

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**(ФГБОУ ВО «АмГУ»)**

## **ЭКОНОМЕТРИКА**

**сборник учебно-методических материалов**

для направления подготовки 38.03.05 – Бизнес-информатика

и специальности 38.05.02 – Таможенное дело

2017 г.

*Печатается по решению  
редакционно-издательского совета  
факультета математики и информатики  
Амурского государственного  
Университета*

*Составитель: Двоерядкина Н.Н.*

**Эконометрика:** сборник учебно-методических материалов для направления подготовки 38.03.05 «Бизнес-информатика» и специальности 38.05.02 «Таможенное дело». – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2017.

Рассмотрен на заседании кафедры общей математики и информатики 03.11.2017, протокол № 3.

© Амурский государственный университет, 2017

© Кафедра общей математики информатики, 2017

© Двоерядкина Н.Н., составление

## *ВВЕДЕНИЕ*

Цель дисциплины: воспитание у студентов информационной культуры; представление о месте и роли эконометрики в современной системе экономического образования.

Задачи дисциплины:

- научить студентов использовать эмпирические данные для выявления связей, закономерностей и тенденций развития экономических явлений;
- сформировать умения количественной оценки параметров моделей экономических процессов средствами математической статистики;
- научить строить прогнозы и оценивать их точность, давать рекомендации по экономической политике и хозяйственной деятельности.

В результате освоения обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

- 1) Знать: основные принципы современных подходов к построению математических моделей социально-экономических систем;
- 2) Уметь: анализировать взаимосвязи экономических моделей; выявлять тенденции измерения социально-экономических показателей; строить базовые математические модели исследуемых систем, проводить их аналитическое исследование; осуществить выбор инструментальных средств для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей; анализировать результаты расчетов и обосновать полученные результаты;
- 3) Владеть: основными навыками построения, аналитического и численного исследования стандартных эконометрических моделей.

# 1 КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ЛЕКЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

## Тема 1 Предмет и содержание курса эконометрики.

### Ключевые вопросы

Основные задачи эконометрики. Типы данных. Модели. Типы моделей.

### Основные определения и методы

Постоянно усложняющиеся экономические процессы привели к необходимости создания и совершенствования особых методов изучения и анализа. При этом широкое распространение получило использование моделирования и количественного анализа. На их базе выделилось и сформировалось одно из направлений экономических исследований – эконометрика.

Формально «эконометрика» означает «измерения в экономике». Однако область исследований данной дисциплины гораздо шире.

*Эконометрика* — это наука, в которой на базе реальных статистических данных строятся, анализируются и совершенствуются математические модели реальных экономических явлений.

Эконометрика как научная дисциплина зародилась и получила развитие на основе слияния экономической теории, математической экономики, экономической и математической статистики.

Данные в эконометрике разделяются на типы:

**Перекрестные (пространственные) данные** – это данные по какому-либо экономическому показателю, полученные для однотипных объектов и относящиеся к одному периоду времени (либо временной промежуток не имеет значения). Например: данные о расходах разных семей в зависимости от дохода и состава семьи; данные о зарплате в зависимости от возраста, стажа, образования и пр. различных сотрудников; сведения об объеме производства, количестве работников, сумме уплаченных налогов по нескольким однотипным фирмам на один и тот же момент времени; и т.п.

**Временные ряды** – данные об одном объекте, процессе за несколько последовательных моментов времени, т.е. характеризуется динамика развития изучаемого объекта, процесса. Например: ежеквартальные (ежемесячные, годо-

вые и пр.) данные по инфляции или средней заработной плате, или национальному доходу; ежедневный курс валют; котировки ГКО на бирже; и т.п.

**Панельные данные** – занимают промежуточное положение: они отражают наблюдения по большому количеству объектов, показателей за несколько моментов времени. Например: финансовые показатели работы нескольких крупных паевых инвестиционных фондов за несколько месяцев; суммы уплаченных налогов нефтяными компаниями за последние несколько лет; и т.п.

Все типы данных могут быть представлены в виде таблицы, диаграммы, графика. Тип анализируемых данных определяет виды эконометрических моделей: модель множественной регрессии; временные ряды и панельные данные.

Мощным инструментом эконометрических исследований является аппарат математической статистики, т.к. большинство экономических показателей носит характер случайных величин, предсказать точные значения которых практически невозможно. Например, весьма сложно предвидеть доход или потребление какого-либо индивидуума, объемы экспорта и импорта страны в течение следующего года и т.д. Связи между экономическими показателями обычно не носят строгий функциональный характер, а допускают наличие каких-либо случайных отклонений (особенно это касается макроэкономических данных). Вследствие этого использование методов математической статистики в эконометрике естественно и обосновано. Однако в силу специфики получения статистических данных в экономике (например, в экономике невозможно проведение управляемого эксперимента) эконометристам приходится использовать свои собственные наработки и специальные приемы анализа, которые в математической статистике не встречаются,

К основным задачам эконометрики можно отнести следующие.

Построение эконометрических моделей, т.е. представление экономических моделей в математической форме, удобной для проведения эмпирического анализа. Данную проблему принято называть проблемой *спецификации*. Зачастую она может быть решена несколькими способами, о которых поговорим позже.

Оценка параметров построенной модели, делающих выбранную модель наиболее адекватной реальным данным. Это так называемый этап *параметризации*.

Проверка качества найденных параметров модели и самой модели в целом. Иногда этот этап анализа называют этапом *верификации*.

Использование построенных моделей для объяснения поведения исследуемых экономических показателей, прогнозирования и предсказания, а также для осмысленного проведения экономической политики.

Выбор формы зависимости (математической модели) является важнейшей отправной точкой для дальнейшего анализа. Обычно этот выбор опирается на базовые положения экономической теории, знания о характере зависимостей на предыдущих этапах исследований, некоторые субъективные предположения.

