

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

МЕТОДЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
сборник учебно-методических материалов
для направления подготовки

13.04.02 Электроэнергетика и электротехника

2017 г.

*Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
Университета*

Составители: Юрьева Т.А.

Методы прикладной математики: сборник учебно-методических материалов для направления подготовки 13.04.02 Электроэнергетика и электротехника. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2017.

Рассмотрен на заседании кафедры общей математики и информатики 03.11.2017, протокол № 3.

© Амурский государственный университет, 2017

© Кафедра общей математики информатики, 2017

© Юрьева Т.А., составление

ВВЕДЕНИЕ

Целью дисциплины «Методы прикладной математики» является овладение фундаментальными математическими знаниями и умениями на уровне исследовательской ориентации, который достаточен для эффективного выбора и использования математических методов в проблемных ситуациях, возникающих при выполнении профессиональных функций; развитие логического и алгоритмического мышления студентов, способностей, необходимых для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений, при поиске решений практических задач, обучение студентов математическим методам принятия решения, необходимым при решении задач оптимизации, возникающих во всех областях человеческой деятельности.

Задачи дисциплины:

- раскрыть роль и значение математических методов исследования при решении инженерных задач;
- ознакомить с основными понятиями и методами классической и современной математики;
- научить студентов применять методы математического анализа для построения математических моделей реальных процессов и явлений;
- раскрыть роль и значение вероятностно-статистических методов исследования при решении инженерных задач.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать: основы планирования экспериментальной работы, методы анализа вариантов, разработки и поиска компромиссных решений; методы создания и анализа моделей, позволяющих прогнозировать свойства и поведение объектов профессиональной деятельности;

Уметь: планировать и ставить задачи исследования, выбирать методы экспериментальной работы, интерпретировать и представлять результаты научных исследований;

Владеть: навыками научно-исследовательского анализа при решении технических проблем и процессов, навыками практического использования базовых знаний и методов математических и естественных наук.

1 КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ЛЕКЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Теория планирования эксперимента

Статистической называется зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение распределения другой величины. В частности, статистическая зависимость проявляется в том, что при изменении одной из величин изменяется среднее значение другой величины; в этом случае статистическая зависимость называется корреляционной.

Определить форму связи – значит выявить механизм получения зависимой случайной переменной. При изучении статистических зависимостей форму связи можно характеризовать функцией регрессии (линейной, квадратной, показательной и т.д.)

Функцией регрессии случайной величины Y относительно X называется условное математическое ожидание $M(Y/X=x)$ случайной величины Y , рассматриваемое как функция от x , то есть $M(Y/X=x)=\varphi(x)$.

В качестве оценки условного математического ожидания используют условное среднее $\bar{y}_x$, которое так же является функцией от x : $\bar{y}_x = \varphi^*(x)$.

Условным средним $\bar{y}_x$ называют среднее арифметическое наблюдаемых значений Y , соответствующих значению $X=x$, которое приняла величина X . Уравнение $\bar{y}_x = \varphi^*(x)$ называется выборочным уравнением регрессии Y на X и используется для характеристики формы связи при изучении зависимости величин Y и X . График $\varphi^*(x)$ называется выборочной линией регрессии, которая показывает, как в среднем зависит Y от X . Аналогично определяется выборочное уравнение регрессии X на Y .

Самым распространенным способом нахождения эмпирических формул является метод наименьших квадратов.

Предположение о наличии линейной зависимости можно сделать, опираясь на изображение точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ в прямоугольной системе координат xOy .

В методе наименьших квадратов на значения a и b накладывается условие – они должны доставлять минимум сумме квадратов отклонений $F(a, b)$. Требуется найти a и b , удовлетворяющие этому условию. Необходимым условием экстремума функции двух переменных является равенство нулю ее частных производных.

Общий вид уравнения многофакторной линейной регрессии: $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n$. Коэффициенты, как и в случае парной регрессии, определяют методом наименьших квадратов.

Статистическую значимость каждого из коэффициентов линейной регрессии для любого числа факторов оценивают с помощью t -критерия Стьюдента. Определяют два значения критерия: эмпирическое (расчетное, наблюдаемое) и табличное (критическое, теоретическое). Эти значения сравнивают и, если $t_{b_i} \geq t_{\text{табл}}(\alpha, n - 2)$, то коэффициент регрессии b_i признаётся статистически значимым при выбранном уровне значимости α . Уровень значимости традиционно принимают равным 0,05 или 0,01. Если $t_{b_i} < t_{\text{табл}}(\alpha, n - 2)$, то коэффициент статистически незначим. Независимую переменную, соответствующую незначимому коэффициенту исключают из уравнения регрессии, так как она не влияет на результат Y .

Эмпирическое значение t -критерия вычисляют по формуле $t_{b_i} = \frac{|b_i|}{S_{b_i}}$, где

$$S_{b_i} = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{(n-2) \sum x_i^2}} - \text{стандартная ошибка коэффициента } b_i.$$

Для проверки воспроизводимости эксперимента применяют критерий Кохрена. В этом случае измерение зависимой переменной производят m раз при каждом значении фактора.

Наблюдаемое значение критерия Кохрена определяют по формуле: $G = \frac{S_{\max}^2}{\sum S_{y_i}^2}$, где

$$S_{\max}^2 - \text{максимальная из дисперсий } S_{y_i}^2 = \frac{\sum_{j=1}^m (y_{ij} - y_i)^2}{m-1}.$$

Если $G \leq G_{\text{табл}}(n(m-1))$, то эксперимент воспроизводим. За ошибку опытов принимают:

$$S_0 = \sqrt{\frac{\sum S_{y_i}^2}{n}}.$$

Для проверки адекватности полученного уравнения регрессии применяют дисперсионный анализ.

Суть дисперсионного анализа заключается в том, что дисперсия (разброс значений) зависимой переменной представляется суммой дисперсий: дисперсией адекватности – объясняемой влиянием факторов и остаточной дисперсией – объясняемой влиянием случайных или неучтенных воздействий.

Для сравнения дисперсий используют случайную величину, распределенную по закону Фишера-Снедекора (критерий Фишера). Наблюдаемое значение вычисляется по формуле:

$$F = \frac{S_{ad}^2}{S_{ocm}^2}, \text{ где } S_{ad}^2 = \frac{\sum_{j=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2}{k+1} - \text{дисперсия адекватности, } S_{ocm}^2 = \frac{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{n-k-1} - \text{остаточная}$$

дисперсия, k – число значимых коэффициентов регрессии.

Критическое значение $F_{\text{табл}}$ следует находить с помощью таблицы распределения Фишера-Снедекора по уровню значимости α и числу степеней свободы $f1=k+1$ и $f2=n-k-1$.

Если $F \leq F_{\text{табл.}}(\alpha, f1, f2)$, то регрессионная модель признаётся адекватной. По уравнению адекватной регрессии можно определять прогнозные значения результата Y при различных значениях факторов. Ошибку предсказания оценивают по величине стандартной ошибки

$$\text{аппроксимации линейной модели: } S_{anp} = \sqrt{\frac{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{n-2}}.$$

Средняя относительная ошибка аппроксимации вычисляется по формуле:

$$\varepsilon = \frac{S_{anp}}{y} \cdot 100\%. \text{ Точность прогноза повышается с уменьшением } \varepsilon.$$

Долю дисперсии, объясняемой влиянием факторов, показывает коэффициент детерминации, равный квадрату коэффициента корреляции.

При планировании эксперимента необходимо провести минимально возможное число опытов, регистрацию откликов, подобрать и проанализировать математическую модель, описывающую предполагаемую связь.

В ходе проведения опытов получают выборочные оценки выходов y_i и строятся приближенные уравнения функций отклика: $y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_k)$; $y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_k)$; ...; $y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_k)$. Эти функции образуют в факторном пространстве поверхность отклика. В экстремальных задачах требуется исследовать эту поверхность на экстремум, в описательных задачах – изучить причины формы этой поверхности.

Планированием эксперимента называют процедуру выбора плана эксперимента – совокупности данных, определяющих число, порядок и условия проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью.

Каждый опыт эксперимента характеризуется определенным набором значений факторов.

Фиксированное значение фактора называется уровнем фактора.

Множество точек, которые отражают численные значения факторов, можно представить в виде матрицы. Количество строк соответствует числу опытов n ($u = 1, 2, \dots, n$).

Количество столбцов соответствует количеству факторов k , воздействующих на выходной параметр или параметр оптимизации ($i = 1, 2, \dots, k$).

Полным факторным экспериментом называется такой эксперимент, при котором используются все возможные комбинации уровней варьирования факторов.

Если в эксперимент включено k факторов ($x_1, x_2, \dots, x_k$) и для каждого из них установлено q уровней, то в полном факторном эксперименте будет проведено q^k опытов. Мы будем рассматривать эксперименты с двумя уровнями варьирования (нижний и верхний) факторов $q = 2$. В этом случае будет проведено 2^k опытов, и можно определить $2k$ коэффициентов линейной регрессии.

В ходе проведения полного факторного эксперимента выполняют следующий алгоритм:

- 1) нормировка факторов;
- 2) составление плана-матрицы;
- 3) рандомизация опытов;
- 4) проведение эксперимента;
- 5) проверка воспроизводимости опытов;
- 6) расчет и проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии;
- 7) проверка адекватности модели.

Расчет коэффициентов уравнения регрессии осуществляется, как и для пассивного эксперимента, методом наименьших квадратов.

Тема 2. Шкалы измерения и инвариантные алгоритмы

Шкалой называется кортеж из трех элементов $\langle X, \varphi, Y \rangle$, где X – эмпирическое множество, с заданным на нем отношением R_x , Y – числовое множество с отношением R_y , φ – гомоморфное отображение X на Y .

Каждому элементу $X = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n, R_x\}$ ставится в соответствие элемент из $Y = \{\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n), R_y\}$. При этом, $\{\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)\} \in R_y$ только тогда, когда $\{x_1, \dots, x_n\} \in R_x$.

Гомоморфное отображение X на Y φ можно подобрать не единственным образом. Общим для таких отображений может быть допустимое преобразование $x_i \rightarrow y_i$. По виду допустимого преобразования определяют тип шкалы $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$.

В зависимости от допустимого преобразования шкалы могут обладать тремя различными свойствами, на основании которых (обладает измерительная шкала этим свойством или нет) определяют принадлежность шкалы к тому или другому типу.

Первое свойство – упорядоченность данных. Для данных измеренных по таким шкалам корректно звучит вопрос: превосходит ли один объект другие объекты? То есть шкала делит объекты на классы по степени выраженности измеряемого свойства.

Второе свойство – интервальность делений шкалы. Для данных измеренных по таким шкалам корректно звучит вопрос: насколько превосходит один объект другие объекты? То есть интервал между числами, отражающими выраженность измеряемого свойства каких-либо двух объектов, сравним с интервалом между числами, соответствующими другим двум объектам.

Третье свойство – наличие естественной нулевой точки. То есть в эмпирическом множестве есть объекты, у которых отсутствует измеряемое свойство.

Все измерительные шкалы можно разделить на две группы: неметрические (качественные) шкалы и метрические (количественные) шкалы. Метрические шкалы являются более мощными, так как они лучше дифференцируют измеряемые объекты.

В группу качественных шкал включены номинативные и порядковые шкалы.

В группу метрических шкал входят интервальная и относительная шкалы.

Выяснение типов используемых шкал необходимо для адекватного выбора методов анализа данных. Основопологающим требованием является независимость выводов от того, какой именно шкалой измерения воспользовался исследователь (среди всех шкал, переходящих друг в друга при допустимых преобразованиях). Выводы должны быть инвариантны относительно группы допустимых преобразований шкалы измерения. Только тогда их можно назвать адекватными, т.е. избавленными от субъективизма исследователя, выбирающего определенную шкалу из множества шкал заданного типа, связанных допустимыми преобразованиями.

Требование инвариантности выводов накладывает ограничения на множество возможных алгоритмов анализа данных.

