Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

сборник учебно-методических материалов

для направления подготовки:

38.03.04 – Государственное и муниципальное управление

2017 г.

Печатается по решению

редакционно-издательского совета

факультета математики и информатики

Амурского государственного

Университета

Составитель: Двоерядкина Н.Н.

Основы математического моделирования социально-экономических процессов: сборник учебно-методических материалов для направления подготовки 38.03.04 «Государственное и муниципальное управление». – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2017.

Рассмотрен на заседании кафедры общей математики и информатики 03.11.2017, протокол № 3.

ВВЕДЕНИЕ

Цель дисциплины: формирование у студентов навыков математического моделирования и исследования социально-экономических процессов, количественного и качественного анализа состояния государственных структур, а также методов и способов использования математического моделирования в управлении производственными, муниципальными и государственными структурами.

Задачи дисциплины:

– развитие умений разрабатывать управленческие решения, в том числе в условиях неопределенности и рисков, применять адекватные инструменты и технологии регулирующего воздействия при реализации управленческого решения;

– выработка навыков моделировать реальные социально-экономические процессы, адаптировать основные математические модели к конкретным задачам управления;

– освоение приемов решения и исследования математически формализованных задач, количественного и качественного анализа при оценке состояния экономической, социальной, политической среды.

В результате освоения обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

1) Знать: основные принципы современных подходов к построению математических моделей социально-экономических систем;

2) Уметь: строить базовые математические модели исследуемых систем, проводить их аналитическое исследование и оптимизацию;

3) Владеть: основными навыками построения, аналитического и численного исследования математических моделей социально-экономических процессов.

1 КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ЛЕКЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1 Модели и методы линейного программирования.

Ключевые вопросы

Понятие модели и моделирования. Основные свойства модели. Классификация и принципы построения математических моделей. Линейное программирование как часть математического программирования. Формы записи задачи линейного программирования, их эквивалентность и способы взаимного преобразования. Базисные и свободные переменные в линейном программировании. Математическая модель двойственной задачи линейного программирования. Связь математических моделей прямой и двойственной задач. Основные теоремы теории двойственности и их экономическое содержание. Построение математической модели транспортной задачи. Экономические задачи, сводящиеся к транспортной модели.

Основные определения и методы

Математической моделью реального объекта (явления) называется ее упрощенная, идеализированная схема, составленная с помощью математических символов и операций (соотношений).

Для получения математической модели сначала вводится система буквенных обозначений элементов реального объекта и затем, на основе изучения существующих взаимосвязей между этими элементами, составляются отражающие их математические соотношения (уравнения, неравенства и др.).

Универсальных методов построения математических моделей в экономике не существует. Перечислим наиболее основные общие принципы и требования к моделям: адекватность (соответствие модели своему оригиналу), объективность (соответствие научных выводов реальным условиям), простота (не засоренность модели второстепенными факторами), чувствительность (способность модели реагировать изменению начальных параметров), устойчивость (малому возмущению исходных параметров должно соответствовать малое изменение решения задачи), универсальность (широта области применения).

Для классификации этих моделей используются разные основания.

По целевому назначению экономико-математические модели делятся на теоретико-аналитические, используемые в исследованиях общих свойств и закономерностей экономических процессов, и прикладные, применяемые в решении конкретных экономических задач. *По характеру отражения* причинно-следственных связей различают модели жестко детерминистские и модели, учитывающие случайность и неопределенность. По способам отражения фактора времени экономико-математические модели делятся на статические и динамические. *По длительности* рассматриваемого периода времени различаются модели краткосрочного (до года), среднесрочного (до 5 лет), долгосрочного (10-15 и более лет) прогнозирования и планирования. Само время в экономико-математических моделях может изменяться либо непрерывно, либо дискретно. Модели экономических процессов чрезвычайно разнообразны *по форме* математических зависимостей. Особенно важно выделить класс линейных моделей, наиболее удобных для анализа и вычислений и получивших вследствие этого большое распространение. *По соотношению экзогенных и эндогенных* переменных, включаемых в модель, они могут разделяться на открытые и закрытые.

Общая классификация экономико-математических моделей включает более десяти основных признаков. С развитием экономико-математических исследований проблема классификации применяемых моделей усложняется. Наряду с появлением новых типов моделей (особенно смешанных типов) и новых признаков их классификации осуществляется процесс интеграции моделей разных типов в более сложные модельные конструкции.

Линейное программирование – раздел математики, в котором изучаются методы исследования и отыскания экстремальных значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения. В общем виде задача линейного программирования формулируется следующим образом:

Дана линейная функция $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ и система m линейных уравнений и неравенств с n переменными

Необходимо найти такое неотрицательное решение системы $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, при котором линейная функция F принимает оптимальное (максимальное или минимальное) значение.

Система называется системой ограничений, а функция F – целевой функцией.

Для решения задач линейного программирования используют графический и симплексный методы. Симплексный метод универсален, так как позволяет решить практически любую задачу линейного программирования, записанную в каноническом виде, то есть в таком виде, где система ограничений представлена в форме уравнений. Идея симплексного метода заключается в том, что, начиная с некоторого исходного опорного решения, осуществляется последовательно направленное перемещение по опорным решениям задачи к оптимальному. Значение целевой функции при этом улучшается.

Каждой задаче линейного программирования можно определенным образом сопоставить некоторую другую задачу (линейного программирования), называемую *двойственной* или сопряженной по отношению к исходной или прямой. Эти две задачи взаимосвязаны между собой и образуют пару задач, называемую в линейном программировании двойственной парой.

Различают симметричные, несимметричные и смешанные двойственные задачи.

Связь между оптимальными решениями пары взаимно двойственных задач устанавливается с помощью основных теорем двойственности.

Теорема 1. Если одна из двойственных задач имеет конечное оптимальное решение, то другая также имеет конечное оптимальное решение, при этом оптимальные значения их целевых линейных функций равны, т.е. выполняется равенство: $F_{max} = L_{min}$

Если одна из двойственных задач неразрешима ввиду того, что одна из целевых функций стремится к бесконечности, то другая задача не имеет допустимых решений.

Теорема 2. В оптимальном решении для каждой пары сопряженных условий положительным ненулевым компонентам оптимального решения одной из взаимно двойственных задач соответствуют нулевые компоненты оптимального решения другой задачи, т.е. выполняются следующие соотношения: если одно из них выполняется как строгое равенство, то другое – как строгое неравенство и наоборот.

Общая постановка *транспортной задачи* состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из m пунктов отправления A_1, A_2,.., A_m в n пунктов назначения B_1, B_2, …, B_n. При этом в качестве критерия оптимальности обычно берется либо минимальная стоимость перевозок всего груза, либо минимальное время его доставки.

Обозначим через c_{ij} тарифы перевозок единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, через a_i – запасы груза в i-м пункте отправления, через b_j – потребности в грузе в j-м пункте назначения, а через x_{ij} – количество единиц груза, перевозимого из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения. Тогда математическая постановка транспортной задачи состоит в определении минимального значения функции

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$ при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ \left(j = \overline{1,n}\right),$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_j \ \left(i = \overline{1,m}\right),$$

$$x_{ij} \geq 0 \left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$$

Всякое неотрицательное решение систем линейных уравнений, определяемое матрицей $X = \left(x_{ij}\right)\left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$, называется планом транспортной задачи. План $X^* = \left(x_{ij}^*\right)\left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$, при котором целевая функция принимает свое минимальное значение, называется оптимальным планом транспортной задачи.

