Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

сборник учебно-методических материалов

для направления подготовки 38.03.01 – Экономика

и специальности 38.05.01 – Экономическая безопасность

2017 г.

Печатается по решению

редакционно-издательского совета

факультета математики и информатики

Амурского государственного

Университета

Составитель: Двоерядкина Н.Н.

Математический анализ: сборник учебно-методических материалов для направления подготовки 38.03.01 «Экономика» и специальности – 38.05.01 «Экономическая безопасность» – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2017.

Рассмотрен на заседании кафедры общей математики и информатики 03.11.2017, протокол № 3.

ВВЕДЕНИЕ

Цель дисциплины: подготовка студента к восприятию математического аппарата специальных дисциплин, чтению специальной литературы; обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и решения профессиональных задач, соответствующих его будущей специальности; формирование математического образования студента таким образом, чтобы в дальнейшем он мог творчески развивать известные методы применительно к задачам своей специальности; формирование логического мышления, способности к абстрагированию, и умению «работать» с «неосязаемыми» объектами.

Задачи дисциплины:

– раскрыть роль и значение математических методов исследования при решении профессиональных задач;

– ознакомить с основными понятиями и методами классического и современного математического анализа;

– научить студентов применять методы математического анализа для построения математических моделей реальных процессов и явлений.

В результате освоения обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

1) Знать: основные понятия и методы математического анализа, теории рядов, функционального анализа;

2) Уметь: использовать аппарат дифференциального и интегрального исчисления для решения профессиональных задач;

3) Владеть: навыками составления простых математических моделей и методами решения прикладных экономических задач

1 КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ЛЕКЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1 Введение в математический анализ.

Ключевые вопросы

Последовательность. Предел числовой последовательности. Бесконечно малые последовательности, их свойства. Теоремы о пределе суммы, произведения и частного сходящихся последовательностей, о пределах последовательностей, связанных неравенствами. Бесконечно большие последовательности, их связь с бесконечно малыми.

Функция одной действительной переменной. Предел функции одной действительной переменной. Бесконечно большие функции. Односторонние пределы. Основные теоремы о пределах функции. Замечательные пределы. Эквивалентные бесконечно малые функции, их свойства. Непрерывность функций. Точки разрыва функции, их классификация. Непрерывность функции на интервале, отрезке. Формулировка свойств функций, непрерывных на отрезке

Основные определения и методы

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана последовательность: $x_1, x_2, \ldots, x_n = \{x_n\}$. Общий элемент последовательности является функцией от n: $x_n = f(n)$.

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется условие: $|a - x_n| < \varepsilon.$ Это записывается: $\lim x_n = a$.

Определение предела последовательности геометрически можно сформулировать так: число a предел последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε-окрестности точки a найдётся натуральное число N, такое что все значения $\{x_n\}$ для которых $n > N$ попадут в ε-окрестности точки a.

Число A называется пределом функции f(x) при $x \to a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\Delta>0$, что для всех x таких, что $0 < |x - a| < \Delta$ верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Если f(x) $\to$ A1 при x $\to$ a только при x < a, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A_1$ - называется пределом функции f(x) в точке x = a слева, а если f(x) $\to$ A2 при x $\to$ a только при x > a, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A_2$ называется пределом функции f(x) в точке x = a справа.

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при x$\to$a.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Теорема 5. Если f(x)>0 вблизи точки x = a и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то A>0.

Теорема 6. Если g(x) ≤ f(x) ≤ u(x) вблизи точки x = a и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$, то и $\lim\limits_{x\to a} = A$.

Функция называется бесконечно большой при x$\to$a, где a – число или одна из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, где A – одна из величин ∞, +∞ или -∞.

Функция f(x) называется бесконечно малой при x$\to$a, где a может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Свойства бесконечно малых функций:

1. Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при x$\to$a тоже бесконечно малая функция при x$\to$a.

2. Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при x$\to$a тоже бесконечно малая функция при x$\to$a.

3. Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки x = a является бесконечно малой функцией при $x \to a$.

4. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю, есть величина бесконечно малая.

Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то функция α называется бесконечно малой более высокого порядка, чем функция β.

Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = A, \quad A \neq 0, \quad A = const$, то α и β называются бесконечно малыми одного порядка.

Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha}{\beta} = 1,$ то функции α и β называются эквивалентными бесконечно малыми. Записывают $\alpha \sim \beta$.

Функция f(x), определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется непрерывной в точке x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.

Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что g(x) не равна нулю в точке x_0.

Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:

Если u = f(x), v = g(x) – непрерывные функции в точке $x = x_0$, то функция v = g(f(x)) – тоже непрерывная функция в этой точке.

Точка x_0 называется точкой разрыва функции f(x), если f(x) не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

Точка x_0 называется точкой разрыва 1- го рода, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Точка x_0 называется точкой разрыва 2 – го рода, если в этой точке функция f(x) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

Тема 2 Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Ключевые вопросы

Производная функции. Геометрический, механический и экономический смысл производной. Касательная и нормаль к кривой. Дифференцируемость функций. Общие правила дифференцируемости. Производная сложной и обратной функции. Производные элементарных функций. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование параметрические заданной функции. Теоремы о среднем Ферма, Ролля, Лагранжа, их геометрический смысл. Теорема Коши. Правила Лопиталя. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций. Условия монотонности функции. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума. Выпуклость (вогнутость) графика функции, точки перегиба. Необходимое и достаточное условия точки перегиба. Асимптоты графика функции. Применение дифференциального исчисления в экономике. Предельные величины. Эластичность.

Основные определения и методы

Производной функции f(x) в точке x = x0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Уравнение касательной к кривой: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали к кривой: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Обозначим f(x) = u, g(x) = v- функции, дифференцируемые в точке x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Пусть $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $t_0 \le t \le T$, $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$- производная функции, заданной параметрически.

Пусть функция f(x)- дифференцируема на некотором интервале.

Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

Если найти производную функции f′(x), получим вторую производную функции f(x). $y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ т.е. $y'' = (y')'$ или $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$.

Дифференциалом функции f(x) в точке x называется главня линейная часть приращения функции. Обозначается dy или df(x).

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или $dy = f'(x)dx$. Можно также записать: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

Если u = f(x) и v = g(x)- функции, дифференцируемые в точке x, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

$d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$;

$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$;

$d(Cu) = Cdu$;

$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Формула, для вычисления приближенных значений функции:

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

Теорема Роля. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], дифференцируема на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны f(a) = f(b), то на интервале (a, b) существует точка ε, a < ε < b, в которой производная функция f(x) равная нулю, $f'(\varepsilon) = 0$.

Теорема Лагранжа. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b), то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка ε a < ε < b, такая, что $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\varepsilon)$.

Теорема Коши. Если функции f(x) и g(x) непрерывны на отрезке [a, b] и дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b), то существует по крайней мере одна точка ε, a < ε < b, такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.$$

Теорема (правило Лопиталя). Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы в вблизи точки a, непрерывны в точке a, $g'(x)$ отлична от нуля вблизи a и f(a) = g(a) = 0, то предел отношения функций при $x \to a$ равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на промежутке (a, b), причем $f'(x) > 0$ для a < x < b, то эта функция возрастает на отрезке [a, b].

Если $f'(x)<0$ в промежутке (a, b), то f(x) убывает на отрезке [a, b].

Функция f(x) имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Функция f(x) имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Кривая обращена выпуклостью вверх на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется выпуклой, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется вогнутой.

Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется точкой перегиба.

План нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

1) Найти критические точки функции.
2) Найти значения функции в критических точках.
3) Найти значения функции на концах отрезка.
4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

1) Область существования функции.

Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.

2) Точки разрыва. (Если они имеются).
3) Интервалы возрастания и убывания.
4) Точки максимума и минимума.
5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.
6) Области выпуклости и вогнутости.
7) Точки перегиба. (Если они имеются).
8) Асимптоты. (Если они имеются).
9) Построение графика.

Тема 3 Функции нескольких переменных.

Ключевые вопросы

Открытые и замкнутые множества и области. Предел и непрерывность функции. Частные производные, дифференцируемость. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости. Дифференцирование сложных и неявно заданных функций. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Локальный экстремум функции нескольких переменных. Достаточные условия экстремума. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

Основные определения и методы

При рассмотрении функций нескольких переменных ограничимся подробным описанием функций двух переменных, т.к. все полученные результаты будут справедливы для функций произвольного числа переменных.

Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому - либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z, то переменная z называется функцией двух переменных z = f(x, y)

Областью определения функции z называется совокупность пар (x, y), при которых функция z существует.

Число А называется пределом функции f(x, y) при стремлении точки M(x, y) к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа ε > 0 найдется такое число r >0, что для любой точки M(x, y), для которых верно условие $MM_0 < r$ также верно и условие $|f(x,y) - A| < \varepsilon$. Записывают: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции f(x, y). Тогда функция z = f(x, y) называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$, причем точка M(x, y) стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом. Если в какой-либо точке условие не выполняется, то эта точка называется точкой разрыва функции f(x, y).

Пусть в некоторой области задана функция z = f(x, y). Возьмем произвольную точку M(x, y) и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется частным приращением функции по x. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется частной производной функции z = f(x, y) по x. Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$; $f'_x(x,y)$.

Если функция f(x, y) определена в некоторой области D, то ее частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ тоже будут определены в той же области или ее части. Будем называть эти производные частными производными первого порядка.

Производные этих функций будут частными производными второго порядка.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y);$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$ и т.д. называются смешанными производными.

<u>Теорема.</u> Если функция f(x, y) и ее частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке M(x, y) и ее окрестности, то верно соотношение: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ то точка M_0 называется точкой максимума.

Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ то точка M_0 называется точкой минимума.

Необходимое условие экстремума: если функция f(x,y) в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует.

