Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОУВПО «АмГУ»
Факультет математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой МАиМ
Т.В. Труфанова
21 мая 2007г.

Функциональный анализ и интегральные уравнения

Учебно – методический
комплекс дисциплины

Составитель: С.А.Подопригора

Благовещенск
2007

ББК
К

Печатается по решению редакционно-издательского совета факультета математики и информатики Амурского государственного университета

Подопригора С.А.

Функциональный анализ и интегральные уравнения**.** Учебно – методический комплекс дисциплины для студентов очной формы обучения специальности 010101 «Математика». – Благовещенск: Амурский гос. ун–т, 2007. − 66с.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Предметом изучения дисциплины "Функциональный анализ и интегральные уравнения" являются банаховые и гильбертовые пространства, спектральная теория линейных операторов в этих пространствах, в частности, линейные интегральные уравнения, основные конструкции нелинейного функционального анализа и вариационного исчисления. Функциональный и теория интегральных уравнений являются фундаментальной математической дисциплиной, понятия. методы и результаты которой широко используются во многих других современных математических дисциплинах и теоретической физике.

Целью изучения дисциплины является ознакомление студентов с основами теории банаховых и гильбертовых пространств, со спектральной теорией компактных линейных операторов в этих пространствах, в частности, с основами теории линейных интегральных уравнений, а также с элементами дифференциального исчисления в банаховых пространствах и вариационного исчисления.

По завершению обучения студент должен овладеть системой понятий, методами и результатами современного функционального анализа. Уметь использовать приобретенные знания к решению целого ряда задач по геометрии банаховых и гильбертовых пространств, по спектральной теории линейных операторов в этих пространствах,уметь находить решения линейных интегральных уравнений и простейших вариационных задач, применять теория интегральных уравнений к решению уравнений с частными производными.

Дисциплина "Функциональный анализ и интегральные уравнения" тесно связана с дисциплинами "Математический анализ", "ТФКП", "Дифференциальные уравнения", "Уравнения с частными производными", "Методы вычислений", "Теория вероятностей", "Вариационное исчисления и методы оптимизации".

2 ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ СТАНДАРТ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ И ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Введение: возникновение функционального анализа как самостоятельного раздела математики; современное развитие функционального анализа и его связь с другими областями математики.

Метрические и топологические пространства: множества, алгебра множеств; счетные множества и множества мощности континуума; метрические пространства; открытые и замкнутые множества; компактные множества в метрических пространствах; критерий Хаусдорфа; полнота и пополнение; теорема о стягивающих шарах; принцип сжимающих отображений; топологические пространства; примеры.

Мера и интеграл Лебега: построение меры Лебега на прямой; общее понятие аддитивной меры; лебеговское продолжение меры; измеримые функции их свойства; определение интеграла Лебега; класс суммируемых функций; предельный переход под знаком интеграла; связь интеграла Лебега с интегралом Римана; интеграл Стилтьеса; теорема Радона-Никодима; прямое произведение мер и теорема Фубини; пространства L_1, L_p (p>1); неравенства Гельдера и Минковского.

Банаховы пространства: определение линейного нормированного пространства; примеры норм; банаховы пространства; сопряженное пространство, его полнота; теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала; общий вид линейных функционалов в некоторых банаховых пространствах; линейные операторы; норма оператора; сопряженный оператор; принцип равномерной ограниченности; обратный оператор; спектр и резольвента; теорема Банаха об обратном операторе; компактные операторы; компактность интегральных операторов; понятие об индексе; теорема Фредгольма; примеры использования теоремы Фредгольма (задача Штурма-Лиувилля, теория потенциала, индекс дифференциального оператора).

Гильбертовы пространства: скалярное произведение; неравенство Коши-Буняковского-Шварца; ортогональные системы; неравенство Бесселя; базисы и гильбертова размерность; теорема об изоморфизме, ортогональное дополнение; общий вид линейного функционала; самосопряженные (эрмитовы) и унитарные операторы; ортопроекторы; спектр эрмитова и унитарного оператора; теорема Гильберта о компактных эрмитовых операторах; функциональное исчисление; приведение оператора к виду умножения на функцию; спектральная теорема; неограниченные самосопряженные операторы; примеры.

Линейные топологические пространства и обобщенные функции:

полинормированные пространства; функционал Минковского; нормируемость и метризуемость; топологии в сопряженном пространстве; слабая компактность шара в сопряженном пространстве. Основные пространства гладких функций; пространства обобщенных функций; операции над обобщенными функциями: умножение на гладкую функцию, дифференцирование, замена переменных, преобразование Фурье.
Элементы линейного анализа: слабый и сильный дифференциал нелинейного функционала; экстремум функционала; классические задачи вариационного исчисления; уравнение Эйлера; вторая вариация; условия Лежандра и Якоби.

3 ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ЛЕКЦИЙ

№	Тема	Кол – во часов	Литература
1	**Введение:** возникновение функционального анализа как самостоятельного раздела математики; современное развитие функционального анализа и его связь с другими областями. Метрические пространства.	2	[2] стр.7 – 8 [7] стр.54 - 63
2	Открытые и замкнутые множества, компактные множества в метрических пространствах; критерий Хаусдорфа; полнота и пополнение; теорема о стягивающихся шарах; принцип сжимающих отображений.	2	[7] стр.73 - 81
3	Топологические пространства; примеры; основные свойства.	2	[7] стр.91 - 106
4	Построение меры Лебега на прямой; общее понятие аддитивной меры; лебеговское продолжение меры.	4	[7] стр.267-298
5	Измеримые функции и их свойства.	2	[7] стр.299-309
6	Определение интеграла Лебега; класс суммируемых функций; предельный переход под знаком интеграла; связь интеграла Лебега с интегралом Римана. Интеграл Стилтьеса.	2	[7] стр.310-328
7	Теорема Радона-Никодима.	2	[7] стр.368-374
8	Прямое произведение мер и теорема Фубини.	2	[7] стр.328-339
9	Пространства L_p ($P \geq 1$); неравенства Гельдера и Минковского.	2	[7] стр.393-424
10	Определение линейного нормированного пространства;	2	[7] стр.150 -

	примеры норм; банаховы пространства.		154
11	Сопряженное пространство, его полнота.	2	[7] стр.196-206
12	Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала; общий вид линейных функционалов в некоторых банаховых пространствах.	2	[7] стр.188-195
13	Линейные операторы; норма оператора; сопряженный оператор.	2	[7] стр.233-252
14	Принцип равномерной ограниченности.	2	[7] стр.237-238
15	Обратный оператор. Теорема Банаха об обратном операторе.	2	[7] стр.240-245
16	Спектр и резольвента.	2	[7] стр.250-252
17	Компактные операторы; компактность интегральных операторов; понятие об индексе; теорема Фредгольма; примеры использования теоремы Фредгольма (задача Штурма-Лиувилля, теория потенциала, индекс дифференциального оператора).	2	[7] стр.253-266
18	Склярное произведение; неравенство Коши-Буняковского-Шварца.	2	[7] стр.155-156
19	Ортогональные системы; неравенство Бесселя; базисы и гильбертова размерность; теорема об изоморфизме.	2	[7] стр.157-169
20	Ортогональное дополнение.	2	[7] стр.170-173
21	Общий вид линейного функционала.	2	[7] стр.196-206
22	Самосопряженные (эрмитовы) и унитарные операторы.	2	[7] стр.246-247
23	Ортопроекты.	1	[7] стр.233-253
24	Спектр эрмитова и унитарного оператора; теорема Гильберта о компактных эрмитовых операторах.	2	[7] стр.260-266
25	Функциональное исчисление; приведение оператора к виду умножения на функцию.	1	[7] стр.233-252
26	Спектральная теорема; неограниченные самосопряженные операторы; примеры.	1	[7] стр.262-266
27	Полинормированные пространства; функционал Минковского; нормируемость и метризуемость	3	[7] стр.183-187
28	Топология в сопряженном пространстве; слабая компактность шара в сопряженном пространстве.	3	[7] стр.196-206
29	Основные пространства гладких функций; пространства обобщенных функций; операции над обобщенными функциями; умножение на гладкую функцию, дифференцирование, замена переменных, преобразование Фурье.	4	[7] стр.218-232
30	Слабый и сильный дифференциал нелинейного функционала; экстремум функционала;классические задачи вариационного исчисления; управления Эйлера; вторая вариация; условия Лежандра и Якоби.	10	[7] стр.496-528