Обычно исходные данные транспортной задачи записываются в виде таблицы.

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	…	B_j	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}		c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…	…
A_i	c_{i1} x_{i1}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	…	b_j	…	b_n	

Если общая потребность в грузе в пунктах назначения равна запасу груза в пунктах отправления, то модель такой транспортной задачи называется закрытой. Если же указанное условие не выполняется, то модель транспортной задачи называется открытой.

Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы запасы груза в пунктах отправления были равны потребностям в грузе в пунктах назначения, т. е. чтобы выполнялось равенство.

В случае превышения (уменьшения) запаса над потребностью, вводят фиктивный (n+1)-й пункт назначения (фиктивный (m+1)-й пункт отправления) и соответствующие тарифы считают равными нулю Этим задача сводится к транспортной задаче с закрытой моделью, из оптимального плана которой получается оптимальный план исходной задачи.

Для определения опорного плана существует несколько методов: метод северо-западного угла, метод минимального элемента и метод аппроксимации Фогеля. А для улучшения опорного плана используют метод потенциалов.

Тема 2 Модели массового обслуживания

Ключевые вопросы

Предмет, цели и задачи теории массового обслуживания. Потоки требований. Классификация систем массового обслуживания. Элементы теории случайных процессов. Понятие случайного процесса. Марковские случайные процессы. Цепи Маркова Уравнения Колмогорова. Простейшие системы массового обслуживания.

Основные определения и методы

Ожидание является следствием вероятностного характера возникновения потребностей в обслуживании и разброса показателей обслуживающих систем называют системами массового обслуживания (СМО).

Цель изучения СМО состоит в том, чтобы взять под контроль некоторые характеристики системы, установить зависимость между числом обслуживающих единиц и качеством обслуживания.

Основными элементами СМО являются источники заявок, их входящий поток, каналы обслуживания и выходящий поток.

Наиболее распространенным является *простейший поток заявок*, обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия.

Стационарность характеризуется тем, что вероятность поступления определенного количества заявок в течение некоторого промежутка времени зависит только от длины этого промежутка. Ординарность потока определяется невозможностью одновременного появления двух или более заявок. Отсутствие последействия характеризуется тем, что поступление заявки не зависит от того, когда и сколько заявок поступило до этого момента.

В зависимости от характера формирования очереди СМО различают системы с отказами и системы с неограниченным ожиданием.

По числу каналов обслуживания СМО делятся на одноканальные и многоканальные. По расположению источника требований системы могут быть разомкнутыми и замкнутыми.

Случайным процессом называется соответствие, при котором каждому значению аргумента ставится в соответствие случайная величина.

Процесс, протекающий в физической системе, называется марковским, если в любой момент времени вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от состояния системы в текущий момент и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние.

Цепью Маркова называется последовательность испытаний, в каждом из которых появляется только одно из k несовместных событий Ai из полной группы. При этом условная вероятность pij(s) того, что в s –ом испытании наступит событие Aj при условии, что в (s – 1) – ом испытании наступило событие Ai, не зависит от результатов предшествующих испытаний.

Независимые испытания являются частным случаем цепи Маркова. События называются состояниями системы, а испытания – изменениями состояний системы.

По характеру изменений состояний цепи Маркова можно разделить на две группы.

Цепью Маркова с дискретным временем называется цепь, изменение состояний которой происходит в определенные фиксированные моменты времени. Цепью Маркова с непрерывным временем называется цепь, изменение состояний которой возможно в любые случайные моменты времени.

Однородной называется цепь Маркова, если условная вероятность pij перехода системы из состояния i в состояние j не зависит от номера испытания. Вероятность pij называется переходной вероятностью.

Допустим, число состояний конечно и равно k. Тогда матрица, составленная из условных вероятностей перехода будет иметь вид:

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}$$

Эта матрица называется матрицей перехода системы.

Т.к. в каждой строке содержаться вероятности событий, которые образуют полную группу, то, очевидно, что сумма элементов каждой строки матрицы равна единице.

На основе матрицы перехода системы можно построить так называемый граф состояний системы, его еще называют размеченный граф состояний.

Вероятность Pij(n) может быть найдена по формуле, называемой равенством Маркова: $$P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} P_{ir}(m) P_{rj}(n-m)$$

Здесь т – число шагов (испытаний), за которое система перешла из состояния i в состояние r.

Матрицы, суммы элементов всех строк которых равны единице, называются стохастическими. Если при некотором п все элементы матрицы Рп не равны нулю, то такая матрица переходов называется регулярной.

Другими словами, регулярные матрицы переходов задают цепь Маркова, в которой каждое состояние может быть достигнуто через п шагов из любого состояния. Такие цепи Маркова также называются регулярными.

Теорема. (теорема о предельных вероятностях) Пусть дана регулярная цепь Маркова с п состояниями и Р – ее матрица вероятностей перехода. Тогда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = P^{(\infty)}$ и матрица Р(∞) имеет вид:

$$P^{(\infty)} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}$$

Числа u_1, u_2, …, u_n называются предельными вероятностями. Эти вероятности не зависят от исходного состояния системы и являются компонентами собственного вектора матрицы P^T (транспонированной к матрице Р).

Этот вектор полностью определяется из условий:

$$P^T \cdot \vec{u} = \vec{u}; \qquad \sum u_i = 1;$$

Правило составления Уравнений Колмогорова: в левой части каждого уравнения стоит производная вероятности состояния, а правая содержит столько членов, сколько стрелок связано с данным состоянием. Если стрелка направлена из состояния, соответствующий член имеет знак "-", если в состояние знак "+". Каждый член равен произведению плотности вероятности перехода, соответствующему данной стрелке, умноженной на вероятность состояния, из которого исходит стрелка.

СМО с отказами: заявка, поступившая в систему с отказами и нашедшая все каналы занятыми, получает отказ и покидает систему необслуженной. Показателем качества обслуживания выступает вероятность получения отказа.

Предполагается, что все каналы доступны в равной степени всем заявкам, входящий поток является простейшим, длительность (время) обслуживания одной заявки (tобс) распределена по показательному закону.

Формулы для расчета установившегося режима

1. Вероятность простоя каналов обслуживания, когда нет заявок ($k = 0$):

$$P_0 = 1/\sum_{k=0}^{n} \rho^k/k!$$

2. Вероятность отказа в обслуживании, когда поступившая на обслуживание заявка найдет все каналы занятыми ($k = n$):

$$P_{\text{отк}} = P_n = P_0\rho^n/n!$$

3. Вероятность обслуживания:

$P_{\text{обс}} = 1 - P_{\text{отк}}$.

4. Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$\bar{n}_з = \rho P_{\text{обс}}.$$

5. Доля каналов, занятых обслуживанием:

$$k_з = \bar{n}_з/n.$$

6. Абсолютная пропускная способность СМО:

$$A = \lambda P_{\text{обс}}.$$

СМО с неограниченным ожиданием: заявка, поступившая в систему с неограниченным ожиданием и нашедшая все каналы занятыми, становится в очередь, ожидая освобождения одного из каналов. Основной характеристикой качества обслуживания является время ожидания (время пребывания заявки в очереди).