Однако, любая из моделей будет всего лишь упрощением реальности и всегда содержит определенную погрешность. Поэтому из всех предлагаемых моделей с помощью статистических методов отбирается та, которая в наибольшей степени соответствует реальным эмпирическим данным и характеру зависимости.

Далее оцениваются параметры (в нашем примере — коэффициенты  $a$  и  $b$ ) выбранной зависимости (этап параметризации) Эта оценка осуществляется на основе имеющихся статистических данных. Поэтому вопрос точности статистической информации является одним из ключевых для построения работоспособной модели. Обычно для получения количественных оценок используют методы регрессионного анализа.

После этого проверяется качество найденных оценок, а также соответствие этой модели эмпирическим данным и теоретическим предпосылкам (этап верификации). Данный анализ осуществляется по схеме проверке статистических гипотез. На этом этапе совершенствуются не только форма модели, но и уточняется состав ее объясняющих переменных.

Если модель удовлетворяет всем необходимым требованиям качества, то она может быть использована либо для прогнозирования, либо для объяснения

внутренних механизмов исследуемых процессов. Такая модель позволяет с определенной надежностью предсказывать среднее значение экономического показателя на основе прогнозируемых или фиксированных значений других показателей, предвидеть вероятности отклонений конкретных значений изучаемой величины от предсказываемого по модели. Она поможет определить, на какие факторы, в каком направлении и в каком объеме следует воздействовать, чтобы значение исследуемого показателя лежало в определенных числовых границах. Отметим, что, вскрывая механизмы и взаимосвязи изучаемых процессов, эконометрические модели не решают вопроса о причине этих взаимосвязей.

## **Тема 2 Регрессионная модель. Классическая линейная регрессия. Множественная линейная регрессия. Различные аспекты множественной регрессии.**

### **Ключевые вопросы**

Сущность регрессионного анализа. Регрессионный анализ и причинно-следственные отношения. Эконометрическая интерпретация линейной регрессии. Метод наименьших квадратов (МНК). Свойства оценок метода наименьших квадратов. Прогнозирование, доверительные интервалы прогнозирования. Показатели качества регрессии. Мультиколлинеарность. Линейные регрессионные модели с гетероскедастичными и автокоррелированными остатками. Регрессионные модели с переменной структурой

### **Основные определения и методы**

В зависимости от количества переменных (факторов), включенных в модель различают парную и множественную регрессии.

**Парная регрессия** – уравнение связи двух переменных  $y$  и  $x$ :  $y = \hat{f}(x)$ , где  $y$  – зависимая переменная (результативный признак);  $x$  – независимая переменная (признак – фактор).

Построение уравнения регрессии  $\hat{y}_x = a + bx$  или  $y = a + bx + \varepsilon$  сводится к оценке ее параметров. Для оценки параметров регрессий, линейных по параметрам, используют *метод наименьших квадратов* (МНК). МНК позволяет по-

лучить такие оценки параметров, при которых сумма квадратов отклонений фактических значений результативного признака  $y$  от теоретических  $\hat{y}_x$  минимальна, т.е.  $S = \sum_i (y_i - \hat{y}_{x_i})^2 \rightarrow \min$ .

Чтобы найти минимум функции, надо вычислить частные производные по каждому из параметров  $a$ ,  $b$  и приравнять их к нулю:

$$\begin{cases} \frac{dS}{da} = -2\sum_i (y_i - a - bx_i) = 0, \\ \frac{dS}{db} = -2\sum_i (y_i - a - bx_i)x_i = 0. \end{cases}$$

Преобразуя последнюю систему, получим

$$\begin{cases} n \cdot a + b\sum x = \sum y, \\ a \cdot \sum x + b\sum x^2 = \sum y \cdot x. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим  $a$  и  $b$

Параметр  $b$  уравнения показывает, как меняется результат  $y$  при изменении фактора  $x$  на 1 единицу. Параметр  $a$  иногда не несет экономического смысла. Он показывает значение результата при нулевом значении фактора.

Средний коэффициент эластичности  $\bar{\epsilon} = f'(x) \frac{\bar{x}}{y}$  позволяет проверить, имеют ли экономический смысл коэффициенты модели регрессии. Он показывает, на сколько процентов меняется результат при изменении фактора на 1%.

Тесноту связи изучаемых явлений оценивает коэффициент парной корреляции  $r_{xy}$  для линейной регрессии ( $-1 \leq r_{xy} \leq 1$ ):  $r_{xy} = b \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\overline{yx} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\sigma_x \sigma_y}$ ,

Близость  $r_{xy}$  к нулю означает отсутствие линейной связи между признаком и фактором. Равенство коэффициента корреляции 1 означает, что все наблюдаемые значения располагаются на прямой.

### Оценка качества уравнения регрессии

Из дисперсионного анализа известно, что

$$\sum (y - \bar{y})^2 = \sum (\hat{y}_x - \bar{y})^2 + \sum (y - \hat{y}_x)^2,$$

где  $\sum(y - \bar{y})^2$  – общая сумма квадратов отклонений TSS;  $\sum(\hat{y}_x - \bar{y})^2$  – сумма квадратов отклонений, обусловленная регрессией RSS;  $\sum(y - \hat{y}_x)^2$  – остаточная сумма квадратов отклонений ESS.

Долю дисперсии, объясняемую регрессией, в общей дисперсии результативного признака  $y$  характеризует *коэффициент детерминации*

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{y}_x - \bar{y})^2}{\sum(y - \bar{y})^2}.$$

Для парной линейной регрессии коэффициент детерминации равен квадрату коэффициента корреляции.

Чем ближе значение коэффициента детерминации к 1 тем выше качество регрессии.

**Статистика Фишера** F-тест – оценивание качества уравнения регрессии – состоит в проверке гипотезы  $H_0$  о *статистической незначимости* уравнения регрессии и показателя тесноты связи. Для этого выполняется сравнение фактического  $F_{факт}$ , и критического (табличного)  $F_{табл}$  значений F-критерия Фишера.

$$F_{факт} \text{ определяется по формуле } F_{факт} = \frac{\sum(\hat{y} - \bar{y})^2 / m}{\sum(y - \hat{y})^2 / (n - m - 1)} = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m},$$

где  $n$  – число единиц совокупности;  $m$  – число параметров при совокупности  $x$ .