Достаточные условия экстремума: пусть в окрестности критической точки (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

Рассмотрим выражение: $D(x,y) = f''_{x^2}(x,y) \cdot f''_{y^2}(x,y) - \left[f''_{xy}(x,y)\right]^2$

Если $D(x_0, y_0) > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет экстремум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ - максимум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ - минимум.

Если $D(x_0, y_0) < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) не имеет экстремума

В случае, если D = 0, вывод о наличии экстремума сделать нельзя.

Условный экстремум находится, когда переменные x и y, входящие в функцию u = f(x, y), не являются независимыми, т.е. существует некоторое соотношение φ(x, y) = 0, которое называется уравнением связи. Тогда из переменных x и y только одна будет независимой, т.к. другая может быть выражена через нее из уравнения связи. Для нахождения условного экстремума используют метод подстановки или метод множителей Лагранжа.

Тема 4 Интегральное исчисление функций одной переменной

Ключевые вопросы

Первообразная. Неопределенный интеграл, его свойства. Методы интегрирования. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Интегрирование рациональных, тригонометрических и иррациональных выражений. Примеры интегралов, не выражающихся через элементарные функции.

Определённый интеграл. Условия существования. Свойства определённого интеграла. Интеграл с переменным верхним пределом, его дифференцируемость. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле. Геометрические приложения определённого интеграла. Несобственные интегралы.

Основные определения и методы

Функция *F(x)* называется первообразной для функции *f(x)* на некотором промежутке *X*, если для всех значений *x* из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Если функция *F(x)* – первообразная для функции *f(x)* на промежутке *X*, то множество функций *F(x)* + *C,* где *C* – произвольная постоянная, называется не-определенным интегралом от функции *f(x)* на этом промежутке и обозначается символом $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Неопределенный интеграл обладает следующими его свойствами: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$; $d\int f(x)dx = f(x)dx$; $\int dF(x) = F(x) + C$; $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)\,dx$, $\kappa = const \neq 0$; 5) $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$; $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$; $\int f(u)du = F(u) + C$.

Таблица неопределенных интегралов, где $u = \varphi(x)$

1. $\int du = u + C.$

2. $\int\limits_{n \neq -1} u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C.$

3. $\int\limits_{u \neq 0} \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$

4. $\int\limits_{a \neq 1,\, a > 0} a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C.$

5. $\int e^u du = e^u + C.$

6. $\int \sin u du = -\cos u + C.$

7. $\int \cos u du = \sin u + C.$

8. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C.$

9. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C.$

10. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C.$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$

12. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$

Метод подстановки или метод замены переменной основан на формуле $\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{vmatrix} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$. Данная формула называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

Метод интегрирования по частям основан на использовании формулы $\int udv = uv - \int vdu$. Эта формула позволяет свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться более простым.

Если существует конечный предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$, то этот предел называется определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [a,b]: $I = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Сама функция f(x) на отрезке [a,b] называется интегрируемой подынтегральной функцией, a – верхний предел интегрирования, b – нижний предел интегрирования, а x – переменная интегрирования.

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и функция F(x) является ее некоторой первообразной на этом отрезке, то имеет место формула Ньютона – Лейбница: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Пусть функция $y = f(x)$ задана на луче $[a,\infty)$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a,b]$, где $a < b < \infty$. Если существует предел $\lim\limits_{b \to \infty} \int\limits_a^b f(x)dx$, то он называется несобственным интегралом I рода от функции $f(x)$ на промежутке $[a,\infty)$ и обозначается символом: $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b \to \infty} \int\limits_a^b f(x)dx$. Если функция $y = f(x)$ непрерывна при $a < x \le b$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = a$, т.е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx, \quad (\varepsilon > 0)$.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a,b]$. В силу геометрического смысла определенного интеграла площадь криволинейной трапеции численно равна интегралу от данной функции по данному отрезку, т.е. $S = \int\limits_a^b f(x)dx$. Длина L дуги кривой, заданной уравнением y=f(x), a≤x≤b вычисляется по формуле: $L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$. Объем тела вращения определяется формулой $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$.

2. Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью v=v(t). Путь S, пройденный точкой за промежуток времени от t_1 до t_2 вычисляется по формуле: $S=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.

Тема 5 Дифференциальные уравнения

Ключевые вопросы

Основные понятия и определения. Задача Коши, теорема существования и единственности ее решения. Классы ДУ 1-го порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернулли.

ДУ высшего порядка. ДУ, допускающие понижение порядка. Линейные ДУ n- го порядка. Линейные однородные ДУ, свойства их решений. Структура общего решения. Линейное однородное ДУ с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные ДУ, структура его общего решения. Линейные неоднородные ДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Метод подбора частного решения. Системы дифференциальных уравнений.

Основные определения и методы

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнения вида: $F(x,y,y')=0$, $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, $y'=f(x)$. Решением дифференциального уравнения первого порядка называется дифференцируемая функция $y=\varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение, обращает его в тождество. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка $y'=f(x,y)$ в некоторой области Д называется функция $y=\varphi(x,c)$, обладающая следующими свойствами: функция $\varphi(x,c)$ является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной С, принадлежащих некоторому множеству; для любого начального условия $y(x_0)=y_0$ такого, что $(x_0, y_0)\in Д$, существует единственное значение $C=C_0$, при котором решение $y=\varphi(x,c_0)$ удовлетворяет начальному условию. Всякое решение $y=\varphi(x,c_0)$, получающееся из общего решения $y=\varphi(x,c)$ при конкретном значении $C=C_0$, называется частным решением.

Уравнение вида $f_1(x)f_2(y)dx - \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0$ называется уравнением с разделяющимися переменными.

Уравнение первого порядка $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ или $y'=f(x,y)$ называется однородным, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$- однородные функции одной степени однородности или $f(x,y)$- однородная функция нулевой степени однородности. Функция $P(x,y)$ называется однородной степени k, если $P(\lambda x,\lambda y)=\lambda^k \cdot P(x,y)$. Однородное уравнение может быть приведено к виду $y'=\varphi(\frac{y}{x})$.

Уравнение вида $y'+P(x)y = Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$- непрерывные функции аргумента x , называется линейным уравнением первого порядка.

Уравнение вида $y^{(n)}=f(x)$ решается последовательным интегрированием обеих частей уравнения n раз. Общий интеграл уравнения содержит n произвольных постоянных.

Уравнение 2-го порядка $F(x,y',y'')=0$, не содержащее явно функцию y, преобразуется в уравнение 1-го порядка посредством подстановки $y'=p,\ y''=p$, где $p = p(x)$−функция от x.

Уравнение 2-го порядка $F(y,y',y'')=0$, не содержащее явно аргумент x, преобразуется в уравнение 1-го порядка посредством подстановки $y' = p,\ y'' = p\frac{dp}{dy}$, где p = p(y).

Необходимым этапом решения любой прикладной задачи является построение математической модели изучаемого объекта или процесса. Обыкновенные дифференциальные уравнения составляют основу сравнительно простых, но весьма распространенных математических моделей, применяемых в самых разных областях науки. Наиболее распространенными задачами на составление и решение дифференциальных уравнений являются: а) на плоскости xOy найти кривую, проходящую через (x_0,y_0), у которой угловой коэффициент касательной в любой точке кривой пропорционален абсциссе (ординате) точки касания; б) задача о радиоактивном распаде; в) задача о размножении популяции; г) задача о скорости химической реакции; д) задача о законе охлаждения тела и др.

Линейным неоднородным уравнением называется уравнение первой степени относительно искомой функции и всех ее производных $y^{(n)}+ a_1 y^{(n-1)}+\ldots+ a_{n-1} y'+ a_n y= f(x)$, где f(x) непрерывная функция непрерывная. Общее решение такого уравнения $y=y^*+\bar{y}$, где y^* - общее решение соответствующего однородного уравнения, $\bar{y}$ - какое-либо частное решение неоднородного уравнения. Частное решения $\bar{y}$ можно найти методом подбора. Если $f(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)cos\beta x+Q_m(x)sin\beta x]$, то $\bar{y}=e^{\alpha x}[M_S(x)cos\beta x+N_S(x)sin\beta x]\cdot x^r$, где $M_S(x)$ и $N_S(x)$ – многочлены степени $S=max\{n,m\}$, а r – кратность корня $\alpha + \beta i$ характеристического уравнения.

Линейным однородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида $y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+a_2 y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1} y'+a_n y=0$.

Общее решение линейного однородного уравнения n-го порядка (1) имеет вид $y=C_1 y_1(x)+C_2 y_2(x)+\ldots+C_n y_n(x)$, где $y_1(x), y_2(x), \ldots,y_n(x)$ – линейно независимые частные решения этого уравнения.

Для нахождения общего решения уравнения составляют характеристическое уравнение $k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} +\ldots+ a_{n-1}k + a_n = 0$.

В зависимости от корней характеристического уравнения возможны случаи: если все корни характеристического уравнения $k_1, k_2, \ldots ,k_n$ – действительные и различные, то общее решение имеет вид: $y=C_1e^{k1x} + C_2e^{k2x} + \ldots+C_ne^{knx}$; если среди корней характеристического уравнения $k_1, k_2,\ldots, k_n$ имеются кратные ($k_1=k_2=\ldots=k_n=k$), а остальные различные, то общее решение примет вид $y=e^{kx}(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_mx^{m-1})+C_{m+1}e^{km+1\cdot x}+\ldots+C_ne^{km-n\cdot x}$, где m- кратность корня; если среди корней характеристического уравнения имеется пара комплексных корней $k_{1,2} = \alpha \pm\beta i$, то общее решение примет вид у= $e^{\alpha x}(C_1cos\beta x+C_2sin\beta x)$.

Тема 6 Ряды.