Для систем с ожиданием существует дисциплина очереди:

1) обслуживание в порядке очереди по принципу «первым пришел - первым обслужен»;

2) случайное неорганизованное обслуживание по принципу «последний пришел - первым обслужен»;

3) обслуживание с приоритетами по принципу «генералы и полковники вне очереди».

Формулы для установившегося режима

1. Вероятность простоя каналов, когда нет заявок ($k = 0$):

$$P_0 = 1 \Big/ \sum_{k=0}^{n} (\rho^k / k!) + \rho^{n+1} / n!(n - \rho).$$

Предполагается, что $\rho/n < 1$.

2. Вероятность занятости обслуживанием k заявок:

$$P_k = \rho^k P_0 / k!, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

3. Вероятность занятости обслуживанием всех каналов:

$$P_n = \rho^n P_0 / n!$$

4. Вероятность того, что заявка окажется в очереди:

$$P_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n - \rho)} P_0.$$

5. Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{L}_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2} P_0.$$

6. Среднее время ожидания заявки в очереди:

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \bar{L}_{\text{оч}} / \lambda.$$

7. Среднее время пребывания заявки в СМО:

$$\bar{t}_{\text{смо}} = \bar{t}_{\text{оч}} + \bar{t}_{\text{обс}}.$$

8. Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$\bar{n}_{\text{з}} = \rho.$$

9. Среднее число свободных каналов:

$$\bar{n}_{\text{св}} = n - \bar{n}_{\text{з}}.$$

10. Коэффициент занятости каналов обслуживания:

$$k_{\text{з}} = \bar{n}_{\text{з}} / n.$$

11. Среднее число заявок в СМО:

$$\bar{z} = \bar{L}_{\text{оч}} + \bar{n}_{\text{з}}.$$

СМО с ожиданием и с ограниченной длиной очереди. Заявка, поступившая в систему с ожиданием с ограниченной длиной очереди и нашедшая все каналы и ограниченную очередь занятыми, покидает систему необслуженной.

Основной характеристикой качества системы является отказ заявке в обслуживании.

Ограничения на длину очереди могут быть из-за:

1) ограничения сверху времени пребывания заявки в очереди;

2) ограничения сверху длины очереди;

3) ограничения общего времени пребывания заявки в системе.

Формулы для установившегося режима

1. Вероятность простоя каналов обслуживания, когда нет заявок $(k = 0)$:

$$P_0 = 1 : \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \left[1 - \left(\frac{\rho}{n} \right)^m \right] \right\}.$$

2. Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{\text{отк}} = \frac{\rho^{n+m}}{n! n^m} \cdot P_0.$$

3. Вероятность обслуживания:

$$P_{\text{обс}} = 1 - P_{\text{отк}}.$$

4. Абсолютная пропускная способность:

$$A = P_{\text{обс}} \cdot \lambda.$$

5. Среднее число занятых каналов:

$$\bar{n}_{\text{з}} = \frac{A}{\mu}.$$

6. Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{L}_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \frac{1 - (\rho/n)^m (m + 1 - m\rho/n)}{(1 - \rho/n)^2} P_0.$$

7. Среднее время ожидания обслуживания:

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\bar{L}_{\text{оч}}}{\lambda}.$$

8. Среднее число заявок в системе:

$$\bar{z} = \bar{L}_{\text{оч}} + \bar{n}_{\text{з}}.$$

9. Среднее время пребывания в системе:

$$\bar{t}_{\text{смо}} = \frac{\bar{z}}{\lambda}.$$

Тема 3 Динамическое программирование.

Ключевые вопросы

Понятие динамического программирования. Постановка задачи. Принцип поэтапного построения оптимального управления. Некоторые экономические задачи, решаемые методами динамического программирования

Основные определения и методы

1. Динамическое программирование — один из разделов оптимального программирования, в котором процесс принятия решения и управления может быть разбит на отдельные этапы (шаги).

Экономический процесс является управляемым, если можно влиять на ход его развития. Под управлением понимается совокупность решений, принимаемых на каждом этапе для влияния на ход развития процесса. Например, выпуск продукции предприятием — управляемый процесс. Совокупность решений, принимаемых в начале года (квартала и т.д.) по обеспечению предприятия сырьем, замене оборудования, финансированию и т.д., является управлением. Необходимо организовать выпуск продукции так, чтобы принятые решения на отдельных этапах способствовали получению максимально возможного объема продукции или прибыли.

Динамическое программирование позволяет свести одну сложную задачу со многими переменными ко многим задачам с малым числом переменных. Это значительно сокращает объем вычислений и ускоряет процесс принятия управленческого решения.

В отличие от линейного программирования, в котором симплексный метод является универсальным методом решения, в динамическом программировании такого универсального метода не существует. Одним из основных методов динамического программирования является метод рекуррентных соотношений, который основывается на использовании принципа оптимальности, разработанного американским математиком Р. Беллманом. Принцип состоит в том, что, каковы бы ни были начальное состояние на любом шаге и управление, выбранное на этом шаге, последующие управления должны выбираться оптимальными относительно состояния, к которому придет система в конце данного шага. Использование данного принципа гарантирует, что управление, выбранное на любом шаге, не локально лучше, а лучше с точки зрения процесса в целом.

В некоторых задачах, решаемых методом динамического программирования, процесс управления разбивается на шаги. При распределении на несколько лет ресурсов деятельности предприятия шагом целесообразно считать временной период; при распределении средств между предприятиями — номер очередного предприятия. В других задачах разбиение на шаги вводится искусственно. Например, непрерывный управляемый процесс можно рассматривать как дискретный, условно разбив его на временные отрезки (шаги). Исходя из условий каждой конкретной задачи, длину шага выбирают таким образом, чтобы на каждом шаге получить простую задачу оптимизации и обеспечить требуемую точность вычислений.

Некоторые экономические задачи, решаемые методами динамического программирования.

Оптимальная стратегия замены оборудования состоит в определении оптимальных сроков замены. Критерием оптимальности при этом может служить прибыль от эксплуатации оборудования, которую следует оптимизировать, или суммарные затраты на эксплуатацию в течение рассматриваемого промежутка времени, подлежащие минимизации.

Введем обозначения: $r(t)$ — стоимость продукции, производимой за один год на единице оборудования возраста t лет;

$u(t)$ — ежегодные затраты на обслуживание оборудования возраста t лет;

$s(t)$ — остаточная стоимость оборудования возраста t лет;

P — покупная цена оборудования.

Рассмотрим период N лет, в пределах которого требуется определить оптимальный цикл замены оборудования.

Обозначим через $f_N(t)$ максимальный доход, получаемый от оборудования возраста t лет за оставшиеся N лет цикла использования оборудования при условии оптимальной стратегии.

Возраст оборудования отсчитывается в направлении течения процесса. Так, $t = 0$ соответствует случаю использования нового оборудования. Временные же стадии процесса нумеруются в обратном направлении по отношению к ходу процесса. Так, $N = 1$ относится к одной временной стадии, остающейся до завершения процесса, а $N = N$ — к началу процесса.