$F_{табл}$  – это максимально возможное значение критерия под влиянием случайных факторов при данных степенях свободы и уровне значимости  $\alpha$ . Уровень значимости  $\alpha$  – вероятность отвергнуть правильную гипотезу. Обычно  $\alpha$  принимается равной 0,05 или 0,01.

Если  $F_{табл} < F_{факт}$ , то  $H_0$  – гипотеза о случайной природе оцениваемых характеристик отклоняется и признается их статистическая значимость и надежность. Если  $F_{табл} > F_{факт}$ , то гипотеза  $H_0$  не отклоняется и признается статистическая незначимость, ненадежность уравнения регрессии.

**Статистика Стьюдента.** Для оценки существенности отдельных параметров уравнения определяется их стандартная ошибка  $m_b$  и  $m_a$ :

Проверка значимости коэффициента b

$H_0$ :  $b_i=0$  (коэффициент регрессии равен нулю)

$H_a$ :  $b_i \neq 0$  (коэффициент регрессии не равен нулю)

$$m_b = \sqrt{\frac{\sum (y - \hat{y}_x)^2 / (n - m - 1)}{\sum (x - \bar{x})^2}} = \sqrt{\frac{S^2}{\sum (x - \bar{x})^2}},$$

где  $S^2$  – остаточная дисперсия на одну степень свободы.

Величина  $t_b = \frac{b}{m_b}$  имеет  $t$ -распределение Стьюдента с  $n - m - 1$  степенями

свободы, которое затем сравнивается с табличным значением при определенном уровне значимости  $\alpha$ . Доверительный интервал для коэффициента регрессии определяется как  $b \pm t_{\alpha, n-2} \cdot m_b$ .

Проверка значимости коэффициента a

$H_0$ :  $a=0$  (коэффициент регрессии равен нулю)

$H_a$ :  $a \neq 0$  (коэффициент регрессии не равен нулю)

Стандартная ошибка параметра  $a$  определяется по формуле

$$m_a = \sqrt{\frac{\sum (y - \hat{y}_x)^2}{n - m - 1} \cdot \frac{\sum x^2}{n \cdot \sum (x - \bar{x})^2}} = S \sqrt{\frac{\sum x^2}{n \cdot \sum (x - \bar{x})^2}}.$$

Процедура оценивания значимости данного параметра ничем не отличается от процедуры оценки значимости коэффициента регрессии  $t_b$ .

**Доверительный интервал для прогноза.** Точечный прогноз  $\hat{y}_x$  значения признака часто бывает нереальным и дополняется расчетом стандартной ошибки  $m_{\hat{y}_x}$  и соответственно интервальной оценкой прогнозного значения ( $y^*$ ):

$$\hat{y}_x - m_{\hat{y}_x} \leq y^* \leq \hat{y}_x + m_{\hat{y}_x},$$

Средняя ошибка прогноза

$$m_{\hat{y}_{прогн}} = \sigma_{осм} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{прогн} - \bar{x})^2}{\sum (x - \bar{x})^2}}, \text{ где } \sigma_{осм} = \sqrt{\frac{\sum (y - \hat{y})^2}{n - m - 1}} = \sqrt{\frac{161,402}{10}} = 4,017,$$

Строим доверительный интервал с заданной доверительной вероятностью  $(\gamma_{\hat{y}_{\min}}, \gamma_{\hat{y}_{\max}})$ :  $(\hat{y}_{\text{прогн}} - t_{\text{табл}} \cdot m_{\hat{y}_{\text{прогн}}}, \hat{y}_{\text{прогн}} + t_{\text{табл}} \cdot m_{\hat{y}_{\text{прогн}}})$ .

Мультиколлинеарность – это наличие линейной связи между двумя или несколькими объясняющими переменными. Мультиколлинеарность бывает полная и частная.

Полной мультиколлинеарности наблюдается в случае когда объясняющие переменные связаны строгой функциональной зависимостью ( $r=1$ ). Полная мультиколлинеарность является скорее теоретическим примером на практике встречается редко.

Частичная мультиколлинеарность наблюдается в случае когда объясняющие переменные связаны сильной корреляционной зависимостью, но эта зависимость не является функциональной ( $0,5 < r < 1$ ).

Если в модели присутствует полная мультиколлинеарность, то оценки параметров регрессии определить невозможно.

В случае частичной коллинеарности оценки параметров регрессии существуют, но обладают «плохими» свойствами, т.е. имеют большие ошибки и низкие t- статистики.

Признаки мультиколлинеарности:

1. Коэффициент детерминации достаточно высок, но некоторые из коэффициентов регрессии статистически незначимы, т.е. они имеют низкие t – статистики.

2. Небольшое изменение исходных данных приводит к существенному изменению оценок коэффициентов регрессии.

3. Оценки коэффициентов имеют неправильные с точки зрения теории знаки или неоправданно большие значения.

4. Частные коэффициенты корреляции имеют большие значения.

5. Сильная вспомогательная регрессия.

Методы устранения мультиколлинеарности.

1. Исключение переменных из моделей, однако в этой ситуации возможны ошибки спецификации.

2. Попробовать добавить новую переменную, которая возможно была упущена, однако, если она тоже будет иметь сильную зависимость от других переменных, то её введение может ещё больше усугубить проблему мультиколлинеарности.

3. Увеличить число наблюдений, однако получение новой выборки не всегда возможно или связано с серьезными издержками.