4 ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

№	Тема	Кол – во часов
1	Метрические и топологические пространства	12
2	Банаховы пространства, его метрические и топологические свойства	6
3	Гильбертовы пространства. Ряды Фурье	6
4	Ограниченные линейные функционалы в банаховых пространствах, их нормы. Сопряженные пространства к банаховым пространствам	2
5	Ограниченные линейные операторы в банаховых пространствах и их нормы. Сопряженные операторы	6
6	Мера, измеримые функции, интеграл Лебега	4
7	Обратные операторы. спектр и резольвента	2
8	Компактные операторы. Теория Ф. Рисса. Спектр компактного оператора	12
9	Линейные интегральные управления. Теорема Фредгольма. Задача Штурма-Лиувилля	4
10	Спектральные свойства нормальных. эрмитовых и унитарных операторов в гильбертовых пространствах. Проекторы в гильбертовых пространствах и их свойства	6
11	Обобщенные функции и операции над ними, преобразование Фурье	4
12	Экстремум функционала. Классические задачи вариационного исчисления. Уравнение Эйлера; вторая вариация; условия Лежандра и Якоби	8

5 САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ

№	Вид работы	Литература	Кол – во часов	Срок и форма контроля
1	Теорема о непрерывных отображениях топологических пространств. Гомеоморфизмы. Пример биективного непрерывного отображения, не являющегося гомеоморфизмом	[7] стр.99-101	28	Лекц. контроль
2	Равномерно непрерывные отображения метрических пространств	[7] стр.54 - 61	4	Лекц. контроль

3	Компакты и их свойства	[7] стр.107 - 114	6	Лекц. контроль
4	Функции с ограниченными изменениями и их свойства	[7] стр.73 - 75	3	Лекц. контроль
5	Измеримые пространства	[7] стр.393 - 424	15	Лекц. контроль
6	Интеграл Лебега-Стильеса. Теорема Ф.Рисса о представлении непрерывного линейного функционала	[7] стр.375-392	12	Лекц. контроль
7	Норма сопряженного оператора	[7] стр.246-247	2	Лекц. контроль
8	Альтернативы Фредгольма	[7] стр.481-487	4	Лекц. контроль
9	Ядерные операторы и ядерные пространства	[6] стр.354 - 363	2	Лекц. контроль

6 ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Полные метрические пространства.
2. Принцип неподвижной точки Банаха. Свойства сближающих операторов.
3. Оценка скорости сходимости итерационной последовательности к неподвижной точке сближающего оператора.
4. Предкомпактные подмножества в метрических пространствах.
5. Критерий предкомпактности в C[0,1] и l_p.
6. Сепарабельность метрических пространств.
7. Линейные нормированные пространства.
8. Непрерывные линейные отображения в линейных нормированных пространствах.

9. Сопряженные пространства, теорема Хана - Банаха.
10. Теорема Банаха – Штейнгауза.
11. Теорема Бэра.
12. Лемма Банаха о почти ограниченности линейного оператора на банаховом пространстве.
13. Теорема Банаха об обратном операторе.
14. Определение и примеры гильбертовых пространств.
15. Теорема Грамма – Шмидта об ортогонализации. Лемма об уклонении.
16. Теорема о минимальном свойстве сумм Фурье, следствия.
17. Теорема Рисса – Фишера.
18. Теорема Рисса о представлении функционала в гильбертовом пространстве.
19. Теорема об отделении точек линейного нормированного пространства функционалами.
20. Теорема о замыкании.
21. Теорема о вложении X в X**.
22. Критерий слабой сходимости.
23. Признак слабой сходимости в C[0,1].
24. Общий вид линейных непрерывных функционалов на l_p.
25. Критерий Рисса конечномерности линейного нормированного пространства.
26. Теория Рисса решения операторных уравнений: лемма о ядре.
27. Теория Рисса решения операторных уравнений: лемма об образе.
28. Теорема Рисса о разрешимости уравнения $Ax - x = y$.
29. Сопряженные операторы и их свойства.
30. Теорема о разрешимости уравнения $Ax - x = y$ в терминах сопряженных операторов.

7 ТЕМЫ КУРСОВЫХ РАБОТ

1. Мера Жордана, ее свойства и вычисление.
2. Произведение мер и теорема Фубини.
3. Функции с ограниченным изменением.
4. Заряды и их разложения Хана и Жордана.
5. Дифференцируемость мер и теорема Радона-Никодима.
6. Теорема Рисса о представлении непрерывного линейного функционала на пространстве непрерывных линейных функций на локально компактном пространстве.
7. Теоремы об отделении выпуклых множеств функционалами.
8. Теоремы о замкнутом графике и открытом отображении.
9. Преобразование Фурье-Стильтьеса и его свойства.

10. Преобразование Лапласа и его свойства.
11. Спектральная теория компактных операторов в гильбертовом пространстве.
12. Дифференцирование в линейных пространствах.
13. Полугруппы ограниченных операторов в гильбертовом пространстве.
14. Спектральные свойства нормальных операторов.
15. Спектральные свойства положительных операторов в гильбертовом пространстве.

8 МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЧТЕНИЯ ЛЕКЦИЙ И ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

ТЕМА 1. НОРМИРОВАННЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. СХОДИМОСТЬ

Основные понятия: векторное пространство, норма, нормированное векторное пространство, сходимость последовательностей по норме, сходимость в пространствах.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача № 1.

а) Задает ли норму в пространстве R функция $\varphi(x) = |arctgx|$?

б) Показать, что $\varphi(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ в пространстве R^n не является нормой при $0 < p < 1$ и $n \geq 2$.

Решение. а) Нет, не задает, ибо не выполняется вторая аксиома нормы. Действительно, если взять $x = \sqrt{3}$, $\lambda = \frac{1}{3}$, то $\|\lambda x\| = arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$, а $|\lambda|\|x\| = \frac{1}{3}arctg\sqrt{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{9}$. Поэтому $\|\lambda x\| \neq |\lambda|\|x\|$.

б) Не является, т.к. не выполняется третья аксиома нормы. Действительно, возьмем вектор $x = \left(\frac{1}{2},0,\ldots,0\right) \in R^n$ и вектор $y = \left(0,\frac{1}{2},0,\ldots,0\right) \in R^n$. Тогда $\|x\|_p = \|y\|_p = \frac{1}{2}$ для любого $0 < p < 1$ и $\|x\|_p + \|y\|_p = 1$. Однако $\|x+y\|_p = \left\|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\ldots,0\right)\right\|_p = \left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}-1}$.

Поскольку $p \in (0,1)$, то $\frac{1}{p} - 1 > 0$ и $2^{\frac{1}{p}-1} > 1$. Следовательно, $\|x+y\|_p > \|x\|_p + \|y\|_p$.

Задача № 2. Найти предел последовательности $x_n = \frac{nt}{n+t}$ в пространстве $C[0,2]$, если он существует.

Решение: Необходимым условием сходимости последовательности в пространстве $C[a,b]$ является существование предела x_n при каждом фиксированном $t \in [a,b]$. Заданная последовательность при заданном t сходится к функции *a(t)=t*. Данная функция непрерывна.

Проверим, сходится ли последовательность x_n к *a(t)* по норме пространства $C[a,b]$, т.е. равномерно. Вычислим $\|x_n - a\|$. По определению нормы:

$$\|x_n - a\|_{C[0,2]} = \max_{0\le t\le 2}\left|\frac{nt}{n+t} - t\right| = \max_{0\le t\le 2}\left|\frac{t^2}{n+t}\right|.$$

Вычислим максимум функции $\dfrac{t^2}{n+t}$ на отрезке [0,2]. Для этого вычислим точки, подозрительные на экстремум с помощью производной.

$$\left(\frac{t^2}{n+t}\right)' = \frac{t^2 + 2nt}{(n+t)^2};\ t^2 + 2nt = 0,\ t_1 = 0,\ t_2 = -2n.$$

Таким образом, точками, подозрительными на экстремум, являются точки t_1, t_2. Поскольку $t_2 \notin [0,2]$, поэтому остается лишь точка t_1. Вычислим также значение функции на концах отрезка:

$$\left.\frac{t^2}{n+t}\right|_{t=0} = 0,\ \left.\frac{t^2}{n+t}\right|_{t=2} = \frac{4}{n+2}.\ \text{Значит, } \max_{t\in[0,2]}\left|\frac{nt}{n+t} - t\right| = \frac{4}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Это означает, что последовательность $x_n(t)$ в пространстве $C[0,2]$ сходится к функции *a(t)=t*.