На каждом этапе N-стадийного процесса должно быть принято решение о сохранении или замене оборудования. Выбранный вариант должен обеспечивать получение максимальной прибыли.

Функциональные уравнения, основанные на принципе оптимальности, имеют вид:

$$f_N(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) + f_{N-1}(t+1) & \longrightarrow \text{Сохранение;} \\ s(t) - P + r(0) + f_{N-1}(1) & \longrightarrow \text{Замена,} \end{cases}$$

$$f_1(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) & \longrightarrow \text{Сохранение;} \\ s(t) - P + r(0) - u(0) & \longrightarrow \text{Замена.} \end{cases}$$

Первое уравнение описывает N-стадийный процесс, а второе – одностадийный. Оба уравнения состоят из двух частей: верхняя строка определяет доход, получаемый при сохранении оборудования; нижняя – доход, получаемый при замене оборудования и продолжении процесса работы на новом оборудовании.

В уравнении функция $r(t) - u(t)$ есть разность между стоимостью произведенной продукции и эксплуатационными издержками на N-й стадии процесса.

Функция $f_{N-1}(t + 1)$ характеризует суммарную прибыль от $(N - 1)$ оставшихся стадий для оборудования, возраст которого в начале осуществления этих стадий составляет $(t + 1)$ лет.

Нижняя строка характеризуется следующим образом: функция $s(t) - P$ представляет чистые издержки по замене оборудования, возраст которого t лет.

Функция $r(0)$ выражает доход, получаемый от нового оборудования возраста 0 лет. Предполагается, что переход от работы на оборудовании возраста t лет к работе на новом оборудовании совершается мгновенно, т.е. период замены старого оборудования и переход на работу на новом оборудовании укладываются в одну и ту же стадию.

Последняя функция $f_{N\text{-}1}$ в представляет собой доход от оставшихся $N - 1$ стадий, до начала осуществления которых возраст оборудования составляет один год.

Пусть имеется некоторое количество ресурсов *x,* которое необходимо *распределить между n различными предприятиями, объектами*, работами и т.д. так, чтобы получить максимальную суммарную эффективность от выбранного способа распределения.

Введем обозначения: x_i – количество ресурсов, выделенных i-му предприятию ($i=\overline{1,n}$);

$g_i(x_i)$ — функция полезности, в данном случае это величина дохода от использования ресурса x_i, полученного i-м предприятием;

$f_k(x)$ — наибольший доход, который можно получить при использовании ресурсов x от первых k различных предприятий.

Сформулированную задачу можно записать в математической форме:

$$f_n(x) = \max \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x,$$
$$x_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Для решения задачи необходимо получить рекуррентное соотношение, связывающее $f_k(x)$ и $f_{k\text{-}1}(x)$.

Обозначим через x_k количество ресурса, используемого k-м способом ($0 \le x_k \le x$), тогда для (k — 1) способов остается величина ресурсов, равная (x — x_k). Наибольший доход, который получается при использовании ресурса (x — x_k) от первых (k — 1) способов, составит $f_{k\text{-}1}(x - x_k)$.

Для максимизации суммарного дохода от k-го и первых $(k - 1)$ способов необходимо выбрать x_k таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$f_1(x) = g_1(x),$$
$$f_k(x) = \max\{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}, \quad k = \overline{2, n}.$$

Тема 4 Модели сетевого планирования

Ключевые вопросы

Элементы теории графов. Основные понятия и определения. Задание графов. Плоские графы; эйлеровы графы; гамильтоновы графы. Сетевые модели. Основные понятия: работы, события, сетевой график. Правила построения сетевых графиков, нумерация событий. Основные показатели сетевых графиков: критический путь и его продолжительность, времени событий и работ.

Основные определения и методы

1. Сетевая модель — графическое изображение плана выполнения комплекса работ, состоящего из нитей (работ) и узлов (событий), которые отражают логическую взаимосвязь всех операций. В основе сетевого моделирования лежит изображение планируемого комплекса работ в виде графа. Граф — схема, состоящая из заданных точек (вершин), соединенных системой линий. Отрезки, соединяющие вершины, называются ребрами (дугами) графа. Ориентированным называется такой граф, на котором стрелкой указаны направления всех его ребер (дуг), что позволяет определить, какая из двух его граничных вершин является начальной, а какая — конечной. Исследование таких сетей проводится методами теории графов.

Теория графов оперирует понятием пути, объединяющим последовательность взаимосвязанных ребер. Контур означает такой путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной. Сетевой график — это ориентированный граф без контуров. В сетевом моделировании имеются два основных элемента — работа и событие.

Работа — это активный процесс, требующий затрат ресурсов, либо пассивный (ожидание), приводящий к достижению намеченного результата.

Фиктивная работа — это связь между результатами работ (событиями), не требующая затрат времени и ресурсов.

Событие — это результат (промежуточный или конечный) выполнения одной или нескольких предшествующих работ.

Путь — это любая непрерывная последовательность (цепь) работ и событий.

Критический путь — это путь, не имеющий резервов и включающий самые напряженные работы комплекса. Работы, расположенные на критическом пути, называют критическими. Все остальные работы являются некритическими (ненапряженными) и обладают резервами времени, которые позволяют передвигать сроки их выполнения, не влияя на общую продолжительность выполнения всего комплекса работ.

2. При построении сетевых моделей необходимо соблюдать следующие правила.

1) Сеть изображается слева направо, и каждое событие с большим порядковым номером изображается правее предыдущего. Общее направление стрелок, изображающих работы, также в основном должно быть расположено слева направо, при этом каждая работа должна выходить из события с меньшим номером и входить в событие с большим номером.

2) Два соседних события могут объединяться лишь одной работой. Для изображения параллельных работ вводятся промежуточное событие и фиктивная работа.

3) В сети не должно быть тупиков, т.е. промежуточных событий, из которых не выходит ни одна работа.

4) В сети не должно быть промежуточных событий, которым не предшествует хотя бы одна работа.

5) В сети не должно быть замкнутых контуров, состоящих из взаимосвязанных работ, создающих замкнутую цепь. Для правильной нумерации событий поступают следующим образом: нумерация событий начинается с исходного события, которому дается номер 1. Из исходного события 1 вычеркивают все исходящие из него работы, на оставшейся сети вновь находят событие, в кото-

рое не входит ни одна работа. Этому событию дается номер 2. Затем вычеркивают работы, выходящие из события 2, и вновь находят на оставшейся части сети событие, в которое не входит ни одна работа, ему присваивается номер 3, и так продолжается до завершающего события.

Продолжительность выполнения работ устанавливается на основании действующих нормативов или по экспертным оценкам специалистов. В первом случае временные оценки являются детерминированными (однозначными), во втором - стохастическими (вероятностными).

Основным временным параметром сетевого графика является продолжительность критического пути.

Расчет критического пути включает два этапа. Первый называется прямым проходом. Вычисления начинают с исходного события и продолжают до тех пор, пока не будет достигнуто завершающее событие. Для каждого события определяется одно число, представляющее ранний срок его наступления. На втором этапе, называемом обратным проходом, вычисления начинают с завершающего события и продолжают, пока не будет достигнуто исходное событие. Для каждого события вычисляется поздний срок его наступления.

