x = iy) = \cos x \cdot chy - i\sin x \cdot shy$$

$$\sin iz = ishz, \qquad \cos iz = chz$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}, \quad tgz = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad tgiz = ithz \,/$$

5. *Обратные тригонометрические функции.*

Arcsinz, arccosz, arctgz определяются как функции обратные соответственно sinz, cosz, tgz.

$$\arcsin z = -i\ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right), \quad \arccos z = -i\ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), arctgz = -\frac{i}{2}\ln z\frac{1 + iz}{1 - iz}$$

6. *Гиперболические функции*

$$thz = \frac{shz}{chz} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}; \qquad shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \qquad chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2};$$

$$ch^2 z - sh^2 z = 1; \qquad cthz = \frac{chz}{shz} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}; \qquad ch^2 z + sh^2 z = ch2z.$$

7. *Обратные гиперболические функции* $Arshz$, $Archz$, $Arthz$ определяются как функции обратные соответственно shz, chz, thz – функции многозначные.

$$Archz = \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$
$$Arshz = \ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right)$$
$$Authz = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + z}{1 - z}$$

Пример. Вычислить значение Arctg(1+i).

Решение: $Arctgz = -\frac{i}{2}\ln z\frac{1 + iz}{1 - iz}$, где z=1+i

$$Arctg(1 + i) = -\frac{i}{2}\ln\frac{1 + i(1 + i)}{1 - i(1 + i)} = -\frac{i}{2}\ln\frac{i(2 + i)}{(2 - i)(2 - i)} = -\frac{i}{2}\left[\ln\left|-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right| + i(\varphi + 2\pi k)\right] =$$

$$= -\frac{i}{2}\left(-\frac{1}{2}\ln 5 + 2(\pi(2k + 1) - arctg2)\right) = \frac{i}{4}\ln 5 + \frac{\pi(2k + 1)}{2} - \frac{1}{2}arctg2$$

Лекция 10. Понятие функции комплексного переменного. Предел. Непрерывность.

1. Говорят, что в области D определена функция W=f(z), если каждой точке $z \in D$ поставлено в соответствие одно (однозначная функция) или несколько (многозначная функция) значений $W \in \delta$.

Таким образом, функция W осуществляет отображение множества D во множестве δ. Точка $W \in \delta$ называется образом точки $z \in D$, а точка z – прообразом точки W. Для прообраза принято обозначение $z=f^{-1}(W)$.

При отображении, осуществляемом с помощью однозначной функции W=f(z) может оказаться, что двум различным прообразам z_1 и z_2 соответствуют разные образы, т.е. $f(z_1) \neq f(z_2)$. Такое отображение называется взаимно однозначным или однолистным, и функция W=f(z) называется однолистной.

Пусть z=x+iy, а W=U+iV, то зависимость W=f(z) равносильна двум зависимостям U=U(x,y), V=V(x,y).

2. ***Определение.*** Комплексное число $W_0=U_0+iV_0$ называется пределом функции W=f(z)=U(x,y)+iV(x,y), при $z \to z_0$, если для $\forall\ E \succ 0$, можно указать такое число $\delta \succ 0$, что из неравенства $|z-z_0| \prec \delta$ следует неравенство $|f(z)-W_0| \prec E$ и обозначают $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = W_0$.

Из определения следует:

1. Если значение W_0 есть предел функции W=f(z) при $z \to z_0$, то это значение не зависит от пути, по которому z приближается к z_0.
2. Если предел существует, то существуют и пределы:

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} U(x,y) = U_o$ и $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} V(x,y) = V_o$, то $\lim\limits_{|z-z_0|} = \sqrt{(U-U_0)^2+(V-V_0)^2} = 0$.

Для функции комплексного переменного справедливы теоремы

1. $\lim\limits_{z \to z_0} (C_1 f_1(z) \pm C_2 f_2(z)) = C_1 \lim\limits_{z \to z_0} f(z_1) \pm C_2 \lim\limits_{z \to z_0} f(z_2)$, где C_1 и C_2 – const.
2. $\lim\limits_{z \to z_0} f_1(z) \cdot f_2(z) = \lim\limits_{z \to z_0} f_1(z) \cdot \lim\limits_{z \to z_o} f_2(z)$.

3. $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f_1(z)}{f_0(z)}=\dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z)}$, если $\lim f_2(z)\neq 0$

3. Функция W=f(z) называется непрерывной в точке z_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

Из определения непрерывности следует, что непрерывность функции W=f(z)=U(x,y)+iV(x,y) в точке $z_0=x_0+iy_0$ эквивалентна непрерывности функции U и V в точке (x_0,y_0).

Функция f(z) непрерывная в области D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Непрерывные функции комплексного переменного обладают теми же свойствами, что и непрерывные функции действительного переменного.

Лекция 11. Дифференцируемость и аналитичность функции комплексного переменного

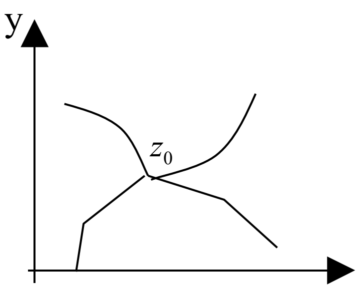
Определение производной и дифференциала функции комплексного переменного f (z) дословно совпадает с соответствующими определениями для функций действительного переменного f (x).

Однако дифференцируемые функции комплексного переменного обладают многими дополнительными свойствами, не имеющими аналогий в случае функции вещественных переменных. И это связано с тем, что существование производной f' (z) накладывает на функцию f (z) более сильные ограничения.

Так, функция f (x) имеет производную f' (x), если существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

при x$\to x_0$ по двум направлениям : слева и справа $\longrightarrow x_0 \longleftarrow \longrightarrow$ x

Для существования производной f' (z) таких направлений – бесконечно много.



Из существования производной f' (z) вытекает существование всех производных $f^{(n)}$ (z), n $\in$ N, а также разложимость функции

f (z) в степенной ряд.

0

Рассмотрим заданную в области D плоскость комплексного переменного

Z= x + iy однозначную и функцию $\omega = f(z) = U(x, y) + iv(x, y)$.

Пусть точки z и $z + \Delta z$ принадлежат D.

Разность $f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta\omega = \Delta f = \Delta u + i\Delta v$ называется приращением функции ω, соответствующим приращению $\Delta z \neq 0$ независимого переменного z.

Определение. Если существует предел отношения $\frac{\Delta\omega}{\Delta z}$ при любом стремлении $\Delta z \to 0$, то этот предел называется производной функции f (z) в точке z и для нее принято обозначение f' (z), т.е.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}$$

Для <u>существования</u> производной функции f (z) в точке z <u>необходима</u> непрерывность функции в этой точке.