Группы допустимых преобразований в шкалах измерения задают ограничения на методы обработки данных, измеренных в соответствующих шкалах.

Методы анализа данных должны быть инвариантны относительно этой группы.

Таблица 1. Характеристики шкал

Тип шкалы	Отношения между шкальными значениями	Допустимые преобразования	Возможные статистические методы обработки	Наличие нуля и единиц измерения
Номинальная шкала	отношения неравенства, различия	установление взаимоднозначных соответствий	процент, доля, мода, коэффициент ассоциации, хи-квадрат, коэффициент Чупрова и др.	нет нуля, нет единиц измерения
Порядковая шкала	отношения строго и не строго порядка. Отношения больше, меньше, равно, не равно	возрастающие (убывающие) преобразования	процент, доля, мода, медиана, коэффициент Спирмена, коэффициент Кендалла и др.	нет нуля, нет единиц измерения
Интервальная шкала	отношения равенства, неравенства, больше, меньше, больше на, меньше на. Отношения между интервалами.	линейные преобразования, позволяющие менять единицу измерения и смещать начало отсчета	процент, доля, мода, медиана, среднее арифметическое, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, коэффициент корреляции Пирсона, критерий Стьюдента, критерий Фишера и др.	условный ноль, есть единицы измерения
Шкала отношений	отношения равенства, неравенства, больше, меньше, больше на, меньше на, больше в, меньше в	преобразования подобия, позволяющие менять единицы измерения, но не переносящие начало отсчета	процент, доля, мода, медиана, среднее арифметическое, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, среднее геометрическое, среднее гармоническое, любые коэффициенты корреляции, любые статистические критерии	абсолютный ноль, есть единицы измерения

Основные статистические методы расчетов применяемые для различных типов шкал.

1. Мода (Мо) – это значение признака, который в вариационном ряду обладает наибольшей частотой.

2. Медиана (Ме) – значение признака, делящая совокупность на две равные по частоте совокупности – со значениями признака превосходящими медианы и со значениями признака меньшими медианы.

3. Средние величины.

- а) средняя гармоническая;
- б) средняя геометрическая;
- в) средняя арифметическая;
- г) средняя квадратическая;
- д) средняя кубическая.

4. Показатели вариации.

а. Размах вариации (R) – это разность между наибольшим ($x_{\max}$) и наименьшим ($x_{\min}$) значениями вариантов.

б. Среднее линейное отклонение определяется как средняя арифметическая отклонений индивидуальных значений признака от средней по абсолютной величине.

в. Дисперсия – это средняя арифметическая квадратов отклонений индивидуальных значений признака от средней.

г. Среднее квадратическое отклонение, как и дисперсия, характеризует разброс значений признака в целом в совокупности. Но, в отличие от дисперсии, единицы измерения среднего квадратического отклонения те же, что и у самого признака.

Среднее квадратическое отклонение.

5. Показатели колеблемости

а. Коэффициент осцилляции (Ко) вычисляется как отношение размаха значений признака к средней величине в процентах.

б. Относительное линейное отклонение вычисляется как отношение абсолютного линейного отклонения к средней величине в процентах.

в. Коэффициент вариации (V) вычисляется как отношение среднего квадратического отклонения к средней величине в процентах.

6. Коэффициенты корреляции.

Коэффициент корреляции – это количественная мера силы и направления линейной связи двух переменных; принимает значения в диапазоне от -1 до 1.

Показателем силы нелинейной корреляционной связи между признаками является корреляционное отношение.

Выбор коэффициента линейной корреляции определяется типом шкалы, по которой измерялись переменные (табл. 2).

Таблица 2 – Коэффициенты связи

Тип шкалы		Мера связи
Первый признак	Второй признак	
Интервальная или отношений	Интервальная или отношений	Коэффициент Пирсона r_{xy}
Порядковая, интервальная или отношений	Порядковая, интервальная или отношений	Коэффициент Спирмена ρ_{xy}
Порядковая	Ранговая	Коэффициент τ Кендалла
Номинальная (два деления)	Номинальная (два деления)	Коэффициент ассоциации ϕ
Номинальная (два деления)	Порядковая	Рангово-бисериальный $R_{ГВ}$
Номинальная (два деления)	Интервальная или отношений	Бисериальный $R_{бис}$
Номинальная	Номинальная	Коэффициент Чупрова K

Значимость всех коэффициентов корреляции, не имеющих стандартных таблиц для нахождения критических значений, оценивают с помощью t – критерия Стьюдента эмпирическое значение которого рассчитывается по формуле: $t_{эмп} = |r_{эмп}| * \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{эмп}^2}}$, где $r_{эмп}$ – соответствующий коэффициент корреляции, n – число коррелируемых значений.

Тема 3. Описание неопределенностей с помощью теории нечеткости

Интуитивно нечеткое множество представляет собой совокупность элементов произвольной природы, относительно которых нельзя с полной определенностью утверждать — принадлежит ли тот или иной элемент рассматриваемой совокупности данному множеству или нет. Однако все рассматриваемые элементы должны принадлежать универсальному (базовому) множеству U .

Дадим математическое определение нечеткого множества.

Определение. Нечеткое множество $A = \{ \langle x, \mu_A(x) \rangle \}$ — это множество пар вида $\langle x, \mu_A(x) \rangle$, где $x \in U$, а $\mu_A(x)$ — функция принадлежности, которая ставит в соответствие каждому из элементов $x \in U$ некоторое действительное число из отрезка $[0,1]$.

Из этого определения видно, что универсальное множество U нечеткого множества A определено как область определения функции принадлежности $\mu_A(x)$. При этом, если $\mu_A(x) = 1$ для некоторого $x \in U$, то элемент x определенно принадлежит нечеткому множеству A , а если $\mu_A(x) = 0$, то это означает, что элемент x определенно не принадлежит нечеткому множеству A . Если для всякого $x \in U$ $\mu_A(x) = 1$, то A считают совпадающим с U , а если для всякого $x \in U$ $\mu_A(x) = 0$, то A считают совпадающим с пустым множеством. Поэтому нечеткое пустое и нечеткое универсальное множества можно считать формально совпадающими с их четкими аналогами.

Нечеткие множества бывают:

- 1) конечные и бесконечные,
- 2) нормальные и не являющиеся нормальными,
- 3) выпуклые и не являющиеся выпуклыми.

Нечеткое множество A называется конечным, если его носитель $S(A)$ — конечное множество, в противном случае нечеткое множество A бесконечно. Носителем нечеткого множества A называется четкое множество $S(A) = \{x \in U, \mu_A(x) > 0\}$. Высота нечеткого множества A обозначается $h(A)$ и определяется как $h(A) = \max_{x \in U} \mu_A(x)$.

Нечеткое множество называется нормальным тогда и только тогда, когда $h(A) = 1$. Если нечеткое множество не является нормальным, то его можно нормализовать при помощи преобразования $\mu_{Aп}(x) = \frac{\mu_A(x)}{h(A)}$, где $h(A)$ – высота этого множества.

Нечеткое множество называется выпуклым, если его функция принадлежности $\mu_A(x)$ удовлетворяет неравенству $\mu_A(x) \geq \min\{\mu_A(a), \mu_A(b)\}$ для любых значений $x, a, b \in U$, при которых $a < x < b$ и $a \neq b$.

Нечеткое множество A с конечным носителем $S(A)$ может быть задано перечислением его элементов с отличными от нуля значениями функции принадлежности $\mu_A(x)$, т.е. в виде $A = \{ \langle x_1, \mu_A(x_1) \rangle, \langle x_2, \mu_A(x_2) \rangle, \dots, \langle x_n, \mu_A(x_n) \rangle \}$, где $n = |A|$ – мощность носителя.

Это же множество часто записывают в виде

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n}, \text{ где запись } \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} \text{ означает пару } \langle x_n, \mu_A(x_n) \rangle, \text{ а знаки}$$

суммирования интерпретируются как объединение элементов во множество. Дробь не означает деление, а соответствие. Сама функция принадлежности может быть задана аналитически.

Бесконечное нечеткое множество может быть записано в символьной форме $A = \int_x \frac{\mu_A(x)}{x} dx$ символ интеграла также используется для обозначения объединения элементов множества. Функция принадлежности задана аналитически.

Нечеткое множество A с конечным носителем или бесконечным носителем $S(A)$ удобно задавать графически в форме совокупности отдельных точек на плоскости для соответствующей этому нечеткому множеству функции принадлежности или некоторой линии.

При построении функций принадлежности с каждым нечетким множеством удобно ассоциировать некоторое нечеткое свойство, нечеткий признак или нечеткий атрибут, которые характеризуют элементы универсального множества. Методы построения функций принадлежности делятся на прямые и косвенные.

Прямые методы построения функций принадлежности. В прямых методах эксперты просто задают для каждого x значение функции принадлежности. Как правило, прямые методы построения функций принадлежности используются для таких свойств, которые могут быть измерены при помощи некоторой количественной шкалы. Процесс построения нечеткого множества на основе некоторого известного заранее количественного значения измеримого признака получил название фаззификация (приведение к нечеткости).

Косвенные методы построения функций принадлежности. Косвенные методы применяются в тех случаях, когда отсутствуют очевидные измеримые свойства, которые могут быть использованы для построения нечетких моделей рассматриваемой предметной области. Среди косвенных методов наиболее известен так называемый метод попарных сравнений. Этот метод используется для конечных нечетких множеств и основан на следующем предположении.

Два нечетких множества A и B равны тогда и только тогда, когда $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ для любого $x \in U$.

Нечеткое множество A является нечетким подмножеством нечеткого множества B тогда и только тогда, когда $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ для любого $x \in U$.

α -уровнем нечеткого множества A называется четкое множество $A_\alpha = \{x \in U \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$, где $\alpha \in [0, 1]$.

Для любого $x \in U$ операции объединения, пересечения, абсолютного дополнения, относительного дополнения и симметрической разности могут быть заданы соотношениями:

$$A \cup B = \{x \in U, \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))\};$$

$$A \cap B = \{x \in U, \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))\};$$

$$\bar{A} = \{x \in U, \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)\};$$

$$A \setminus B = A \cap \bar{B};$$

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Концентрация нечеткого множества $A \subseteq U$ обозначается $CON(A)$ и определяется как $\mu_{CON(A)}(x) = (\mu_A(x))^2$ для каждого $x \in U$.

Растяжение нечеткого множества $A \subseteq U$ обозначается $DIL(A)$ и определяется как $\mu_{DIL(A)}(x) = (\mu_A(x))^{0.5}$ для каждого $x \in U$.

Тема 4. Математические методы анализа экспертных оценок

Математические методы анализа экспертных оценок направлены на помощь в рациональной организации процедуры экспертизы, в применении основ теории измерений для количественной оценки выводов экспертов, в обработке полученных результатов.

Результаты экспертизы могут быть представлены как в количественной так и в качественной формах. Это могут быть ранжировки, непосредственно оценки (в баллах) и суждения. Для получения оценок от группы экспертов применяют различные виды опросов: анкетирование и интервьюирование, дискуссии, метод «мозгового штурма» («мозговой атаки»), метод Дельфы.

Полученные в ходе опроса результаты подвергаются математической обработке. Целью обработки является получение обобщенных данных и новой информации, содержащейся в экспертных оценках. В зависимости от целей экспертного оценивания при обработке результатов опроса возникают следующие задачи:

- определение компетентности экспертов и обобщенной оценки объектов,
- построение обобщенной ранжировки объектов,
- определение согласованности мнений экспертов,
- определение зависимостей между ранжировками.

Пусть m экспертов оценивали n объектов.

Результаты оценки представлены в виде величин x_{ij} где i – номер эксперта, j – номер объекта. Эти величины могут быть получены посредством измерения в порядковой или интервальной шкале.

Коэффициент компетентности экспертов и обобщенные оценки объектов для тех случаев, когда проводится непосредственное числовое оценивание альтернатив, можно вычислить по апостериорным данным, т. е. по результатам оценки объектов. При этом компетентность экспертов оценивается по степени согласованности их оценок с групповой оценкой объектов.