<u>Задача № 3.</u> Найти предел последовательности $x_n(t) = t^n - t^{2n}$ в пространстве $C[0,1]$, если он существует.

<u>Решение.</u> Последовательность $x_n(t)$ для каждого фиксированного t при $n \longrightarrow \infty$ стремится к *a(t)*=0. Покажем, что $x_n(t)$ к нулю равномерно не сходится. Вычислим $\|x_n - a\| = \max_{t\in[0,1]}\left|t^n - t^{2n}\right|$.

Так как $\left(t^n - t^{2n}\right)' = nt^{n-1} - 2nt^{2n-1} = nt^{n-1}(1-2t^n)$, то $nt^{n-1}(1-2t^n) = 0$,

если $t_1 = 0; t_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$.

Точкой, подозрительной на экстремум, является и точка $t_3 = 1$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что максимум достигается в точке

$t = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$. Поэтому $\max\limits_t \left|t^n - t^{2n}\right| = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Значит, последовательность $x_n(t) = t^n - t^{2n}$ в пространстве $C[0,1]$ не сходится.

<u>Задача № 4.</u> Выяснить, сходится ли последовательность $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, 0, \ldots\right)$ в пространстве l_3.

<u>Решение.</u> Необходимым условием сходимости последовательности в пространстве $l_p, p \geq 1$ является наличие покоординатного предела. Выпишем несколько членов последовательности:

x_n: $x_1 = \left(1, \frac{1}{2}, 0, \ldots\right), x_2 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, 0, \ldots\right)$. Очевидно, что $x_n(1) \to 1$ при $n \to \infty$,

$x_n(2) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$ и т.д. Поэтому последовательность x_n покоординатно

сходится к точке $a = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k+1}}, \ldots\right)$.

Заметим, что $a \in l_3$, т.к. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left|\frac{1}{2^k}\right|^3 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-3k} < \infty$.

Покажем, что последовательность x_n сходится к a по норме пространства l_3:

$$\|x_n - a\| = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_n(k) - a(k)|^3 \right)^{1/3} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{1}{2^k} \right|^3 \right)^{1/3} = \frac{\left(2^{-3}\right)^{n+1}}{1 - 1/2^3} = \frac{8}{7} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{3n+3} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Задача № 5. Выяснить, сходится ли последовательность $x_n = (\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n},0,\ldots)$ в прастранстве l_1.

Решение. Очевидно, что $a = (1,1,\ldots,1,\ldots)$ является покоординатным пределом последовательности, но $a \notin l_1$, т.к. ряд, составленный из единиц, не является сходящимся. Следовательно, последовательность x_n не имеет предела.

Задача № 6. Доказать, что последовательность $x_n(t) = n^2 te^{-nt}$ $(n \in N)$ сходится поточечно к функции $a(t) \equiv 0$ для всех $t \in [0,1]$, но не сходится в пространстве $CL_1[0,1]$.

Решение. Последовательность $x_n(t)$ при каждом фиксированном $t \in [0,1]$ стремится к нулю, так как $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^{\alpha}}{a^n} = 0, |a| > 1$.

Вычислим $\|x_n - a\|_{CL_1[a,b]} = \int_0^1 |x_n(t) - a(t)| dt = \int_0^1 n^2 te^{-nt} dt = [nt = z] =$

$= \int_0^n ze^{-z} dz = 1 - ne^{-n} - e^{-n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$. Значит, последовательность $x_n(t)$ не сходится в пространстве $CL_1[0,1]$.

ТЕМА 2. ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ НОРМИРОВАННОГО ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Основные понятия: нормированное векторное пространство, сходимость последовательностей по норме, открытое, замкнутое, ограниченное, выпуклое множество в нормированном пространстве, точка прикосновения, предельная, изолированная, внутренняя, внешняя и граничная точки множества, топология нормированного векторного пространства.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

Задача № 1. Является ли множество $M = \{ x \in C[0,1]: x(0) = 0\}$ открытым, замкнутым, в пространствах $C[0,1], CL[0,1]$. Найти его замыкание, внутренние и граничные точки в каждом из указанных пространств.

Решение. Докажем, что множество M не является открытым в пространстве $C[0,1]$. Рассмотрим точку $x_0 \in M$, т.е. $x_0 \in C[0,1]$ и $x(0)=0$. Для каждого $r > 0$ существует функция $x(t) = x_0(t) + \alpha$, $|\alpha| < r$ такая, что $x(0) = x_0(0) + \alpha = \alpha \neq 0$, как только $\alpha \neq 0$. Функция *x(t)* принадлежит шару $B(x_0, r)$, но не принадлежит множеству *M*. Таким образом, у множества *M* нет внутренних точек и *M* не является открытым.

Проверим, является ли множество *M* замкнутым в $C[a,b]$. Напомним, что $M = \overline{M}$, если из того, что $x_n \in M$ и $x_n \to x_0$ следует, что $x_0 \in M$. Другими словами, *M* замкнуто, если для каждой последовательности непрерывных функций таких, что $x_n(0) = 0$ и для которых существует непрерывная на отрезке [0,1] функция $x_0(t)$ такая, что $\max\limits_{0 \le t \le 1} |x_n(t) - x_0(t)| \to 0$ при $n \to \infty$, функция $x_0(t)$ удовлетворяет условию $x_0(t) = 0$. Учитывая, что сходимость в пространстве $C[0,1]$ равномерная, то из того, что $\max\limits_t |x_n(t) - x_0(t)| \to 0$ при $n \to \infty$ следует $|x_n(t) - x_0(t)| \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $t \in [0,1]$. Следовательно, $x_0(0) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n(0) = 0$. Итак, в пространстве C[a,b] множество *M* замкнуто и каждая его точка для множества *M* является граничной.

Каждый открытый шар радиуса r в пространстве $CL[a,b]$ содержит открытый шар радиуса $\frac{r}{b-a}$ пространства C[a,b] с центром в той же точке, т.е. $B_L(x_0,r) \supset B_C\left(x_0,\frac{r}{b-a}\right)$. Действительно, пусть $y(t) \in B_C\left(x_0,\frac{r}{b-a}\right)$, т.е. $\max\limits_t |y(t)-x_0(t)| < \frac{r}{b-a}$, тогда $\int\limits_a^b |y(t)-x_0(t)|dt \le \max\limits_t |y(t)-x_0(t)| \cdot (b-a) \le$

$\frac{r}{b-a} \cdot (b-a) = r$, т.е. $y(t) \in B_L[x_0,r]$. Значит, если множество открыто в пространстве $CL[0,1]$, то оно открыто в $C[0,1]$. А так как множество M не является открытым в $C[a,b]$, то оно не является открытым и в $CL[a,b]$.

Докажем, что оно не является замкнутым в $CL[a,b]$, точнее, $\overline{M} = CL[0,1]$. Действительно, для каждой функции $x_0(t) \in CL[0,1] \setminus M$ существует последовательность $x_n \in M$ такая, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$, где

$$x_n(t) = \begin{cases} ntx_0(0), t \in \left[0, 1/n\right]; \\ x_0(t), \quad t \in \left[1/n, 1\right], \end{cases} \quad \text{и } x_n(0) = 0,$$

$$\|x_n - x_0\|_{CL[0,1]} = \int\limits_0^1 |x_n(t) - x_0(t)|dt \le \int\limits_0^{1/n} (|x_0| + |x_n|)dt \le \frac{2}{n} \max_{t\in[0,1]} |x(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

однако $x_0(0) \ne 0$, что и означает незамкнутость множества.

<u>Задача № 2.</u> Выяснить, является ли множество $M = \left\{ x \in l_3 : \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < 1 \right\}$ открытым, замкнутым, ограниченным в пространстве l_3.

<u>Решение.</u> Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 0, \ldots\right)$, принадлежащую множеству M, которая сходится в l_3 к элементу $x = (1,0,\ldots)$, который множеству M не принадлежит. Значит, M не является замкнутым.