Ключевые вопросы

Основные определения, свойства. Признаки сходимости рядов и их следствия. Теорема Лейбница для знакочередующихся рядов, оценка остатка ряда. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

Область сходимости. Равномерная сходимость. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг сходимости. Степенные ряды в действительной области, их свойства. Ряды Тейлора и Маклорена. Приложение степенных рядов.

Основные определения и методы

Числовым рядом называется составленное из этих чисел выражение: $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

Числа $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ называются членами ряда, член, u_n с произвольным номером n – общим членом ряда. Сумма $S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$ называется частичной, или n-ой суммой ряда. Частичные суммы ряда образуют числовую последовательность $\{S_n\}$: $S_1=u_1$, $S_2=u_1+u_2$, $S_3=u_1+u_2+u_3$, …, $S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$. Если существует предел последовательности $\{S_n\}$: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ называется сходящимся, в противном случае – расходящимся. Число $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ называется суммой ряда.

Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$, то ряд расходится.

Признак Даламбера: пусть дан ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ с положительными членами. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$, то: 1) при $l<1$ ряд сходится; 2) при $l>1$ ряд расходится; 3) при $l=1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Признак Коши: пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ с положительными членами. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u^n}=l$, то : 1) при $l<1$ ряд сходится; 2) при $l>1$ ряд расходится; 3) при $l=1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Первый признак сравнения: пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ с неотрицательными членами, причем члены первого ряда не превосходят соответствующих членов второго ряды: $u_n \le v_n$, тогда:

1) если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$;

2) если расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, то расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Второй признак сравнения: пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ с неотрицательными членами. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \ne 0$, то данные ряды сходятся или расходятся одновременно. Если k=0, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ вытекает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Ряд, содержащий бесконечное число отрицательных и положительных членов, называется знакопеременным.

Знакопеременный ряд $u_1+u_2+u_3+ \ldots +u_n+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из абсолютных величин его членов: $|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Сходящийся знакопеременный ряд называется условно сходящимся, если ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда: если для знакопеременного ряда $u_1+u_2+u_3+ \ldots +u_n+\ldots$ сходится ряд $|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$, составленный из абсолютных величин его членов, то данный знакопеременный ряд сходится. Иными словами, абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Теорема Лейбница: если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине и общий член ряда стремится к нулю, то этот ряд сходится. Ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница, называется рядом Лейбница.

Функциональный ряд – это ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$, члены которого – функции $u_n(x)$, определенные в некоторой области V.

Определим частичную сумму ряда – тоже функцию $S_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$.

Зафиксировав некоторую точку x, мы имеем дело с обычным числовым рядом.

Функциональный ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$ называется сходящимся в точке x, если $\{S_n(x)\}$ сходится к $S(x)$.

Все точки, в которых ряд сходится, составляют область сходимости ряда. Пусть $u_n(x)$ непрерывны в V, пусть ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в V. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$ *сходится к* $\int_{ф}^{u} S(x)dx$, *где* $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \left(\forall a, b \in V, a \le b\right)$, то есть функциональный ряд можно почленно интегрировать.

Пусть $u_n(x), u_n{}'(x)$ непрерывны в V. Пусть ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в V, а ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_n{}'(x)$.равномерно сходится в V. Тогда ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x)$ можно почленно дифференцировать, причем $(\sum_{m=1}^{\infty} u_n(x))' = \sum_{m=1}^{\infty} u_n{}'(x)$.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Практические занятия сопровождают лекционный курс дисциплины. Теоретические знания, представления, образы должны быть прожиты. Афоризм одного из известных физиков М. Лауэ: «знание есть то, что остается, когда все выученное уже забыто», характеризует важную роль практики.

Практические занятия должны проводиться в логичном единстве с теоретическим курсом, подкрепляя и уточняя понятийный аппарат.

Каждый практическое занятие начинается с теоретического опроса необходимого материала и проверки домашнего задания. Далее на конкретных примерах рассматриваются пути и способы применения тех математических методов, которые не требуют использования электронных вычислительных машин. При этом необходимо активизировать самостоятельную работу студентов. Задания и методические указания к ним выдаются студентам, каждый из которых выбирает оптимальный для себя темп работы. Преподавателю отводится роль консультанта и помощника. Задания, вызвавшие трудности у большинства студентов, разбираются на доске.

В конце занятия выдается домашнее задание, состоящее из теоретических вопросов, уяснение которых необходимо для следующего занятия и практических заданий по пройденному материалу.

При выполнении домашнего задания решать задачи удобнее поэтапно, в той последовательности, в какой эти задания сформулированы. В этом случае при возникновении трудностей будет легче обратиться к анализу тех тем, которые изложены в лекции и задач, разобранных на практическом занятии.

После выполнения практической части задания следует найти ответы на теоретические вопросы, заданные преподавателем и таким образом подготовится к осознанному восприятию следующего материала.

Активная, регулярная самостоятельная работа над домашним заданием – путь к успешному усвоению дисциплины.

Тема 1 Введение в математический анализ

Основные вопросы

Определение функции. Область определения и множество значений функции. Способы задания функции. Четность и нечетность функции. Ограниченность, периодичность. Обратная функция. Сложная функция. Основные элементарные функций и их графики. Преобразования графиков функций. Определение числовой последовательности. Предел числовой последовательности. Предел функции при $x \to x_0$ и $x \to \pm\infty$. Виды и раскрытия неопределенностей при нахождении пределов. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва функции и их классификация.

Типовые задания

1. Найти область определения функций:

1) $f(x) = \log_3(3x-2) + \lg(3-x)$; 2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+12-x^2}}{x^2-9} + \lg(x-3)$.

2. Выяснить четность(нечётность) функций:

1) $\mathrm{y} = \dfrac{\cos 3\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2}$; 2) $y = -\lg|2x| \cdot tgx$; 3) $y = 5^{x+1} - x^2$.

3. Построить графики функций:

1) $y=3^{|x|}$; 2) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+3)$; 3) $y=\dfrac{2x+1}{4x+5}$; 4) $y=3\cos(2x-1)$; 5) $y=3x^2+9x+11$.

4. Вычислить пределы функций:

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{6}{x^2-9}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4-3x^3+5}{3x^4-5x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\ln(1+x)}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+x-1}{x^4+2x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx}{\sin 2x}$, $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$; $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5-7x+1}{3x^2+x+3}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n\cdot(n-1)!}{n!+(n+1)!}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{x+1}$; $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1)[\ln(x+3)-\ln(x)]$.

5. Исследовать функции на непрерывность и сделать чертёж.

1) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0;\\ x^2+1, & 0<x<1;\\ x, & x\ge 1.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{4x+2}{x-1}$.

6. Найти точки разрыва функций и определить их тип:

1) y=$5^{\frac{2x}{x-1}}$; 2) y=$\dfrac{4x^2-25}{2x-5}$.

Тема 2 Дифференциальное исчисление

Основные вопросы

Основные правила нахождения производных. Производные основных элементарных функций. Производные обратных функций. Производные сложных функций. Производные и дифференциалы высших порядков. Дифференциал функции. Применение дифференциала функций. Механический смысл производной. Касательная и нормаль к графику функции. Нахождение экстремума функции. Определение выпуклости, вогнутости графика функции. Нахождение наименьшего и наибольшего значений функции на отрезке.

Типовые задания

1. Вычислить производные: 1) $y=\dfrac{\cos x}{1+2\sin x}$; 2) $y=\ln\dfrac{x^2}{1-x^2}$; 3) $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$; 4) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$; 5) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; 6) $y=tg(x)\cdot\sin^2(3x)$; 7) $y=\ln\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)$; 8) $y=tg^3x-3tgx+3x$; 9) $y=arctg\dfrac{x+3}{x-3}$.

2. Вычислите y'', если $y=\ln(x^2+1)$.

3. Найти производную n-го порядка: y=2^x+2^{-x}, y$^{(n)}$= ?

4. Найти дифференциал функции $y=\sqrt{x^2-1}+\arcsin\dfrac{1}{x}$.

5. Вычислить приращение функции $y=2x^4-3x^3-4x-43$, получаемое ею при переходе аргумента от значения $x=3$ к значению $x=3{,}0012$.

6. Движение происходит прямолинейно по закону $S=t^3-6t^2+9t$, где S выражается в метрах, а время t - в секундах. Найти ускорение движения в моменты времени $t=1$ и $t=2$.

7. Вычислить пределы используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln^3 x}{x^4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\arcsin x}-\frac{1}{arctgx}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$ е) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\sin x}$.

8. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y=\frac{\ln(x+1)}{x}$.

9. Исследовать функцию на экстремум $\mathrm{y}=5\mathrm{x}^3-15x^2+4$.

10. Найти интервалы вогнутости и точки перегиба графиков функции $\mathrm{y}=\mathrm{x}^4+3x^3$.

11. Определить асимптоты кривой $y=\frac{x^2+3x+1}{x+1}$.

12. Провести полное исследование функций и построить их графики:

1) $y=2x^3-12x^2+18x$; 2) $y=\frac{x}{x^2-16}$; 3) $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$; 4) $y=x\sin x$.

Тема 3. Функции нескольких переменных

Основные вопросы

Частные производные, дифференцируемость. Локальный экстремум функции нескольких переменных. Достаточные условия экстремума. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа

Типовые задания

1. Найти частные производные I порядка:

$z=x^3+3x^2y-y^3$; $z=\sin(x+y)$; $z=arctg\frac{y}{x}$;

2. Найти область определения функции $z=\ln(x+y^2)$

3. Построить линии уровня для функции: $z=x^2+y^2-8y$

4. Найти безусловный экстремум функции $C=\frac{3}{2}x^2+2xy+y^2$.

5. Найти глобальный экстремум функции $z=5xy+3x^2$ в области D: x=-1, x=2, y=-2, y=3.