Алгоритм вычисления коэффициентов компетентности экспертов и обобщенной оценки объектов сводится к расчетам по следующим рекуррентным формулам:

$$x_i^t = \sum_{j=1}^m x_{ij} k_j^{t-1}, i=1,2,\dots,n,$$

$$\lambda^t = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} x_i^t, t=1,2,\dots,$$

$$k_j^t = \frac{1}{\lambda^t} \sum_{i=1}^n x_{ij} x_i^t, j=1,2,\dots,m.$$

Начинают расчеты с $t=1$. Начальные значения коэффициентов компетентности принимаются одинаковыми и равными $k_j^0 = \frac{1}{m}$. При $t \rightarrow \infty$ векторы x^t и k^t сходятся к собственным векторам матриц B и C , соответствующим максимальным собственным числам этих чисел, где $B = XX^T$, $C = X^T X$, $X = \|x_{ij}\|$. Предельные значения векторов x^t и k^t вычисляются из решения уравнений $Bx^t = \lambda_B x^t$, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ и $Ck^t = \lambda_C k^t$, $\sum_{j=1}^m k_j = 1$, где λ_B , λ_C – максимальные собственные числа матриц B и C .

Собственные векторы матриц можно найти двумя способами.

Первый – классический метод линейной алгебры. Собственным вектором матрицы A называется ненулевой вектор $\vec{x}$ такой, что $A \vec{x} = \lambda \vec{x}$. Число λ называется собственным числом соответствующим собственному вектору $\vec{x}$. Соотношение $A \vec{x} = \lambda \vec{x}$ можно записать в виде $A \vec{x} = \lambda E \vec{x}$ или $A \vec{x} - \lambda E \vec{x} = \vec{0}$, то есть $(A - \lambda E) \vec{x} = \vec{0}$. Последнее соотношение представляет собой матричную запись однородной системы n уравнений с n неизвестными, определитель которой равен $\det(A - \lambda E)$. Для того, чтобы данная система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы $\det(A - \lambda E) = 0$.

Равенство $\det(A - \lambda E) = 0$ представляет собой уравнение с неизвестным λ . Оно называется характеристическим. В развернутой форме это уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Корнями характеристического уравнения являются собственные числа $\lambda = \lambda_i$ матрицы.

Корни могут быть кратными. Подставляя их поочередно в систему $(A - \lambda E) \vec{x} = \vec{0}$ и решая ее после этого, найдем собственные векторы, отвечающие этим собственным числам.

Любая линейная комбинация собственных векторов, соответствующих одному и тому же собственному числу, является также собственным вектором с тем же собственным числом.

Если собственные векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ отвечают попарно различным собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, то система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ линейно независима.

Второй – приближенный метод, когда компоненты собственного вектора вычисляются как средние геометрические элементов строк матрицы, с учетом нормировки:

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{y} = \begin{vmatrix} \sqrt[n]{b_{11}b_{12}\dots b_{1n}} \\ \sqrt[n]{b_{21}b_{22}\dots b_{2n}} \\ \dots \\ \sqrt[n]{b_{n1}b_{n2}\dots b_{nn}} \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{vmatrix} y_1 \\ \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{y_2} \\ \dots \\ \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{y_n} \end{vmatrix}.$$

Если эксперты производят измерение объектов в порядковой шкале методом ранжирования, так что x_{ij} есть ранги. В этом случае требуется построить обобщенную ранжировку по индивидуальным ранжировкам экспертов.

Каждую ранжировку y^j можно представить в виде матрицы парных сравнений, элементы которой определим следующим образом: $y_{ik}^j = \begin{cases} 1, x_{ij} \leq x_{kj}, \\ 0, x_{ij} > x_{kj}. \end{cases}$ Здесь x_{ij} , x_{kj} – ранги, присваиваемые j -м экспертом i -му и k -му объектам.

По матрицам парных сравнений экспертов вычисляют метрику $D_{jl} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |y_{ik}^j - y_{ik}^l|$, $j, l = 1, 2, \dots, m$. С ее помощью определяют обобщенную ранжировку, как такую матрицу парных сравнений, которая наилучшим образом согласуется с матрицами парных сравнений экспертов. За эталон можно взять медиану. $\|y_{ik}^*\| = \arg \min_{\|y_{ik}^*\|} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |y_{ik}^j - y_{ik}^l|$. Обобщенная

ранжировка для введенной метрики определяется по следующему правилу: $y_{ik}^* = \begin{cases} 1, a_{ik} \leq \frac{m}{2}, \\ 0, a_{ik} > \frac{m}{2}. \end{cases}$

Здесь $a_{ik} = \sum_{j=1}^m y_{ik}^j$ – количество голосов, поданных экспертами за предпочтение i -го объекта k -му объекту.

При построении обобщенной ранжировки можно учесть компетентность экспертов:

$$\|y_{ik}^*\| = \arg \min_{\|y_{ik}^*\|} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n k_j |y_{ik}^j - y_{ik}^l|. \text{ Тогда } y_{ik}^* = \begin{cases} 1, b_{ik} \leq \frac{1}{2}, \\ 0, b_{ik} > \frac{1}{2}. \end{cases} \text{ Здесь } b_{ik} = \sum_{j=1}^m k_j y_{ik}^j \text{ – вероятность}$$

того, что i -й объекта k -му объекту.

Если мнения экспертов в отношении некоторого вопроса расходятся или, напротив, совпадают, то требуется количественно оценить степень согласия экспертов. Оценка согласованности мнений экспертов основывается на использовании понятия компактности. Оценка каждого эксперта представляется как точка в некотором пространстве, в котором введено понятие метрики. Если оценки экспертов находятся близко друг от друга (значение метрики невелико), то согласованность суждений экспертов высока. В противном случае, когда метрика принимает большие значения, согласованность между экспертами отсутствует или незначительная. В качестве метрики могут выступать как расстояние (евклидово, Чебышева и др.), так и коэффициенты корреляции.

При использовании количественных шкал измерения и оценке объекта всего по одному критерию мнения группы экспертов можно представить как точки числовой оси. Эти значения можно рассматривать как реализации случайной величины. Тогда центр группировки точек можно рассматривать как математическое ожидание, а разброс количественно оценивается дисперсией случайной величины.

При измерении объектов в порядковой шкале согласованность оценок экспертов в виде ранжировок или парных сравнений объектов также основывается на понятии компактности. Для этого обычно используется мера согласованности мнений экспертов – дисперсионный коэффициент конкордации (коэффициент согласия). Коэффициент конкордации W принимает значения от 0 до 1: $W=1$ – полное совпадение ранжировок, $W=0$ – полное расхождение ранжировок. Коэффициент конкордации вычисляется по формуле: $W = \frac{12S}{m^2(n^3 - n)}$, где

m – количество экспертов, n – количество объектов, S – сумма квадратов отклонений рангов выставленных всеми экспертами по каждому объекту. При этом средний ранг вычисляется по каждому объекту отдельно. В случае одинаковых рангов, знаменатель коэффициента конкордации уменьшается на величину $m \sum_{j=1}^m T_j$, где $T_j = \sum_{k=1}^{H_j} (h_k^3 - h_k)$ – показатель связанных рангов в j -ой ранжировке, H_j – число групп равных рангов в j -ой ранжировке, h_k – число равных рангов в k -ой группе связанных рангов при ранжировке j -ым экспертом.

Для выявления взаимосвязи между ранжировками двух экспертов используют коэффициент корреляции рангов Спирмена ρ . Как и для коэффициента конкордации, в случае наличия связанных рангов, вводится поправка и формула для вычисления коэффициента корреляции примет вид:

$$\rho' = \frac{\rho - T_v - T_\mu}{\sqrt{(1 - 2T_v)(1 - 2T_\mu)}}, \quad \text{где } T_v = \frac{1}{2(n^3 - n)} \sum_{k=1}^{H_v} (h_k^3 - h_k),$$

$$T_\mu = \frac{1}{2(n^3 - n)} \sum_{k=1}^{H_\mu} (h_k^3 - h_k) \text{ – показатели связанных рангов в } v\text{-ой и } \mu\text{-ой ранжировках.}$$

Тема 5. Элементы оптимального управления

Практически все задачи оптимального управления сложными техническими системами связаны с необходимостью поиска оптимальных условий их функционирования. В тех случаях, когда применяются современные методы и средства вычислительной техники для решения задач оптимизации необходима их формализация, т.е. формулировка задачи стан-

дартным образом и её решение на основе чёткого однозначного алгоритма. Причём однозначность в данном случае не означает, что отсутствуют варианты решения. Наоборот, проводится сравнение многих возможных вариантов, но алгоритм точно определяет, на каком этапе и как производится такое сравнение.

При формализации задачи оптимизации разделяются на три этапа:

- формулировка задачи;
- нахождение оптимальных условий функционирования системы на основе алгоритма;
- реализация оптимальных условий на практике.

Формулировка задачи оптимизации включает:

- выбор критерия оптимальности;
- установление ограничений;
- выбор оптимизирующих факторов;
- запись целевой функции.

Критерий оптимальности – это главный признак, по которому судят о том, насколько хорошо функционирует данная система, т.е. насколько хорошо решена задача оптимизации. Критерий оптимальности является одним из выходов системы. Требования к критерию оптимальности:

- он должен быть единственным;
- должен выражаться числом;
- его величина должна изменяться монотонно при улучшении качества функционирования системы.

Ограничения – это условия, которые необходимо соблюдать при работе технической системы независимо от того, как их соблюдение повлияет на величину критерия оптимальности. Чаще всего ограничения возникают по следующим причинам: по количеству и качеству сырья и продукции; по условиям технологии; по экономическим и конъюнктурным условиям; по соображениям охраны труда и окружающей среды и т.д.

Выделяют ограничения типа равенств и типа неравенств.

Различают ограничения 1-го рода и 2-го рода. В ограничениях 1-го рода в качестве параметров X и U фигурируют входные параметры. В ограничениях 2-го рода – это различные функции входов.

Оптимизирующие факторы – это те из входов системы, которые в процессе оптимизации относят к управляющим, т.е. это те воздействия, которые применяют для оптимизации системы.

На стадии проектирования, когда осуществляется так называемое оптимальное проектирование, к числу оптимизирующих целесообразно отнести как можно большее число факторов.

После запуска производства осуществляется оптимальное управление. При этом число оптимизирующих воздействий значительно меньше. Чем больше управляющих факторов, тем сложнее математическая модель системы управления и сама система управления.

Целевая функция – это то же, что критерий оптимальности, но этот критерий рассматривается как функция входных факторов: $F(X_1 X_2 X_3 \dots X_m; U_1 U_2 U_3 \dots U_r)$.

Чем больше (или меньше) F , тем лучше. Поэтому оптимум – это экстремум (максимум или минимум) целевой функции. Те значения факторов, при которых достигается оптимум, называются оптимальными значениями.

Таким образом, математически задача оптимизации формулируется как задача поиска экстремума, т.е. тех значений факторов, при которых целевая функция имеет экстремум. При этом в точке экстремума должны соблюдаться все ограничения, поэтому во многих случаях оптимум приходится искать на краю области допустимых значений факторов, за пределы которых нельзя выйти вследствие наличия ограничений. В зависимости от размерности вектор-функции F различают однокритериальные и многокритериальные задачи.

В зависимости от того, лежит решение задачи внутри области допустимых значений факторов или на её границе, различают безусловные и условные задачи оптимизации.

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2,$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2,$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m,$$

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_2 \geq 0.$$

Еще раз отметим, что задача может состоять как в максимизации, так и в минимизации целевой функции. В дальнейшем будем рассматривать задачу максимизации, так как все утверждения легко переносятся на случай минимизации целевой функции с учетом того, что $\min z = \max(-z)$.