Теорема 1. Пусть $w = f(z)$ - функция комплексного переменного, где $z = x + iy$, $w = u(x, y) + iv(x, y)$. Причем u (x, y) и v (x, y) – функции действительных переменных x и y.

Для того, чтобы функция f (z) была дифференцируемой в точке z=x+iy, необходимо и достаточно, чтобы в точке (x; y) функции u(x, y) и v(x, y) были дифференцируемы и выполнялись условия $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Эти равенства называются условиями Коши – Римана (CR).

Теорема 2. Функции $w = z^{(n)}$ $n \in N$; $w = \ell^{z}$, w= sin z, w = cos z, w =sh z, w=ch z дифференцируемы в любой точке $z \in C$.

1. Функция w = tg z дифференцируема в любой точке $z \in C$

   z $(z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in z;)$

3. Функция w = th z дифференцируема в любой точке $z \in C$,

$(z = \frac{\pi}{2} + \pi k) C, k \in z)$;

4. Для функций w = Ln z, w $= a^{Z}$, w=z^{α} (a$\in$ C, $\alpha \in \xi$, a$\neq$ 0) в окрестности каждой точки z$\neq$ 0 можно выбрать однозначную ветвь, которая является дифференцируемой в точке z функцией.

Теорема 3. Если функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ дифференцируемы в точке Z ,то:

1. $\left(f(z)+\varphi(z)\right)^{/} = f^{/}(z)+\varphi^{/}(z)$

2. $\left(f(z)\cdot\varphi(z)\right)^{/} = f^{/}(z)\cdot\varphi(z)+\varphi^{/}(z)\cdot f(z)$

3. $\left(\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}\right)^{/} = \dfrac{f^{/}(z)\cdot\varphi(z)-\varphi^{/}\cdot f(z)}{(\varphi(z))^{2}}, \varphi(z)\neq 0$

4. $\left(f[\varphi(z)]\right)^{/} = f^{/}(\varphi(z))\cdot\varphi^{/}(z)$

5. $f^{/}(z)=\dfrac{1}{\left(f^{-1}(w)\right)^{/}}$, где $f^{-1}(w)$ - функция, обратная функции $f(z)$, при этом

предполагается, что функция $f(z)$ однолистная и $\left(f^{-1}(w)\right)^{/}\neq 0$.

Определение. Если функция дифференцируемая не только в данной точке, но и в некоторой окрестности точки, то она называется аналитической в этой точке.

Определение. Функция дифференцируемая во всех точках области D называется аналитической или голоморфной в этой области.

Определение. Аналитическая и однозначная во всех точках области D функция называется регулярной в этой области.

Для любой дифференцируемой функции $f(z)$ производная $f^{/}(z)$

вычисляется по любой из формул: $f^{/}(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}$; $f^{/}(z)=\dfrac{\partial v}{\partial y}+i\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$

Пример 1. Выяснить, является ли функция $W=(i\cdot z)^{3}$ аналитической?

Решение. Пусть $z - x+i\cdot y$, тогда

$W=(i\cdot z)^{3}=i^{3}(x+i\cdot y)^{3}=-i\left(x^{3}+3x^{2}iy+3x(iy)^{2}+i^{3}y^{3}\right)=$

$=-i\left(x^{3}+3x^{2}yi-3xy^{2}-iy^{3}\right)=-x^{3}i+3x^{2}y+3xy^{2}i-y^{3}$

$W=(iz)^{3}=3x^{2}y-y^{3}+i\left(3xy^{2}-x^{3}\right)$

$U(x,y)=\mathrm{Re}W=3x^{2}y-e^{3},\ V(x,y)=\mathrm{Im}W=3xy^{2}-x^{3}$

Проверим выполнение условий Коши-Римана: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$; $\frac{\partial v}{\partial x} = 3y^2 - 3x^2$; $\frac{\partial v}{\partial y} 6xy$

Условия Коши-Римана выполняются, следовательно $W' = 6xy + i\left(3y^2 - 3x^2\right)$.

Аналитическую функцию $f(z)$ можно восстановить по известным $U(x, y)$ или $V(x, y)$.

Пример 4. Найти аналитическую функцию $W = f(z)$, если известна её действительная часть $U(x, y) = 2e^x \cos y$, и $f(0) = 2$

Решение. Имеем $\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \cos y.$, по (1) условию (C, R) $\left(\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\right)$

Получим, что $\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^x \cos y$. Интегрируя полученное равенство по y, имеем

$V(x, y) = \int 2e^x \cos y dy$ $V(x, y) = 2e^x \sin y + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ неизвестная функция.

Дифференцируя $V(x, y)$ по x и используя второе условие (C, R) $\left(\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}\right)$

найдём $\frac{\partial v}{\partial x} 2e^x \sin y + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^x \sin y,$ откуда $\varphi'(x) = 0,$ а значит $\varphi(x) = C,$ $C - const.$

Таким образом, найдена $V(x, y) = 2e^x \sin y + c$ и

$f(z) = 2e^x \cos y + i\left(2e^x \sin y + c\right) =$

$= 2e^x\left(\cos y + i \sin y\right) + ic = 2e^{x+y} + ic = 2e^z + ic$. При $f(0) = 2$, $2e^0 + ic = 2$ $c = 0,$

$f(z) = 2e^z$

Лекция 12. Интегрирование функции комплексного переменного. Определение интеграла. Свойства.

Пусть на плоскости Z задана ориентированная кривая C с концами α и β и на ней функция $f(z)$ комплексного переменного.

Разобьем кривую С на n частей произвольным образом. $\Delta Z_K = Z_K - Z_{K-1}$. В каждой части выберем произвольную точку t_k вычислим в ней значение функции $f(t_K)$ и составим интегральную сумму $\sum_{k=1}^{\infty} f(t_k)\Delta z_k$

Определение. Предел интегральной суммы при $|\Delta Z_k| \to 0$ (если он существует и не зависит от способа разбиения и выбора точек внутри каждой элементарной части) называется интегралом от функции $f(Z)$ вдоль кривой С и обозначается $\int_c f(Z)dZ$, т.е. $\int_c f(Z)dZ = \lim_{\Delta Z_k \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} f(t_k)\Delta z_k$.

<u>**Теорема существования.**</u> Если $f(z)$ кусочно-непрерывная функция, а С – кусочно-гладкая, то $\int_c f(Z)dZ$ всегда существует.

Придадим $\int_c f(Z)dZ$ другую форму:

Имеем $f(z) = u(x,y) + iV(x,y)$, где $u(x,y)$ и $V(x,y)$-функции действительных переменных.