### **Тема 3 Нелинейные модели регрессии и их линейаризация.**

#### **Ключевые вопросы**

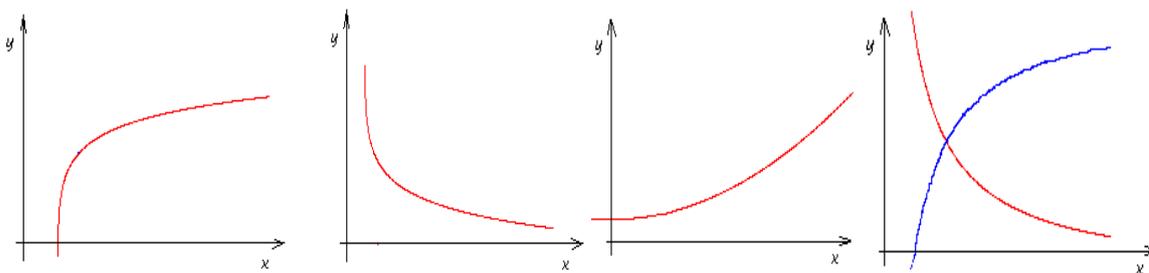
Два класса нелинейных регрессий: регрессии нелинейные по параметрам, регрессии нелинейные по переменным. Виды уравнений нелинейных регрессий. Интерпретация коэффициентов нелинейной регрессии, коэффициент эластичности. Корреляция для нелинейной регрессии. Линейаризация нелинейных моделей.

#### **Основные определения и методы**

В силу многообразия и сложности экономических процессов многие экономические зависимости не являются линейными и, следовательно, требуют моделирования нелинейными уравнениями.

Для случая парной регрессии подбор модели обычно осуществляется по виду расположения наблюдаемых точек на корреляционном поле, с учетом фактов известных из экономической теории. В случае если зависимость может быть описана несколькими функциями, необходимо выбрать ту из них, которая обладает наилучшим качеством. Но следует помнить, что чем сложнее модель, тем менее интерпретируемы ее параметры.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся модели. Для простоты изложения и возможности графической интерпретации ограничимся моделями парной нелинейной регрессии. При визуализации данных на корреляционном поле возможны следующие результаты:



### 1. Логарифмические модели.

-  $\ln Y = \beta_0 + \beta \cdot \ln X + \varepsilon$  - двойная логарифмическая модель

коэффициент  $\beta$  в данной модели определяет эластичность переменной  $Y$  по переменной  $X$ , т.е. процентное изменение  $Y$  для данного процентного изменения  $X$ .

-  $\ln y = a + b \cdot x + \varepsilon$  - лог-линейная модель, используется, например, при исследовании зависимости прироста объема выпуска от относительного увеличения затрат ресурса.

Коэффициент  $b$  в данной модели имеет смысл темпа прироста переменной  $y$  по переменной  $x$ , т.е. характеризует отношение относительного изменения  $y$  к абсолютному изменению  $x$ . Умножив  $b$  на 100%, получим процентный темп прироста переменной  $y$ .

-  $y = a + b \cdot \ln x + \varepsilon$  - линейно-логарифмическая модель, используется, например, когда необходимо исследовать влияние процентного изменения независимой переменной на абсолютное изменение зависимой переменной.

Коэффициент  $b$  определяет изменение переменной  $y$  вследствие единичного относительного прироста  $x$ , например, если предположить, что  $y$  – валовой национальный продукт, а  $x$  – денежная масса, то  $b$  показывает, что с увеличением предложения денег на 1 % ВВП в среднем вырастет на  $b$  единиц.

### 2. Гиперболическая модель

$y = a + b \cdot \frac{1}{x} + \varepsilon$  - применяется в тех случаях, когда неограниченное увеличение значений объясняющей переменной  $x$  асимптотически приближает зависимую переменную  $y$  к некоторому пределу  $a$ .

Подобная регрессия может отражать зависимости между объемом выпуска ( $x$ ) и средними фиксированными из-

держками ( $y$ ), между доходом ( $x$ ) и спросом ( $y$ ) на товары первой необходимости или предметы относительной роскоши (функция Торнквиста), между уровнем безработицы ( $x$ ) и изменением заработной платы ( $y$ ) и др.

3. *Полиномиальная модель.*

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \dots + \beta_k X^k$$

При  $k = 2$  квадратичная функция может отражать зависимость между расходами на рекламу ( $x$ ) и прибылью ( $y$ ), но большое применение имеет при анализе временных рядов; при  $k = 3$  кубическая функция моделирует зависимость общих издержек ( $y$ ) от объема выпуска ( $x$ ).

4. *Степенная модель.*

$y = ax^b$  - отражает, например, зависимость спроса  $y$  на благо от его цены или от дохода  $x$ . Данная регрессия, путем математических преобразований сводится к двойной логарифмической модели. Коэффициент  $b$  является коэффициентом эластичности переменной  $y$  по переменной  $x$ .

5. *Показательная модель.*

$y = a \cdot e^{b \cdot x}$  - используется чаще всего в той ситуации, когда анализируется изменение переменной  $y$  с постоянным темпом прироста во времени. Переменная  $x$  заменяется на  $t$ , а модель используется при анализе временных рядов.

Коэффициент  $b$  показывает постоянный темп прироста переменной  $y$  во времени.

Показательная модель, путем логарифмирования сводится к лог-линейной модели.

## **Тема 4 Система линейных одновременных уравнений**

### **Ключевые вопросы**

Общее понятие о системах уравнений, используемых в эконометрике. Системы независимых уравнений. Системы совместных, одновременных уравнений. Структурная и приведенная формы эконометрической модели. Проблема идентификации при переходе приведенной формы к структурной форме моде-

ли. Оценивание параметров структурной модели. Косвенный, двухшаговый и трехшаговый МНК.

### Основные определения и методы

Каждая система уравнений содержит эндогенные и экзогенные переменные. Эндогенные переменные – взаимозависимые переменные, которые определяются внутри модели (системы). Экзогенные переменные – независимые переменные, которые определяются вне системы. Предопределенные переменные – экзогенные и лаговые (за предыдущие моменты времени) эндогенные переменные системы.