Каждое из ограничений задает на плоскости Ox_1x_2 некоторую полуплоскость, которая, как известно, является выпуклым множеством. Отсюда следует, что область допустимых решений задачи — выпуклое множество (как пересечение выпуклых множеств). В практически важных случаях область допустимых решений чаще всего представляет собой либо выпуклый многоугольник, либо выпуклую многоугольную область.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию целевой функции. Выбирая произвольные значения целевой функции z_0 , такие, что $z_0 = c_1x_1 + c_2x_2$ получаем семейство параллельных прямых, называемых линиями уровня целевой функции. Задача состоит в нахождении максимального значения целевой функции для точек (x_1, x_2) , образующих область допустимых решений, т.е. в нахождении предельного положения линии уровня целевой функции, соответствующего ее максимальному значению. Вектор градиента целевой функции $\text{grad } z = \mathbf{c} = (c_1; c_2)$ перпендикулярен к прямым, образующим линии уровня целевой функции и указывает направление наискорейшего возрастания целевой функции.

Из геометрической интерпретации элементов задачи линейного программирования вытекает следующий порядок ее графического решения. Графический метод решения основан на теореме об оптимальных экстремальных точках, которая говорит о том, что если в задаче линейного программирования существует оптимальное решение, то существует и оптимальная экстремальная (угловая) точка. Под экстремальной точкой здесь понимается угловая точка (вершина) множества допустимых решений задачи ЛП.

С учетом системы ограничений на плоскости Ox_1x_2 построить множество (пространство) допустимых решений, т.е. точек, удовлетворяющих всем ограничениям модели; выбрать произвольное значение z_0 (например $z_0 = 0$) и построить соответствующую линию уровня целевой функции $c_1x_1 + c_2x_2 = z_0$; построить вектор градиента целевой функции, т.е. вектор $\mathbf{c} = (c_1; c_2)$, указывающий направление наискорейшего возрастания целевой функции; в задаче на максимум перемещать линию уровня целевой функции параллельно в направлении вектора градиента $\mathbf{c}$ до тех пор, пока она имеет общие точки с пространством допустимых решений. В задаче на минимум линию уровня перемещаем в направлении, противоположном вектору $\mathbf{c}$. Крайняя (угловая) точка, лежащая на пересечении линии уровня и пространства допустимых решений и будет оптимальным решением; определить координаты крайней (угловой) точки, которые и образуют оптимальный план $\mathbf{x}^* = (x_1^*; x_2^*)$; вычислить оптимально значение целевой функции $z^* = z(\mathbf{x}^*)$ в найденной точке, соответствующей оптимальному решению.

Нелинейное программирование — это математический аппарат для поиска экстремума нелинейных функций при наличии ограничений.

В общем виде задача нелинейного программирования (НП) записывается так:

найти $\min f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

при условиях

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0;$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0;$$

.....

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0;$$

где $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и/или ограничения $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - нелинейные функции переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Условие $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, можно заменить на два: $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$ и $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$.

В отличие от линейного программирования для нелинейного программирования отсутствуют универсальные методы решения типа симплекс-метода. Это связано с тем, что допустимое множество решений $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определяемое условиями, в общем случае не является выпуклым, а, кроме того, даже в случае выпуклости $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ множество его крайних точек не будет конечным.

В связи с указанными обстоятельствами методы нелинейного программирования разрабатываются лишь под специальные классы задач.

Основным среди точных методов решения задач нелинейного программирования данного типа является метод множителей Лагранжа.

Если x^* - точка локального минимума дифференцируемой функции $f(x)$, то при ограничениях $g_i(x)=0$, удовлетворяющих некоторому условию регулярности, для функции Лагранжа

$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$ существует вектор множителей Лагранжа $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ такой, что

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, n, \quad \frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, m.$$

Метод множителей Лагранжа позволяет отыскивать максимум или минимум функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при ограничениях - равенствах, т.е. все ограничения являются равенствами. Основная идея метода заключается в переходе от задачи на условный экстремум к задаче отыскания безусловного экстремума некоторой специально построенной функции Лагранжа.

Пусть требуется найти

$$\min f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

при ограничениях

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0;$$

.....

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0;$$

Составим функцию Лагранжа следующего вида:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Для того чтобы вектор $X_0 = \{x_j^0\}, j = 1, n$ являлся решением задачи, необходимо существование такого вектора $\Lambda_0 = \{\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0\}$, чтобы пара векторов (X_0, Λ_0) удовлетворяла системе уравнений:

$$\frac{\partial L(X_0, \Lambda_0)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, n$$

$$\frac{\partial L(X_0, \Lambda_0)}{\partial \lambda_i} = g_i(X_0) = 0, \quad i = 1, m.$$

Метод множителей Лагранжа состоит из следующих шагов:

Шаг 1. Составляем функцию Лагранжа вида (7.8).

Шаг 2. Составляем систему нелинейных уравнений (7.9) - (7.10).

Шаг 3. Находим решения системы нелинейных уравнений (X_s^*, Λ_s^*) и исследуем функцию $f(X)$ в окрестности точек X_s^* на максимум (минимум).

Тема 6. Принятие решений в условиях неопределенности

Теория игр – теория математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликта интересов участников игры и неопределенности внешних условий. Конфликтная ситуация - ситуация в практической деятельности людей, когда два или несколько участников, имея различные цели и средства их достижения, пытаются достичь результата в условиях, когда никто из них полностью не влияет на ход событий. Участник конфликта принимает решения не на основании объективных обстоятельств, а на основании своих субъективных представлений о них, т.е. имеет место неполное представление об обстановке к моменту принятия решения.

"Игра (в математике) - это идеализированная математическая модель коллективного поведения: несколько игроков влияют на исход игры, причем их интересы различны". Регулярное действие, выполняемое игроком во время игры, называется ходом. Совокупность ходов игрока, совершаемых им для достижения цели игры, называется стратегией. Пусть X – множество стратегий игрока 1, Y – множество стратегий игрока 2. Функция F , оценивающая полезность для игрока 1 выбора игроками 1 и 2 соответственно стратегий x и y , называется функцией выигрыша игрока 1. Число $F(x,y)$ – называется выигрышем игрока 1.

Классификацию игр можно проводить: по количеству игроков, количеству стратегий, характеру взаимодействия игроков, характеру выигрыша, количеству ходов, состоянию информации и т.д. В зависимости от количества игроков различают игры двух и n игроков. По количеству стратегий игры делятся на конечные и бесконечные. По характеру взаимодействия игры делятся на бескоалиционные: игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции; коалиционные (кооперативные) – могут вступать в коалиции. По характеру выигрышей игры делятся на: игры с нулевой суммой (общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками; сумма выигрышей всех игроков равна нулю) и игры с ненулевой суммой. По виду функций выигрыша игры делятся на: матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые и др.

В общем виде матричная игра может быть записана следующей платёжной матрицей:

	B1	B2	...	Bn
A1	A11	A12	...	A1n
A2	A21	A22	...	A2n
...	...	...	...	...
Am	am1	am2	...	amn

где A_i – названия стратегий игрока 1, B_j – названия стратегий игрока 2, a_{ij} – значения выигрышей игрока 1 при выборе им i – й стратегии, а игроком 2 – j – й стратегии. Поскольку данная игра является игрой с нулевой суммой, значение выигрыша для игрока 2 является величиной, противоположенной по знаку значению выигрыша игрока 1.

Каждый из игроков стремится максимизировать свой выигрыш с учётом поведения противодействующего ему игрока. Поэтому для игрока 1 необходимо определить минимальные значения выигрышей в каждой из стратегий, а затем найти максимум из этих значений, то есть определить величину $V_n = \max_i \min_j a_{ij}$, или найти минимальные значения по каждой из строк платёжной матрицы, а затем определить максимальное из этих значений. Величина V_n называется максимином матрицы или нижней ценой игры.

Величина выигрыша игрока 1 равна, по определению матричной игры, величине выигрыша игрока 2. Поэтому для игрока 2 необходимо определить значение $V_b = \min_j \max_i a_{ij}$, или найти максимальные значения по каждому из столбцов платёжной матрицы, а затем определить минимальное из этих значений. Величина V_b называется минимаксом матрицы или верхней ценой игры.

В случае, если значения V_n и V_b не совпадают, при сохранении правил игры (коэффициентов a_{ij}) в длительной перспективе, выбор стратегий каждым из игроков оказывается неустойчивым. Устойчивость он приобретает лишь при равенстве $V_n = V_b = V$. В этом случае говорят, что игра имеет решение в чистых стратегиях, а стратегии, в которых достигается V – оптимальными чистыми стратегиями. Величина V называется чистой ценой игры.

Порядок платёжной матрицы (количество строк и столбцов) может быть уменьшен за счёт исключения доминируемых и дублирующих стратегий. Стратегия K^* называется доминируемой стратегией K^{**} , если при любом варианте поведения противодействующего игрока выполняется соотношение $A_{K^*} < A_{K^{**}}$, где A_{K^*} и $A_{K^{**}}$ - значения выигрышей при выборе игроком, соответственно, стратегий K^* и K^{**} . В случае, если выполняется соотношение $A_{K^*} = A_{K^{**}}$, стратегия K^* называется дублирующей по отношению к стратегии K^{**} . Множество недоминируемых стратегий, полученных после уменьшения размерности платёжной матрицы, называется ещё множеством Парето

Смешанной стратегией игрока называется полный набор чистых стратегий, применённых в соответствии с установленным распределением вероятностей. Матричная игра, решаемая с использованием смешанных стратегий, называется игрой со смешанным расширением. Стратегии, применённые с вероятностью, отличной от нуля, называются активными стратегиями. Доказано, что для всех игр со смешанным расширением существует оптимальная смешанная стратегия, значение выигрыша при выборе которой находится в интервале между нижней и верхней ценой игры: $V_n \leq V \leq V_v$. При этом условии величина V называется ценой игры. Кроме того, доказано, что, если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остаётся неизменным и равным цене игры V , независимо от того, каких стратегий придерживается другой игрок, если только он не выходит за пределы своих активных стратегий. Поэтому, для достижения наибольшего гарантированного выигрыша второму игроку также необходимо придерживаться своей оптимальной смешанной стратегии.

Рассмотрим матричную игру с матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, не имеющей седловой точки.

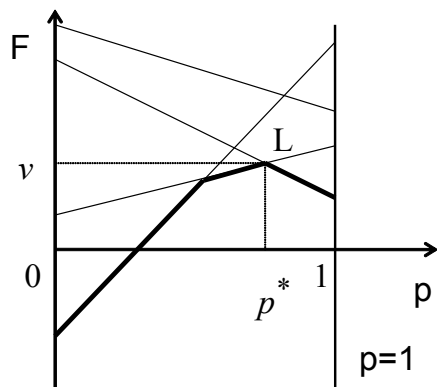
Произвольную смешанную стратегию x первого игрока представим в виде $(x_1, 1 - x_1)$, где x_1 — вероятность выбора им своей первой чистой стратегии, $x_1 \in (0, 1)$. Аналогично, произвольная смешанная стратегия второго игрока имеет вид $y = (y_1, 1 - y_1)$, $y_1 \in (0, 1)$. Задача имеет

решение: $x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$, $y_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$; цена игры при этом равна

$$v(A) = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{|A|}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

Рассмотрим сначала игру $2 \times n$ с платёжной матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$. Будем предполагать, что седловой точки матрица A не имеет. Произвольную смешанную стратегию игрока 1 представим в виде $x = (p, 1 - p)$, где $p \in [0, 1]$. Если игрок 1 применяет смешанную стратегию x , а игрок 2 — свою j -ю чистую стратегию, то выигрыш игрока 1, очевидно, равен

$F(x, j) = F(p, j) = a_{1j}p + a_{2j}(1 - p)$, $j = 1, 2, \dots, n$, то есть линейно зависит от p . Исходя из этого соотношения, с помощью простых геометрических построений легко найти решение игры. Строим графики функций $F(p, j)$ для $p \in [0, 1]$. Получим n прямых. Эти прямые удобно строить по двум точкам: $(0, a_{2j})$ и $(1, a_{1j})$. Первая из них находится



на оси ординат F , вторая — на оси $p = 1$; строим график функции $F = \min_j F(p, j) = \min_j (a_{1j}p + a_{2j}(1 - p))$ — нижнюю огибающую всех прямых, соответствующих стратегиям игрока 2. Значения этой функции, соответствуют выигрышу игрока 1, когда

он применяет стратегию $(p, 1-p)$, а противник действует наихудшим для него образом. На рисунке нижняя огибающая выделена жирной линией; наивысшая точка нижней огибающей соответствует тому значению p , при котором достигается

$$\max_p F = \max_p \min_j F(p, j) = \max_p \min_j (a_{1j}p + a_{2j}(1-p)).$$

Поэтому ордината точки L является значением игры, а ее абсцисса – первой компонентой оптимальной смешанной стратегии игрока 1: $L(p^*, v)$. Если же таких высших точек будет более одной, т.е. огибающая будет иметь наивысший огибающий участок, то у игрока 1 существует бесконечное множество оптимальных смешанных стратегий, первые компоненты которых соответствуют абсциссам точек этого горизонтального участка. Описанное построение позволяет исходную игру $2 \times n$ свести к игре 2×2 . Для перехода от исходной игры $m \times 2$ к игре 2×2 используется точка нижняя точка верхней огибающей семейства прямых $F(i, q)$. Анализ этой игры выполняется аналогично предыдущему случаю. Отличие состоит лишь в том, что теперь, чтобы учесть интересы игрока 2, нужно исходить из соотношения: $v = \min_q \max_i F(i, q)$, где q – первая компонента смешанной стратегии игрока 2, а $F(i, q) = a_{i1}q + a_{i2}(1-q)$.