$Z_k = x_k + iy_k$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$,

$t_k = \xi_k + i\eta_k$; $u(\xi_k;\eta_k) = u_k$; $V(\xi_k;\eta_k) = V_k$. Поэтому $\sum_{k=1}^{\infty} f(t_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} (u_k + iV_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(t_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k\Delta x_k - V_k\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{\infty} (V_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k)$$

Переходя в последнем равенстве к $\lim \Delta z_k \to 0$

$$\int_c f(Z)dZ = \int_c udx - vdy + i\int_c udy + vdx$$

<u>**Вывод**</u>**:** Вычисление интеграла от функции комплексной переменной сводится к вычислению двух криволинейных интегралов от функций действительных переменных.

Свойства.

1. Если $f(z)$ и $\varphi(z)$ непрерывны на дуге С, то

$$\int_c (\alpha f(z) \pm \beta\varphi(z))dz = \alpha\int_c f(z)dz \pm \beta\int_c \varphi(z)dz$$

2. Если кривая С разбита на 2 части C_1 и C_2, то $\int_c f(Z)dZ = \int_{c_1} f(z)dz + \int_{c_2} f(z)dz$.

3. $\int f(Z)dZ = -\int_{-c} f(z)dz$,где - С имеет противоположное направление.

Если $f(z)$ - аналитическая функция в односвязной области D, то интеграл не зависит от пути интегрирования. В этом случае $\int_c f(Z)dZ = 0$.

Если кривая С задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $t = t_1, t = t_2$ - начальная и конечная точки интегрирования, то

$$\int_c f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} [z(t)]\cdot z'(t)dt,$$ где $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Если функция $f(z)$ аналитическая функция в односвязной области D, содержащей точки Z_1 и Z_2,то имеет место формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2},$$ где $F(z)$ - одна из первообразных функции $f(z)$.

<u>Интегрирование по частям.</u>

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\cdot\varphi'(z)dz = f(z)\cdot\varphi(z)\Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{Z_1}^{Z_2}\varphi(z)\cdot f'(z)dz.$$

Замена переменного $\int_c f(Z)dZ = \int_{c_1} f[\varphi(w)]\cdot\varphi'(w)dw$.

Если путь интегрирования является окружностью с центром точке Z_0, то полезно делать замену переменных $Z - Z_0 = \rho\ell^{i\varphi}$, здесь $\rho = const$, φ- действительная переменная интегрирования.

<u>Пример</u>. Вычислить $\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+4)^2}$

Решение: поскольку подынтегральная функция чётная, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+4\right)^2}=2\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+4\right)^2}$.

Составим функцию $f(z)=\frac{z^2}{\left(z^2+4\right)^2}$. Определим её особые точки $z=\pm 2i$.

В верхней полуплоскости находится точка $z=2i$,которая является полюсом второго порядка. Вычислим.

$$[f(z),2i]=\lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2(z-2i)^2}{(z-2i)^2(z+2i)^2}\right]=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+2i)^2}==\lim_{z\to 2i}\left[\left(\frac{z}{z+2i}\right)^2\right]^{/}=\lim_{z\to 2i}2\frac{z}{z+2i}\frac{z+2i-z}{(z+2i)^2}=$$

$$\lim_{z\to 2}\frac{4zi}{(z+2i)^2}=\frac{1}{8i}.\ \text{Тогда}\ \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+4\right)^2}\frac{1}{2}2\pi i\frac{1}{8i}=\frac{\pi}{8}$$

Лекция 13 Интегральная формула Коши.

Пусть область D односвязная, ограниченная кусочно - гладкой границей C и задана функция f(z) аналитическая в области $\overline{D}$.Тогда имеет место формула $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(t)dt}{t-z_0}$ (1), где z_0-любая тоска внутри C, а интегрирование совершается против часовой стрелки.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_C\frac{\sin z}{z^2+1}dz$,где C - ориентирована против часовой стрелки.

Контур содержит в себе точку i и не содержит точку $(-i)$.

Решение. $$\int\limits_C\frac{\sin z}{(z+1)(z-1)}dz=\int\limits_C\frac{\frac{\sin z}{z+1}}{z-i}dz$$
$$\left(f(z)=\frac{\sin z}{z+1}\right)=2\pi i\frac{\sin i}{i+i}=\pi\ \sin i$$

Формула Коши для многосвязной области.

Если функция $f(z)$ аналитическая в замкнутой многосвязной ограниченной области $\overline{D}$, ограниченной контуром L (внешняя граница) и контурами $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_K$, то интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним контурам, если интегрирование ведётся в одном направлении, т.е. $\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_{\Gamma 1} f(z)dz + \int\limits_{\Gamma 2} f(z)dz + ... + \int\limits_{\Gamma к} f(z)dz = \sum\limits_{K=1}^{n} \int f(z)dz$ (2)

Пример 2. Вычислить $\int\limits_{|z|=4} \frac{2z-2-i}{(z-2)(z-i)}dz$

Решение. Подынтегральная функция $f(z) = \frac{2z-2-i}{(z-2)(z-i)}$ имеет разрыв в точках $z = 2, z = i$

Поместим окружности Г$_1$ и Г$_2$ с центром в точках $z = 2; z = i$ малых радиусов, так чтобы эти окружности и лежали целиком в круге радиуса 4. В трех связной области, ограниченной окружностью $|z| = 4, \Gamma_1, \Gamma_2$ подынтегральная функция всюду аналитичная. По теореме Коши для многосвязной области имеем: $\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_{\Gamma 1} f(z)dz + \int\limits_{\Gamma 2} f(z)dz$

Тогда

$$\int\limits_L \frac{2z-2-i}{(z-2)(z-i)}dz = \int\limits_{\Gamma 1} \frac{2z-2-i}{(z-2)(z-i)}dz + \int\limits_{\Gamma 2} \frac{2z-2-i}{(z-2)(z-i)}dz = \int\limits_{\Gamma 1} \frac{\frac{2z-2-i}{z-2}}{z-i}dz + \int\limits_{\Gamma 2} \frac{\frac{2z-2-i}{z-i}}{z-2}dz =$$

$$= 2\pi i \frac{2z-2-i}{z-2}\Big|_{Z=i} + 2\pi i \frac{2z-2-i}{z-i}\Big|_{Z=2} = 2\pi i \frac{i-2}{i-2} + 2\pi i \frac{2-i}{2-i} = 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i$$

Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной замкнутой области $\overline{D}$ с кусочно – гладкой границей C, то для любого натурального n имеет место формула $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$ (3)

Пример 3. Вычислите интеграл $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{chz}{z^2(z+1)}dz$

Решение. В области $|z| = \frac{1}{2}$ находится кратная точка $z_0 = 0$. Функция $f(z) = \frac{ch\, z}{z+1}$ аналитическая в данной области. По формуле (3) имеем:

$$\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{ch\, z}{z^2(z+1)} dz = \int\limits_L \frac{\frac{ch\, z}{z+1}}{z^2} dz = 2\pi\, i\left(f'(z)\right)\Big|_{Z=0} = 2\pi\, i\left(\frac{sh\, z(z+1) - ch\, z}{(z+1)^2}\right)\Big|_{Z=0} =$$

$$= 2\pi\, i\left(sh\, 0 - ch\, 0\right) = 2\pi\, i(-1) = -2\pi\, i.$$

Лекция 14. Ряды Тейлора и Лорана.