6. Найти экстремум функции $z=x^3-y^3-3xy$ при условии, что $x+y=1$

Тема 4. Интегральное исчисление

Основные вопросы

Первообразная. Неопределенный интеграл. Таблица интегралов основных элементарных функций. Методы вычисления интегралов: метод подстановки и метод интегрирования по частям. Разложение правильной дроби на простейшие. Интегрирование рациональных функций. Методы интегрирования определенного интеграла. Вычисление несобственных интегралов. Вычисление площади криволинейной трапеции. Вычисление длины дуги. Вычисление объем тела вращения.

Типовые задания

1. Вычислить интеграл:

$\int (4\sin x + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x} + 5^x)dx.$ $\int (\frac{3}{\sin^2 x} + e^x + 3x^3 - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}})dx.$ $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}dx.$

$\int (\frac{1}{1+x^2} + 2^{3x} + \frac{1}{2x} + e^x)dx.$ $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. $\int \frac{arctg^5 x}{1+x^2}dx$. $\int \cos^5 x \sin 2x dx$. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 1}$.

$\int \frac{dx}{1+4x^2}$. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. $\int \frac{3x+4}{x^2+9}dx$. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$. $\int \frac{\sqrt{tgx+3}}{\cos^2 x}dx$. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. $\int \frac{dx}{x^2+2x-10}$.

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$. $\int \cos^2 4x dx$. $\int \frac{\sin(arctgx)}{1+x^2}dx$. $\int \sin^3 x dx$ $\int (x+2)\sin x dx$. $\int x^2 \ln x dx$.

$\int \arcsin 2x dx$. $\int x^2 \ell^{4x} dx$. $\int \sin(\ln x)dx.$ $\int e^{3x} \sin x dx.$ $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$ $\int \frac{dx}{(x-1)^2 x}$. $\int \frac{xdx}{(x-3)(x^2+25)}$

$\int \frac{x^5 - 2x^3 + 4}{x^3 - 4x}dx$ $\int \frac{2x+3}{x^2+6x+13}dx$

2. Вычислить определенный интеграл:

1) $\int_1^2 (x^2+1)dx$; 2) $\int_0^3 e^{-\frac{x}{3}}dx$; 3) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$; 4) $\int_1^e \ln x dx$; 5) $\int_{1/2}^1 x^2 \cdot (2x-1)^8 dx$

3. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$; $\int_3^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+4}dx$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

а) $y = 2x - x^2$; $y=0$; б) $y = x^2$; $y=1$; в) $y = \ell^x$; $y = \ell^{-x}$; $x = 1$;

г) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

4. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной данными кривыми.

а) $y = \sqrt{x}$; $y=0$; $x=4$. б) $y = \sin 2x$; $y = 0$; $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Тема 5. Дифференциальные уравнения

Основные вопросы

Общее и частное решения дифференциального уравнения. Геометрический смысл общего и частного решений дифференциального уравнения. Метод решения дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Метод решения однородного дифференциального уравнения первого порядка. Метод решения линейного дифференциального уравнения первого порядка. Решения задач с применением дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка. Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Типовые задания

1. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:

а) $y'x^2 = 2xy + 3$; б) $y'\cos x + y\sin x = 1$; в) $xy' - y = x^2\cos x$; г) $xy' + 2y = x^2$;

д) $y' - yctgx = \sin^3 x$; е) $dy = (x^2 - 2x - 2y)dx$; ж) $y' - y = e^x \sin x$; з) $y' + \frac{y}{x} = \frac{e^{2x}}{x}$;

и) $y' - ytgx = \frac{1}{\cos x}$; к) $y' - \frac{y}{x-2} = x + 2$; л) $(x^2 - 1)y' - xy = x^2 - x$; м) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y}$; н) $x^2 y' + xy = -1$.

2. Проинтегрировать уравнения

а) $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$; б) $y'' - 3y' + 2y = e^x$;

в) $y'' + 16y = -24\sin 4x$; г) $y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$;

д) $y'' - 2y' = x^2 - x$; е) $y'' + y = x\cos x$;

ж) $y''-3y'=3^x\sin x$; з) $y''-4y'+4y=xe^{2x}$;

и) $y''-9y=e^{3x}\cos x$; к) $y''+2y'+y=xe^{-x}$;

л) $y''-6y'+12y=e^x(x^2-5x+2)$; м) $y''-5y'+6y=13\sin 3x$;

н) $y''-2y'+y=x^3$; о) $y''+2y=x^2+2$.

3. Решить задачи:

1) Скорость размножения бактерий пропорциональна количеству бактерий, имеющихся в наличии в рассматриваемый момент времени t. Количество бактерий утроилось в течение 5 часов. Найти зависимость количества бактерий от времени.

2) Найти кривую, если отрезок любой касательной к ней, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам.

4. Решить дифференциальные уравнения высших порядков:

$y'''=6x+1$; $y'''=4\cos 2x$, если $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=1$; $xy''=y'$; $y''+\dfrac{y}{x}=0$;

$yy''=(y')^2$, $y''+4y'=0$; $y''-4y'+4y=0$; $y^{V}-y'''=0$; $y''-4y'+13y=0$; $y''+y'-2y=3xe^{-x}$; $y''+4y'+5y=x^2-1$; $y''-4y'+4y=\sin 3x$.

Тема 6. Ряды

Основные вопросы

Числовой ряд. Признаки сходимости числовых рядов. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Ряд Фурье, коэффициенты Фурье. Разложение функций в ряд Фурье.

Типовые задания

1. Исследовать на сходимость числовые ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{n^5+4};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^5+4n+1}.;\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+4}{3n+1}\right)^n;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{4^n};$$

2. На отрезке [–π, π] разложить в ряд Фурье функции f(x) = {1, если –π ≤ x < 0;–1, если 0 ≤ x < π} и f(x) = x.

3. Найти область сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

4. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \arcsin x$, используя разложение функции $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. Найти первые пять членов разложения в ряд решения уравнения $y' = x^2 + y^2$, удовлетворяющего условию $y = \frac{1}{2}$ при $x = 0$.

3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ ЗАНЯТИЯМ

Лабораторные работы предназначены для получения практических навыков студентами при изучении дисциплины.. К выполнению лабораторной работы следует приступать после ознакомления с теоретической частью соответствующего раздела.

Результаты всех лабораторных работ необходимо представить в письменном виде. Лабораторные работы рекомендуется выполнять в порядке их нумерации.

Лабораторные работы по теме «Интегральное исчисление функций одной независимой переменной»

Вариант № 1

$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$	$\int \ell^{2x^2+3} x dx$	$\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$
$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x + 5}}{x} dx$	$\int x \sin x^2 dx$	$\int \frac{4x^5 dx}{\sqrt{x^6} + 7}$
$\int \frac{arctgx}{1+x^2} dx$	$\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx$	$\int \frac{x^3}{4+5x^4} dx$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}$	$\int \ell^{4x} \sin \ell^{4x} dx$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1+tgx}}$
$\int \frac{x^3}{x-4} dx$	$\int \frac{x-2}{x+1} dx$	$\int \frac{dx}{2x^2 + 4x + 6}$
$\int \arcsin 2x dx$	$\int x \ln x dx$	$\int x \cos x dx$
$\int (x^2 + 3) \ell^{3x} dx$	$\int arctgx dx$	$\int \frac{x}{\ell^{2x}} dx$
$\int \frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}-1} dx$	$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-9} dx$	$\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x}} dx$
$\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+4)}$	$\int \frac{x^2-1}{x^3-4x} dx$	$\int \frac{dx}{(x^2+x)(x-2)}$
$\int \sin^2 x \cos^3 x dx$	$\int \sin^2 (x + \frac{3}{4}\pi) dx$	$\int \cos 2x \cos 4x dx$
$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} dx$	$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$	$\int \cos^4 x dx$

Вариант № 2

$\int \frac{\sin x}{1+cos^2 x}dx$	$\int \frac{\ell^{arctgx}}{1+x^2}dx$	$\int \frac{dx}{\sin^2(2-3x)}$
$\int \sqrt[3]{4-3x}dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}$	$\int x\cdot 2^{x^2}dx$
$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4-5x}}$	$\int \frac{\sin 2x}{8-\cos 2x}dx$	$\int \frac{\ell^{ctgx}}{\sin^2 x}dx$
$\int \cos(4x-2)dx$	$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{3-5x^5}}$	$\int \cos^4 x\sin 2xdx$
$\int \frac{2x^2}{x^2-1}dx$	$\int \frac{x+4}{x-1}dx$	$\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$
$\int xarctg2xdx$	$\int \sqrt{x}\ln xdx$	$\int x\ell^{-2x}dx$
$\int x^2\sin 3xdx$	$\int x^2\ell^x dx$	$\int \arcsin 4xdx$
$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-\sqrt[3]{x})}$	$\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}+1}dx$	$\int \frac{x+3}{5+2x-x^2}dx$
$\int \frac{x^2-1}{x^3-4x}dx$	$\int \frac{x^2+4}{(x^2+1)(x-1)}dx$	$\int \frac{x^2-2}{x(x+1)}dx$
$\int \sin^3 x\cos^3 xdx$	$\int \cos^2(\frac{x}{2}+\pi)dx$	$\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}$
$\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$	$\int \cos^2 xdx$	$\int \cos 8x\cos xdx$

Вариант № 3

$\int \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{3+e^x}}$	$\int \frac{4^{\frac{1}{x}}}{5x^2}dx$	$\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{\cos^2 x-25}}$
$\int \sqrt[3]{5-2x}dx$	$\int tg2xdx$	$\int 3^{5x}dx$
$\int \frac{dx}{1-4x^2}$	$\int \frac{\cos(\arcsin 2x)}{\sqrt{1-4x^2}}dx$	$\int \frac{e^{4x}dx}{e^{4x}+5}$
$\int (1-2\sin^2\frac{x}{2})dx$	$\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{4-9x^2}}dx$	$\int e^{4-x^3}x^2dx$
$\int \frac{x^2+4}{x+1}dx$	$\int \frac{5x^3+1}{x^2+1}dx$	$\int \frac{dx}{x^2+4x+17}$
$\int arctg5xdx$	$\int \frac{\ln x}{x^2}dx$	$\int (x+2)\cos xdx$