Виды систем уравнений.

*Система независимых уравнений* – каждая зависимая переменная  $y$  рассматривается как функция одного и того же набора факторов  $x$ :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1m} \cdot x_m + e_1, \\ y_2 = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2m} \cdot x_m + e_2, \\ \dots \\ y_n = a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nm} \cdot x_m + e_n, \end{cases}$$

*Система рекурсивных уравнений* – зависимая переменная одного уравнения выступает в виде фактора в другом уравнении:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1m} \cdot x_m + e_1, \\ y_2 = b_{21} \cdot y_1 + a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2m} \cdot x_m + e_2, \\ y_3 = b_{31} \cdot y_1 + b_{32} \cdot y_2 + a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + \dots + a_{3m} \cdot x_m + e_3, \\ \dots \\ y_n = b_{n1} \cdot y_1 + b_{n2} \cdot y_2 + \dots + b_{nn-1} \cdot y_{n-1} + a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nm} \cdot x_m + e_n, \end{cases}$$

*Система совместных уравнений* – одни и те же переменные в одних уравнениях входят в левую часть, а в других – в правую:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12} \cdot y_2 + b_{13} \cdot y_3 + \dots + b_{1n} \cdot y_n + a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1m} \cdot x_m + e_1, \\ y_2 = b_{21} \cdot y_1 + b_{23} \cdot y_3 + \dots + b_{2n} \cdot y_n + a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2m} \cdot x_m + e_2, \\ \dots \\ y_n = b_{n1} \cdot y_1 + b_{n2} \cdot y_2 + \dots + b_{nn-1} \cdot y_{n-1} + a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nm} \cdot x_m + e_n, \end{cases}$$

Такая система уравнений называется *структурной формой* модели. Коэффициенты  $a$  и  $b$  при переменных – структурные коэффициенты модели.

Система линейных функций эндогенных переменных от всех предопре-



значения по уравнениям приведенной формы модели;

- Обычным МНК определяют параметры структурного уравнения, используя в качестве исходных данных фактические значения предопределенных переменных и расчетные значения эндогенных переменных, стоящих в правой части данного структурного уравнения.

## **Тема 5 Временные ряды**

### **Ключевые вопросы**

Характеристика модели временного ряда. Основные элементы временного ряда. Модели стационарных и нестационарных временных рядов, и их идентификация. Автокорреляция уровней временного ряда. Лаги. Аналитическое выравнивание временного ряда. Линейный и нелинейные тренды. Моделирование сезонных колебаний с применением фиктивных переменных. Аддитивная и мультипликативная модели временного ряда. Прогнозирование по моделям временных рядов.

### **Основные определения и методы**

Изучение динамики того или иного объекта, явления начинается с построения ряда динамики, или временного ряда.

*Динамический ряд* – это таблица, в которой представлены значения показателя за последовательные периоды или на моменты времени. Каждое значение показателя *называется уровнем ряда*.

Динамический ряд является *интервальным*, если каждый уровень представляет собой итог процесса за некоторый интервал времени. Динамический ряд является *моментным*, если уровни отражают состояние объекта в отдельные моменты времени.

Ряд динамики состоит из двух строк или столбцов: промежутков или моментов времени, к которым относятся уровни, и самих уровней признака (показателя). Ряд, в котором время задано в виде промежутков – лет, месяцев, суток, называется *интервальным динамическим рядом*. Ряд, в котором время задано в виде конкретных дат (моментов времени), называется *моментным динамическим рядом*.

При статистическом изучении динамики необходимо четко разделить два её основных элемента – тенденцию и колеблемость, чтобы дать каждому из них количественную характеристику с помощью специальных показателей. Для того чтобы нагляднее представить показатели, характеризующие тенденцию, следует абстрагироваться от колеблемости и выявить динамический ряд в форме «чистого» тренда при отсутствии колебаний.

*Абсолютный прирост* – это разность между сравниваемым уровнем и уровнем более раннего периода, принятым за базу сравнения. Если эта база – непосредственно предыдущий уровень, показатель называют *цепным*, если за базу взят, например, начальный уровень, показатель называют *базисным*. Формулы абсолютного прироста: цепное:  $\Delta_i = y_i - y_{i-1}$ ; базисное:  $\Delta_i = y_i - y_0$ .

Абсолютный прирост не является константой тенденции. Оно со временем возрастает, т.е. уровни ряда изменяются с ускорением. *Ускорение* – это разность между абсолютным приростом за данный период и абсолютным приростом за предыдущий период одинаковой длительности:  $\Delta'_i = \Delta_i - \Delta_{i-1}$

Показатель ускорения применяется только в цепном варианте, но не в базисном. Отрицательная величина ускорения говорит о замедлении роста или об ускорении снижения уровней ряда.

Ускорение является константой тенденции ряда, что свидетельствует о параболической форме этой тенденции. Её уравнение имеет вид:  $y_i = a + b \cdot t_i + c \cdot t_i^2$ , где  $a$  – уровень ряда в начальный период при  $t=0$ ;  $b$  – средний по ряду абсолютный прирост;  $t_i$  – номер периода;  $c$  – половина ускорения.

Система показателей должна содержать не только абсолютные, но и относительные статистические показатели.

Относительные показатели динамики необходимы для сравнения разных объектов, особенно если их абсолютные характеристики различны.

*Темп роста* – это отношение сравниваемого уровня (более позднего) к уровню принятому за базу сравнения (более раннему). Темп роста исчисляется

в цепном варианте к предыдущему уровню или в базисном варианте – к одному и тому же, обычно начальному уровню. Он говорит о том, сколько процентов составляет сравниваемый уровень по отношению к уровню, принятому за базу, или во сколько раз сравниваемый уровень больше уровня, принятого за базу.