В трехмерном случае смешанные стратегии игроков задаются следующим образом: $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $0 \leq x_i \leq 1$; $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $y_1 + y_2 + y_3 = 1$, $0 \leq y_j \leq 1$.

Обозначим: $\varphi_j(\bar{x}) = \sum_{i=1}^3 a_{ij}x_i$, $\psi_i(\bar{y}) = \sum_{j=1}^3 a_{ij}y_j$, $i=1,2,3$; $j=1,2,3$. Составляется система уравне-

ний
$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \varphi_1 = \varphi_3 \\ \varphi_2 = \varphi_3 \end{cases}$$
. Каждое из уравнений данной системы определяет плоскость в трехмерном

пространстве. Ищутся точки пересечения этих трех плоскостей между собой в плоскости треугольника решений ($x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $0 \leq x_i \leq 1$), точки пересечения каждой из трех плоскостей со сторонами треугольника, а также вершины треугольника. Оптимальная стратегия $\bar{x}_0$ первого игрока определяется на этом множестве так, чтобы выполнялось $\min_j \varphi_j(\bar{x}_0) = v$.

Такая стратегия может быть не единственна. Для поиска оптимальных стратегий второго иг-

рока составляется система
$$\begin{cases} \psi_1 = \psi_2 \\ \psi_1 = \psi_3 \\ \psi_2 = \psi_3 \end{cases}$$
. Далее процесс решения аналогичен. Оптимальная стра-

тегия $\bar{y}_0$ второго игрока определяется на этом множестве так, чтобы выполнялось $v = \max_i \psi(\bar{y}_0)$.

Для матричной игры $p \times m$ и $V_n \neq V_b$, определим такие значения вероятностей выбора стратегий для игрока 1 ($p_1, p_2, \dots, p_m$) и для игрока 2 ($q_1, q_2, \dots, q_n$), при которых игроки достигли бы своего максимально гарантированного выигрыша.

Если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то, по условию задачи, его выигрыш не может быть меньше цены игры V . Поэтому данная задача может быть представлена для игроков в виде следующих систем линейных неравенств:

Для первого игрока:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{m1}p_m \geq V \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{m2}p_m \geq V \\ \dots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{mn}p_m \geq V \\ p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1 \\ p_1 \geq 0 : p_2 \geq 0 \dots p_m \geq 0 \end{cases}$$

Для второго игрока:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1n}q_n \leq V \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2n}q_n \leq V \\ \dots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \dots + a_{mn}q_n \leq V \\ q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1 \\ q_1 \geq 0 : q_2 \geq 0 \dots q_n \geq 0 \end{cases}$$

Чтобы определить значение V , разделим обе части каждого из уравнений на V . Величину p_i/V обозначим через x_i , а q_j/V – через y_j .

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq 1 \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq 1 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1/v \\ x_1 \geq 0 : x_2 \geq 0 \dots x_m \geq 0 \end{cases}$$

Для игрока 1 получим следующую систему неравенств, из которой найдём значение $1/v$:

Для игрока 1 необходимо найти максимальную цену игры (V). Следовательно, значение $1/V$ должно стремиться к минимуму.

Целевая функция задачи будет иметь следующий вид:

$$\min Z = \min 1/V = \min (x_1 + x_2 + \dots + x_m)$$

Для игрока 2 получим следующую систему неравенств, из которой найдём значение $1/v$:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \leq 1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \leq 1 \\ \dots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \leq 1 \\ y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1/V \\ y_1 \geq 0 : y_2 \geq 0 \dots y_n \geq 0 \end{cases}$$

Для игрока 2 необходимо найти минимальную цену игры (V). Следовательно, значение $1/V$ должно стремиться к максимуму. Целевая функция задачи будет иметь следующий вид: $\max Z = \max 1/V = \max (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$.

Все переменные в данных системах линейных неравенств должны быть неотрицательными: $x_i = p_i/V$, а $y_j = q_j/V$. Значения p_i и q_j не могут быть отрицательными, так как являются значениями вероятностей выбора стратегий игроков. Поэтому необходимо, чтобы значение цены игры V не было отрицательным. Цена игры вычисляется на основе коэффициентов выигрышей платёжной матрицы. Поэтому, для того, чтобы гарантировать условие неотрица-

тельности для всех переменных, необходимо, чтобы все коэффициенты матрицы были неотрицательными. Этого можно добиться, прибавив перед началом решения задачи к каждому коэффициенту матрицы число K , соответствующее модулю наименьшего отрицательного коэффициента матрицы. Тогда в ходе решения задачи будет определена не цена игры, а величина $V^* = V + K$.

Для решения задач линейного программирования используется симплекс-метод. В результате решения определяются значения целевых функций (для обоих игроков эти значения совпадают), а также значения переменных x_i и y_j . Величина V^* определяется по формуле: $V^* = 1/z$. Значения вероятностей выбора стратегий определяются: для игрока 1: $P_i = x_i \cdot V^*$; для игрока 2: $q_j = y_j \cdot V^*$. Для определения цены игры V из величины V^* необходимо вычесть число K .

Итеративный метод применяется тогда, когда неприменим графический метод и когда практически неприменимы алгебраический и матричный методы. Этот метод дает приближенное значение цены игры, причем истинное значение можно получить с любой нужной степенью точности. Этот метод недостаточен для нахождения оптимальных стратегий, но он позволяет отслеживать динамику пошаговой игры и определить цену игры для каждого из игроков на каждом шаге.

Принятие управленческих решений предполагает наличие ситуаций выбора наиболее выгодного варианта поведения из нескольких имеющихся вариантов в условиях неопределённости. Такие задачи могут быть описаны матричными играми особого типа, в которых игрок взаимодействует не со вторым игроком, а с окружающей средой. Объективно окружающая среда не заинтересована в проигрыше игрока. В процессе принятия решения о выборе варианта поведения игрок имеет информацию о том, что окружающая среда может принять одно из нескольких возможных состояний и сталкивается с неопределённостью относительно того конкретного состояния, которое примет окружающая среда в данный момент времени.

Матричная игра, в которой игрок взаимодействует с окружающей средой, не заинтересованной в его проигрыше, и решает задачу определения наиболее выгодного варианта поведения с учётом неопределённости состояния окружающей среды, называется статистической игрой или «игрой с природой». Игрок в этой игре называется лицом, принимающим решение (ЛПР).

В общем виде платёжная матрица статистической игры:

	S1	S2	...	Sn
A1	A11	A12	...	A1n
A2	A21	A22	...	A2n
...	...	...	...	...
An	am1	am2	...	amn

В данной игре строки матрицы (A_i) - стратегии ЛПР, а столбцы матрицы (S_j) – состояния окружающей среды.

При рассмотрении задачи игры с природой целесообразно не только оценить выигрыш при той или иной игровой ситуации, но и определить разность между максимально возможным выигрышем при данном состоянии природы и выигрышем, который будет получен при применении стратегии A_i в тех же условиях. Эта разность в теории игр называется риском.

Максимальный выигрыш в j -м столбце обозначается через β_j , ($\beta_j = \max_i a_{ij}$).

Риск игрока r_{ij} при применении им стратегии A_i в условиях S_j равен $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, ($r_{ij} \geq 0$). Матрица рисков $R = (r_{ij})_{m \times n}$ часто позволяет лучше охарактеризовать неопределённую ситуацию, чем матрица выигрышей.

Иногда неопределённость ситуации удается в некоторой степени ослабить с помощью нахождения вероятностей состояний на базе данных статистических наблюдений.

Пусть вероятности состояний природы известны $P(S_1) = q_1; P(S_2) = q_2; \dots; P(S_n) = q_n$.

Если α_i - среднее значение (математическое ожидание) выигрыша, которое игрок I стремится максимизировать, то: $\alpha_i = a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \dots + a_{in}q_n$, $i = \overline{1, m}$

В качестве оптимальной стратегии выбирается та из стратегий A_i , $i = \overline{1, m}$, которая соответствует максимальному среднему значению выигрыша: $\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij}q_j \right\}$.

Оптимальную стратегию при известных вероятностях состояний природы можно найти, используя показатель риска. Для этого необходимо определить среднее значение риска:

$$r_i = r_{i1}q_1 + r_{i2}q_2 + \dots + r_{in}q_n, \quad i = \overline{1, m}$$

В качестве оптимальной стратегии в данном случае выбирается та, которая обеспечивает минимальное среднее значение риска $r = \min_i r_i = \min_i \left\{ \sum_{j=1}^n r_{ij}q_j \right\}$.

Легко показать, что применение критериев среднего выигрыша и среднего риска для одних и тех же исходных данных приводит к одному и тому же результату, т.е. оптимальная стратегия, полученная при применении критерия оптимизации среднего выигрыша, совпадает с оптимальной стратегией, полученной по критерию минимизации среднего риска.

Чрезвычайно существенно то обстоятельство, что в случае известных вероятностей состояний природы $q_1, q_2, \dots, q_n$, игроку I нет смысла пользоваться смешанными стратегиями.

Критерий Лапласа: $q_1 = q_2 = \dots = q_n = \frac{1}{n}$, который применяется тогда, когда ни одно состояние природы нельзя предпочесть другому; убывающей арифметической прогрессии - в том случае, если можно расположить состояния природы в порядке убывания их правдоподобности (вероятности свершения): $q_1 : q_2 : \dots : q_n$, где: $q_j = \frac{2(n-j+1)}{n(n+1)}$, $j = 1, 2, \dots, n$

Критерий Вальда. Данный критерий базируется на принципе наибольшей осторожности и использует выбор наилучшей из наихудших стратегий (в связи с чем его относят к группе критериев крайнего пессимизма).

Если в исходной матрице (по условию задачи) результат представляет собой потери ЛПР, то при выборе оптимальной стратегии используется минимаксный критерий. В этом случае для определения оптимальной стратегии необходимо в каждой строке матрицы результатов найти наибольший элемент, а затем выбирается действие (строка), которому будет соответствовать наименьший элемент из этих наибольших элементов.

Наоборот, если в исходной матрице по условию задачи результат представляет выигрыш, то при выборе оптимальной стратегии используется максиминный критерий. Иначе говоря, в качестве оптимальной рекомендуется выбирать ту стратегию, которая гарантирует в наихудших условиях максимальный выигрыш, $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$

Критерий Сэвиджа (минимаксного риска). Данный критерий использует матрицу рисков. При использовании критерия Сэвиджа рекомендуется выбирать ту стратегию, при которой в наихудших условиях величина риска принимает наименьшее значение: $r = \min_i \max_j r_{ij}$.