$t_i^{\text{р.н.}}$ — ранний срок начала всех операций, выходящих из события *i*.

Если $i = 0$, то $t_0^{\text{р.н.}} = 0$;

$t_j^{\text{р.н.}}$ — ранний срок начала всех операций, входящих в *j*.

Тогда

$$t_j^{\text{р.н}} = \max_i(t_i^{\text{р.н}} + t_{ij}) \text{ для всех } (i,j),$$

где t_{ij} — продолжительность операции (i,j);

$t_i^{\text{п.о}}$ — поздний срок окончания всех операций, входящих в событие *i*.

Если $i = n$, где n — завершающее событие сети, то $t_n^{\text{п.о}} = t_n^{\text{р.н.}}$ и является отправной точкой обратного прохода;

$$t_i^{\text{п.о}} = \min_j (t_j^{\text{п.о}} - t_{i,j}) \text{ для всех операций } (i,j);$$

Используя результаты вычислений при прямом и обратном проходах, можно определить операции критического пути. Операция (i, j) принадлежит критическому пути, если она удовлетворяет условиям:

$$t_i^{\text{р.н}} = t_i^{\text{п.о}},$$
$$t_j^{\text{р.н}} = t_j^{\text{п.о}},$$
$$t_j^{\text{р.н}} - t_i^{\text{р.н}} = t_j^{\text{п.о}} - t_i^{\text{п.о}} = t_{ij}.$$

Операции связаны еще с двумя сроками:

$t_{ij}^{\text{п.н.}}$ - поздний срок начала работы. Он является наиболее поздним (максимальным) из допустимых моментов начала данной работы, при котором еще возможно выполнение всех последующих работ в установленный срок:

$$t_{ij}^{\text{п.н}} = t_j^{\text{п.о}} - t_{ij};$$

$t_{ij}^{\text{р.о}}$ - ранний срок окончания работы. Он является наиболее ранним (минимальным) из возможных моментов окончания работы при заданной продолжительности работ:

$$t_{ij}^{\text{р.о}} = t_i^{\text{р.н}} + t_{ij}.$$

Различают два вида резервов времени: полный резерв ($r_{\text{п}}$) и свободный резерв ($r_{\text{св}}$).

Полный резерв времени показывает, на сколько может быть увеличена сумма продолжительности всех работ относительно критического пути. Он представляет собой разность между максимальным отрезком времени, в течение которого может быть выполнена операция, и ее продолжительностью (t_{ij}) и определяется как

$$t_{ij}^{\text{п.н}} - t_i^{\text{р.н}}.$$

Свободный резерв времени — максимальное время, на которое можно отсрочить начало или увеличить продолжительность работы при условии, что все события наступают в ранние сроки: $r_{\text{св}\,ij} = t_j^{\text{р.н}} - t_i^{\text{р.н}} - t_{ij}.$

Тема 5 Модели управления запасами

Ключевые вопросы

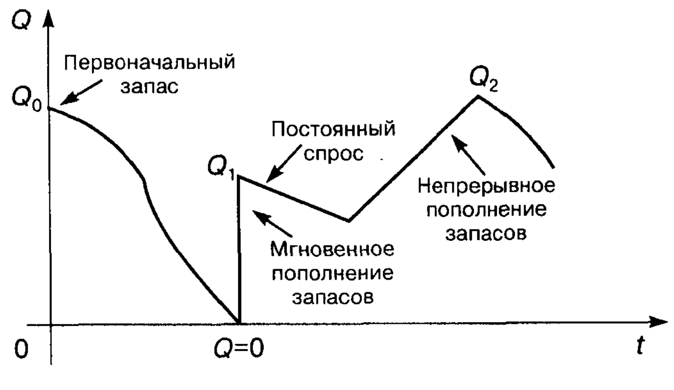
Общая постановка задачи. Управляемые переменные. Целевая функция модели. Некоторые модели управления запасами. Основная модель управления запасами. Модель производственных запасов. Модель запасов, включающая штрафы.

Основные определения и методы

Предприятия, фирмы имеют различные запасы: сырье, комплектующие изделия, готовую продукцию, предназначенную для продажи, и т.д. Совокупность подобных материалов, представляющих временно не используемые экономические ресурсы, называют запасами предприятия.

Запасы создаются по различным причинам. Одна из них состоит в том, что если в некоторый момент производства потребуется какой-то вид деталей, который поставляется другим предприятием, и он отсутствует на складе, то процесс производства может остановиться. Поэтому на складе всегда должно быть нужное количество деталей данного вида. Однако если запасы увеличить, то возрастет стоимость их хранения. Задача управления запасами состоит в выборе для предприятия целесообразного решения.

Рассмотрим простейшие математические модели управления запасами. На рис. представлены возможные графики изменения запаса *Q,* имеющегося на складе, во времени *t,* для которого рассматривается этот запас.



Под *Q* будем понимать изделия или материалы (товары) только одного вида. Если на изделие поступает заявка, то оно отпускается и значение *Q* падает. Предположим, что величина спроса непрерывна во времени. Если $Q = 0$, то имеет место дефицит.

Любая математическая модель, которая применяется для изучения определенной ситуации в управлении запасами, должна учитывать факторы, связанные с издержками.

Различают *организационные издержки* — расходы, связанные с оформлением и доставкой товаров, издержки *содержания запасов* — затраты, связанные с хранением. Они возникают из-за амортизации в процессе хранения (изделия могут портиться, устаревать, их количество может уменьшаться и т.д.). Существуют издержки, связанные с *дефицитом:* если поставка со склада не может быть выполнена, то возникают дополнительные издержки, связанные с отказом. Это может быть денежный штраф или ущерб, не осязаемый непосредственно (например, ухудшение бизнеса в будущем и потеря потребителей). Количество товара, поставляемое на склад, называют *размером партии.*

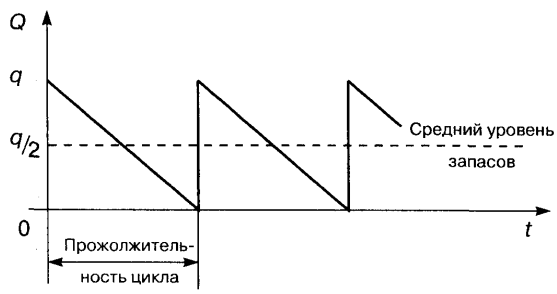
Введем обозначения необходимых для составления модели величин. Данные поместим в таблице.

Величина	Обозначение	Единица измерения	Предложения
Интенсивность спроса	g	Единиц товара в год	Спрос постоянен и непрерывен; весь спрос удовлетворяется
Организационные издержки	b	Рублей за год	Издержки постоянны , не зависят от размера партии
Стоимость товара	s	Рублей за год	Цена единицы товара постоянна; рассматривается один вид товара
Издержки содержания запасов	h	Рублей за единицу товара в год	Стоимость хранения единицы товара в течение года постоянна
Размер партии	q	Единиц товара в одной партии	Размер партии постоянен; поступление товара происходит мгновенно, как только уровень запаса равен нулю

<u>Некоторые модели управления запасами.</u>

1. Основная модель управления запасами

График изменения запасов представлен на рисунке.