Рассмотрим связь абсолютных и относительных показателей динамики. Обозначим темп изменения через  $k$ . Тогда имеем: цепной темп роста:

$$k_{\frac{i}{i-1}} = \frac{y_i}{y_{i-1}}, \text{ базисный темп роста: } k_{\frac{i}{0}} = \frac{y_i}{y_0}.$$

Если сравниваемый уровень  $y$  выразить через уровень предыдущего года плюс прирост или через уровень базисного года плюс базисный абсолютный прирост, получим:

$$k_{\frac{i}{i-1}} = \frac{y_{i-1} + \Delta_i}{y_{i-1}} = 1 + \frac{\Delta_i}{y_{i-1}} \text{ или } 100\% + \frac{\Delta_i}{y_{i-1}} \cdot 100;$$

$$k_{\frac{i}{0}} = \frac{y_0 + \Delta_{0i}}{y_0} = 1 + \frac{\Delta_{0i}}{y_0} \text{ или } 100\% + \frac{\Delta_{0i}}{y_0} \cdot 100.$$

Величину  $\frac{\Delta_i}{y_{i-1}}$  или  $\frac{\Delta_{0i}}{y_0}$ , т.е. отношение абсолютного изменения к преды-

дущему или базисному уровню, часто называют *относительным приростом* (относительным изменением) или же *темпом прироста*. Он равен  $k-1$  или  $k-100\%$ . Темп прироста может иметь как положительные, так и отрицательные значения. Например, финансовый результат от реализации продукции предприятием может быть прибылью (+), а может быть убытком (-), тогда темп изменения и темп прироста применять нельзя.

В этом случае такие показатели теряют смысл и не имеют экономической интерпретации. Сохраняют смысл только абсолютные показатели динамики.

**Автокорреляция остатков.**

Для временных рядов гетероскедастичность проявляется в виде автокорреляции остатков. Автокорреляция может быть положительной и отрицательной. Чаще всего положительная автокорреляция вызывается направленным воздействием некоторых неучтенных в модели факторов.

Например, пусть исследуется спрос  $y$  на прохладительные напитки в за-

зависимости от дохода  $x$  по ежемесячным данным. Зависимость, отражающая увеличение спроса с ростом дохода, может быть представлена линейной функцией.  $y = \alpha + \beta \cdot x$

Однако фактические точки наблюдений обычно будут превышать линию графика в летние периоды и будут ниже ее в зимние.

Отрицательная автокорреляция означает, что за положительным отклонением следует отрицательное и наоборот. На практике отрицательная автокорреляция встречается редко.

Наиболее известным критерием обнаружения автокорреляции является критерий Дарбина – Уотсона, общая схема применения которого следующая:

Для построенного уравнения регрессии определяют значение статистики Дарбина – Уотсона  $DW$ . По таблице критических точек распределения для заданного уровня значимости  $\alpha$ , числа наблюдений  $n$  и количества независимых переменных  $k$  определяются два значения  $d_l$  - нижняя граница,  $d_u$  – верхняя граница.

Далее осуществляем выводы по правилу:

$0 < DW < d_l$  – существует положительная автокорреляция;

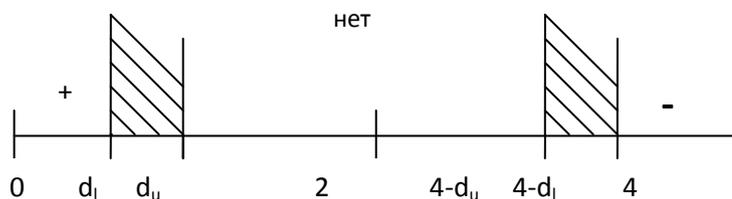
$d_l < DW < d_u$  – зона неопределенности;

$d_u < DW < 4 - d_u$  – автокорреляция отсутствует;

$4 - d_u < DW < 4 - d_l$  – зона неопределенности;

$4 - d_l < DW < 4$  – существует отрицательная автокорреляция.

Графически выводы можно представить следующим образом:



Для устранения автокорреляции необходимо, прежде всего, скорректировать саму модель. Возможно, автокорреляция вызвана отсутствием в модели некоторой важной объясняющей переменной. И добавление этой переменной поможет устранить автокорреляцию. Чаще всего приходится добавлять фик-

тивные переменные, отвечающие за сезонность.

Например, при изучении спроса на прохладительные напитки добавим переменную  $s = \begin{cases} 0, & \text{если холодное время года,} \\ 1, & \text{если теплое время года.} \end{cases}$

Тогда  $y$  может быть представлено в виде:  $y = \alpha + \beta_1 \cdot x + \beta_2 \cdot s$ .

При  $s=0$   $y$  покажет объем продаж прохладительных напитков в холодное время года, а при  $s=1$  – в теплое. Коэффициент  $\beta_2$  показывает, насколько изменится объем продаж в теплое время года по сравнению с холодным. Иногда приходится добавлять несколько фиктивных переменных.

## **2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ**

Практические занятия сопровождают лекционный курс дисциплины. Теоретические знания, представления, образы должны быть прожиты. Афоризм одного из известных физиков М. Лауэ: «знание есть то, что остается, когда все выученное уже забыто», характеризует важную роль практики.

Практические занятия должны проводиться в логичном единстве с теоретическим курсом, подкрепляя и уточняя понятийный аппарат.

Каждый практическое занятие начинается с теоретического опроса необходимого материала и проверки домашнего задания. Далее на конкретных примерах рассматриваются пути и способы применения тех математических методов, которые не требуют использования электронных вычислительных машин. При этом необходимо активизировать самостоятельную работу студентов. Задания и методические указания к ним выдаются студентам, каждый из которых выбирает оптимальный для себя темп работы. Преподавателю отводится роль консультанта и помощника. Задания, вызвавшие трудности у большинства студентов, разбираются на доске.

В конце занятия выдается домашнее задание, состоящее из теоретических вопросов, уяснение которых необходимо для следующего занятия и практических заданий по пройденному материалу.