Докажем, что M не является также открытым, т.е. существует такая точка $x_0 \in M$, что $\forall r > 0$ существует точка $x \in B(x_0, r) \setminus M$. Пусть $x_0 = (0,0,...)$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{k}} \right|^3$ сходится, обозначим его сумму через a^3 и рассмотрим последовательность $x_n = \left(\frac{r}{2a\sqrt{1}}, \frac{r}{2a\sqrt{2}}, ..., \frac{r}{2a\sqrt{n}}, 0, ... \right)$, $x_n \in B(x_0, r)$, т.к.

$$\|x_n - x_0\| = \frac{r}{2a} \cdot \left(\sum \left| \frac{1}{\sqrt{k}} \right|^3 \right)^{1/3} = \frac{r}{2} < r.$$

Но $x_n \notin M$, так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_n(k)|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{r^2}{4a^2 k} = \frac{r^2}{4a^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ расходится, т.е. $\forall c > 0 \quad \exists n \in N$, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > c$. Если в качестве c взять $\frac{4a^2}{r^2}$, то получим, что $\exists n \in N$, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_n(k)|^2 \geq 1$, т.е. $x_n \notin M$. Значит, M не является открытым. Множество M является ограниченным, так как оно содержится в шаре $B(x_0, 1)$, где $x_0 = (0,0,\ldots)$. Действительно, из условия $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < 1$ следует, что $\forall k \, |x_k| < 1$, но тогда $|x_k|^3 < |x_k|^2 < 1$ и

$$\|x_n - x_0\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^3 \right)^{1/3} < \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/3} < 1.$$

<u>Задача № 3.</u> Доказать, что $L = \left\{ x \in L[0,1] : \int\limits_0^1 x(t)dt \right\}$ является подпространством пространства $CL[0,1]$.

<u>Решение.</u> Подпространством называется замкнутое линейное многообразие. Пусть $x, y \in L$ и $\alpha, \beta \in R$, тогда $\alpha x + \beta y \in L$, т.к.

$$\int_0^1 (\alpha x + \beta y)(t)dt = \alpha \int_0^1 x(t)dt + \beta \int_0^1 y(t)dt.$$

Покажем, что множество L замкнуто. Пусть $x_n \in L$ и $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$, тогда $x_0 \in L$. Действительно, если $\int_0^1 |x_n(t) - x_0(t)| dt \to 0$, то

$$\int_0^1 |x_n(t) - x_0(t)| dt \geq \left| \int_0^1 x_n(t) dt - \int_0^1 x_0(t) dt \right| \Rightarrow \int_0^1 x_0(t) dt = 0, \text{т.к.} \int_0^1 x_n(t) dt = 0.$$

Значит, L – подпространство в $CL[0,1]$.

Задача № 4. Доказать, что множество $L_{n_0} = \{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2 : x_n = 0 \ \forall\, n > n_0, n_0 \in N - fix \}$ нигде не плотно в l_2.

Решение. По определению множество A является нигде не плотным в нормированном векторном пространстве, если оно не плотно ни в одном шаре, т.е. если в каждом шаре $B \subset l_2$ содержится другой шар B_1, не имеющий с A ни одной общей точки.

Пусть B – произвольный шар в l_2. Возможны два варианта:

1) $B \cap L_{n_o} = \varnothing$;

2) $z\left(z_1, z_2, \ldots, z_{n_o}, 0 \ldots\right) \in B \cap L_{n_o}$.

Во втором случае рассмотрим шар $B_1(z, \varepsilon) \subset B$ и точку $y(z_1, \ldots, z_{n_o}, \varepsilon/2, 0, \ldots)$. Тогда для $\forall\, x \in L_{n_o}$ имеем: $\|x - y\| \geq \varepsilon/2$, т.е. $B_2(y, \varepsilon/2) \subset E \setminus L_{n_o}$, кроме того $B_2(y, \varepsilon/2) \subset B_1(z, \varepsilon) \subset B$. Таким образом, в шаре B всегда найдется шар B_2, не содержащий точек множества L_{n_o}, т.е. L_{n_o} нигде не плотно.

Задача № 5. Доказать, что множество A последовательностей из l_2, содержащих лишь конечное число членов, отличных от нуля, плотно в l_2.

Решение. Пусть $x \in l_2$, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty \;\Rightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists N: \sum\limits_{i=N}^{\infty} |x_i|^2 < \varepsilon^2$. Обозначим через $z(x_1,\ldots,x_N,0,\ldots)$. Очевидно, $z \in A$ и $\|z - x\|_{l_2} < \varepsilon$. Значит, x является точкой прикосновения для множества A, следовательно A всюду плотно в l_2.

ТЕМА 3. БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Основные понятия: нормированное векторное пространство, последовательность Коши (фундаментальная последовательность), полнота пространства, эквивалентные нормы, ряды в банаховых пространствах, критерий банаховости.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача №1. Доказать, что в пространстве $C^l[a, b]$ нормы

$$\|x\|_1 = \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| + \int_a^b |x(t)|\, dt,$$

$$\|x\|_2 = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|$$

эквивалентны.

Решение. Две нормы являются эквивалентными, если они подчинены друг другу. Норма $\|\cdot\|_1$ подчинена $\|\cdot\|_2$, если существует положительная константа α, такая, что

$$\|x\|_1 \le \alpha\, \|x\|_2 \quad \forall\; x \in C^1[a,b].$$

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\, dt + \max_t |x'(t)| \le \max_t |x(t)| \cdot (b - a) + \max_t |x'(t)| \le$$

$$\le \max\{b - a, 1\} \cdot \left(\max_t |x(t)| + \max_t |x'(t)|\right) = \alpha \cdot \|x\|_2.$$

С другой стороны, используя формулу Ньютона-Лейбница для непрерывно-дифференцируемых функций

$$x(t) = x(a) + \int_a^t x'(\tau)\, d\tau,$$

получим неравенство $|x(a)| \le |x(t)| + \int_a^b |x'(\tau)|d\tau$. Проинтегрируем обе части

по t: $(b-a)|x(a)| \le \int_a^b |x(t)|dt + (b-a)\int_a^b |x'(t)|dt$ или

$$|x(a)| \le \frac{1}{b-a}\int_a^b |x(t)|dt + \int_a^b |x'(t)|dt.$$

Таким образом,

$$\|x\|_2 = \max_t |x(t)| + \max_t |x'(t)| \le |x(a)| + \int_a^b |x'(t)|dt + \max_t |x'(t)| \le$$

$$\le \frac{1}{b-a}\int_a^b |x(t)|dt + 2\int_a^b |x'(t)|dt + \max_t |x'(t)| \le \frac{1}{b-a}\int_a^b |x(t)|dt +$$

$$+ \left(2(b-a)+1\right)\cdot \max_t |x'(t)| \le$$

$$\le \max\left\{\frac{1}{b-a}, 2(b-a)+1\right\}\cdot\left(\int_a^b |x(t)|dt + \max_t |x'(t)|\right) = \beta\cdot\|x\|_1.$$

<u>Задача № 2.</u> Является ли пространство $C^1[0, 1]$ банаховым по норме

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)|dt + \max_t |x'(t)|.$$

<u>Решение.</u> Нормальное векторное пространство является банаховым, если любая последовательность Коши в нем сходится. По определению последовательность является последовательностью Коши, если $\|x_n - x_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$. Имеем,

$\|x_n - x_m\| = \int_0^1 |x_n(t) - x_m(t)|dt + \max_t \left|x_n'(t) - x_m'(t)\right| \to 0$ при $n, m \to \infty$. Значит,

$\int_0^1 |x_n(t) - x_m(t)|dt \to 0$ и $\max_t \left|x_n'(t) - x_m'(t)\right| \to 0$ при $n, m \to \infty$ одновременно.

В силу полноты пространства $L[0, 1]$ последовательность $x_n(t)$ сходится в среднем к функции $x_0(t)$, а последовательность непрерывных функций $x_n'(t)$ сходится равномерно к непрерывной функции $\varphi(t)$. Мы должны показать, что

$x_0(t) \in C^1[0, 1]$ и $x_0'(t) = \varphi(t)$. Из сходимости в среднем следует, что существует подпоследовательность x_{n_k}, сходящаяся к $x_0(t)$ почти всюду.

Пусть для $t = t_0$ и $x_{n_k}(t_0) \to x_0(t_0)$ при $k \to \infty$, тогда $x_{n_k}(t) - x_{n_k}(t_0) = \int_{t_0}^{t} x_{n_k}'(\tau)\, d\tau$.

Перейдем к пределу при $k \to \infty$, получим

$$x_0(t) = x_0(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varphi_0(\tau)\, d\tau \text{ почти всюду.}$$

Учитывая, что $x_0(t)$ абсолютно непрерывная функция, имеем $x_0'(t) = \varphi(t)$.

Данная задача может быть решена и следующим образом. Известно, если в пространстве заданы две эквивалентные нормы, по одной из которых пространство банахово, то оно банахово и по второй норме. В задаче № 1 мы показали, что наша норма эквивалентна норме $\max\limits_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max\limits_{t \in [0,1]} |x'(t)|$, по которой $C^1[0, 1]$ банахово. Значит $C^1[0, 1]$ банахово и по норме $\max\limits_{t \in [a,b]} |x'(t)| + \int_0^1 |x(t)|\, dt$.