Критерий Гурвица устанавливает баланс между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма путем введения некоторых весовых коэффициентов λ и $1 - \lambda$, где $0 \leq \lambda \leq 1$. При этом предполагается, что природа может находиться в самом невыгодном для ЛПР состоянии с вероятностью λ и в самом выгодном - с вероятностью $1 - \lambda$.

Этот критерий называют еще принципом пессимизма - оптимизма. Он может быть выражен в виде соотношения: $S = \max_i \left[\lambda \min_j a_{ij} + (1 - \lambda) \max_j a_{ij} \right]$, где $0 \leq \lambda \leq 1$.

Очевидно, что при $\lambda = 1$ критерий Гурвица превращается в пессимистический критерий Вальда, а при $\lambda = 0$ - в критерий крайнего оптимизма. Значение λ выбирается в зависимости от склонности ЛПР к пессимизму или оптимизму, а также на основании опыта, здравого смысла и т.д.

Следует отметить, что выбор критерия принятия решений в условиях неопределенности является наиболее сложным и ответственным этапом в процессе принятия решения. При этом не существует каких-либо общих советов или рекомендаций. Выбор критерия должен производиться ЛПР, с учетом конкретной специфики решаемой задачи и в соответствии с его целями, на основе прошлого опыта и интуиции.

В частности, в случае, когда даже минимальный риск недопустим, следует применять критерий Вальда. Если, наоборот, определенный риск вполне приемлем и ЛПР намерено вложить в некоторое предприятие столько средств, чтобы впоследствии не сожалеть о слишком малой величине вложений, то выбирают критерий Сэвиджа.

2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Практические занятия сопровождают лекционный курс дисциплины. Теоретические знания, представления, образы должны быть прожиты. Афоризм одного из известных физиков М. Лауэ: «знание есть то, что остается, когда все выученное уже забыто», характеризует важную роль практики.

Практические занятия должны проводиться в логичном единстве с теоретическим курсом, подкрепляя и уточняя понятийный аппарат.

Каждый практическое занятие начинается с теоретического опроса необходимого материала и проверки домашнего задания. Далее на конкретных примерах рассматриваются пути и способы применения тех математических методов, которые не требуют использования электронных вычислительных машин. При этом необходимо активизировать самостоятельную работу студентов. Задания и методические указания к ним выдаются студентам, каждый из которых выбирает оптимальный для себя темп работы. Преподавателю отводится роль консультанта и помощника. Задания, вызвавшие трудности у большинства студентов, разбираются на доске.

В конце занятия выдается домашнее задание, состоящее из теоретических вопросов, понимание которых необходимо для следующего занятия и практических заданий по пройденному материалу.

При выполнении домашнего задания решать задачи удобнее поэтапно, в той последовательности, в какой эти задания сформулированы. В этом случае при возникновении трудностей будет легче обратиться к анализу тех тем, которые изложены в лекции и задач, разобранных на практическом занятии.

После выполнения практической части задания следует найти ответы на теоретические вопросы, заданные преподавателем и таким образом подготовиться к осознанному восприятию следующего материала.

Активная, регулярная самостоятельная работа над домашним заданием – путь к успешному усвоению дисциплины.

Тема 1.

1. Даны результаты эксперимента.

Требуется:

1) в предположении, что между x и y существует линейная зависимость, определить ее эмпирическое уравнение;

2) в предположении, что между x и y существует квадратичная зависимость, определить ее эмпирическое уравнение;

3) найти сумму квадратов отклонений для найденных зависимостей сравнить качество приближений.

4) оценить адекватность построенной модели.

X	7,5	7	8,3	8,4	6,9	7,7	8,1	7,6	7,9	8,2
Y	26	27	22	21	27	25	21	21	23	22

2. Подобрать нелинейную зависимость между переменными. Провести линеаризацию.

Найти параметры линейной зависимости. Выполнить обратные преобразования.

Y	23	18	27	29	43	23	55	47	35	38	14	51	20	39	35
X	37	33	15	36	26	24	15	33	44	34	63	8	44	43	31

3. Как известно, нагрузка потребителей электроэнергетических систем носит не только случайный характер, но обладает свойством цикличности. Например, нагрузка может меняться в течение суток (днем увеличиваться, ночью уменьшаться), в течение недели (в выходные значительное снижение), в течение года (зимой выше, летом ниже) и т.п. Статическая устойчивость электроэнергетических систем может оцениваться на основании моделирования зависимости активной P и реактивной Q мощности от напряжения U . Имеются экс-

периментальные данные измерения активной (P) и реактивной (Q) мощности и напряжения (U) (в относительных единицах) утром 14 марта 2016 г.

	утро				
P	0,68	0,82	0,99	1,22	1,51
Q	0,56	0,51	1,09	1,52	2,36
U	0,8	0,9	1	1,1	1,2

Постройте и оцените модели зависимости активной и реактивной мощностей от напряжения.

4. Вывести формулы вычисления коэффициентов линейной регрессии $Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2$ из нормальной системы уравнений метода наименьших квадратов.

5. Построить матрицу-план двухфакторного эксперимента. Проверить ее свойства.

6. При замещении одной энергетической системы другой требуется оценить зависимость предельной и активной мощности первой системы от факторов:

Фактор	Наименование фактора	Область определения фактора
X ₁	Проводимость трансформатора	0,03-0,02
X ₂	Проводимость линии	0,06-0,11
X ₃	Сопротивление линии	0,31-0,39
X ₄	Напряжение на шинах нагрузки	0,95-1,05
X ₅	Активная мощность нагрузки	3,48-3,86
X ₆	Реактивная мощность нагрузки	2,16-2,38

Было проведено 8 опытов:

№	x1	x2	x3	x4=x1x2	x5=x2x3	x6=x1x3	P ₁₀	P _{1пр}
1	+	+	+	+	+	+	0,681	0,881
2	-	+	+	-	+	-	0,527	0,782
3	+	-	+	-	-	+	0,141	0,762
4	-	-	+	+	-	-	0,745	0,910
5	+	+	-	+	-	-	0,778	0,958
6	-	+	-	-	-	+	0,351	0,842
7	+	-	-	-	+	-	0,488	0,775
8	-	-	-	+	+	+	0,629	0,884

Выявить переменные параметры, существенно влияющие на P₁₀ и P_{1пр}, а также найти зависимость изменения их как функций всех значимых параметров.

7. На потери влаги при холодном способе копчения свинины от 10-13 % при производстве варено-копченых изделий влияют следующие факторы:

Фактор	Наименование фактора	Область определения фактора
X ₁	Время вымачивания, ч	2-4
X ₂	Концентрация поваренной соли в рассоле, %	25,0-25,5
X ₃	Количество рядов коптильных рам, шт.	1-3
X ₄	Время копчения, сут.	4-5
X ₅	Скорость движения воздуха, м/с	0,5-1,5
X ₆	Температура копчения, °C (2) позитив.	18-24
X ₇	Высота развешивания над дымообразователем, см (1) негатив.	10-30
X ₈	Температура воды при вымачивании, °C	20-22
X ₉	Относительная влажность в камере, % (3) негатив.	55-60

При проведении опытов, а каждый для исключения систематических ошибок повторялся 5 раз ($n=5$), получены следующие результаты:

Номер опыта по матрице планирования	Результат (y_i)				
	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
1	11,02	11,10	11,13	11,07	11,04
2	12,25	12,30	12,35	12,28	12,32
3	10,01	10,03	10,11	10,07	10,09
4	11,57	11,63	11,67	11,60	11,61
5	11,40	11,45	11,50	11,43	11,48
6	12,89	12,91	13,00	12,97	12,95
7	10,45	10,49	10,55	10,47	10,52
8	12,12	12,15	12,22	12,18	12,20

Построить модель и проверить ее адекватность.

Тема 2

1. Определите, в какой шкале представлено каждое из приведенных ниже измерений.

Поясните свой ответ.

Время решения задачи.

Телефонный номер.

Количество студентов в аудитории.

Скорость выполнения работы.

Летоисчисление.

Статус работника в организации как показатель продвижения по службе (карьерный рост).

Статус работника (должность).

Температура в помещении.

Напряжение.

Жизнерадостность.

Качество обучения.

Привлекательность другого человека.

Обучаемость.

Умение организовывать свое время.

Удовлетворенность от выполненного дела.

Подберите методы статистической обработки, применимые для каждого из измерений.

2. Известны следующие данные о рабочих трех бригад:

№ п/п	Пол	Образование	Тарифный разряд	Стаж работы	№ п/п	Пол	Образование	Тарифный разряд	Стаж работы
1	Муж.	Неполное среднее	4	27	11	Жен.	Среднее	2	2
2	Жен.	Среднее	4	10	12	Муж.	Среднее	4	6
3	Жен.	---	6	8	13	Муж.	Среднее	5	15
4	Муж.	---	5	24	14	Жен.	Среднее	3	3
5	Муж.	Неполное среднее	3	7	15	Жен.	Среднее	3	3
6	Муж.	Среднее	5	11	16	Муж.		4	12
7	Муж.	Среднее	6	12	17	Муж.	Среднее	3	3
8	Муж.	Среднее	5	8	18	Муж.	Среднее	4	19
9	Жен.	Среднее	4	10	19	Муж.	Среднее	5	25

№ п/п	Пол	Образование	Тарифный разряд	Стаж работы	№ п/п	Пол	Образование	Тарифный разряд	Стаж работы
10	Муж.	Неполное среднее	6	6	20	Жен.	Среднее	3	3

Сгруппируйте данный статистический материал по признакам: полу, образованию, квалификации и статусу работы. Результаты представьте в виде таблиц. Какой тип шкалы используется для измерения признаков? Какие меры центральной тенденции?

3. Распределение рабочих предприятия по зарплате характеризуется следующими данными:

Группы рабочих по зарплате	500-600	600-700	700-800	800-900	900-1000	1000-1100	Итого:
Число рабочих, процент к итогу	10,3	16,6	28,5	22,4	14,6	7,6	100

Определите моду и медиану зарплаты.

4. Имеются следующие данные измерения числа пропущенных занятий в течении семестра студентами энергетического факультета:

5	5	8	4	8	5	3	5	8	10
6	6	6	9	7	8	11	6	6	12
4	9	6	4	7	6	6	6	10	6
3	6	7	11	7	6	11	7	6	10
9	8	8	7	0	7	7	4	8	8
12	6	12	6	7	7	11	7	7	6
0	10	7	5	5	4	7	4	9	5
11	5	11	9	5	7	11	7	9	10
10	7	9	7	7	10	7	7	0	5
7	5	0	6	5	8	6	6	8	10

По приведенным данным требуется построить интервальный ряд распределения, объединив материал в 10 групп с равными интервалами; вычислить с точностью до 0,1 среднюю арифметическую, моду, медиану. Сделайте выводы.

5. Сборку компьютеров выполняют трое рабочих. Рабочий день каждого из них 8 часов. Первый на сборку одного компьютера тратит 30 мин, второй – 40 мин, третий – 50 мин. Вычислить средние затраты времени на сборку одного компьютера.

6. В связи с кризисом банк за первый год повысил процентную ставку в 2 раза к предыдущему году, а за второй год еще в 1,5 раза к уровню предыдущего года. Т.е. за два рассматриваемых периода ставка увеличилась в 3 раза. Определить средний темп роста ставки за один период?

7. Каждый из четырех земельных участка имеет форму квадрата. Стороны квадратов соответственно: $x_1 = 100$ м; $x_2 = 150$ м; $x_3 = 300$ м, $x_4 = 200$ м. Найти среднюю длину сторон участков.

8. Распределение студентов одного из факультетов по возрасту характеризуется следующими данными:

Возраст студентов	17	18	19	20	21	22	23	24	Всего
Число студентов	20	80	90	110	130	170	90	60	750

Вычислите:

- а) размах вариации;
- б) среднее линейное отклонение;
- в) дисперсию;
- г) среднее квадратическое отклонение;
- д) относительные показатели вариации возраста студентов.