$\int x^2\cos 4xdx$	$\int xe^{-5x}dx$	$\int \ln(x+1)dx$
$\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$	$\int \frac{\sqrt{4x+1}}{1+\sqrt[3]{4x+1}}dx$	$\int \frac{3x+2}{x^2+5x+7}dx$
$\int \frac{x+4}{(x+1)(x+2)}dx$	$\int \frac{2x-5}{(x^2-5x+4)x}dx$	$\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+2)}$
$\int \cos^2\frac{x}{2}dx$	$\int \frac{tgxdx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}$	$\int \frac{dx}{2+\cos x}$
$\int \frac{\cos^5 x}{\sin x}dx$	$\int \sin 4x\cos xdx$	$\int ctg^5 xdx$

Вариант № 4

$\int 2^x(1+\frac{2^{-x}}{x^4})dx$	$\int \sin(4z-\frac{\pi}{6})dz$	$\int \frac{dx}{x\sqrt[5]{\ln^3 x}}$
$\int \frac{arctg^4 x}{1+x^2}dx$	$\int x^3e^{x^4}dx$	$\int \frac{dx}{\sin^2(4x-2)}$
$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$	$\int \sin^6 t\cos tdt$	$\int \frac{\ln^5 x}{x}dx$
$\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$	$\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$
$\int \frac{x^3dx}{x+4}$	$\int \frac{x^2-1}{x^2+4}dx$	$\int \frac{dx}{x^2+7x+5}$
$\int x\cdot 3^{2x}dx$	$\int \ln xdx$	$\int x\cos 5xdx$
$\int (x^2-2)\cos 2xdx$	$\int arctg 4xdx$	$\int x^2\ln xdx$
$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$	$\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx$	$\int \frac{dx}{x^2+3x+2}$
$\int \frac{dx}{x^3+3x^2+2x}$	$\int \frac{(x-4)dx}{x^3+2x}$	$\int \frac{x^3dx}{(x-2)(x+4)}$
$\int \sin^3 x\cos xdx$	$\int \cos^2 5xdx$	$\int \sin 4x\sin 6xdx$
$\int \frac{\cos xdx}{1+\cos x}$	$\int \frac{tgx}{1-ctg^2 x}dx$	$\int \frac{dx}{tg^3 x}$

Вариант № 5

$\int \frac{dx}{3-2x}$	$\int \ell^{2x^2+3}xdx$	$\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$

$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x+5}}{x}dx$	$\int x\sin x^2 dx$	$\int \frac{4x^5dx}{\sqrt{x^6+7}}$
$\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx$	$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}dx$	$\int \frac{x^3}{4+5x^4}dx$
$\int \frac{x^4+1}{x^2+3}dx$	$\int \frac{x+4}{x-1}dx$	$\int \frac{dx}{x^2+16x+15}$
$\int \frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}-1}dx$	$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+3}dx$	$\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-2x}}dx$
$\int \frac{xdx}{\sqrt{3x+4}}$	$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$	$\int \frac{x}{4+\sqrt{x}}dx$
$\int \arcsin 2xdx$	$\int x\ln xdx$	$\int x\cos xdx$
$\int x^2\ell^{6x}dx$	$\int arctgxdx$	$\int \ln(5x+1)dx$
$\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+4)}$	$\int \frac{x^2-1}{x^3-4x}dx$	$\int \frac{dx}{(x^2+x)(x+2)}$
$\int \sin^2 x\cos^3 xdx$	$\int \sin^2(x+\frac{3}{4}\pi)dx$	$\int \sin 2x\cos xdx$
$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}dx$	$\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$	$\int \frac{dx}{ctg^4 x}$

Вариант № 6

$\int \ell^x(1-\frac{\ell^{-x}}{\sin^2 x})dx$	$\int \frac{ctg^3 x}{\sin^2 x}dx$	$\int \sqrt{4-\cos x}\sin xdx$
$\int 2^{3x}dx$	$\int \sin(8t+5)dt$	$\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$
$\int \sqrt[5]{3x-2}dx$	$\int \frac{xdx}{3-x^2}$	$\int \frac{xdx}{1+x^2}$
$\int \frac{\sin 2xdx}{\sin^2 x}$	$\int \frac{3^x}{4-9^x}dx$	$\int \frac{\ell^{4x}-4}{\ell^{3x}}dx$
$\int \frac{x^4+2}{x^2+1}dx$	$\int \frac{xdx}{x+6}$	$\int \frac{dx}{x^2+3x+5}$
$\int x^2\ln 2xdx$	$\int x\cos 3xdx$	$\int \arcsin 3xdx$
$\int x^2\ell^{-x}dx$	$\int (x+1)\sin 6xdx$	$\int \ln xdx$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$	$\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$

$\int \frac{dx}{x(x^2+4)}$	$\int \frac{xdx}{(x-1)(x+2)}$	$\int \frac{x^3dx}{x^2-3x+2}$
$\int (1+tgx)\frac{dx}{\cos^2 x}$	$\int \cos^2 \frac{x}{2}dx$	$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$
$\int tg^5 2xdx$	$\int \frac{dx}{\sin^3 x}$	$\int \sin^3 x\cos^3 xdx$

Вариант № 7

$\int \frac{1-\sin^4 x}{\sin^2 x}dx$	$\int \frac{dx}{\sin^2(2x-\frac{\pi}{6})}$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$
$\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{1+4x}}$	$\int \frac{3xdx}{\sqrt{x^2-4}}$
$\int 4^{x^3}x^2dx$	$\int \frac{\sin xdx}{\cos^3 x}$	$\int \frac{dx}{1-2x}$
$\int \ell^x\sqrt[3]{4-\ell^x}dx$	$\int \frac{\ell^x dx}{\sqrt{9-\ell^{2x}}}$	$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$
$\int \frac{x^3+1}{x^2+4}dx$	$\int \frac{x+1}{x-5}dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x}}$
$\int x\sin(2x-3)dx$	$\int xarctg2xdx$	$\int x\ell^{2x}dx$
$\int x^2\cos 2xdx$	$\int x^3\ln xdx$	$\int \arcsin 5xdx$
$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$	$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$	$\int \frac{x-2}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx$
$\int \frac{x^2+1}{x(x-1)}dx$	$\int \frac{(x+5)dx}{(x^2+2x+1)x}$	$\int \frac{dx}{x(x^2+3)}$
$\int (tg^2x+1)\frac{dx}{\cos^2 x}$	$\int \sin^2\frac{x}{2}dx$	$\int \sin^4 x\cos^4 xdx$
$\int \frac{dx}{1+tgx}$	$\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$	$\int \sin 2x\cos xdx$

Вариант № 8

$\int \frac{dx}{3x-2}$	$\int \frac{xdx}{3-x^2}$	$\int x\ell^{x^2-1}dx$
$\int \cos^3 x\sin xdx$	$\int \frac{x^2dx}{\cos^2(4-3x^2)}$	$\int \sqrt[3]{arctgx}\frac{dx}{1+x^2}$
$\int \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{4-3x^4}}dx$	$\int \frac{\ln x+1}{x}dx$	$\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$\int \frac{\ell^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$	$\int ctg^2 xdx$	$\int \frac{2^x dx}{9-4^x}$
$\int \frac{x+1}{x-1}dx$	$\int \frac{x^2-1}{x^2+5}dx$	$\int \frac{dx}{2x^2+4x+5}$
$\int x\ln(1+x)dx$	$\int arctg2xdx$	$\int x\ell^{2x}dx$
$\int \frac{x}{\ell^{4x}}dx$	$\int \ln(x+3)dx$	$\int x^2\sin 9xdx$
$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$	$\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$	$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x+3}}dx$
$\int \frac{x-5}{(x-1)(x+3)}dx$	$\int \frac{3x-1}{(x^2+1)(x-2)}dx$	$\int \frac{dx}{(1-x^2)x}$
$\int \frac{\sin^3 5}{\cos^4 x}dx$	$\int \sin^2 7xdx$	$\int \frac{dx}{ctg^4 x}$
$\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x-5}$	$\int \sin 3x\cos 6xdx$	$\int \sin^2 x\cos^3 xdx$

Вариант № 9

$\int \frac{dx}{2-5x}$	$\int \frac{dx}{x\ln x}$	$\int \frac{x^2}{4-3x^2}dx$
$\int \frac{\ell^x}{5-\ell^x}dx$	$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$	$\int x\cos x^2 dx$
$\int \ell^{x^2-5}xdx$	$\int \frac{2^x dx}{9-4^x}$	$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}dx$
$\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{1-3\sin^2 x}}$	$\int \frac{arctg^3 x}{1+x^2}dx$
$\int \frac{x-4}{x-2}dx$	$\int \frac{x^3+1}{x^2-1}dx$	$\int \frac{dx}{x^2+5x+1}$
$\int arctgxdx$	$\int (x-2)^2\ell^{2x}dx$	$\int x\sin 3xdx$
$\int x\ln 4xdx$	$\int \arcsin 4xdx$	$\int \frac{x}{\ell^{5x}}dx$
$\int \frac{xdx}{(x^2+4x+3)(x+1)}$	$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$	$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$
$\int \frac{2x-3}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$	$\int \frac{(2-x^3)dx}{x(x^2+3)}$	$\int \frac{dx}{x^2(x-1)}dx$

$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$	$\int \sin^2 3x dx$	$\int \frac{dx}{4+\sin x}$
$\int tg^3 x dx$	$\int cos 4x \sin 5x dx$	$\int \cos^2 x \sin^3 x dx$