Чтобы полностью удовлетворить годовой спрос *g* при размере поставки *q,* необходимо обеспечить *g/q* поставок или партий за год. Средний уровень запасов составляет $q/2$.

Уравнение издержек будет иметь вид

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = bg/q + sg + hq/2,$$

где C_1 — общие организационные издержки; C_2 — стоимость товаров; C_3 — общие издержки содержания запасов.

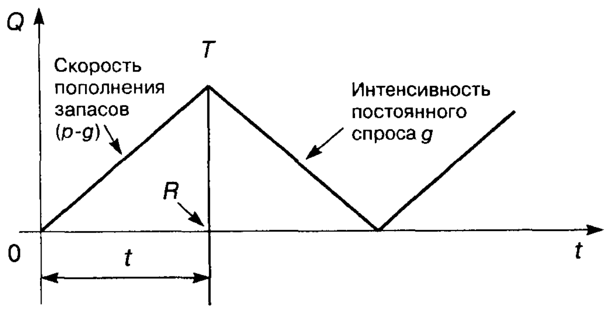
$$q_{\text{опт}} = \sqrt{2bg/h},$$

где $q_{\text{опт}}$ — оптимальный размер партии.

2. Модель производственных запасов

В основной модели предполагали, что поступление товаров на склад происходит мгновенно, например в течение одного дня. Рассмотрим случай, когда готовые товары поступают на склад непосредственно с производственной линии. Будем считать, что поступление товаров происходит непрерывно. Модель задачи в этом случае называют моделью *производственных поставок.* Обозначим через p скорость поступающего на склад товара. Эта величина равна количеству товаров, выпускаемых производственной линией за год. Остальные обозначения и предположения те же, что и для основной модели управления запасами.

Определим оптимальный размер партии, минимизирующий общие затраты. Рассмотрим график изменения модели производственных запасов



Общие издержки в течение года, как и для основной модели, составляют

$$C = C_1 + C_2 + C_3,$$
$$C_1 = bg/q,$$
$$C_2 = sg.$$

Для получения среднего уровня запасов следует учесть, что

$RT = (p - g)t$ — максимальный уровень запасов,

$q = pt$ — количество товаров в одной производственной поставке.

Тогда средний уровень запасов составляет половину максимального и равен

$$(p - g)q/2p.$$

$$q_{\text{опт}} = \sqrt{2pbg/(p-g)h}.$$

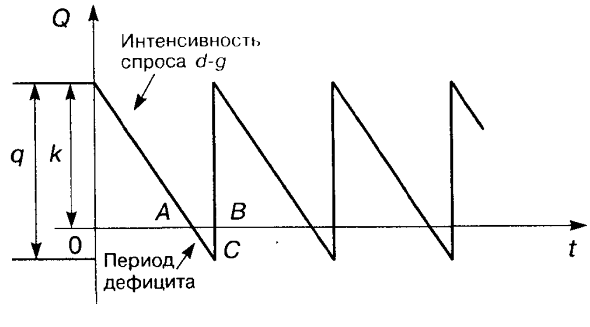
3. Модель запасов, включающая штрафы. Рассмотрим основную модель, допускающую возможность существования периодов дефицита, который покрывается при последующих поставках, и штрафов за несвоевременную поставку.

Пусть предприятие должно поставить q ед. товара в течение каждого промежутка времени L, за единицу времени поставляется g ед. товара $(q = Lg)$.

Предположим, что в начале каждого периода L предприятие делает запас, равный k. Это означает, что в течение периода будет наблюдаться дефицит товара и некоторое время поставки не будут осуществляться. Невыполненные заявки будут накапливаться до максимальной величины $q - k$ и будут удовлетворены, как только поступит следующая партия товаров в количестве q.

За то, что товары доставляются предприятием позже необходимого срока, на предприятие налагается штраф, который зависит от того, насколько была задержана поставка. Такая модель целесообразна, поскольку иногда выгоднее заплатить штраф, чем расходовать дополнительные средства на хранение запасов, превышающих величину k.

Задача управления запасами состоит в том, чтобы выбрать такое значение k, которое ведет к минимизации всех затрат, включая затраты на хранение и штрафы.



Для определения оптимального значения k обозначим:

h — издержки хранения единицы товара за единицу времени;

p — затраты на штраф в расчете на единицу товара за один день отсрочки.

Найдем издержки одного цикла:

$$C = C_1 + C_2,$$

где C_1 — общие издержки содержания запасов; C_2 — общие затраты на штраф.

Так как товары находятся на складе в течение периода OA (см. рис. 33.5), средний уровень запасов за этот период равен $k/2$. Если продолжительность периода OA равна k/g, то

$$C_1 = h \cdot k/2 \cdot k/g = hk^2/2g.$$

$$k_{\text{опт}} = pq/(h + p).$$

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Практические занятия сопровождают лекционный курс дисциплины. Теоретические знания, представления, образы должны быть прожиты. Афоризм одного из известных физиков М. Лауэ: «знание есть то, что остается, когда все выученное уже забыто», характеризует важную роль практики.

Практические занятия должны проводиться в логичном единстве с теоретическим курсом, подкрепляя и уточняя понятийный аппарат.

Каждый практическое занятие начинается с теоретического опроса необходимого материала и проверки домашнего задания. Далее на конкретных примерах рассматриваются пути и способы применения тех математических методов, которые не требуют использования электронных вычислительных машин. При этом необходимо активизировать самостоятельную работу студентов. Задания и методические указания к ним выдаются студентам, каждый из которых выбирает оптимальный для себя темп работы. Преподавателю отводится роль консультанта и помощника. Задания, вызвавшие трудности у большинства студентов, разбираются на доске.

В конце занятия выдается домашнее задание, состоящее из теоретических вопросов, уяснение которых необходимо для следующего занятия и практических заданий по пройденному материалу.

При выполнении домашнего задания решать задачи удобнее поэтапно, в той последовательности, в какой эти задания сформулированы. В этом случае при возникновении трудностей будет легче обратиться к анализу тех тем, которые изложены в лекции и задач, разобранных на практическом занятии.

После выполнения практической части задания следует найти ответы на теоретические вопросы, заданные преподавателем и таким образом подготовится к осознанному восприятию следующего материала.

Активная, регулярная самостоятельная работа над домашним заданием – путь к успешному усвоению дисциплины.

Тема 1 Модели и методы линейного программирования

Основные вопросы

Составление математической модели. Графический метод решения задачи линейного программирования. Симплексный метод решения задачи линейного программирования. Взаимно-двойственные задачи. Графический метод решения задач целочисленного программирования Метод Гомори. Метод ветвей и границ. Транспортная задача. Построение начального плана перевозок методом минимального элемента, методом северо-западного угла. Решение транспортной задачи методом потенциалов

Типовые задания

1. Решить задачу линейного программирования графическим и симплексным методами:

$$L = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 0, \\ \quad x_1 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

2. Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют четыре вида ресурсов S_1, S_2, S_3 и S_4. Известны запасы ресурсов и число единиц ресурсов, затрачиваемых на производство единицы продукции (числа условные).