(Пьер Альфонс Лоран (1813 – 1854) – французский математик)

Функция f(z), аналитическая в круге $|z - z_0| < R$, разлагается в сходящийся к ней степенной ряд по степеням $(z – z_0)$.

Коэффициенты ряда вычисляются по формулам:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi\, i}\int\limits_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{k+1}}; \qquad k = 0,1,2,...$$

Степенной ряд с коэффициентами такого вида называется **рядом Тейлора.**

Рассмотрим теперь функцию f(z), аналитическую в кольце $r < |z - z_0| < R$. Эта функция может быть представлена в виде сходящегося ряда:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi\, i}\int\limits_\gamma \frac{f(t)dt}{(t - z_0)^{n+1}}; \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Ряд такого вида называется **рядом Лорана**. При этом функция f(z) может быть представлена в виде суммы:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z); \qquad f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n; \quad f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n};$$

Ряд, определяющий функцию $f_1($x), называется **правильной частью** ряда Лорана, а ряд, определяющий функцию $f_2(x)$, называется **главной частью** ряда Лорана.

Если предположить, что $r = 0$, то можно считать, что функция аналитична в открытом круге $0 < |z - z_0| < R$ за исключением центральной точки z_0. Как правило, в этой точке функция бывает не определена.

Тогда точка z_0 называется **изолированной особой точкой** функции f. Рассмотрим следующие частные случаи:

1) Функция f(x) имеет вид: $f(z) = f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ т.к. степенной ряд сходится во всех точках внутри круга, то его сумма $f_1(x)$ определена и непрерывно дифференцируема во всех точках круга, а, следовательно, и в центре круга z_0.

В этом случае говорят, что **особенность функции f в точке z_0 устранима.** Для устранения особой точки достаточно доопределить функцию в центре круга ($f(z_0) = c_0$) и функция будет аналитической не только в окрестности центра круга, но и в самом центре.

В этом случае $\int_L f(z)dz = 0$ для любого контура L, содержащего точку z_0 и принадлежащего к кругу $|z - z_0| < R$.

2) Функция f(x) имеет вид: $f(z) = f_1(z) + \sum_{k=1}^{m} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$.

В этом случае точка z_0 называется **полюсом функции f(z) порядка (кратности) m.** При m = 1 точку z_0 называют еще **простым полюсом.**

Порядок полюса может быть определен по формуле: $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = c \neq 0$

z_0 – полюс порядка m.

3) Функция f(z) имеет вид $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k+\sum_{k=1}^{m}\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}=f_1(z)+f_2(z)$,

где в ряду $f_2(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}$ не равно нулю бесконечное количество коэффициентов c_{-k}.

В этом случае говорят, что функция f(z) имеет в точке z_0 **существенно особую точку.**

Лекция 15. Вычеты. Основная теорема о вычетах.

Определение. Пусть z_0 – изолированная особая точка функция f(z), т.е. пусть функция f(z) – аналитическая в некотором круге $|z-z_0|<R$ из которого исключена точка z_0. Тогда интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)dz=\underset{z=z_0}{Выч}\, f(z)$

называется **вычетом** функции f(z) в точке z_0, где L – контур в круге $|z-z_0|<R$, ориентированный против часовой стрелки и содержащей в себе точку z_0.

Вычет также обозначают иногда $\underset{z_0}{\mathrm{Res}}\, f(z)$.

Если $f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-z_0)^k;\qquad 0<|z-z_0|<R;$ есть ряд Лорана функции f в точке z_0, то $\underset{z=z_0}{Выч}\, f(z)=c_{-1}$.

Таким образом, если известно разложение функции в ряд Лорана, то вычет легко может быть найден в случае любой особой точки.

В частных случаях вычет может быть найден и без разложения в ряд Лорана.

Например, если функция $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},\ \ \varphi(z_0)\neq 0$, а $\psi(z)$ имеет простой нуль при z = z_0 $(\psi(z_0)=0,\ \ \psi'(z_0)\neq 0)$, то z = z_0 является простым полюсом функции f(z).

Тогда можно показать, что вычет находится по формуле: $\underset{z=z_0}{Выч} = c_{-1} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$

Если $z = z_0$ – полюс порядка $m \geq 1$, то вычет может быть найден по формуле: $\underset{z=z_0}{Выч} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}[(z-z_0)^m f(z)]}{dz^{m-1}}$

<u>Пример.</u> Найти вычет функции $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2(z-3)}$ относительно точки z=2.

Эта точка является полюсом второго порядка.

Получаем: $\underset{z=2}{Выч} = \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz}[(z-2)^2 f(z)] = \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz} \frac{1}{z-3} = \lim_{z \to 2} \frac{1}{(z-3)^2} = -1.$

<u>Теорема о вычетах.</u>

<u>**Теорема.**</u> *Пусть функция f(z) – аналитическая на всей плоскости z, за исключением конечного числа точек z_1, z_2, …, z_N. Тогда верно равенство:*

$$\sum_{k=1}^{N} \underset{z=z_k}{Выч} f(z) + \underset{z=\infty}{Выч} f(z) = 0$$

А интеграл от функции по контуру L, содержащему внутри себя эти точки, равен $\int\limits_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \underset{z=z_j}{Выч} f(z)$

Эти свойства применяются для вычисления интегралов. Если функция f(z) аналитическая в верхней полуплоскости, включая действительную ось, за исключением N точек, то справедлива формула $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \underset{z=z_j}{Выч} f(z)$

Лекция 16. Применение вычетов к вычислению интегралов.

<u>Пример.</u> Вычислить определенный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}$.

Подынтегральная функция является аналитической в верхней полуплоскости за исключением точки 2i. Эта точка является полюсом второго порядка.

Найдем вычет функции $\underset{z=2i}{Выч}\frac{1}{(z^2+4)^2}=\lim\limits_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left(\frac{(z-2i)^2}{(z^2+4)^2}\right)=\lim\limits_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+2i)^2}=$

$=\lim\limits_{z\to 2i}\frac{-2}{(z+2i)^3}=-\frac{2}{(4i)^3}=\frac{1}{32i}$. Получаем $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2}=2\pi i\cdot\frac{1}{32i}=\frac{\pi}{16}$.

Вычислить самостоятельно определенный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Лекция 17. Численные методы решения дифференциальных уравнений.