Вариант № 10

$\int \frac{xdx}{3x^2-4}$	$\int \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$	$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$
$\int \frac{x}{1+x} dx$	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{1-x^3}}$	$\int \sin(2x+\frac{\pi}{4}) dx$
$\int \frac{xdx}{\sin^2 x^2}$	$\int \frac{2-3ctg^{\,2} x}{\sin^x} dx$	$\int \ell^{\sin x} \cos x dx$
$\int \frac{dx}{x(2+\ln x)^2}$	$\int \frac{\ell^x dx}{\sqrt{4-\ell^{2x}}}$	$\int x^3 \sqrt{1+4x^4} dx$
$\int \frac{x^2-1}{x+3} dx$	$\int \frac{x}{x+5} dx$	$\int \frac{dx}{7x^2+14x+1}$
$\int x \sin 2x dx$	$\int x \cos x dx$	$\int arctg 3x dx$
$\int x^2 \ell^{5x} dx$	$\int x \ln(3+x) dx$	$\int x \ln x dx$
$\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}-\sqrt[4]{3x+1}}$	$\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3+1}}$	$\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$
$\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x-12} dx$	$\int \frac{dx}{(4-x^2)x}$	$\int \frac{6x^3-4x}{x^3-4x} dx$
$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$	$\int \cos^2 6x dx$	$\int \cos^2 x \sin^2 x dx$
$\int \cos^6 x dx$	$\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$	$\int \frac{dx}{tg^2 x}$

Лабораторные работы по теме «Дифференциальные уравнения»

Вариант 1

Найти общие интегралы уравнений:

1. $4x\,dx - 3y\,dy = 3x^2 y\,dy - 2xy^2\,dx$;
2. $\left(1+x^2\right)y^3\,dx + \left(1-y^2\right)x^3\,dy = 0$;
3. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$;
4. $y' = \frac{8y+10x}{5y+7x}$;

5. $y' = \dfrac{x+2y-3}{2x-2}$;

6. $y' = \dfrac{x+y+1}{1-2x-2y}$;

7. $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2$;

8. $y' - \dfrac{1+2x}{x(x+1)} y = \dfrac{1+2x}{x(x+1)}$;

9. $y' - \dfrac{y}{3}\sin x = -y^4 \sin x$;

10. $y' + \dfrac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$;

11. $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx + \left(\dfrac{x^2}{(x-y)^2} - \dfrac{1}{y}\right)dy = 0$;

12. $\left(\dfrac{1}{y} - \sin x\right)dx - \left(\dfrac{1}{\cos^2 y} + \dfrac{x}{y^2}\right)dy = 0$.

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

13. $y''' x \ln x = y''$;

14. $y'' + \left(1 + y'^2\right)^{3/2} = 0$;

15. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$;

16. $y'' + 2y' = 4e^x (\sin x + \cos x)$.

Найти решения задач Коши:

17. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 0$;

18. $y' + xy = (1+x)e^{-x} y^2, \quad y(0) = 1$;

19. $y^2\, dx + \left(x + e^{2/y}\right)dy = 0, \quad y(e) = 2$;

20. $4y^3 y'' = y^4 - 1, \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad y'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$;

21. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\cos \pi x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$.

Найти общие решения или интегралы систем:

22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - y. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 3x + e^t; \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y + e^{-2t}. \end{cases}$

Вариант 2

Найти общие интегралы уравнений:

1. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$;

2. $xy' - y = y^3$;

3. $xy' = \dfrac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$;

4. $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$;

5. $y' = \dfrac{x+y-2}{2x-2}$;

6. $y' = \dfrac{2y-x-5}{2x-y+4}$;

7. $y' + y = \cos x$;

8. $y' = \dfrac{y+1}{x}$;

9. $y' + \dfrac{y}{1+x} + y^2 = 0$;

10. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x + y^2 \cos x = 0$;

11. $\left(3x^2 + \dfrac{2}{y}\cos\dfrac{2x}{y}\right)dx - \dfrac{2x}{y^2}\cos\dfrac{2x}{y}\,dy = 0$;

12. $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0$.

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

13. $xy''' + y'' = 1$;

14. $yy'' = y^2 y' + y'^2$;

15. $y''' - 3y'' + 2y' = (1-2x)e^x$;

16. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x$.

Найти решения задач Коши:

17. $y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = 2x\sin x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$;

18. $\left(y^4 e^y + 2x\right)y' = y, \quad y(0) = 1$;

19. $xy' + y = 2y^2 \ln x, \quad y(1) = \dfrac{1}{2}$;

20. $y'' = 128y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8$;

21. $y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3x}}{1+e^{3x}}, \quad y(0) = \ln 4, \quad y'(0) = 3(1-\ln 2)$.

Найти общие решения или интегралы систем:

22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3z - y + e^{-2x}; \\ \dfrac{dz}{dx} = z + y + e^{2x}. \end{cases}$

Вариант 3

Найти общие интегралы уравнений:

1. $\sqrt{4+y^2}\,dx - y\,dy = x^2 y\,dy$;

2. $y' = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y^2+2} - \dfrac{1}{x\left(y^2+2\right)}$;

3. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$;

4. $y' = e^{y/x} + \dfrac{y}{x}$;

5. $y' = \dfrac{3y-x-4}{3x+3}$;

6. $y' = \dfrac{2-x-y}{x-y+4}$;

7. $x\left(y'-y\right) = \left(1+x^2\right)e^x$;

8. $y' - y\operatorname{tg} x = \sec x$;

9. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$;

10. $y' + 2xy = 2x^3y^3$;

11. $\left(3x^2+4y^2\right)dx + \left(8xy+e^y\right)dy = 0$;

12. $\dfrac{2x}{y^3}dx + \dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0$.

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

13. $2xy''' = y'$;

14. $y''' - y' = x^2 + x$;

15. $y''' - y' = 2e^x + \cos x$;

16. $y'' + 2y' = -2e^x\left(\sin x + \cos x\right)$.

Найти решения задач Коши:

17. $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x, \quad y(0) = 0$;

18. $y^2\,dx + \left(xy-1\right)dy = 0, \quad y(1) = e$;

19. $2\left(xy'+y\right) = xy^2, \quad y(1) = 2$;

20. $y^3y'' + 64 = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 2$;

21. $y'' + 4y = 8\operatorname{ctg} 2x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 5, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 4$.

Найти общие решения или интегралы систем:

22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -7x. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t}. \end{cases}$

Вариант 4

Найти общие интегралы уравнений:

1. $\sqrt{3+y^2}\,dx - y\,dy = x^2y\,dy$;

2. $xy\left(1+x^2\right)dy = \left(1+y^2\right)dx$;

3. $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y$;

4. $\left(y^2-3x^2\right)dx = -2xy\,dy$;

5. $y' = \dfrac{2y-2}{x+y-2}$;

6. $y' = \dfrac{2y-x-5}{2x-y+4}$;

7. $xy' - y = -\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$;

8. $y' + 4y = e^x$;

9. $2y\,dx + \left(y^2 - 6x\right)dy = 0$;

10. $xy' + y = y^2 \lg x$;

11. $\left(2x - 1 - \dfrac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \dfrac{1}{x}\right)dy = 0$;

12. $\left(3x^2 + 2xy - y^2\right)dx + \left(x^2 - 2xy - 3y^2\right)dy = 0$.

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

13. $xy''' + y'' = x + 1$;

14. $y^{\mathrm{IV}} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x$;

15. $y''' - 2y'' + y' = (2x+5)e^{2x}$;

16. $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$.

Найти решения задач Коши:

17. $y' + y\operatorname{tg} x = \cos^2 x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$;

18. $2\left(4y^2 + 4y - x\right)y' = 1, \quad y(0) = 0$;

19. $y' + 4x^2 y = 4\left(x^2 + 1\right)e^{-4x}y^2, \quad y(0) = 1$;

20. $y'' + 2\sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$;

21. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{1 + e^{-2x}}, \quad y(0) = 1 + 2\ln 2, \quad y'(0) = 6\ln 2$.

Найти общие решения или интегралы систем:

22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y - x; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t}. \end{cases}$

Вариант 5

Найти общие интегралы уравнений:

1. $6\,dx - 6y\,dy = 2x^2 y\,dy + 3y^2\,dx$;

2. $\left(1 + x^2\right)y^3\,dx + \left(1 - y^2\right)x^3\,dy = 0$;

3. $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 3$;

4. $y' = \dfrac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}$;

5. $y' = \dfrac{x + y - 2}{3x - y - 2}$;

6. $y' = \dfrac{x + y - 2}{y - x - 4}$;

7. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;

8. $y' + y\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$;

9. $y' = 9x^2 y + \left(x^5 + x^2\right)\sqrt[3]{y^2}$; 10. $dy + \left(xy - xy^3\right)dx = 0$;

11. $\left(y^2 + y\sec^2 x\right)dx + \left(2xy + \operatorname{tg} x\right)dy = 0, \quad \left(\sec u = \dfrac{1}{\cos u}\right)$;

12. $\left(2x\cos y - y^2 \sin x\right)dx + \left(2y\cos x - x^2 \sin y\right)dy = 0$.

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

13. $\operatorname{tg} x\, y'' - y' + \dfrac{1}{\sin x} = 0$; 14. $y^{\mathrm{IV}} - y''' = 5\left(x+2\right)^2$;

15. $y''' - 3y'' + 4y = \left(18x - 21\right)e^{-x}$; 16. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$.

Найти решения задач Коши:

17. $\left(x+2\right)y' - y = \left(x^2 + 2x\right)\left(x+2\right), \quad y\left(-1\right) = \dfrac{3}{2}$;

18. $\left(\cos 2y \cos^2 y - x\right)y' = \sin y \cos y, \quad y\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{\pi}{3}$;

19. $xy' - y = -y^2\left(\ln x + 2\right)\ln x, \quad y\left(1\right) = 1$;

20. $y'' = 32\sin^3 y \cos y, \quad y\left(1\right) = \dfrac{\pi}{2}, \quad y'\left(1\right) = 4$;

21. $y'' - 9y' + 18y = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}}, \quad y\left(0\right) = 0, \quad y'\left(0\right) = 0$.