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на производство единицы продукции.	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	0	1
S_4	21	3	0

Прибыль, получаемая от единицы продукции P_1 и P_2 – соответственно 2 и 3 рубля. Найти такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Сформулировать экономически и математически для данной задачи двойственную. Найти решение двойственной задачи, используя основные теоремы двойственности. Провести анализ устойчивости двойственных оценок.

3. Требуется найти план перевозок однородного груза из пунктов A_1, A_2, A_3 и A_4, содержащих соответственно a_1, a_2, a_3 и a_4 единиц груза, в пункты B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5 в количествах b_1, b_2, b_3, b_4 и b_5 соответственно, при котором суммарные транспортные затраты будут наименьшими. Известны c_{ij} – затраты на перевозку 1 единицы груза из пункта A_i и B_j.

$$\begin{matrix} a_i = (210,\ 250,\ 200,\ \ 290) \\ b_j = (150,\ 210,\ 170,\ 220,\ 200) \end{matrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 10 & 4 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 7 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Решить задачу целочисленного линейного программирования. Организация арендует баржу грузоподъемностью 83 т, на которой предполагает перевозить груз, состоящий из предметов четырех типов. Веса и стоимости предметов равны соответственно 24 т, 22 т, 16 т, 10 т и 96 у. е., 85 у. е., 50 у. е., 20 у. е. Требуется погрузить на баржу груз максимальной стоимости.

Тема 2 Модели массового обслуживания

Основные вопросы

Потоки требований. Элементы теории случайных процессов. Простейшие системы массового обслуживания. Показатели эффективности системы массового обслуживания. Системы массового обслуживания с отказами. Системы массового обслуживания с ожиданием. Замкнутые системы массового обслуживания

Типовые задания

Определить является ли поток поступающих заявок простейшим и указать закон по которому распределена длительность обслуживания одной заявки:

а) Дежурный по администрации города имеет пять телефонов. Телефонные заявки поступают с интенсивностью 90 заявок в час, средняя продолжительность разговора составляет 2 минуты.

б) На стоянке автомобилей возле магазин имеются 3 места, каждое из которых отводится под один автомобиль. Автомобили прибывают на стоянку с интенсивностью 20 автомобилей в час. Продолжительность пребывания автомобилей на стоянке составляет 15 минут. Стоянка на проезжей части не разрешается.

2. Поток машин, идущих по шоссе в одном направлении, представляет собой простейший поток с интенсивностью 2 машины в минуту. Человек выходит на шоссе, чтобы остановить первую попавшуюся машину, идущую в данном направлении. Найти закон распределения времени T, в течение которого ему придётся ждать машину; определить математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение.

3. По заданной матрице перехода построить граф состояний.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0 & 0,7 \\ 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

4. Задана матрица Λ интенсивностей переходов непрерывной цепи Маркова. Составить размеченный граф состояний, соответствующий матрице Λ; составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний; найти предельное распределение вероятностей.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5. На вокзале в мастерской бытового обслуживания работают три мастера. Если клиент заходит в мастерскую, когда все мастера заняты, то он уходит из мастерской, не ожидая обслуживания. Среднее число клиентов, обращающихся в мастерскую за 1 ч, равно 20. Среднее время, которое затрачивает мастер на обслуживание одного клиента, равно 6 мин.

6. В порту имеется один причал для разгрузки судов. Интенсивность потока судов равна 0,4 (судов в сутки). Среднее время разгрузки одного судна составляет 2 суток. Предполагается, что очередь может быть неограниченной длины. Найти показатели эффективности работы причала, а также вероятность того, что ожидают разгрузки не более чем два судна.

4. По условию предыдущей задачи найти показатели эффективности работы причала. Известно, что приходящее судно покидает причал (без разгрузки), если в очереди на разгрузку стоит более 3 судов.

Тема 3. Динамическое программирование

Основные вопросы

Элементы динамического программирования. Нахождение рациональных затрат при строительстве трубопроводов и транспортных артерий. Оптимальное распределение ресурсов. Минимизация затрат на строительство и эксплуатацию предприятий.

Типовые задания

1. Изыскателями установлены участки трассы ЛЭП, проходящей из пункта 1 в пункт 14. Стоимости всех участков линии приведены в таблицах.

Требуется найти:

1. трассу минимальной стоимости и саму ее стоимость;

2. трассу минимальной стоимости и саму ее стоимость, если линия должна пройти через заданную точку А.

Ветки																
1-2	1-3	2-4	2-5	2-6	3-4	3-5	3-6	3-7	4-8	4-9	5-8	5-9	5-10	6-8	6-9	6-10
5	6	6	14	16	18	18	5	2	12	6	10	16	17	7	13	4

Ветки														
7-9	7-10	8-11	8-12	8-13	9-11	9-12	9-13	10-11	10-12	10-13	11-14	12-14	13-14	A
15	12	15	13	11	7	10	4	10	6	1	5	12	14	10

2. (Задача распределения капиталовложений.

Для развития трех предприятий выделено 4 млн руб. Известна эффективность капитальных вложений в каждое предприятие, заданная функцией полезности. Составить оптимальный план распределения средств между предприятиями, предположив, что оно проводится в целых числах

1) доход, полученный от вложения средств в одно предприятие, не зависит от вложения средств в другие предприятия;

2) доход, полученный от разных предприятий, выражается в одинаковых единицах;

3) общий доход равен сумме доходов, полученных от всех средств, вложенных во все предприятия.

Исходные данные задачи приведены в таблице

x	1	2	3	4
$f_1(x)$	31	33	35	36
$f_2(x)$	33	35	39	40
$f_3(x)$	32	34	36	41

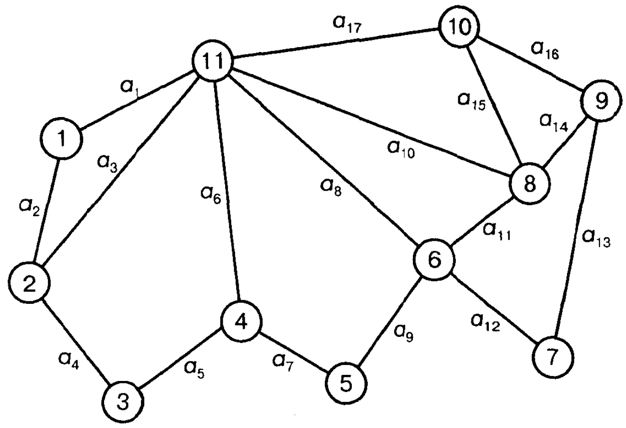
Тема 4. Модели сетевого планирования

Основные вопросы

Построение сетевой модели. Основные показатели сетевых графиков.

Типовые задания

1. Районной администрацией принято решение о газификации одного из небольших сел района, имеющего 10 жилых домов. Расположение домов указано на рисунке. Числа в кружках обозначают условный номер дома. Узел 11 является газопонижающей станцией. Разработать такой план газификации села, чтобы общая длина трубопроводов была наименьшей.



Значения коэффициентов условия задачи

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}
240	40	300	180	110	370	90	400	160	470	190	40	110	40	50	50	610

2. Предположим, что при составлении некоторого проекта выделено 6 событий: 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 9 связывающих их работ (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (2, 6), (3,

4), (3, 5), (4, 6), (5, 6). Требуется: составить сетевой график выполнения работ; рассчитать параметры сетевого графика тремя способами.