Тема 3.

1. Кто заложил основы теории нечетких множеств?

- а) И. Мамдани
- М. Блэк
- Л. Заде
- Б. Коско

нет правильного ответа

2. Какие значения может принимать функция принадлежности?

- $[0, \infty]$
- $[-\infty, +\infty]$
- $[0, 1]$

нет правильного ответа

3. Множество точек, для которых значение функция принадлежности равно 1, называется:

- носителем
- ядром
- α -срезом

нет правильного ответа

4. Какая формула определяет объединение нечетких множеств А и В?

- $\min \{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}$
- $\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$
- $\max \{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}$
- $\max \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$

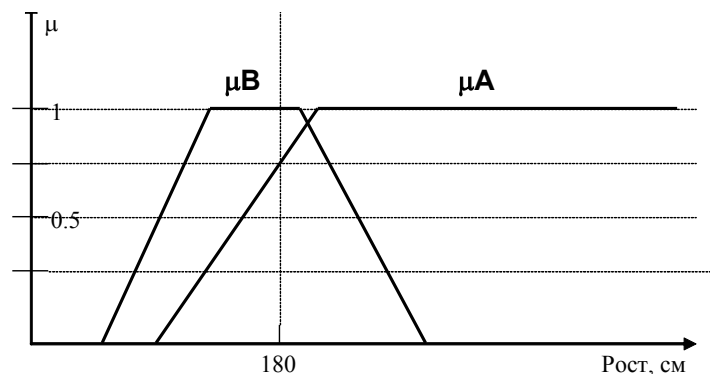
нет правильного ответа

5. В случае ограниченных операций не будут выполняться:

- $A \cap \bar{A} \neq 0, A \cup \bar{A} \neq U$
- $A \cup A \neq A, A \cap A \neq A$
- $A \cup (B \cap C) \neq (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cap (B \cup C) \neq (A \cup B) \cap (A \cup C)$

нет правильного ответа

6. На рисунке показаны графики функции принадлежности нечетких множеств μ_A – «Высокий рост» и μ_B – «Средний рост». Определить степень принадлежности человека ростом 180 см к первому ($\mu_A/180$) и второму ($\mu_B/180$) множествам:



$$\mu_{A/180} = \mu_{B/180} = \min \{0.75; 1\}$$

$$\mu_{A/180} = \mu_{B/180} = \max \{0.75; 1\}$$

$$\mu_{A/180} = \mu_{B/180} = 0.5 * (\mu_{A/180} + \mu_{B/180}) = 0.875$$

$$\mu_{A/180}=0.75, \mu_{B/180}=1$$

нет правильного ответа

7. Пусть $\mu_A(u)$, $\mu_B(u)$ – функции принадлежности нечетких множества А и В на универсальном множестве U. Пусть также С – нечеткое множество с функцией принадлежности $\mu_C(u)$, которое является объединением А и В. Определить значение принадлежности $u \in U$ нечеткому множеству С, если $\mu_A(u)=0.5$ и $\mu_B(u) = 0$:

- a) $\mu_C(u) = \max\{\mu_B(u), \mu_A(u)\} = 0.5$
- b) $\mu_C(u) = \min\{\mu_B(u), \mu_A(u)\} = 0$
- c) $\mu_C(u) = 1 - \min\{\mu_B(u), \mu_A(u)\} = 1$
- d) нет правильного ответа

8. Пусть $\mu_A(u)$, $\mu_B(u)$ – функции принадлежности нечетких множества А и В на универсальном множестве U. Пусть также С – нечеткое множество с функцией принадлежности $\mu_C(u)$, которое является пересечением А и В. Определить значение принадлежности $u \in U$ нечеткому множеству С, если $\mu_A(u)=0.5$ и $\mu_B(u) = 0$:

- a) $\mu_C(u) = \max\{\mu_B(u), \mu_A(u)\} = 0.5$
- b) $\mu_C(u) = \min\{\mu_B(u), \mu_A(u)\} = 0$
- c) $\mu_C(u) = 1 - \max\{\mu_B(u), \mu_A(u)\} = 0.5$
- d) $\mu_C(u) = 1 - \min\{\mu_B(u), \mu_A(u)\} = 1$
- e) нет правильного ответа

Тема 4.

1. Эксперт упорядочил объекты следующим образом: $a > b > c > d > e = f$. Построить матрицу парных сравнений.

2. Двум студентом с разных факультетов предполагалось выступить в роли экспертов и проранжировать 10 качеств преподавателя математики. Данные представлены в таблице. Определить взаимосвязь между построенными ранжировками. Сделать вывод.

№	Качества	Ранг присвоенный первым студентом	Ранг присвоенный вторым студентом
1	Дружелюбие	4	8
2	Занимательность	1	3
3	Строгость	5	4
4	Увлеченность	6	5
5	Справедливость	7	2
6	Компетентность	2	1
7	Корректность	3	6
8	Стиль	8	7
9	Требовательность	9	9
10	Успешность	10	10

3. Определить: компетентность экспертов и обобщенную оценку объектов, если

$$\|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 2,5 & 3,5 & 4,7 \\ 4 & 1,5 & 5 & 2,8 \\ 5 & 4,5 & 1,2 & 3,7 \\ 2 & 1,5 & 1,2 & 4,7 \\ 3 & 1,5 & 5 & 2,8 \end{pmatrix}.$$

4. Проведите оценку по пятибальной шкале источников электроэнергии: ТЭЦ, ГЭС, АЭС, ветряные электрогенераторы, солнечные батареи. В качестве критериев оценки рассмотрите мощность, безопасность, экологичность, срок службы и т.п. Объединитесь с тремя другими экспертами в аудитории и проведите обработку данных. Определить: компетент-

ность экспертов и обобщенную оценку объектов, обобщенную ранжировку объектов, согласованность мнений экспертов, зависимость между ранжировками экспертов.

Тема 5.

1. Изобразить линии уровня $f(x, y) = C$ следующих функций для указанных констант C . Рассчитать величину градиента в общем виде и найти его значения в указанных точках M_i . Изобразить найденные градиенты в виде векторов, исходящих из заданных точек.

а) $f(x, y) = (x-1)^2 + (y+2)^2$ при $C = 0; 1; 4$, $M_1 = (1; -2)$, $M_2 = (2; -2)$, $M_3 = (-1; -2)$;

б) $f(x, y) = xy$ при $C = 0; 1; -1$, $M_1 = (0; 0)$, $M_2 = (0; 1)$, $M_3 = (1; 1)$, $M_4 = (-1; -1)$, $M_5 = (1; -1)$;

в) $f(x, y) = 2x + 3y$ при $C = 0; 5; -5$, $M_1 = (0; 0)$, $M_2 = (1; 1)$, $M_3 = (-1; -1)$;

г) $f(x, y) = y - \sin x$ при $C = 0; 1; -1$, $M_1 = (0; 0)$, $M_2 = (\pi/2; 2)$, $M_3 = (\pi; -1)$.

2. Найти градиент и производную по направлению l заданной функции в точке M . Для задачи а) изобразить вектор l и градиент заданной функции в указанной точке.

Указание: все векторы следует изображать исходящими из заданной точки M .

а) $f(x, y) = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$; $M(1; 2)$ $l = \overline{MN}$; $N(4; 6)$;

б) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$; $M(2; 1; 3)$; $l = \overline{MN}$; $N(5; 5; 15)$;

в) $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + tg z$, $M(2; 1; 0)$, $l = (1; 1; 2)$.

3. Найти все локальные экстремумы следующих функций. Существует ли глобальный экстремум данной функции на всем множестве ее определения? Если да, найти его. Ответ обосновать.

а) $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2$;

б) $f(x, y) = -4x^2 - y^2 + 4xy + 3$;

в) $z = e^{-(x^2+y^2)}$;

д) $u = 2x^3 + 2y^3 + 6x^2 + 6y^2 - 3z^2 + 6yz + 12z$;

е) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$.

4. Методом Лагранжа найти локальные условные экстремумы следующих функций. Определить, выполняются ли в данных задачах условия теоремы Вейерштрасса. Найти глобальные экстремумы, если они существуют, или обосновать их отсутствие. Оценить, насколько изменятся значения функций в точках экстремума, если константы в правых частях условий связи увеличатся на 0,01.

а) $f(x, y) = xy$ при $x^2 + y^2 = 1$;

б) $f(x, y, z) = 2x + y - 2z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

5. Фирма получила заказ на производство 2700 деталей по цене 10 тыс. рублей за штуку. Для выполнения заказа требуются ресурсы двух видов А и В. При полном расходовании x единиц ресурса А и y единиц ресурса В можно изготовить $\sqrt[4]{x^3 y}$ деталей. Рыночная цена единицы ресурса А составляет 1 тыс. рублей, единицы ресурса В – 27 тыс. рублей. Определить оптимальный план приобретения ресурсов (т.е. величины x и y) и прибыль от выполнения заказа. Оценить, насколько изменится прибыль при оптимальном приобретении ресурсов, если размер заказа увеличится на одну деталь. Издержками считать затраты на приобретение ресурсов.

6. Предприятие производит продукцию двух видов: А и В. Производство x единиц продукции вида А обходится предприятию в $2x - \sqrt{x}$ тыс. рублей, а производство y единиц продукции вида В – в $y - \sqrt{y}$ тыс. рублей. Цена единицы продукции вида А на рынке составляет 4 тыс. рублей, а продукции вида В – 2 тыс. рублей. Определить оптимальный план производства (т.е. найти оптимальные значения x и y) и прибыль при условии, что предприя-

тие затратило на приобретение ресурсов для производства указанных видов продукции 2340 тыс. рублей. Оценить, насколько изменится прибыль при оптимальном планировании производства, если затраты увеличить на 1 тыс. рублей. Издержками считать затраты на производство.

Тема 6.

1. Найдите нижнюю цену игры, верхнюю цену игры, определите седловые точки, оптимальные чистые стратегии и цену игры (если они существуют):

$$1.1 \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 7 & 1 & -5 & 2 \\ -8 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad 1.2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & -5 & -1 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$1.3 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad 1.4 \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad 1.5 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Составить платежные матрицы и решить игры в задачах:

2.1 Каждый из двух участников игры, независимо один от другого, показывает на руке «камень», «бумагу» или «ножницы», при этом «бумага» выигрывает у «камня» одно очко, «камень выигрывает» у «ножниц» два очка, «ножницы» выигрывают у «бумаги» три очка. С какими вероятностями следует показывать каждому игроку указанные предметы, чтобы получить максимальный гарантированный выигрыш?

2.2 Игра заключается в том, что игрок А записывает числа 1 или 2, или 3, а игрок В, независимо от А записывает числа 1 или 2, или 3, или 4. если сумма двух чисел окажется четной, то А выигрывает эту сумму, если – нечетной, то В выигрывает сумму этих чисел. Составить платежную матрицу. Определить нижнюю и верхнюю цену игры, максиминную и минимаксную стратегии игроков.

2.3 Игрок А загадывает монету достоинством либо в 10 коп., либо в 20 коп. Если В отгадывает, то и получает ее. В противном случае В платит А 15 коп. Определить оптимальный способ ведения игры каждым игроком.

3. Два предприятия производят продукцию и поставляют её на рынок региона. Они являются единственными поставщиками продукции в регион, поэтому полностью определяют рынок данной продукции в регионе.

Каждое из предприятий имеет возможность производить продукцию с применением одной из пяти различных технологий. В зависимости от качества продукции, произведённой по каждой технологии, предприятия могут установить цену реализации единицы продукции на уровне 10, 8, 6, 4 и 2 денежных единицы соответственно. При этом предприятия имеют различные затраты на производство единицы продукции.