Известные методы точного интегрирования дифференциальных уравнений позволяют найти решение в виде аналитической функции, однако эти методы применимы для очень ограниченного класса уравнений. Большинство уравнений, встречающихся при решении практических задач нельзя проинтегрировать с помощью этих методов.

В таких случаях используются численные методы решения, которые представляют решение дифференциального уравнения не в виде аналитической функции, а в виде таблиц значений искомой функции в зависимости от значения переменной.

Существует несколько методов численного интегрирования дифференциальных уравнений, которые отличаются друг от друга по сложности вычислений и точности результата.

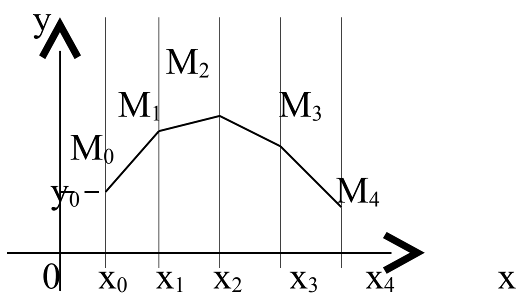
Рассмотрим некоторые из них.

<u>Метод Эйлера.</u>

(Леонард Эйлер (1707 – 1783) швейцарский математик)

Известно, что уравнение $y' = f(x, y)$ задает в некоторой области поле направлений. Решение этого уравнения с некоторыми начальными условиями дает кривую, которая касается поля направлений в любой точке.

Если взять последовательность точек *x_0, x_1, x_2,* …. и заменить на получившихся отрезках интегральную кривую на отрезки касательных к ней, то получим ломаную линию.



При подстановке заданных начальных условий (x_0, y_0) в дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ получаем угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в начальной точке $tg\alpha_0 = y' = f(x_0, y_0)$.

Заменив на отрезке [x_0, x_1] интегральную кривую на касательную к ней, получаем значение $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$.

Производя аналогичную операцию для отрезка [x_1, x_2], получаем:

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1).$$

Продолжая подобные действия далее, получаем ломаную кривую, которая называется **ломаной Эйлера**.

Можно записать общую формулу вычислений:

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Если последовательность точек x_i выбрать так, чтобы они отстояли друг от друга на одинаковое расстояние h, называемое шагом вычисления, то получаем формулу: $y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h$

Следует отметить, что точность метода Эйлера относительно невысока. Увеличить точность можно, конечно, уменьшив шаг вычислений, однако, это приведет к усложнению расчетов. Поэтому на практике применяется так называемый **уточненный метод Эйлера** или **формула пересчета**.

Суть метода состоит в том, что в формуле $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$ вместо значения $y_0' = f(x_0, y_0)$ берется среднее арифметическое значений $f(x_0, y_0)$ и $f(x_1, y_1)$. Тогда уточненное значение: $y_1^{(1)} = y_0 + \dfrac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)}{2}h;$

Затем находится значение производной в точке $(x_1, y_1^{(1)})$. Заменяя $f(x_0, y_0)$ средним арифметическим значений $f(x_0, y_0)$ и $f(x_1, y_1^{(1)})$, находят второе уточненное значение y_1.

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)})}{2}h;$$

Затем третье: $y_1^{(3)} = y_0 + \dfrac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(2)})}{2}h;$

и т.д. пока два последовательных уточненных значения не совпадут в пределах заданной степени точности. Тогда это значение принимается за ординату точки M_1 ломаной Эйлера.

Аналогичная операция производится для остальных значений *y*. Подобное уточнение позволяет существенно повысить точность результата.

Метод Рунге – Кутта.

Метод Рунге – Кутта является более точным по сравнению с методом Эйлера.

Суть уточнения состоит в том, что искомое решение представляется в виде разложения в ряд Тейлора.

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + y_i'' \frac{h^2}{2!} + y_i''' \frac{h^3}{3!} + y_i^{IV} \frac{h^4}{4!} + \ldots$$

Если в этой формуле ограничиться двумя первыми слагаемыми, то получим формулу метода Эйлера. Метод Рунге – Кутта учитывает четыре первых члена разложения.

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + y_i'' \frac{h^2}{2!} + y_i''' \frac{h^3}{3!} = y_i + \Delta y_i .$$

В методе Рунге – Кутта приращения Δy_i предлагается вычислять по формуле: $\Delta y_i = \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right)$ где коэффициенты k_i вычисляются по

формулам: $k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i)$; $k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right)$; $k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right)$;

$k_4^{(i)} = hf\left(x_i + h; y_i + k_3^{(i)}\right)$;

Пример. Решить методом Рунге – Кутта дифференциальное уравнение $y' = x + y$ при начальном условии y(0) = 1 на отрезке [0; 0,5] с шагом 0,1.

Для i = 0 вычислим коэффициенты k_i.

$$k_1^{(0)} = hf(x_0, y_0) = 0{,}1(x_0 + y_0) = 0{,}1(0 + 1) = 0{,}1;$$

$$k_2^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) = 0{,}1(0{,}05 + 1{,}05) = 0{,}11;$$

$$k_3^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right) = 0{,}1(0{,}05 + 1{,}055) = 0{,}1105;$$

$$k_4^{(0)} = hf\left(x_0 + h; y_0 + k_3^{(0)}\right) = 0{,}1(0{,}1 + 1{,}1105) = 0{,}1211;$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}) = \frac{1}{6}(0{,}1 + 0{,}22 + 0{,}221 + 0{,}1211) = 0{,}1104;$$

$$x_1 = x_0 + h = 0{,}1; \quad y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}1104 = 1{,}1104;$$

Последующие вычисления приводить не будем, а результаты представим в виде таблицы.

i	x_i	k		Δy_i	y_i
0	0	1	0,1000	0,1104	1
		2	0,1100		
		3	0,1105		
		4	0,1155		
1	0,1	1	0,1210	0,1325	1,1104
		2	0,1321		
		3	0,1326		
		4	0,1443		
2	0,2	1	0,1443	0,1569	1,2429
		2	0,1565		
		3	0,1571		
		4	0,1700		
3	0.3	1	0,1700	0,1840	1,3998
		2	0,1835		
		3	0,1842		
		4	0,1984		
4	0,4	1	0,1984	0,2138	1,5838
		2	0,2133		
		3	0,2140		
		4	0,2298		
5	0,5				1,7976

Решим этот же пример методом Эйлера.

Применяем формулу $y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$.