<u>Задача №3.</u> Доказать, что пространство $M[a, b]$ - ограниченных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой $\|x\| = \sup\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|$ является банаховым.

<u>Решение:</u> Пусть x_n - последовательность Коши в пространстве $M[a, b]$. Это значит, что $x_n(t)$ - ограниченные на отрезке $[a, b]$ функции и $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon : \forall\, n, m > n_\varepsilon \quad \sup\limits_{t} |x_n(t) - x_m(t)| \le \varepsilon$. (*)

Зафиксируем t, получим числовую последовательность $x_n(t)$ такую, что $|x_n(t) - x_m(t)| \to 0$ при $n, m \to \infty$. Это означает, что $x_n(t)$ является числовай последовательностью Коши и сходится в силу полноты R. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n(t) = x_0(t)$. Получили функцию $x_0(t)$, к которой последовательность $x_n(t)$

сходится точечно. Остается доказать, что $x_n(t) \in M[a, b]$ и $\sup\limits_t \left|x_n(t) - x_m(t)\right| \to 0$ при $n \to \infty$. Перейдем в равенстве (*) к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\sup_{a \le t \le b} \left|x_n(t) - x_m(t)\right| \le \varepsilon \quad \forall\ n \ge n_\varepsilon .$$

Функция $\left|x_n(t) - x_0(t)\right|$ ограничена, значит и $\left|x_0(t)\right|$ ограничена, так как $\left|x_0(t)\right| \le \left|x_n(t)\right| + \left|x_0(t) - x_n(t)\right|$. Таким образом, пространство $M[a, b]$ является банаховым.

<u>Задача № 4.</u> Является ли последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + \dfrac{1}{n^2}}, t \in [-1,1] \setminus Q, \\ n \cos nt, t \in [-1,1] \cap Q, \end{cases}$$

последовательностью Коши в пространстве $L_2\,[-1, 1]$? Найти предел, если он существует.

<u>Решение:</u> По определению последовательность $x_n(t)$ является последовательностью Коши, если

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ n_\varepsilon : \forall\ n, m > n_\varepsilon \quad \left(\int_{-1}^{1} \left|x_n(t) - x_m(t)\right|^2 dt \right)^{1/2} < \varepsilon .$$

Поскольку интегралы Лебега от эквивалентных функций совпадают, заменим $x_n(t)$ на $y_n(t)$ такую, что $x_n(t) \sim y_n(t)$, где $y_n(t) = \sqrt{t^2 + \dfrac{1}{n^2}}$. Имеем

$$\int_{-1}^{1} \left|x_n(t) - x_m(t)\right|^2 dt = \int_{-1}^{1} \left|y_n(t) - y_m(t)\right|^2 dt = \int_{-1}^{1} \left| \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{t^2 + \frac{1}{m^2}} \right|^2 dt \le$$

$$\le \int_{-1}^{1} \left| \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} - |t| \right|^2 dt \text{ при } m > n.$$

Рассмотрим последовательность $z_n = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} - |t|$, которая точечно сходится к нулю и ограничена :$|z_n|^2 \leq 1$. Воспользуемся теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, получим

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon :\quad \forall\ n > n_\varepsilon \qquad \int_{-1}^{1}\left|\sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} - |t|\right|^2 dt < \varepsilon\ .$$

Это означает, что $\left\|\sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} - |t|\right\| < \sqrt{\varepsilon} \quad \forall\ n > n_\varepsilon$, т.е. последовательность $y_n(t)$ и, следовательно $x_n(t)$ является последовательностью Коши и сходится к функции $|t| \in L_2\,[-1,1]$.

ТЕМА 4. ОТБРАЖЕНИЯ В НОРМИРОВАННЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Основные понятия: нормированное векторное пространство, отображение, непрерывное в точке отображение, непрерывное отображение, равномерно непрерывное отображение, отображение, удовлетворяющее условия Липшица, сжимающее отображение, неподвижная точка отображения, метод последовательных приближений, оценка скорости сходимости последовательных приближений.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача №1. Выяснить, является ли отображение

$$F: L_2[0,1] \to C[0,1] \qquad F(x) = \int_0^1 \frac{t^2 x(s)}{\sqrt[3]{s}} ds$$

непрерывным в точке $x_0(t) = 0$.

Решение: По определению, отображение $F: X \to Y$ непрерывно в точке x_0, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon)$ такое, что $\forall x \in X$ такого, что $\|x - x_0\|_X < \delta \Rightarrow \|F(x) - F(x_0)\|_Y < \varepsilon$. Оценим

$$\|F(x) - F(x_0)\|_Y = \|F(x)\|_{C[0,1]} = \max_{0\le t\le 1}\left|\int_0^1 \frac{t^2 x(s)}{\sqrt[3]{s}}\,ds\right| \le \max_{0\le t\le 1}|t^2|\int_0^1 \frac{|x(s)|}{\sqrt[3]{s}}ds = \int_0^1 \frac{|x(s)|}{\sqrt[3]{s}}ds \le$$

(по неравенству Коши-Буняковского)

$$\le \left(\int_0^1 |x(s)|^2\,ds\right)^{1/2}\cdot\left(\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt[3]{s}}\right)^2 ds\right)^{1/2} = \sqrt{3}\|x\|_{L_2[0,1]}.$$ Поэтому, если $\|x\|_{L_2[0,1]} < \delta$, то

$\|F(x)\|_{C[0,1]} < \sqrt{3}\delta$ и для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$ такое, что $\forall x \in L_2[0,1]$ такого, что $\|x\| < \delta$ выполняется $\|F(x)\| < \varepsilon$. Это означает, что отображение непрерывно в точке x_0.

Задача №2. Является ли отображение $F: L[0,1] \to L[0,1]$ непрерывным, если $F(x) = x^2(t)$.

Решение: Покажем, что данное отображение не является непрерывным в нуле, т.е. $\exists \varepsilon_0 > 0$, что $\forall \delta > 0 \ \ \exists x \in L_2[0,1], \|x\| < \delta$, но $\|F(x)\| \ge \varepsilon_0$.

Пусть $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{3}$. Рассмотрим последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}(1 - nt), t \in [0, 1/n[, \\ 0 \qquad\qquad ,t \in [1/n, 1], \end{cases}$$

которая сходится к нулю. Действительно, $\|x_n(t)\|_{L[0,1]} = \int_0^1 |x_n(t)|dt$

$$= \int_0^{1/n} \left|\sqrt{n}(1-nt)\right|dt = = \sqrt{n}\int_0^{1/n}|1-nt|dt =$$

$$\sqrt{n}\int_0^{1/n}(1-nt)dt = [1-nt=z] = \sqrt{n}\int_1^0 z\frac{dz}{-n} = -\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{z^2}{2}\bigg|_1^0 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Покажем, что $F(x_n)$ к нулю не стремится.

$$\|F(x_n)\|_{L[0,1]} = \int_0^1 |F(x_n)|dt = \int_0^1 x_n^2(t)dt = \int_0^{1/n} n(1-nt)^2\,dt = n\int_1^0 z^2\frac{dz}{-n} = \int_0^1 z^2dz = \frac{1}{3};$$

Таким образом, F не является непрерывным.

Задача №3. Является ли отображение $F: C[0,1] \to C[0,1]$ непрерывным, равномерно непрерывным, удовлетворяющим условию Липшица, если

$$F(x) = \sqrt[3]{|x(t)|}.$$

Решение: Докажем, что отображение F является равномерно непрерывным, т.е. $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta(\varepsilon)$ такое, что $\forall\, x, y \in C[0,1]$ из условия $\|x-y\| = \max\limits_t |x(t)-y(t)| < \delta$ следует, что

$$\|F(x)-F(y)\| = \max_t |F(x)-F(y)| = \max_t \left|\sqrt[3]{|x(t)|} - \sqrt[3]{|y(t)|}\right| < \varepsilon\,.$$

Сначала покажем, что для любых вещественных неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство:

$$\left|\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right| \le \sqrt[3]{|a-b|}$$

Пусть для определенности $a>b$, тогда $|a-b| = a-b$ и $\left|\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right| = \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$. Значит, требуется доказать неравенство

$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\le\sqrt[3]{a-b}$, которое эквивалентно $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^3\le a-b$. Упростим его, получим неравенство $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\ge 0$, которое справедливо.