При выполнении домашнего задания решать задачи удобнее поэтапно, в той последовательности, в какой эти задания сформулированы. В этом случае при возникновении трудностей будет легче обратиться к анализу тех тем, которые изложены в лекции и задач, разобранных на практическом занятии.

После выполнения практической части задания следует найти ответы на теоретические вопросы, заданные преподавателем и таким образом подготовиться к осознанному восприятию следующего материала.

Активная, регулярная самостоятельная работа над домашним заданием – путь к успешному усвоению дисциплины.

### **Тема 1 Предмет и содержание курса эконометрики.**

### **Основные вопросы**

Расчет основных статистик, описание выборочных наблюдений, корреляция.

### **Типовые задания**

Для собранных в некотором городе данных о стоимости квартир:

1. Вычислить выборочное среднее, дисперсию, стандартное отклонение, размах выборки. Сделать вывод о диапазоне изменения значений, собранных данных.
2. Оцените корреляционную зависимость между стоимостью квартиры и ее различными характеристиками.

**Тема 2 Линейная модель парной регрессии. Показатели качества регрессии. Модель множественной регрессии. Мультиколлинеарность. Линейные регрессионные модели с гетероскедастичными остатками.**

### **Основные вопросы**

Графики подбора уравнение регрессии. Метод наименьших квадратов Оценка качества регрессионной модели. Статистика Фишера, Стьюдента. Коэффициенты детерминации и аппроксимации. Результаты построения множественной линейной регрессии. Множественная регрессия в стандартизированном масштабе. Матрица парных коэффициентов корреляции, выявление мультиколлинеарности. Обнаружение последствий мультиколлинеарности. Вычисление частных коэффициентов корреляции, их связь с парными коэффициентами корреляции. Построение линейной регрессионной модели с гетероскедастичными остатками. Анализ остатков. Устранение гетероскедастичности с помощью обобщенного метода наименьших квадратов.

### **Типовые задания**

1. Исследуется зависимости S-СПРОСА на продукты питания от T - ТЕМПА ИНФЛЯЦИИ. Объясните, что значит  $r(s,t) = 0,54$ .
2. Известно, что в магазинах фирмы «МММ» минимальный спрос на продуктовые товары в среднем 5,4 тыс. руб. Ежемесячное увеличение на 1% темпа инфляции приводит к возрастанию спроса на 0,4 тыс. руб. Запишите парную модель зависимости СПРОСА от ИНФЛЯЦИИ.

3. Постройте модель парной линейной регрессии по следующим данным и оцените качество этой модели.

x	y
2,5	5,9
3,5	6,2
6,7	7,0
8,2	7,4
3,6	6,2
2,8	6,0
7,4	7,2
5,6	6,7
6,9	7,0
10,2	7,9

4.  $R^2 = 0,63$ . Как называется данный коэффициент, его назначение? Объясните данное значение для модели.  $F_{\text{факт}} = 15$ ,  $F_{\text{табл}} = 2,3$ . Для чего используется статистика Фишера в модели? Какой вывод можно сделать при данном F.

5. Проверьте наличие мультиколлинеарности и гетероскедастичности в модели  $y(z,x)$ .

y	z	x
2,1	4,0	9,5
1,5	2,7	8,7
3,6	7,5	6,4
0,9	1,3	7,6
1,4	2,4	7,2
3,7	7,7	8,4
5,2	11,2	6,3
4,1	8,6	8,2
2,6	5,2	5,9
1,9	3,6	6,7

**Тема 3. Нелинейные модели регрессии. Регрессионные модели с переменной структурой. Линеаризация.**

### **Основные вопросы**

Построение регрессий, нелинейных по переменным: линейная, линейно-логарифмическая, лог-линейная, двойная логарифмическая модели регрессии. Построение регрессий, нелинейных по параметрам Выявление структурного сдвига модели, тест Чоу. Спецификация модели по виду уравнения. Сведение уравнений к линейному виду.

### Типовые задания

1. В уравнение  $\ln y = -2,6 + 1,2 \ln x$  дайте экономическое объяснение коэффициента при факторе.

2. Модель  $y = 5,2 * e^{3,4x}$  линеаризируйте. Как называется получаемая в итоге модель?

3. Для регрессионной модели  $y=f(x)+e$ , где  $f(x)$  – нелинейная функция, получено значение индекса корреляции  $R=0,64$ . Укажите, какая часть дисперсии переменной  $y$  объяснена моделью.

4. Изучается зависимость цены квартиры ( $y$ ) от ее жилой площади ( $x$ ) и типа дома. В модель включены фиктивные переменные, отражающие рассматриваемые типы домов: монолитный, панельный, кирпичный. Получено уравнение регрессии:

$$\hat{y} = 230 + 400 \cdot x + 2100 \cdot z_1 + 1600 \cdot z_2,$$

где  $z_1 = \begin{cases} 1, & \text{если дом монолитный} \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}, z_2 = \begin{cases} 1, & \text{если дом кирпичный} \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$

Запишите частные уравнения регрессии для кирпичного, панельного и монолитного домов.

5. Имеются данные о доходах потребителя и спросе на некоторое благо. Определить вид уравнения регрессии, описывающей зависимость между спросом и доходом, оценить параметры регрессии, ее качество, дать экономическую интерпретацию полученным параметрам.

$x$ – доход потребителя	5	7	10	12	15	20	21	25	26	30
$y$ – спрос на некоторое благо	3,51	9,5	27,4	47	91	213	245	412	462	705

### Тема 4. Системы однородных регрессионных уравнений

#### Основные вопросы

Системы независимых уравнений. Системы совместных, одновременных уравнений. Структурная и приведенная формы эконометрической модели. Проблема идентификации при переходе приведенной формы к структурной форме модели. Оценивание параметров структурной модели. Косвенный, двухшаговый и трехшаговый МНК.

## Типовые задания

1. Рассматривается следующая кейнсианская модель:

$$\begin{cases} c = \beta_0 + \beta_1 \cdot y + \varepsilon_1 & - \text{функция потребления} \\ y = c + i & - \text{макрэкономическая тождество} \end{cases}$$

где  $Y$  – совокупный выпуск,  $c$  – объем потребления,  $i$  – объем инвестиций.