Тема 5. Модели управления запасами

Основные вопросы

Основная модель управления запасами. Модель производственных запасов. Модель запасов, включающая штрафы.

Типовые задания

1. В течение 10 дней наблюдалось следующее изменение запасов:

— первоначальный запас равен нулю, в следующие двое суток товары поступали на склад непрерывно и равномерно по 500 шт. в день, расходования запасов не происходило;

— в следующие четыре дня спрос на имеющиеся в запасе товары был непрерывным и равномерным и равнялся 250 шт. в день, пополнения запасов не происходило;

— в следующие четыре дня потребность в товарах изменилась до 200 шт. в день, с целью удовлетворения спроса и пополнения запасов ежедневно на склад доставлялось 300 шт. (поставки на склад и со склада происходили равномерно и непрерывно).

Нарисуйте график изменения запасов для 10-дневного периода, определите величину запасов на складе к концу периода. Вычислите средний уровень запасов для всего периода.

2. Фирме по строительству судов требуется 20000 заклепок в год, расходуемых с постоянной интенсивностью. Организационные издержки составляют 0,5 тыс. р. за партию, цена одной заклепки - 10 р. Издержки на хранение одной заклепки оценены в 12,5% ее стоимости.

Найти оптимальный размер партии поставки, оптимальную продолжительность цикла и оптимальное число поставок за год.

3. Известно, что издержки выполнения заказа - 2 ден. ед., количество товара, реализованного за год, - 1000 шт., закупочная цена единицы товара - 5 ден. ед., издержки хранения - 20% от закупочной цены. Определить наиболее

оптимальный размер заказа.

4. Система управления запасами некоторого товара подчиняется основной модели. Каждый год с постоянной интенсивностью спрос составляет 15000 ед. товара, издержки на организацию поставки составляют 10 р. на партию, цена единицы товара - 30 р., а издержки на ее хранение - 7,5 р. в год. Найти оптимальный размер партии, число поставок, продолжительность цикла.

5. Предприниматель имеет стабильный месячный спрос на товар в количестве 50 ед. Товар он покупает у поставщика по цене 6 ден. ед. за штуку, причем издержки на оформление поставки и другие подготовительные операции составляют в каждом случае 10 ден. ед. Как часто предприниматель должен пополнять свой запас товаров, если затраты на хранение равны 20% цены товара?

6. Фирма, выступающая в качестве посредника, обязуется поставлять заводу по производству двигателей 5 коленчатых валов в день. Руководство фирмы решает доставлять коленчатые валы на свой склад партиями, причем в каждой содержится 150 шт. и они рассчитаны на 30-дневный срок. За один просроченный день в поставке коленчатого вала заводу фирма выплачивает штраф 200 р. Издержки хранения одного коленчатого вала были оценены в 250 р. за неделю, организационными затратами можно пренебречь. Найти оптимальный уровень запасов и продолжительность соответствующего ему периода дефицита. Вычислите уменьшение затрат при оптимальной политике управления запасами по сравнению с политикой, когда в начале каждого периода на склад поступает 150 коленчатых валов.

3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа студентов предназначена для углубления сформированных знаний, умений, навыков. Самостоятельная работа развивает мышление, позволяет выявить причинно-следственные связи в изученном материале, решить теоретические и практические задачи. Самостоятельная работа студентов проводится с целью: систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов; углубления и расширения теоретических знаний; формирования умений использовать справочную документацию и специальную литературу; развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности; формированию самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации; развития исследовательских умений. Роль самостоятельной работы возрастает, т.к. перед учебным заведением стоит задача в т. ч. и по формированию у студента потребности к самообразованию и самостоятельной познавательной деятельности

Студентами практикуется два вида самостоятельной работы: аудиторная; внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию. В этом случае студенты обеспечиваются преподавателем необходимой учебной литературой, дидактическим материалом, в т. ч. методическими пособиями и методическими разработками.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия. Видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы могут быть:

- для овладения знаниями: чтение текста (учебника, методической литературы); составления плана текста; графическое изображение структуры текста, графическое изображение последовательности выполнения графической работы, выполнение графических работ; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочниками; ознакомление с нормативными документами; учебно-исследовательская работа; использование компьютерной техники, интернета и др.;

- для закрепления систематизации знаний: работа с конспектом лекции (обработки текста); повторная работа над учебным материалом (учебника, первоисточника, дополнительной литературы); составление плана выполнения работы в соответствие с планом, предложенным преподавателем; изучение ГОСТов; ответы на контрольные вопросы; тестирование, выполнение упражнений и графических работ;

- для формирования умений: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; выполнение чертежей, схем.

Основное содержание самостоятельной работы составляет выполнение домашних заданий и подготовку к контрольным работам и экзамену.

Прежде чем приступать к выполнению домашней работы, необходимо ознакомиться с содержанием теоретических вопросов по представленному списку литературы и по лекциям.

Работа пишется на стандартных листах писчей бумаги. Все листы заполняются только с одной стороны. Домашняя работа начинается с титульного листа, который служит обложкой работы. Сверху на нем указывается принадлежность студента к учебному заведению, факультету, специализации или кафедре. В середине листа указывается название изучаемой темы или раздела и название учебного задания, номер варианта. Ниже и справа указывается фамилия и инициалы студента, номер академической группы, фамилия и инициалы преподавателя. Внизу титульного листа отмечают год выполнения работы.

Эта страница служит также для отметок преподавателя о выполнении учебного задания и замечаний по поводу подготовленной студентом работы.

При оформлении работы необходимо соблюдать нумерацию заданий. Задание переписывается полностью и ниже оформляется решение. Работа должна быть сдана на кафедру к назначенному преподавателем сроку.

Каждый учебный семестр заканчивается аттестационными испытаниями: зачетно - экзаменационной сессией.

Подготовка к экзаменационной сессии и сдача зачетов и экзаменов является ответственейшим периодом в работе студента. Серьезно подготовиться к сессии и успешно сдать все экзамены – долг каждого студента. Рекомендуется так организовать свою учебу, чтобы перед первым днем начала сессии были сданы и защищены все лабораторные работы, сданы все домашние задания, выполнены другие работы, предусмотренные графиком учебного процесса.

Основное в подготовке к сессии – это повторение всего материала, курса или предмета, по которому необходимо сдавать экзамен. Только тот успевает, кто хорошо усвоил учебный материал.

Если студент плохо работал в семестре, пропускал лекции, слушал их невнимательно, не конспектировал, не изучал рекомендованную литературу, то в процессе подготовки к сессии ему придется не повторять уже знакомое, а заново в короткий срок изучать весь материал. А это зачастую, оказывается, невозможно сделать из-за нехватки времени. Для такого студента подготовка к экзаменам будет трудным, а иногда и непосильным делом. В дни подготовки к экзаменам следует избегать чрезмерной перегрузки умственной работой, необходимо чередовать труд и отдых.

СОДЕРЖАНИЕ

Наталья Николаевна Двоерядкина,

доц. каф. общей математики и информатики АмГУ, канд. пед. наук