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \qquad f(x_0, y_0) = x_0 + y_0 = 1;$$

$$hf(x_0, y_0) = h(x_0 + y_0) = 0{,}1;$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1 = 1{,}1.$$

$$x_1 = 0{,}1 \quad y_0 = 1{,}1 \qquad f(x_1, y_1) = x_1 + y_1 = 1{,}2;$$

$$hf(x_1, y_1) = h(x_1 + y_1) = 0{,}12;$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1{,}1 + 0{,}12 = 1{,}22.$$

Производя аналогичные вычисления далее, получаем таблицу значений:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	1,1	1,22	1,362	1,528	1,721

Применим теперь уточненный метод Эйлера.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	1,1	1,243	1,400	1,585	1,799

Для сравнения точности приведенных методов численного решение данного уравнения решим его аналитически и найдем точные значения функции y на заданном отрезке.

Уравнение $y' - y = x$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Решим соответствующее ему однородное уравнение: $y' - y = 0;\quad y' = y;\quad \frac{dy}{dx} = y;\quad \frac{dy}{y} = dx;\quad \int \frac{dy}{y} = \int dx;$

$$\ln|y| = x + \ln C; \qquad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = x; \qquad y = Ce^x;$$

Решение неоднородного уравнения имеет вид $y = C(x)e^x$.

$$y' = C'(x)e^x + C(x)e^x;$$

$$C'(x)e^x + C(x)e^x = x + C(x)e^x; \qquad C'(x)e^x = x; \qquad C'(x) = xe^{-x};$$

$$C(x) = \int xe^{-x}dx = \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = e^{-x}dx; \\ du = dx; & v = -e^{-x}; \end{matrix}\right\} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C;$$

Общее решение: $y = Ce^x - x - 1;$

С учетом начального условия: $1 = C - 0 - 1;\quad C = 2;$ Частное решение: $y = 2e^x - x - 1;$

Для сравнения полученных результатов составим таблицу.

i	x_i	y_i			
		Метод Эйлера	Уточненный метод Эйлера	Метод Рунге - Кутта	Точное значение
0	0	1	1	1	1
1	0,1	1,1	1,1	1,1104	1,1103
2	0,2	1,22	1,243	1,2429	1,2428
3	0,3	1,362	1,4	1,3998	1,3997
4	0,4	1,528	1,585	1,5838	1,5837
5	0,5	1,721	1,799	1,7976	1,7975

Как видно из полученных результатов метод Рунге – Кутта дает наиболее точный ответ. Точность достигает 0,0001. Кроме того, следует обратить внимание на то, ошибка (расхождение между точным и приближенным значениями) увеличивается с каждым шагом вычислений. Это обусловлено тем, что во – первых полученное приближенное значение округляется на каждом шаге, а во – вторых – тем, что в качестве основы вычисления принимается значение, полученное на предыдущем шаге, т.е. приближенное значение. Таким образом происходит накопление ошибки.

Это хорошо видно из таблицы. С каждым новым шагом приближенное значение все более отличается от точного.

11. ФОНД ТЕСТОВЫХ И КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ.

Числовые и функциональные ряды

Вариант 1

1. Исследовать на сходимость ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{4n+5}\right)^n$.

2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n^2+1}$ и, если он сходится, то вычислить его сумму с точностью до 0,001.

3. Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{5^n}$.

4. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^{\frac{1}{4}} x^2 e^{-\sqrt{x}} dx.$

Вариант 2

1. Исследовать на сходимость ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{4n+3}\right)^n$.

2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ и, если он сходится, то вычислить его сумму с точностью до 0,001.

3. Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n+2}$.

4. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x} \cos 2x dx.$

Вариант 3

1. Исследовать на сходимость ряды : а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-3}{2n+4}\right)^n$.

2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+2}$ и, если он сходится, то вычислить его сумму с точностью до 0,001.

3. Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n7^{n+1}}$.

4. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^{\frac{1}{3}} x \ln\left(1+\sqrt{x}\right) dx.$

Вариант расчетно-графической работы по теме:

«Функции комплексного переменного»

1. Изобразить область решения неравенства плоскости $|z-2|<|z-1|$
2. Представить значение функции в алгебраической форме

а) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-i\right)$; б) $Arcth\left(\frac{4+3i}{5}\right)$;

3. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f (z) по известной действительной U(x,y) или мнимой v (x,y) части и значению $f(z_0)$

$$U=\frac{x}{x^2+y^2}+x, \quad f(1)=2.$$

4.Вычислить интеграл по данной кривой $\int_L z^3\ell^{z^4}dz, \quad L -$ *ломаная ABC*

$z_A=i$, $z_B=1$, $z_c=0$.

5. Вычислить интеграл при помощи интегральной формулы Коши.

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{(z-1)^2(z-3)}$$

6. Найти изолированные особые точки функции и определить их тип

$$f(z)=\frac{\ell^z-1}{z^3(z+1)^2}$$

7. Определить область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n+2}$

8. Разложить функцию $\frac{1}{(z^2-1)^2}$, в ряд Лорана по степеням (z–1)

в кольце $0<|z-1|<2$.

9. Найти вычеты в особых точках $f(z)=\frac{1}{z^2-z^5}$

10. Вычислить интеграл при помощи формулы Коши о вычетах

$$Y=\int_{|z-3|=1}\frac{\sin 3z+2}{z^2(z-\pi)}dz$$

11.Вычислить несобственные интегралы при помощи вычетов

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$$

Варианты контрольной работы по теме

«Функции комплексного переменного»

Вариант 1.

1. Представить значение функции в алгебраической форме.

ArcCos(-5i); Sh($\frac{\pi}{4}$-2i).

2. Найти производную от функции W=f(z).

W=$\sqrt[3]{z^2}$ -3z^2+1; W=$\frac{x}{x^2+y^2}$-i$\frac{y}{x^2+y^2}$

3. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой.

$\int\limits_{AB}(Cosz+3)dz$, AB:отрезок прямой z$_A$=0, z$_B$=i.

4. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой.

$$\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z dz}{(z^2-1)^2}$$

5. Найти область сходимости ряда. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n\cdot 2^{n+1}}$

6. Найти вычеты функции W=f($\bar{z}$) в ее особых изолированных точках.

F(z)=$\frac{\cos 2z}{(z-1)^3}$.

Вариант 2.

1. Представить значение функции в алгебраической форме 5^{1-i}; Ch(3+$\frac{\pi i}{4}$).
2. Найти производную от функции W=f(z). W= $\sqrt{2Z-1}$+e^z; W=z$\cdot\bar{z}$+z^2.
3. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой.

$\int\limits_{AB}(z^2+3z)dz$; AB:y=x^2; z$_A$=1+i, z$_B$=2+4i.

4. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой. $\int\limits_{|z|=1} \frac{z^2 dz}{(z-2i)^2}$

5. Найти область сходимости ряда. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{5}{z})^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{z}{3})^n$

6. Найти вычеты функции W=f($\bar{z}$) в ее особых изолированных точках.