Так как $\left|\sqrt[3]{|x(t)|}-\sqrt[3]{|y(t)|}\right|\le\sqrt[3]{\big||x(t)|-|y(t)|\big|}\le\sqrt[3]{|x(t)-y(t)|}$, то $\max\limits_t|F(x)-F(y)|\le\quad\le\sqrt[3]{\max\limits_t|x(t)-y(t)|}<\sqrt[3]{\delta}$. И если $\delta=\varepsilon^3$, то $\|F(x)-F(y)\|<\varepsilon\quad\forall\, x,y$ таких, что $\|x-y\|<\delta$.

Поскольку отображение равномерно непрерывно, то оно и непрерывно.

Докажем, что F не удовлетворяет условию Липшица, т.е. $\forall\, c>0$ существуют непрерывные функции $x(t),y(t)$ такие, что $\|F(x)-F(y)\|\ge c\|x-y\|$.

Пусть $x_n=\dfrac{1}{n}$, $\quad y_n=\dfrac{2}{n}$, тогда $\|x-y)\|=\dfrac{1}{n}$, а $\|F(x)-F(y)\|=\sqrt[3]{\dfrac{2}{n}}-\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}}=$

$=\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)=n\dfrac{1}{n}\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)=\dfrac{1}{n}n^{2/3}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)=n^{2/3}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\|x-y\|$. Так как $n^{2/3}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$, то существует такое n, что $n^{2/3}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)>c$, что и требовалось доказать.

<u>Задача №4.</u> Является ли отображение $F:l_2\to l_2$ сжимающим. Найти x_3, где $x_n=F(x_{n-1})\quad x_0=\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\ldots,\dfrac{1}{n},\ldots\right)$ и оценить расстояние от x_3 до неподвижной точки, если $F(x)=\left(0,\dfrac{1}{2}x_1,\dfrac{1}{2}x_2,\ldots,\dfrac{1}{2}x_n,\ldots\right)+(1,1,1,0,\ldots)$.

<u>Решение:</u> По определению отображение $F:l_2\to l_2$ называется сжимающим, если существует постоянная $0\le\alpha<1$ такая, что $\forall\, x,y\in l_2$ выполнено $\|F(x)-F(y)\|\le\alpha\|x-y\|$.

Вычислим

$$\|F(x)-F(y)\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^2 |x_k - y_k|^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k - y_k|^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\|x-y\|.$$

Следовательно, $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$ и отображение F является сжимающим. Найдем последовательные приближения x_1, x_2, x_3.

$$x_1 = F(x_0) = \left(0, \frac{1}{2}\cdot 1, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-1}, \ldots\right) + (1,1,1,0,0,\ldots)$$

$$= \left(1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2(n-1)}, \ldots\right)$$

$$x_2 = F(x_1) = \left(0, \frac{1}{2}\cdot 1, \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}, \ldots, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2(n-1)}, \ldots\right) + (1,1,1,0,0,\ldots)$$

$$= \left(1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{5}{8}, \ldots, \frac{1}{4(n-2)}, \ldots\right)$$

$$x_3 = F(x_2) = \left(0, \frac{1}{2}\cdot 1, \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{4}, \ldots, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4(n-2)}, \ldots\right) + (1,1,1,0,0,\ldots)$$

$$= \left(1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{7}{8}, \frac{5}{16}, \frac{1}{24}, \ldots, \frac{1}{8n(n-3)}, \ldots\right)$$

Оценим расстояние от x_3 до неподвижной точки a отображения F:

$$\|x_3 - a\| \le \frac{\alpha^3}{1-\alpha}\cdot\|x_0 - x_1\| = \frac{\left(1/2\right)^3}{1-1/2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(1)} - x_k^{(0)}\right|^2\right)^{1/2} = \frac{1}{8}\cdot 2*$$

$$*\left(|1-1|^2 + \left|\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{5}{4}-\frac{1}{3}\right|^2 + \left|\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right|^2 + \ldots + \left|\frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{k}\right|^2 + \ldots\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(1 + \left(\frac{11}{12}\right)^2 + \sum_{k=4}^{\infty}\left(\frac{k-2}{2k(k-1)}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Задача №5. Показать, что отображение $F: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ является сжимающим, где $F(x) = \frac{1}{4} x\left(\sqrt[4]{t}\right) + t$. Вычислить x_3, если $x_0(t) = 0$.

Решение: Вычислим $\|F(x) - F(y)\|_{L_2[0,1]} =$

$$\left(\int_0^1 \left|\frac{1}{4} x\left(\sqrt[4]{t}\right) + t - \frac{1}{4} y\left(\sqrt[4]{t}\right) - t\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{4}\int_0^1 |x(z) - y(z)|^2 \cdot 4z^3 dz\right) = \frac{1}{4}\sqrt{4}\left(\int_0^1 |x(z) - y(z)|^2 \cdot \max_{z \in [0,1]} \left|z^3\right| dz\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{\sqrt{4}}{4} \cdot \left(\int_0^1 |x(z) - y(z)|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\|x - y\|_{L_2[0,1]}$$

Значит, $\alpha = \frac{1}{2}$, $x_{n'}(t) = F(x_0) = t$;

$$x_2(t) = F(x_1) = \frac{1}{4} x_1(\sqrt[4]{t}) + t = \frac{1}{4}\sqrt[4]{t} + t;$$

$$x_3(t) = F(x_2) = \frac{1}{4} x_2(\sqrt[4]{t}) + t = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\sqrt[4]{\sqrt[4]{t}} + \sqrt[4]{t}\right) + t = \frac{1}{16} t^{\frac{1}{16}} + \frac{1}{4} t^{\frac{1}{4}} + t \quad .$$

Задача №6. Найти с точностью до 0.01 приближенное решение уравнения

$$g(x) = x^2 - 100x + 10 = 0.$$

Решение: Приведем уравнение *g(x)=0* к уравнению вида *x=F(x)* и найдем точку x_0 и радиус *r* такие, что $B[x_0, r] = [a,b] = [x_0 - r, x_0 + r]$ инвариантен относительно *F* и в этом шаре отображение *F* - сжимающее.

Привести уравнение к виду *x=F(x)* можно следующим способом. Выражаем *x*:

$$x = 0.01(x^2 + 10) \Rightarrow F(x) = 0.01(x^2 + 10).$$

В качестве константы Липшица для дифференцируемой функции *F(x)* на отрезке *[a,b]* можно взять $\alpha = \max_{a \leq x \leq b} |F'(x)|$.

В нашем случае $F'(x) = 0.02x = \dfrac{x}{50}$. Условие $|F'(x)| < 1$ выполнено, если $|x| < 50$. Выберем точку x_0 в центре этого промежутка, т.е. $x_0 = 0$. Число *r*, радиус шара, выберем из двух условий

$$\begin{cases} \|x_0 - f(x_0)\| \le r(1 - \alpha(r)), \\ \alpha(r) < 1, \end{cases}$$

где $\alpha(r) = \max\limits_{-r \le t \le r} |f'(t)| = \dfrac{r}{50}$, тогда $x_1 = f(x_0) = \dfrac{1}{10}$.

Наши условия примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{10} \le r\left(1 - \dfrac{r}{50}\right), \\ \dfrac{r}{50} < 1, \end{cases}$$

Выберем одно из решений этой системы. Пусть *r*=1. Тогда отрезок [-1,1] инвариантен относительно отображения *F*, на нем *F* сжимающее и $\alpha = \dfrac{1}{50}$.

Оценим расстояние $\|x_n - a\| \le \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\| \le \left(\dfrac{1}{50}\right)^n \cdot \dfrac{50}{49} \cdot \dfrac{1}{10} \le \dfrac{1}{100}$.

Следовательно, $x_1 = \dfrac{1}{10}$ является приближенным решением уравнения с точностью до $\dfrac{1}{490}$.

<u>Задача №7.</u> При каких $\lambda \ne 0$ к интегральному уравнению Фредгольма второго рода $x(t) - \lambda \int\limits_0^1 ts^2 x(s)ds + t$ применим принцип сжимающих отображений в *C*[0,1] пространстве и в пространстве $L_2[0,1]$? При $\lambda = \dfrac{1}{2}$ найти решение с точностью до 0.01 и сравнить его с точным решением.

<u>Решение:</u> Обозначим через $F(x) = \lambda \int\limits_0^1 ts^2 x(s)ds + t$. Тогда наше уравнение запишется в виде *x=F(x),* то есть искомое решение есть неподвижная точка отображения *F*. Поскольку оба пространства *C*[0,1] и $L_2[0,1]$ являются

полными, то для того, чтобы применить принцип сжимающих отображений нужно показать, что F - сжимающее отображение пространства в себя.