Доля продукции предприятия 1, приобретаемой населением в зависимости от соотношения цен на продукцию

Цена реализации 1 ед. продукции, д.е.		Доля продукции предприятия 1, купленной населением
Предп. 1	Предп. 2	
10	10	0,31
10	6	0,33
10	2	0,18
6	10	0,7
6	6	0,3
6	2	0,2
2	10	0,9
2	6	0,85

2	2	0,69
---	---	------

4. Фирма "Фармацевт" — производитель медикаментов и биомедицинских изделий в регионе. Известно, что пик спроса на некоторые лекарственные препараты приходится на летний период (препараты сердечно-сосудистой группы, анальгетики), на другие — на осенний и весенний периоды (антиинфекционные, противокашлевые).

Затраты на 1 усл. ед. продукции за сентябрь-октябрь составили: по первой группе (препараты сердечно-сосудистые и анальгетики) — 20 р.; по второй группе (антиинфекционные, противокашлевые препараты) — 15 р.

По данным наблюдений за несколько последних лет службой маркетинга фирмы установлено, что она может реализовать в течение рассматриваемых двух месяцев в условиях теплой погоды 3050 усл. ед. продукции первой группы и 1100 усл. ед. продукции второй группы; в условиях холодной погоды — 1525 усл. ед. продукции первой группы и 3690 усл. ед. второй группы.

В связи с возможными изменениями погоды ставится задача — определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую максимальный доход от реализации при цене продажи 40 р. за 1 усл. ед. продукции первой группы и 30 р. — второй группы.

5. Определите тип электростанции, которую необходимо построить для удовлетворения энергетических потребностей комплекса крупных промышленных предприятий. Множество возможных стратегий в задаче включает следующие параметры:

R_1 - сооружается гидростанция;

R_2 - сооружается теплостанция;

R_3 - сооружается атомная станция.

Экономическая эффективность сооружения электростанции зависит от влияния случайных факторов, образующих множество состояний природы S_i ($i = 1,5$).

Результаты расчета экономической эффективности приведены в следующей таблице:

Тип станции	Состояние природы				
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
R_1	44	60	25	30	45
R_2	65	50	35	60	30
R_3	50	30	40	35	60

5. Намечается крупномасштабное производство легковых автомобилей. Имеются четыре варианта проекта автомобиля R_j ($j = 1,4$). Определена экономическая эффективность V_{ij} каждого проекта в зависимости от рентабельности производства. По истечении трех сроков S_{ij} ($i=1,3$) рассматриваются как некоторые состояния среды (природы). Значения экономической эффективности для различных проектов и состояний природы приведены в таблице (ден. ед.) Требуется выбрать лучший проект легкового автомобиля для производства, используя критерии Вальда, Сэвиджа и Гурвица при $\alpha = 0,2$. Сравните решение и сделайте выводы.

Проекты	Состояние природы		
	S_1	S_2	S_3
R_1	25	20	15
R_2	25	23	10
R_3	15	28	18
R_4	11	29	20

3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа студентов предназначена для углубления сформированных знаний, умений, навыков. Самостоятельная работа развивает мышление, позволяет выявить причинно-следственные связи в изученном материале, решить теоретические и практические задачи. Самостоятельная работа студентов проводится с целью: систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов; углубления и расширения теоретических знаний; формирования умений использовать справочную документацию и специальную литературу; развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности; формированию самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации; развития исследовательских умений. Роль самостоятельной работы возрастает, т.к. перед учебным заведением стоит задача в т. ч. и по формированию у студента потребности к самообразованию и самостоятельной познавательной деятельности

Студентами практикуется два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию. В этом случае студенты обеспечиваются преподавателем необходимой учебной литературой, дидактическим материалом, в т. ч. методическими пособиями и методическими разработками.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия. Видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы могут быть:

- для овладения знаниями: чтение текста (учебника, методической литературы); составления плана текста; графическое изображение структуры текста, графическое изображение последовательности выполнения графической работы, выполнение графических работ; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочниками; ознакомление с нормативными документами; учебно-исследовательская работа; использование компьютерной техники, интернета и др.;

- для закрепления систематизации знаний: работа с конспектом лекции (обработки текста); повторная работа над учебным материалом (учебника, первоисточника, дополнительной литературы); составление плана выполнения работы в соответствии с планом, предложенным преподавателем; изучение ГОСТов; ответы на контрольные вопросы; тестирование, выполнение упражнений и графических работ;

- для формирования умений: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; выполнение чертежей, схем.

Основное содержание самостоятельной работы составляет выполнение индивидуальных заданий, подготовка к тестированию и зачету.

Прежде чем приступать к выполнению индивидуального задания, необходимо ознакомиться с содержанием теоретических вопросов по представленному списку литературы и по лекциям.

Работа пишется на стандартных листах писчей бумаги. Все листы заполняются только с одной стороны. Оформление индивидуального задания осуществляется в соответствии со стандартом. Каждая работа начинается с титульного листа, который служит обложкой работы. Сверху на нем указывается принадлежность студента к учебному заведению, факультету, специализации или кафедре. В середине листа указывается название изучаемой темы или раздела и название учебного задания, номер варианта. Ниже и справа указывается фамилия и инициалы студента, номер академической группы, фамилия и инициалы преподавателя. Внизу титульного листа отмечают год выполнения работы.

Эта страница служит также для отметок преподавателя о выполнении учебного задания и замечаний по поводу подготовленного студентом отчета.

При оформлении работы необходимо соблюдать нумерацию заданий. Задание переписывается полностью и ниже оформляется решение. Работа должна быть сдана на кафедру к назначенному преподавателем сроку.

Каждый учебный семестр заканчивается аттестационными испытаниями: зачетно - экзаменационной сессией.

Подготовка к экзаменационной сессии и сдача зачетов и экзаменов является ответственным периодом в работе студента. Seriously подготовиться к сессии и успешно сдать все экзамены - долг каждого студента. Рекомендуется так организовать свою учебу, чтобы перед первым днем начала сессии были сданы и защищены все лабораторные работы, сданы все зачеты, выполнены другие работы, предусмотренные графиком учебного процесса.

Основное в подготовке к сессии - это повторение всего материала, курса или предмета, по которому необходимо сдавать зачет или экзамен. Только тот успевает, кто хорошо усвоил учебный материал.

Если студент плохо работал в семестре, пропускал лекции, слушал их невнимательно, не конспектировал, не изучал рекомендованную литературу, то в процессе подготовки к сессии ему придется не повторять уже знакомое, а заново в короткий срок изучать весь материал. А это зачастую, оказывается, невозможно сделать из-за нехватки времени. Для такого студента подготовка к экзаменам будет трудным, а иногда и непосильным делом, а финиш - отчисление из учебного заведения.

В дни подготовки к экзаменам избегай чрезмерной перегрузки умственной работой, чередуй труд и отдых.

Для организации самостоятельной работы используются задания:

Тема: Теория планирования эксперимента

1. Используя программу генерации случайных чисел провести трехфакторный эксперимент в восьми точках (то есть сформировать три столбца и восемь строк в матрице планирования - заполнить ее случайным образом).

2. Определить значения нулевых уровней факторов, выполнить нормировку факторов.

3. Составить матрицу планирования для дробного трехфакторного эксперимента, пренебрегая взаимодействием факторов.

4. Провести эксперимент во всех точках ДФЭ, повторив 5 раз опыты в выбранных точках факторного пространства (найти значения функции отклика Y из таблицы 1 в соответствии с вариантом, выданным преподавателем).

5. Найти коэффициенты уравнения регрессии.

6. Проверить свойства полного факторного эксперимента: симметричность, нормировку, ортогональность и ротатабельность.

7. Составить уравнение регрессии в кодированном виде, привести его к натуральному, используя значение интервалов варьирования.

Вариант 1

3,004	3,031	3,035	3,039	3,001
5,193	5,152	5,177	5,209	5,151
3,927	3,950	3,936	3,898	3,897
7,141	7,099	7,111	7,138	7,097

Вариант 2

3,651	3,605	3,653	3,592	3,627
6,547	6,514	6,535	6,562	6,581
4,761	4,793	4,816	4,792	4,801
9,515	9,566	9,534	9,552	9,528

Тема: Математические методы анализа экспертных оценок

Произвести обработку экспертных данных и определить:

- компетентность экспертов и обобщенную оценку объектов,
- обобщенную ранжировку объектов,

- согласованность мнений экспертов,
- зависимость между ранжировками экспертов при следующих исходных данных:
 - 1) $O = \{O_1, O_2, \dots, O_6\}$ – множество оцениваемых объектов;
 - 2) $\Theta = \{\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_5\}$ – множество экспертов;
 - 3) $A = \|a_{ij}\|_{6 \times 5}$ – матрица оценок объектов экспертами.

Вариант № 1

$$\|a_{ij}\| = \begin{vmatrix} 1 & 2.5 & 3.5 & 4.7 \\ 4 & 1.5 & 5 & 2.8 \\ 5 & 4.5 & 1.2 & 3.7 \\ 2 & 1.5 & 1.2 & 4.7 \\ 3 & 1.5 & 5 & 2.8 \end{vmatrix}$$

Вариант № 2

$$\|a_{ij}\| = \begin{vmatrix} 2.3 & 1.9 & 1.8 & 3.7 \\ 3.5 & 1.9 & 2.6 & 3.7 \\ 1 & 2.7 & 1.2 & 3.7 \\ 2.5 & 3.5 & 1.2 & 1.7 \\ 3.5 & 3.5 & 1.2 & 1.7 \end{vmatrix}$$

Тема: Элементы оптимального управления

Вариант № 1

1. Максимизируйте прибыль при следующих условиях

Виды сырья	Виды продукции			Запасы сырья
	1	2	3	
1	3	5	2	800
2	2	6	4	600
3	5	1	2	450
Прибыль от реализации	3	7	2	

Решите задачу с применением симплекс-метода

2. Найти условный экстремум функции (решение задачи нелинейного программирования методом множителей Лагранжа):

$$z = \varphi(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_1x_2 - x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

при условии (ограничении)

$$x_1 - 3x_2 = 4$$

Вариант № 2

1. Максимизируйте прибыли при следующих условиях

Виды сырья	Виды продукции			Запасы сырья
	1	2	3	
1	5	4	6	230
2	8	1	4	600
3	2	4	3	500
Прибыль от реализации	1	1,5	2	

Решите задачу с применением симплекс-метода

2. Найти условный экстремум функции (решение задачи нелинейного программирования методом множителей Лагранжа):

$$z = \varphi(x_1, x_2) = x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_1x_2 - x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

при условии (ограничении)

$$x_1 - 4x_2 = 5$$

Тема: Принятие решений в условиях неопределенности

Вариант № 1

Задача 1. Владелец небольшого магазина в начале каждого рабочего дня закупает для реализации некий скоропортящийся продукт по цене 25 руб. за ед. Цена реализации этого продукта – 45 руб. за ед. Из наблюдений известно, что спрос на этот продукт за день может быть равен 1, 2, 3, или 4 ед. Если продукт за день не продан, то в конце дня его всегда покупают по цене 15 руб. за ед.

Возможные исходы	1	2	3	4
Частота	10	40	30	20

Пользуясь критериями максимакса, максимина, минимакса, Гурвица, математического ожидания и Лапласа, определить, сколько единиц этого продукта должен закупать владелец каждый день.

Вариант № 2

Задача 1. Владелец небольшого магазина в начале каждого рабочего дня закупает для реализации некий скоропортящийся продукт по цене 55 руб. за ед. Цена реализации этого продукта – 70 руб. за ед. Из наблюдений известно, что спрос на этот продукт за день может быть равен 1, 2, 3, или 4 ед. Если продукт за день не продан, то в конце дня его всегда покупают по цене 40 руб. за ед.

Возможные исходы	1	2	3	4
Частота	10	25	40	25

Пользуясь критериями максимакса, максимина, минимакса, Гурвица, математического ожидания и Лапласа, определить, сколько единиц этого продукта должен закупать владелец каждый день.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>ВВЕДЕНИЕ</i>	3
1 КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ЛЕКЦИОННОГО МАТЕРИАЛА	4
2 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ	25
3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ	34

Татьяна Александровна Юрьева,

доц. каф. общей математики и информатики АмГУ, канд. пед. наук