F(z)=$\frac{1}{z(z-2)(z+3)}$

Задания к зачету

Вариант 1

1. Записать число $Z = 6 + 6i$ в трех формах: 1) аналитической; 2) тригонометрической; 3) показательной.
2. Вычислить значения функции в точке: $\cos(2+2i)$
3. Найти производную от функции: а) $\omega = (iz)^3$ б) $\omega = (x - yi)^3$
4. Найти интеграл: $\int\limits_{AB} \operatorname{Im} z^2 dz,\ z_A = 1,\ z_B = 3 + 2i,\ AB -$ часть прямой.
5. Найти интеграл, применив интегральную формулу Коши: $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{chz}{z^2(z+1)} dz$
6. Определить область сходимости ряда и изобразить ее графически:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n!}$$

7. Найти вычеты: $f(z) = \frac{4}{(z+4)^2(z+2)}$
8. Вычислить интеграл, применив теорему Коши о вычетах: $\int\limits_{\gamma} \frac{zdz}{(z-1)(z-2)}$

9. Вычислить несобственный интеграл, применяя теорию вычетов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+16)^2}.$$

10. Найти логарифмический вычет данной функции относительно данного

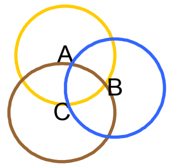
контура: $f(z)=\dfrac{z^2}{z^2-4}, C:|z|=2$

11. Выписать элементы множества: $M=(A\setminus B)\cup(A\cap B)$, если:

1) $A=\{1,3,5\}, B=\{3,4,5\}$ 2) $A=\{2,4,5\}, B=\{1,4\}$ 3) $A=\{1\}, B=\varnothing$

12. Найти подмножества данного множества: $I=\{a,b,c\}$

13. Изобразить по приведенному рисунку и найти $A\cup B, A\cap B\cap C, (A\setminus B)\setminus C, A\setminus(B\setminus C), A\cup(B\cap C)$ если $A=\{a,b,c,d\}, B=\{b,c,f,k\}, C=\{a,f,e,m\}$.



14. Выяснить, какими из основных свойств – рефлексивностью, симметричность, анти симметричность, транзитивностью – обладает следующее отношение: $S=\{(x,y)/x,y\in N, x+y\in N\}$

15. Составить таблицу истинности для формулы: $((x\vee y)\wedge(x\vee z))\to(x\to z)$

16. Определить является ли данные предложения высказываниями, и если являются то какими, а если нет, то обоснуйте ответ:

1) «Если у четырехугольника диагонали пересекаются под прямым углом и делятся пополам, то этот четырехугольник - квадрат»;
2) «$-5x\geq 0$»;
3) «Является ли x= –1 корнем уравнения x+1 = 0?»;
4) «Около четырехсот рек впадает в озеро Байкал»;
5) «Мы сегодня сдали не сложный экзамен»;

17. Найти: $A\times B=?, A\times A=?, B\times B=?$ изобразить на плоскости, если $A=\{2,4,6\}, B=\{1,2\}$

18. Указать какое высказывание: а) «Киев-столица Украины»; б) «Париж-столица России».

19. Дано A: «На улице идет дождь», B: «Над моей головой раскрыт зонтик». Составить высказывания: а) $\overline{A}$; б) $\overline{B}$; в) $\overline{A}\vee B$; г) $A\wedge\overline{B}$; д) $A\to B$; е) $B\leftrightarrow A$.

20. Придумать свое высказывание и составить для него таблицу истинности.

21. Нарисуйте полный граф с n вершинами, если : а) n=2, б) n=3, в) n=4.

22. Изобразить: 1) плоский граф, 2) не плоский граф, 3) не полный граф и его дополнение.

Вариант 2

1. Вычислить: $\left(\frac{2\sqrt{2}}{1+i}\right)^4$.

2. Вычислить значения функции в точке: e^{4-4i}.

3. Найти производную от функции: а) $f(z) = 2z^2 \sin 2z$;

   б) $f(z) = (4x^2 + 2x^2y) + i(2xy^3 + x^2)$.

4. Найти интеграл: $\int\limits_{AB} (z^2 + 3z)dz,\ z_A = 1+i,\ z_B = 2+4i,\ AB -$ парабола $y = x^2$.

5. Найти интеграл, применив интегральную формулу Коши: $\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{2z^2 + z + 2} dz$

6. Определить область сходимости ряда и изобразить ее графически:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n}{(z+i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i^n}{(n+3)}.$$

8. Найти вычеты: $\int\limits_{\gamma} \frac{z+2}{(z+1)(z-2)(z+4)} dz.$

9. Вычислить несобственный интеграл, применяя теорию вычетов:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2}$$

10. Найти логарифмический вычет данной функции относительно данного контура: $f(z) = \frac{1}{2+z^2}, C:|z| = 2$

11. Выписать элементы множества: $M = (A \cup B) \cap C, (A \cap C) \cup (A \cap B), A \setminus C, A \setminus B$

если: $A =$ Ж $, A = \{-1,0\}, B = \{1,2,3\}, C = \{-1,0,1\}$ 3) $A = \{1\}, B = \varnothing$

12. Найти подмножества данного множества: $I = \{m, n, k, f\}$

13. Изобразить и найти

$A \cap B, A \cap C, A \cap B \cap C, A \cup B, A \cap C, A \cup B \cup C, A \setminus B, B \setminus A, A \setminus (B \setminus C), A \cap (B \cup C)$

если $A = \{5,8,9,10\}$, $B = \{5,6,7,15,20\}$, $C = \{-1,0,2,5,6\}$

20. Выяснить, какими из основных свойств – рефлексивностью, симметричность, анти симметричность, транзитивностью – обладает следующее отношение: $S = \{(x,y)/x,y \in Z, x^2 = y^2\}$

21. Составить таблицу истинности для формулы: $(x \to (y \to z)) \leftrightarrow (x \to z)$

22. Определить является ли данные предложения высказываниями, и если являются то какими, а если нет, то обоснуйте ответ:

1) «Если треугольник прямоугольный, то катет лежащий против угла в 30º равен половине гипотенузы»;

2) «В темноте у кошки светятся глаза»;

3) «Вы сегодня пойдете в ночной клуб?»;

4) «0< -3»;

5) «Шерлок Холмс – герой боевика».

23. Найти: $A \times B = ?, A \times A = ?, B \times B = ?$ изобразить на плоскости, если $A = \{-1,2,3\}$, $B = \{0,1,2\}$

24. Указать какое высказывание: а) «Байкал впадает в Балтийское море»; б) «Река Ангара протекает в Иркутской области».

25. Дано: А: «Сегодня хорошая погода», В: «Мы поехали на дачу». Составить высказывания: а) $\overline{A}$; б) $\overline{B}$; в) $\overline{A} \vee B$; г) $A \wedge \overline{B}$; д) $A \to B$; е) $B \leftrightarrow A$..