Рассмотрим пространства $C[0,1]$.

Обозначим через $Z(t)=\lambda\int_0^1 ts^2x(s)ds,\quad Y(t)=t$, тогда $F(x)=Z(t)+Y(t)$ и для проверки непрерывности F достаточно проверить, что $Z(t)$ непрерывна.

$Z(t)=\lambda t\int_0^1 s^2x(s)ds=\lambda Ct$, где $C=\int_0^1 s^2x(s)ds$ - некоторая постоянная, так как определенный интеграл сходится. Значит, $Z(t)=\lambda Ct$ - непрерывный функционал. Таким образом F - отображение $C[0,1]$ в себя.

Проверим, является ли отображение F сжимающим, то есть $\exists\alpha\quad 0\le\alpha<1$ такое, что $\forall x,y\in C[0,1]\quad \max\limits_{0\le t<1}|F(x)-F(y)|\le\alpha\max\limits_{0\le t<1}|x(t)-y(t)|$. Оценим $\max\limits_{0\le t<1}|F(x)-F(y)|=$

$$=\max_{0\le t<1}\left|\int_0^1\lambda ts^2\left(x(s)-y(s)\right)ds\right|\le|\lambda|\int_0^1|s|^2\max_{0\le t<1}|x(t)-y(t)|ds\le|\lambda|\cdot\frac{1}{3}\cdot\|x-y\|.$$

Обозначим через $\alpha=\frac{|\lambda|}{3}$. Следовательно, отображение F является сжимающим, если ($|\lambda|<2$, то есть $-3\le\lambda\le 3$. При этих значениях λ к интегральному уравнению Фредгольма можно применить теорему Банаха, согласно которой уравнение имеет единственное решение.

Оценим количество приближений из формулы

$$\|x_n-a\|\le\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_0-x_1\|;$$

Имеем $\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\max\limits_{0\le t<1}|x_0(t)-x_1(t)|<0.01$

В нашем случае $\alpha=\frac{1}{6}$, пусть $x_0(t)=0$, тогда $x_1(t)=F(x_0)=t$;

$\|x_1-x_0\|=\max\limits_{0\le t<1}|t-0|=1$. Значит $\left(\frac{1}{6}\right)^n\cdot\frac{6}{3}<0.01$. Откуда получаем неравенство на $n: 6^{-n} < \dfrac{3}{400}$, таким образом по крайней мере x_4 является решением данного уравнения с точностью 0.01.

Найдем x_2, x_3, x_4.

$$x_2(t) = F(x_1) = \frac{1}{2}\int_0^1 ts^2 x_1(s)ds + t = \frac{1}{2}t\int_0^1 s^2 s ds + t = \frac{1}{2}t\cdot\frac{1}{4} + t = \frac{1}{8}t + t;$$

$$x_3(t) = F(x_2) = \frac{1}{2}t\int_0^1 s^2\left(\frac{1}{8}s + s\right)ds + t = \frac{1}{2}t\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + t = \frac{1}{2}t\cdot\frac{9}{32} + t = \frac{9}{64}t + t;$$

$$x_4(t) = F(x_3) = \frac{1}{2}t\int_0^1 s^2\left(\frac{9}{64}s + s\right)ds + t = \frac{1}{2}t\left(\frac{9}{64}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + t = \frac{73}{128}t + t;$$

Итак, приближенное решение данного уравнения имеет вид

$$x_4(t) = \frac{73}{128}t + t;.$$

Найдем точное решение данного уравнения, так как это уравнения с вырожденным ядром. Обозначим через $C = \int_0^1 s^2 x(s)ds$.

Тогда $x(t) = \int_0^1 ts^2 x(s)ds + t$, поэтому $C = \int_0^1 s^2\left(\frac{1}{2}Cs + s\right)ds$

$$C\left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow C = \frac{2}{7};$$

Значит, точное решение имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}t + t = \frac{2}{14}t + t.$$

Сравним его с приближенным $x_4(t)$:

$$\max_{0\le t\le 1}\left|\frac{73}{512}t + t - \frac{2}{14}t - t\right| = \max_{0\le t\le 1}\left|\left(\frac{73}{512} - \frac{2}{14}\right)t\right| = \left|\frac{73}{512} - \frac{2}{14}\right| < \frac{1}{100};$$

Проведем аналогичные расчеты для пространства $L_2[0,1]$. Обозначим через $K(t,s) = \lambda ts^2$. Тогда

$$\int_0^1\int_0^1 |K(t,s)|^2 dsdt = |\lambda|^2\int_0^1\int_0^1 t^2 s^4 dsdt = |\lambda|^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} = |\lambda|^2\cdot\frac{1}{15} < +\infty .$$

Таким образом *F(x)* отображает $L_2[0,1]$ в себя и является сжимающим, если $|\lambda|\cdot\frac{1}{\sqrt{15}}<1 \Rightarrow |\lambda|<\sqrt{15}$ к данному уравнению можно применить принцип сжимающих отображений. В этом случае понадобится число итераций, определяемое соотношением

$$\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{15}}\right)^n}{1-\frac{1}{2\sqrt{15}}}\cdot\left(\int_0^1 |x_1(t)-x_0(t)|^2 dt\right)^{1/2}<0.01$$

т.е. $\frac{1}{\left(2\sqrt{15}\right)^n}\cdot\frac{2\sqrt{15}}{2\sqrt{15}-1}\cdot\left(\int_0^1 t^2 dt\right)^{1/2}=\frac{1}{\left(2\sqrt{15}\right)^{n-1}\cdot\left(2\sqrt{15}-1\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}<0.01$

Откуда *n=3*.

<u>Задача №8.</u> Доказать, что последовательность цепных дробей $2, 2+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}, \ldots$ сходится. Найти ее предел.

Решение: Используем принцип сжимающих отображений в *R* и определим $x_1=2, x_2=2+\frac{1}{x_1}, \ldots, x_n=2+\frac{1}{x_{n-1}}$ $(n\ge 2)$. Заметим, что $x_n\le\frac{5}{2}$ $\forall n\ge 1$, а так как $x_n=2+\frac{1}{2+\frac{1}{x_{n-2}}}$, $(n\ge 3)$, то $x_n\le\frac{5}{2}$ $\forall n\ge 1$. Кроме того $x_n\ge 2$.

Рассмотрим отображение $f(x)=2+\frac{1}{x}$ отрезка $\left[2,\frac{5}{2}\right]$ на себя. Оно является сжимающим, так как $|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|\le\frac{1}{4}|x-y|$, поэтому имеет единственную неподвижную точку $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \dfrac{1}{x_{n-1}}\right)$. Решая уравнение $x^* = 2 + \dfrac{1}{x^*}$, имеем $x^* = 1 + \sqrt{2}$.

Таким образом последовательность цепных дробей сходится, ее предел $1 + \sqrt{2}$.

ТЕМА 5. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Основные понятия: скалярное произведение, пространство со скалярным произведением, полнота пространства со скалярным произведением. ортонормированные системы, процесс ортогонализации Грамма-Шмидта, разложение гильбертова пространства в прямую сумму, аппроксимация в гильбертовом пространстве.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача № 1. Для функции e^t найти многочлены степени $n = 0,1,2$ такие, что $\left\| e^t - l_n(t) \right\|$ минимальна в пространстве $L_2[-1,1]$.