Найти общие решения или интегралы систем:

22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x. \end{cases}$ 23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t; \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$

Вариант 6

Найти общие интегралы уравнений:

1. $x\sqrt{3 + y^2}\, dx + y\sqrt{2 - x^2}\, dy = 0$; 2. $y' + \sin\dfrac{x+y}{2} = \sin\dfrac{x-y}{2}$;

3. $xy' = \dfrac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$; 4. $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$;

5. $y' = \dfrac{2x + y - 3}{x - 1}$; 6. $y' = \dfrac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$;

7. $y' + \dfrac{1 - 2x}{x^2}y = 1$; 8. $y' - \dfrac{y}{1 - x^2} = 1 + x$;

9. $y' + \dfrac{xy}{1-x^2} = -xy^{1/2}$; 10. $\left(xy + x^2y^3\right)y' = 1$;

11. $\left(3x^2y + 2y + 3\right)dx + \left(x^3 + 2x + 3y^2\right)dy = 0$;

12. $\left(\ln y - 2x\right)dx + \left(\dfrac{x}{y} - 2y\right)dy = 0$.

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

13. $x^2y'' + xy' = 1$; 14. $y^{\mathrm{IV}} - 2y''' + y'' = 2x(1-x)$;

15. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x-5)e^x$;

16. $y'' - 4y' + 8y = e^x\left(5\sin x - 3\cos x\right)$.

ННайти решения задач Коши:

17. $y' - \dfrac{y}{x+1} = e^x(x+1), \quad y(0) = 1$;

18. $\left(x\cos^2 y - y^2\right)y' = y\cos^2 y, \quad y(\pi) = \dfrac{\pi}{4}$;

19. $2(y' + xy) = (1+x)e^{-x}y^2, \quad y(0) = 2$;

20. $y'' = 98y^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 7$;

21. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin \pi x}, \quad y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{2}$.

Найти общие решения или интегралы систем:

22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - y; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$ 23. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3z - y; \\ \dfrac{dz}{dx} = z + y + e^{2x}. \end{cases}$

Вариант 7

Найти общие интегралы уравнений:

1. $\left(e^{2x} + 5\right)dy + ye^{2x}\,dx = 0$; 2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{xy\left(1+x^2\right)}$;

3. $y' = \dfrac{x+2y}{2x-y}$; 4. $x(x+2y)dx = \left(y^2 - x^2\right)dy$;

5. $y' = \dfrac{x+7y-8}{9x-y-8}$; 6. $y' = \dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}$;

7. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$; 8. $y' + \dfrac{2x^2-1}{x\left(1-x^2\right)}y = \dfrac{2x}{1-x^2}$;

9. $\left(1-x^2\right)y'-xy=xy^2$;

10. $3y^2y'-y^3=x+1$;

11. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy=0$;

12. $\left(3xy^2-x^2\right)dx+\left(3x^2y-6y^2-1\right)dy=0$.

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

13. $y'''\operatorname{ctg} 2x+2y''=0$;

14. $y^{\mathrm{IV}}+2y'''+y''=x^2+x-1$;

15. $y'''-4y''+4y'=\left(x-1\right)e^x$;

16. $y''+2y'=e^x\left(\sin x+\cos x\right)$.

Найти решения задач Коши:

17. $y'-\dfrac{y}{x}=x\sin x,\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$;

18. $e^{y^2}\left(dx-2xy\,dy\right)=y\,dy,\quad y\left(0\right)=0$;

19. $3\left(xy'+y\right)=y^2\ln x,\quad y\left(1\right)=3$;

20. $y''y^3+49=0,\quad y\left(3\right)=-7,\quad y'\left(3\right)=-1$;

21. $y''+\dfrac{y}{\pi^2}=\dfrac{1}{\pi^2\cos\dfrac{x}{\pi}},\quad y\left(0\right)=2,\quad y'\left(0\right)=0$.

Найти общие решения или интегралы систем:

22. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-z;\\ \dfrac{dy}{dt}=x;\\ \dfrac{dz}{dt}=x-y.\end{cases}$

23. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=3z-y;\\ \dfrac{dz}{dt}=z+y+e^{3t}.\end{cases}$

Вариант 8

Найти общие интегралы уравнений:

1. $yy'\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}=-1$;

2. $\left(1+e^x\right)y'y=e^x$;

3. $xy'=2\sqrt{x^2+y^2}+y$;

4. $y'=\dfrac{12x+5y-9}{4-5x-2y}$;

5. $y'-\dfrac{y}{\sin x}=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;

6. $dx+\left(x+y^2\right)dy=0$;

7. $y'+\dfrac{y}{x}=2\lg x+1$;

8. $y^9\left(y'+y\right)=x$;

9. $\dfrac{dx}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{dy}{2y^2-xy}$;

10. $y'=-\dfrac{x+2y-1}{x-y+4}$;

11. $\left(\sin 2x-2\cos(x+y)\right)dx-2\cos(x+y)dy=0$;

12. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\right)dy=0$.

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

13. $x^3y'''+x^2y''=1$;

14. $y^{\mathrm{V}}-y^{\mathrm{IV}}=2x+3$;

15. $y'''+2y''+y'=(18x+21)e^{2x}$; 16. $y''-4y'+4y=e^{2x}\sin 3x$.

Найти решения задач Коши:

17. $y'+\dfrac{y}{x}=\sin x,\quad y(\pi)=\dfrac{1}{\pi}$;

18. $\left(104y^3-x\right)y'=4y,\quad y(8)=1$;

19. $2y'+y\cos x=\dfrac{1}{y}\cos x(1+\sin x),\quad y(0)=1$;

20. $4y^3y''=16y^4-1,\quad y(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\quad y'(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

21. $y''-3y'=\dfrac{9e^{-3x}}{1+e^{-3x}},\quad y(0)=4\ln 4,\quad y'(0)=3(3\ln 4-1)$.

Найти общие решения или интегралы систем:

22. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=12x-15y;\\ \dfrac{dy}{dt}=5x+12y.\end{cases}$

23. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+4y+\cos t;\\ \dfrac{dy}{dt}=-x-2y+\sin t.\end{cases}$

Вариант 9.

Найти общие интегралы уравнений:

1. $2x\left(3+y^2\right)dx=3y\left(x^2+2\right)dy$;

2. $xy\cdot y'=1-x^2$;

3. $3y'=\dfrac{y^2}{x^2}+8\dfrac{y}{x}+4$;

4. $x\,dy-y\,dx=y\,dy$;

5. $y'=\dfrac{12x+5y-9}{-5x-2y+4}$;

6. $y'=\dfrac{3y+3}{2x+y-1}$;

7. $y'-2y+x^2=0$;

8. $x^2y'=2xy-3$;

9. $dy+\left(xy-xy^3\right)dx=0$;

10. $y'-\dfrac{y}{3}\sin x=-y^4\sin x$;

11. $\left(xy^2+\dfrac{x}{y^2}\right)dx+\left(x^2y-\dfrac{x^2}{y^3}\right)dy=0;$

12. $2x\cos^2 y\,dx+\left(2y-x^2\sin 2y\right)dy=0.$

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

13. $\operatorname{tg}x\,y'''=2y'';$

14. $3y^{\mathrm{IV}}+y'''=6x-1;$

15. $y'''+y''-y'-y=(8x+4)e^x;$

16. $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cos 4x.$

Найти решения задач Коши:

17. $y'+\dfrac{y}{2x}=x^2,\quad y(1)=1;$

18. $x'+xy=y^3,\quad y(-1)=0;$

19. $y'+4x^3y=4y^2e^{4x}\left(1-x^3\right),\quad y(0)=-1;$

20. $y''+8\sin y\cos^3 y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=2;$

21. $y''+y=4\operatorname{ctg}x,\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=4,\quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=4.$

Найти общие решения или интегралы систем:

22. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=7x+3y,\\ \dfrac{dy}{dt}=6x+4y;\end{cases}$

23. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=y-z+\dfrac{3}{2}x^2,\\ \dfrac{dz}{dx}=-4y-2z+1+4x.\end{cases}$

Вариант 10.

Найти общие интегралы уравнений:

1. $x\sqrt{5+y^2}\,dx+y\sqrt{4+x^2}\,dy=0;$

2. $2\sqrt{y}\,dx-dy=0;$

3. $x\,y'=\dfrac{3y^3+6yx^2}{2y^2+3x^2};$

4. $\left(x^2-xy-y^2\right)dx+y^2dy=0;$

5. $y'=\dfrac{x+2y-3}{4x-y-3};$

6. $y'=\dfrac{14x+13y+6}{4x+5y+3};$

7. $y'-\dfrac{9y}{x+1}=e^x(x+1)^9;$

8. $y'-3x^2y=x^5+x^2;$

9. $y\,dy-\dfrac{2y^2}{x^3}\,dx=\dfrac{dx}{x^3};$

10. $\left(x^2+y^2+1\right)dy+xydx=0;$

11. $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx=\dfrac{2y}{x^3}dy;$

12. $\dfrac{dx}{y}-\dfrac{x\,dy}{y^2}=0.$

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

13. $y'''\operatorname{cth}2x=2y'';$

14. $y^{\mathrm{IV}}+2y'''+y''=4x^2;$

15. $y''' - 3y' - 2y = -4xe^x$; 16. $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x.$

Найти решения задач Коши:

17. $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \dfrac{2}{3}$;

18. $\left(3y\cos 2y - 2y^2 \sin 2y - 2x\right)y' = y, \quad y(16) = \dfrac{\pi}{4}$;

19. $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2} \quad y(0) = -1$;

20. $y'' = 72y^3, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = 6$;

21. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{2+e^{-2x}}, \quad y'(0) = 1 + 3\ln 3, \quad y'(0) = 10\ln 3.$

Найти общие решения или интегралы систем

22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4y + \cos 2t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + \sin 2t. \end{cases}$ 23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$

Лабораторные работы по теме «Ряды»

Вариант 1

1. Определить сходимость числовых рядов:

1). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^2+1}$; 2). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^5+1}$; 3). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4-2n}$; 4). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\dfrac{n+1}{3n-1})^n$;

5). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{3n-1}$; 6). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4-3n}$; 7). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n^n}$; 8). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{3n+1}$;

9). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg\,\dfrac{1}{n}$.