20. Придумать свое высказывание и составить для него таблицу истинности.

21. Нарисуйте плоский граф с n вершинами, если : а) n=3, б) n=4, в) n=5, г) n=6.

22. Изобразить: 1) связный граф, 2) не связный граф, 3) ориентированный граф и составить для него матрицу инцидентности.

Диктанты по темам:

«Векторы на плоскости и в пространстве. Кривые 2-го порядка»

Вариант 1

1. Записать векторное произведение двух векторов в координатах.
2. Записать скалярное произведение двух векторов в координатах
3. Записать формулу площади треугольника построенного на векторах.
4. Записать формулу нормирования вектора.

5. Условие перпендикулярности векторов, умножение числа на вектор и пример разложения вектора.
6. Записать формулы координат точки лежащей на отрезке, делящей его в отношении λ.
7. Уравнения окружности. Окружность – это…
8. Уравнения гиперболы. Гипербола – это…

Вариант 2

1. Записать формулу смешанного произведения трех векторов в координатах.
2. Записать формулу косинуса угла между двумя векторами.
3. Записать формулу объема пирамиды построенную на трех векторах.
4. Записать условие компланарности векторов.
5. Записать формулу направляющих косинусов вектора, заданного в координатном пространстве $0xyz$.
6. Дан вектор $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$. Найти модуль вектора.
7. Уравнения эллипса. Эллипс – это…
8. Уравнения параболы. Парабола – это … (изобразить на плоскости).

«Прямая на плоскости»

Вариант 1

1. Написать общее уравнение прямой и частные случаи.
2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку и имеющей угловой коэффициент.
3. Написать уравнение прямой, в отрезках.
4. Условие пересечения прямых. Условие перпендикулярности и параллельности прямых.

Вариант 2

1. Написать уравнение прямой с угловым коэффициентом. Чему равны коэффициенты при переменных.
2. Написать уравнение прямой проходящей через две точки. Записать угловой коэффициент этой прямой.
3. Записать формулу угла между прямыми.
4. Записать формулу расстояния от точки до прямой.

«Плоскость и прямая»

Вариант 1

1. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку и перпендикулярной данному вектору.
2. Записать уравнение плоскости в отрезках.
3. Записать формулу угла между плоскостями.
4. Записать каноническое уравнение прямой.
5. Написать условие параллельности и перпендикулярности прямых.

6. Написать формулу прямой проходящей через две точки.

Вариант 2

1. Написать общее уравнение плоскости.
2. Написать формулу расстояния от точки до плоскости.
3. Записать условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
4. Записать формулу угла между прямыми.
5. Написать условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
6. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки не лежащих на одной прямой.

«Теория вероятности»

Вариант 1

1. Комбинаторика – это... . Написать формулы: перестановок, сочетаний.
2. Виды событий и формула вероятности для этих видов. Событие –это...
3. Классическое определение вероятности.
4. Записать формулы сложения и умножения вероятностей двух несовместных событий.
5. Записать формулу Бернули.
6. Записать формулу полной вероятности.
7. Случайная величина – это... Записать закон распределения случайной дискретной величины.
8. Записать закон больших чисел. Теорема Бернулли.
9. Записать формулы статистических и центральных моментов. Записать определение моды и медианы и их формулы.

Вариант 2

1. Предмет вероятности – это... . Написать формулы: размещений с повторением, без повторений.
2. Противоположное событие – это... . Чему равна сумма противоположных событий.
3. Написать правило сложения и умножения событий.
4. Записать формулы сложения и умножения вероятностей двух совместных событий.
5. Записать формулу наивероятнейшего числа наступлений события.
6. Записать формулы интегральной и локальной теоремы Лапласа.
7. Записать формулу Бейеса.
8. Записать функцию плотности распределения случайной величины и функцию распределения случайной величины.
9. Перечислить числовые характеристики случайной величины и записать их формулы и свойства.

13. Литература

Основная литература

1. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики: Учебник: Рек. Мин. Обр. РФ. – СПб.: Лань, 2001г.
2. Краснов М.Л.,Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. - М. Наука 1990.

Дополнительная литература

3. Шипачев В. С. Высшая математика: Учебник: Рек. Мин. Обр. РФ. – М.: Высш. Шк., 2003г.
4. Данко П. Е., Попов А. Г., "Высшая математика в упражнениях и задачах". Москва - наука, 2002г.
5. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М. Наука, 1983.
6. Методические разработки кафедры. «Общей математики и информатики».

14. Карта обеспеченности дисциплины кадрами профессорско-преподавательского состава

	для специальностей 260704, 260902, 260901,							
Наимен. дисц. в соот. с учебным планом	Обеспеченность преподавательским составом							
	Ф.И.О. должность по штатному расписанию	Какое образов. учреждение професс. образов. окончил, спец. по диплому	Ученая степень и ученое звание (почетное звание)	Стаж научно педагогической работы			Основное место работы, должность	Условия привлечения к трудовой деятельности (штатный, совместитель (внутренний или внешний с указанием доли ставки), иное
				Всего	В т. ч. педагогический			
					Всего	В том числе по дисц.		
2	3	4	5	6	7	8	9	10
математика	Шевченко Ф.Н., доцент	БГПИ, учитель математики	доцент	41	41	40	АмГУ	Штатный 1 ст.
	Ефимова О.В., ассистент	АмГУ, физик	-	3	3	2	АмГУ, ОМиИ	Штатный 1,3 ст.
	Попова О.С., ассистент	БГПУ, учитель математики	-	3	3	3	АмГУ, ОМиИ	Штатный 1ст.
	для специальности 280101, 130301							
Наимен. дисц. в соот. с учебным планом	Обеспеченность преподавательским составом							
	Ф.И.О. должность по штатному расписанию	Какое образов. учреждение професс. образов. окончил, спец. по диплому	Ученая степень и ученое звание (почетное звание)	Стаж научно педагогической работы			Основное место работы, должность	Условия привлечения к трудовой деятельности (штатный, совместитель (внутренний или внешний с указанием доли ставки), иное
				Всего	В т. ч. педагогический			
					Всего	В том числе по дисц.		
2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10
математика	Шевченко Ф.Н., доцент	БГПИ, учитель математики	доцент	41	41	40	АмГУ	Штатный 1 ст.
	Терентьева Е.А., ассистент	БГПУ, учитель математики	-	6	6	5	Вечерняя школа	Внеш. совм 0,5ст.
	Попова О.С., ассистент	БГПУ, учитель математики	-	6	5	5	АмГУ	Штатный 1 ст.
	Костенко С.В., ст.преподаватель	МГПИ, учитель математики	-	15	15	15	АмГУ	Штатный 1 ст.

СОДЕРЖАНИЕ