Представить уравнения в приведенной форме. Оценить параметры идентифицируемых уравнений, по статистическим данным используя КМНК.

Дано											Ср. знач.
c	60	62	65	68	68	70	73	76	79	81	70,2
i	15	16	17	19	18	14	17	20	22	22	18
c <sup>2</sup>	3600	3844	4225	4624	4624	4900	5329	5776	6241	6561	4972,4
i <sup>2</sup>	225	256	289	361	324	196	289	400	484	484	330,8
ci	900	992	1105	1292	1224	980	1241	1520	1738	1782	1277,4

## Тема 5. Временные ряды и автокорреляция во временных рядах

### Основные вопросы

Автокорреляция уровней временного ряда. Аналитическое выравнивание временного ряда. График поведения временного ряда, линейное, логарифмическое, экспоненциальное уравнения тренда. Сезонные колебания временного ряда.

### Типовые задания

1. Осуществите прогноз на 2006-2008 гг., если  $T_y = 3 + 0,3t$ , где  $t_0 = 2000$ .
2. Запишите уравнение тренда, если известно  $y_0 = 16$  (2000 г. 1 кв.) и относительный ежеквартальный прирост 2%.
3. Поквартальные данные о прибыли некоторого предприятия в течение 6 лет представлены в таблице. Спрогнозировать прибыль предприятия на следующий год поквартально.

Год	2012				2013				2014				2015				2016				2017			
Квартал	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
прибыль	11,86	14,34	15,22	14,53	10,84	13,78	16,41	15,68	12,19	15,65	17,69	16,37	13,21	16,4	17,89	16,85	14,08	16,3	18,31	17,7	14,73	17,74	19,44	18,23

### **3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ**

Самостоятельная работа студентов предназначена для углубления сформированных знаний, умений, навыков. Самостоятельная работа развивает мышление, позволяет выявить причинно-следственные связи в изученном материале, решить теоретические и практические задачи. Самостоятельная работа студентов проводится с целью: систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов; углубления и расширения теоретических знаний; формирования умений использовать справочную документацию и специальную литературу; развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности; формированию самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации; развития исследовательских умений. Роль самостоятельной работы возрастает, т.к. перед учебным заведением стоит задача в т. ч. и по формированию у студента потребности к самообразованию и самостоятельной познавательной деятельности

Студентами практикуется два вида самостоятельной работы: аудиторная; внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию. В этом случае студенты обеспечиваются преподавателем необходимой учебной литературой, дидактическим материалом, в т. ч. методическими пособиями и методическими разработками.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия. Видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы могут быть:

- для овладения знаниями: чтение текста (учебника, методической литературы); составления плана текста; графическое изображение структуры текста, графическое изображение последовательности выполнения графической рабо-

ты, выполнение графических работ; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочниками; ознакомление с нормативными документами; учебно-исследовательская работа; использование компьютерной техники, интернета и др.;

- для закрепления систематизации знаний: работа с конспектом лекции (обработки текста); повторная работа над учебным материалом (учебника, первоисточника, дополнительной литературы); составление плана выполнения работы в соответствии с планом, предложенным преподавателем; изучение ГОС-Тов; ответы на контрольные вопросы; тестирование, выполнение упражнений и графических работ;

- для формирования умений: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; выполнение чертежей, схем.

Основное содержание самостоятельной работы составляет выполнение домашних заданий и подготовку к контрольным работам и экзамену.

Прежде чем приступать к выполнению домашней работы, необходимо ознакомиться с содержанием теоретических вопросов по представленному списку литературы и по лекциям.

Работа пишется на стандартных листах писчей бумаги. Все листы заполняются только с одной стороны. Домашняя работа начинается с титульного листа, который служит обложкой работы. Сверху на нем указывается принадлежность студента к учебному заведению, факультету, специализации или кафедре. В середине листа указывается название изучаемой темы или раздела и название учебного задания, номер варианта. Ниже и справа указывается фамилия и инициалы студента, номер академической группы, фамилия и инициалы преподавателя. Внизу титульного листа отмечают год выполнения работы.

Эта страница служит также для отметок преподавателя о выполнении учебного задания и замечаний по поводу подготовленной студентом работы.

При оформлении работы необходимо соблюдать нумерацию заданий. Задание переписывается полностью и ниже оформляется решение. Работа должна быть сдана на кафедру к назначенному преподавателем сроку.

Каждый учебный семестр заканчивается аттестационными испытаниями: зачетно - экзаменационной сессией.

Подготовка к экзаменационной сессии и сдача зачетов и экзаменов является ответственным периодом в работе студента. Серьезно подготовиться к сессии и успешно сдать все экзамены – долг каждого студента. Рекомендуется так организовать свою учебу, чтобы перед первым днем начала сессии были сданы и защищены все домашние задания, выполнены другие работы, предусмотренные графиком учебного процесса.

Основное в подготовке к сессии – это повторение всего материала, курса или предмета, по которому необходимо сдавать экзамен или зачет. Только тот успевает, кто хорошо усвоил учебный материал.

Если студент плохо работал в семестре, пропускал лекции, слушал их невнимательно, не конспектировал, не изучал рекомендованную литературу, то в процессе подготовки к сессии ему придется не повторять уже знакомое, а заново в короткий срок изучать весь материал. А это зачастую, оказывается, невозможно сделать из-за нехватки времени. Для такого студента подготовка к экзаменам и зачетам будет трудным, а иногда и непосильным делом.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>ВВЕДЕНИЕ</i> .....	3
1 КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ЛЕКЦИОННОГО МАТЕРИАЛА .....	4
2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ.....	22
3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ .....	27

**Наталья Николаевна Двоерядкина,**

*доц. каф. общей математики и информатики АмГУ, канд. пед. наук*