2. Вычислить сумму ряда с заданной точностью

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n^2} \quad 0{,}01.$$

3. Найти интервал сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{10^n}$$

4. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} \quad 0{,}01$$

Вариант 2

1. Определить сходимость числовых рядов:

1). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n!}{2^n}$; 2). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{4n+1}$; 3). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n+1}{5n}$; 4). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n n}{7^n}$;

5). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^5+n}$; 6). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\dfrac{n+2}{3n-1})^n$; 7). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4n+3}}$; 8). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+3}{4n-2}$;

9). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{(n+1)3^n}$.

2.Вычислить сумму ряда с заданной точностью.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)^3} \quad 0{,}001.$$

3.Найти интервал сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

4. Вычислить определенный интеграл.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \quad 0{,}01.$$

Вариант 3

1. Определить сходимость числовых рядов:

1). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{3n+1}$; 2). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{2^n}{3^n}$; 3). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{2n}{n+3}$; 4). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3+3}$;

5). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\dfrac{2n-1}{5n+2})^n$; 6). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n+4}$; 7). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{1}{n^2}$; 8). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3+n^2}$;

9). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+4}{2n-1}$.

2.Вычислить сумму ряда с заданной точностью

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(n+2)} \quad 0{,}001.$$

3. Найти интервал сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

4. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \quad 0{,}01.$$

Вариант 4

1. Определить сходимость числовых рядов:

$$1).\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+2};\quad 2).\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{4n-1};\quad 3).\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{4n^2-1};\quad 4).\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n+1}{4n+1})^n;$$

$$5).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-1};\qquad 6).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n};\qquad 7).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(n+2)};\quad 8).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(3n+1)2^n};$$

$$9).\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{n+1})^n.$$

2. Вычислить сумму ряда с заданной точностью

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n}\quad 0{,}001$$

3. Найти интервал сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{4^n}.$$

4. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{dx}{1+x^4}\quad 0{,}01.$$

Вариант 5

1. Определить сходимость числовых рядов:

$$1).\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+2};\quad 2).\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{4n-1};\quad 3).\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{4n-1};\quad 4).\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n+1}{4n+1})^n;$$

$$5).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-1};\qquad 6).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n};\qquad 7).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(n+2)};\quad 8).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(3n+1)2^n};$$

$$9).\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{n+1})^n.$$

2. Вычислить сумму ряда с заданной точностью

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{-1}{5})^n\quad 0{,}01.$$

3. Найти интервал сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n3^n}.$$

4. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{3}}e^{\frac{-x^2}{3}}dx\quad 0{,}01.$$

Вариант 6

1. Определить сходимость числовых рядов:

$1).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{4n^2+9}$; $2).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{(n+2)(n+3)}$; $3).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-5}{4n-1}$; $4).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{6^n n!}$;

$5).\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3n+1}{4n-1})^n$; $6).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5-n^3}$; $7).\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{\sqrt[3]{n^5}}$; $8).\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{5n+4}$;

$9).\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n(n+2)}$.

2. Вычислить сумму ряда с заданной точностью

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{7^n} \quad 0{,}001.$$

3. Найти интервал сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{n}{3^n}x^n.$$

4. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^1\sqrt[3]{1-x^4}\,dx \quad 0{,}01.$$

Вариант 7

1. Определить сходимость числовых рядов:

$1).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\sqrt{n}}{n!}$; $2).\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{3n-1})^n$; $3).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{n+1}$; $4).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$;

$5).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+8n}$; $6).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5+8n^2}$; $7).\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$; $8).\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n+4}{n+2}$;

$9).\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{5^n n!}$.

2. Вычислить сумму ряда с заданной точностью

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad 0{,}001$$

3. Найти интервал сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{n}{3^n}x^n.$$

4. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}} \quad 0{,}01.$$

Вариант 8

1. Определить сходимость числовых рядов:

1). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$; 2). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; 3). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$; 4). $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{5n})^n$;

5). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-2n}$; 6). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+1}$; 7). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+2}$; 8). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{4n-1}$;

9). $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$.

2. Вычислить сумму ряда с заданной точностью

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n \qquad 0,01.$$

3. Найти интервал сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n2^n}x^n.$$

4. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-3x^2}dx \qquad 0,01.$$

Вариант 9

1. Определить сходимость числовых рядов:

1). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}$; 2). $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{3n-4})^{\frac{n}{2}}$; 3). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n^n}$; 4). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3-5n}$;

5). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+1}$; 6). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n-4)}$; 7). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4^n}$; 8). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$;

9). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

2. Вычислить сумму ряда с заданной точностью

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n \qquad 0,01.$$

3. Найти интервал сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}x^n.$$

4. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-2x^2}dx \qquad 0,01.$$

Вариант 10

1. Определить сходимость числовых рядов:

1). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+2}$; 2). $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n-1}{2n+1})^{n}$; 3). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n}}$; 4). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}}{n^{3}+1}$;

5). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$; 6). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$; 7). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}3^{n}$; 8). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^{2}+1}$;

9). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n^{2}+1)}$.

2. Вычислить сумму ряда с заданной точностью

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!} \qquad 0{,}001.$$

3. Найти интервал сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2^{n}}{n^{2}}.$$

4. Вычислить определенный интеграл

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^{2}}{5}}dx \qquad 0{,}01.$$

4 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа студентов предназначена для углубления сформированных знаний, умений, навыков. Самостоятельная работа развивает мышление, позволяет выявить причинно-следственные связи в изученном материале, решить теоретические и практические задачи. Самостоятельная работа студентов проводится с целью: систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов; углубления и расширения теоретических знаний; формирования умений использовать справочную документацию и специальную литературу; развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности; формированию самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации; развития исследовательских умений. Роль самостоятельной работы возрастает, т.к. перед учебным заведением стоит задача в т. ч. и по формированию у студента потребности к самообразованию и самостоятельной познавательной деятельности

Студентами практикуется два вида самостоятельной работы: аудиторная; внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию. В этом случае студенты обеспечиваются преподавателем необходимой учебной литературой, дидактическим материалом, в т. ч. методическими пособиями и методическими разработками.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия. Видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы могут быть:

- для овладения знаниями: чтение текста (учебника, методической литературы); составления плана текста; графическое изображение структуры текста, графическое изображение последовательности выполнения графической работы, выполнение графических работ; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочниками; ознакомление с нормативными документами; учебно-исследовательская работа; использование компьютерной техники, интернета и др.;

- для закрепления систематизации знаний: работа с конспектом лекции (обработки текста); повторная работа над учебным материалом (учебника, первоисточника, дополнительной литературы); составление плана выполнения работы в соответствие с планом, предложенным преподавателем; изучение ГОС-Тов; ответы на контрольные вопросы; тестирование, выполнение упражнений и графических работ;

- для формирования умений: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; выполнение чертежей, схем.

Основное содержание самостоятельной работы составляет выполнение домашних заданий и подготовку к контрольным работам и экзамену.

Прежде чем приступать к выполнению домашней работы, необходимо ознакомиться с содержанием теоретических вопросов по представленному списку литературы и по лекциям.

Работа пишется на стандартных листах писчей бумаги. Все листы заполняются только с одной стороны. Домашняя работа начинается с титульного листа, который служит обложкой работы. Сверху на нем указывается принадлежность студента к учебному заведению, факультету, специализации или кафедре. В середине листа указывается название изучаемой темы или раздела и название учебного задания, номер варианта. Ниже и справа указывается фамилия и инициалы студента, номер академической группы, фамилия и инициалы преподавателя. Внизу титульного листа отмечают год выполнения работы.

Эта страница служит также для отметок преподавателя о выполнении учебного задания и замечаний по поводу подготовленной студентом работы.

При оформлении работы необходимо соблюдать нумерацию заданий. Задание переписывается полностью и ниже оформляется решение. Работа должна быть сдана на кафедру к назначенному преподавателем сроку.

Каждый учебный семестр заканчивается аттестационными испытаниями: зачетно - экзаменационной сессией.

Подготовка к экзаменационной сессии и сдача зачетов и экзаменов является ответственейшим периодом в работе студента. Серьезно подготовиться к сессии и успешно сдать все экзамены – долг каждого студента. Рекомендуется так организовать свою учебу, чтобы перед первым днем начала сессии были сданы и защищены все лабораторные работы, сданы все домашние задания, выполнены другие работы, предусмотренные графиком учебного процесса.

Основное в подготовке к сессии – это повторение всего материала, курса или предмета, по которому необходимо сдавать экзамен. Только тот успевает, кто хорошо усвоил учебный материал.

Если студент плохо работал в семестре, пропускал лекции, слушал их невнимательно, не конспектировал, не изучал рекомендованную литературу, то в процессе подготовки к сессии ему придется не повторять уже знакомое, а заново в короткий срок изучать весь материал. А это зачастую, оказывается, невозможно сделать из-за нехватки времени. Для такого студента подготовка к экзаменам будет трудным, а иногда и непосильным делом. В дни подготовки к экзаменам следует избегать чрезмерной перегрузки умственной работой, необходимо чередовать труд и отдых.

СОДЕРЖАНИЕ

Наталья Николаевна Двоерядкина,

доц. каф. общей математики и информатики АмГУ, канд. пед. наук