Решение: Рассмотрим многочлены 1, t, t^2. Они образуют линейно независимую систему. Применим к ним в пространстве $L_2[-1,1]$ процесс ортогонализации Грамма-Шмидта и построим ортонормированную систему полиномов Лежандра $p_o(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$.

$$l_o = 1; \quad p_o = \frac{l_o}{\|l_o\|} = \frac{1}{\left(\int\limits_{-1}^{1} 1^2\, dt\right)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$l_1 = t - \alpha_{10} l_0, \quad \alpha_{10} = \frac{(l_1, t)}{(l_0, l_0)} = \frac{\int\limits_{-1}^{1} t \cdot 1 \cdot dt}{\int\limits_{-1}^{1} 1 dt} = 0; \quad p_1(t) = \frac{l_1}{\|l_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}} t;$$

$$l_2 = t^2 - \alpha_{20} l_0 - \alpha_{21} l_1; \quad \alpha_{20} = \frac{(t^2,1)}{(1,1)} = \frac{1}{3}; \qquad \alpha_{21} = \frac{(t^2,t)}{(t,t)} = 0;$$

$$l_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}; \;\; p_2(t) = \frac{\sqrt{5}\cdot 3}{2\sqrt{2}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right).$$

По теореме о разложении в ряд Фурье отрезок ряда Фурье обладает экстремальным свойством. Значит, $\left\| e^t - l_0(t) \right\|$ будет минимальна, если $l_0(t)$ является проекцией элемента e^t на подпространство, порожденное элементом $p_o(t)$. По теореме о разложении в ряд Фурье элемента $x(t)$ имеем

$$\Pr_{L(l_1,\ldots,l_n)} x = \sum_{k=1}^{n} c_k l_k .$$

Поэтому $l_o(t) = \left(e^t, p_o\right)\cdot p_o = \left(\int_{-1}^{1} e^t \cdot 1dt\right)\cdot 1 = \dfrac{e^2-1}{2e}.$

Аналогично определяется $l_1(t)$ и $l_2(t)$:

$$l_1(t) = \left(e^t, p_o\right)p_o + \left(e^t, p_1\right)p1 = \frac{e^2-1}{2e} + \frac{3}{e}t;$$

$$l_2(t) = \left(e^t, p_o\right)p_o + \left(e^t, p_1\right)p1 + \left(e^t, p_2\right)p_2 = -2l + \frac{17}{e} + \frac{15}{4}\cdot\frac{e^2-7}{e}\cdot t^2 + \frac{3}{e}t;$$

<u>Задача № 2.</u> В гильбертовом пространстве бесконечных числовых последовательностей l_2 найти проекцию вектора $x_o\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots\right)$ на подпространство $L = \left\{\alpha x + \beta y, \;\; \alpha, \beta \in R, \;\; x = \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7^2}, \ldots\right), \;\; y = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8^2}, \ldots\right)\right\}$,

<u>Решение:</u> Обозначим через z проекцию вектора x на подпространство L, тогда $z = \alpha x + \beta y$ и $x_o - z \perp L$, т.е. $\left(x_o - z, x\right) = 0$ и $\left(x_o - z, y\right) = 0$.

Из условия ортогональности для определения коэффициентов α и β получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \alpha\,(x,x) + \beta\,(y,x) = (x_o, x) \\ \alpha\,(x,y) + \beta\,(y,y) = (x_o, y) \end{cases}$$

Рассчитаем коэффициенты системы.

$$(x,x)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k x_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{7^{2k}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{49^k}=\frac{1}{48};$$

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k y_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{7^k}\cdot\frac{1}{8^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{56^k}=\frac{1}{55};$$

$$(y,y)=\sum_{k=1}^{\infty}y_k y_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{8^{2k}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{64^k}=\frac{1}{63};$$

$$(x_o,x)=\sum_{k=1}^{\infty}x_{ok} x_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{7^k}\cdot\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{14^k}=\frac{1}{13};$$

$$(x_o,y)=\sum_{k=1}^{\infty}x_{ok} y_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{8^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{16^k}=\frac{1}{15};$$

Система примет вид

$$\begin{cases}\frac{1}{48}\alpha+\frac{1}{55}\beta=\frac{1}{3}\\ \frac{1}{55}\alpha+\frac{1}{63}\beta=\frac{1}{15}\end{cases},$$

Решая систему по правилу Крамера, получим

$$P_L x_o=-\frac{1056}{13}x-\frac{1155}{13}y;$$

<u>Задача № 3.</u> Найти ортогональное дополнение в пространстве бесконечных числовых последовательностей l_2 к подпространству $L_n=\left\{x\in l_2:\ \ x(x_1,\dots,x_n,\dots),\ \ \sum_{i=1}^{n}x_i=0\right\}$. Вычислить расстояние от $x_o=(1,0,\dots)$ до L_n.

Решение: Ортогональное дополнение к подпространству L_n представляет собой одномерное подпространство, натянутое на вектор $a_n=\left(\underbrace{1,\dots,1}_{n},0,\dots\right)$.

Действительно, пусть $x\in L_n,\ y\in L_n^{\perp}$, тогда $y=\alpha\ a_n$ и

$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i = \alpha \sum_{i=1}^{\infty} x_i a_n = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i = \alpha \cdot 0 = 0$. Расстояние от точки x_0 до подпространства вычисляется по формуле $\rho(x_0, L) = \dfrac{(x_0, a)}{\|a\|}$. Значит, $\rho(x_0, L) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

<u>Задача № 4.</u> Доказать, что если

$$M_m = \left\{ y = (y_1, \ldots, y_m, 0, \ldots) : \sum_{i=1}^{m} y_i = 0 \right\},$$

$$N_m = \left\{ z = (z_1, \ldots, z_n, \ldots) \in l_2 : \quad z_n = 0 \quad \forall\, n > 1 \right\},$$

то при $\forall\, n \quad l_2 = M_m \oplus N_m$. Будет ли N_m ортогональным дополнением к M_m?

Решение: Пусть $x \in l_2, y \in M_m, z \in N_m$ и имеет место формула $l_2 = M_m \oplus N_m$, тогда $\forall\, n \in N \;\; x_n = y_n + z_n$. Из этой системы следует, что $\forall\, n > 1 \quad x_n = y_n$. Выразим y_1 и z_1 через x. Воспользуемся соотношениями

$y_1 + \ldots + y_m = 0, \quad x_1 = y_1 + z_1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -y_2 - \ldots - y_m = -x_2 - \ldots - x_m$, тогда $z_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$.

Таким образом, $l_2 = M_m \oplus N_m$. N_m не является ортогональным дополнением подпространства M_m ни при каком $m > 1$, т.к. при $y = (1, -1, 0, \ldots) \in M_m, \quad z = (1, 0, \ldots) \in N_m, \quad m = 2, 3, \ldots \quad (y, z) = 1 \neq 0$.

ТЕМА 6. КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА

<u>Основные понятия</u>: открытое покрытие множества, сходящиеся последовательности, ε-сеть множества, относительно компактные множества, теорема Хаусдорфа, теорема Арцела-Асколи, критерий относительной компактности в пространствах l_p, $L_p[a,b]$ ($p \geq 1$).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

Задача № 1. Выяснить, является ли относительно компактным в пространстве $C[0,1]$ множество функций

$$M = \left\{ x \in C[0,1]: \ |x(0)| \le 1, \ |x''(t)| \le 4 \quad \forall\ t \in [0,1] \right\}.$$

Решение. Множество M в пространстве $C[0,1]$ относительно компактно, если оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Данное множество не является равномерно ограниченным, так как $\exists\, x_n(t) = nt \in C[0,1]$, что $\forall\ c > 0 \quad \|x_n(t)\|_{C[0,1]} = n$ и поскольку $n \in N$, то норму $x_n(t)$ можно сделать больше любой наперед заданной константы c.

Задача № 2. Будет ли относительно компактным в $C[0,1]$ множество функций

$$M = \left\{ x \in C[0,1]: \ x(t) = \sin nt, \ n \in N \right\}?$$

Решение. По определению множество M является равностепенно непрерывным, если $\forall\ \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta(\varepsilon)$ такое, что $\forall\ t_1, t_2: \ |t_1 - t_2| < \delta$ вытекает, что $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon \quad \forall\ x(t) \in M$. Покажем, что наше множество не является равностепенно непрерывным, т.е. $\exists\, \varepsilon_0 = 1$ такое, что какое бы $\delta_n = \dfrac{2}{n}$ мы не взяли, найдутся точки $\exists\, t_1 = 0, \ t_2 = \dfrac{\pi}{2n}$, что хотя $|t_1 - t_2| < \delta_n$, но $|x(t_1) - x(t_2)| \ge \varepsilon_0$.

Действительно, $|t_1 - t_2| = \dfrac{\pi}{2n} < \dfrac{2}{n}$ и $|x(t_1) - x(t_2)| = \left| \sin \dfrac{\pi}{2n} \cdot n \right| = 1 = \varepsilon_0$; значит, M не относительно компактное.

Задача № 3. Выяснить, является ли относительно компактное множество M в пространстве $C[0,1]$, где $M = \left\{ x \in C[0,1]: \ |x(t)| \le 1, \ |x''(t)| \le 4 \right\}$.

Решение. Используя теорему Арцела, покажем, что M равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно.

1) M равномерно ограниченно, если $\exists c > 0$ такое, что $\|x\| \leq c$ $\forall x \in M$.

Пусть $c = 1$, тогда $\|x\| = \max_t |x(t)| \leq 1 \ \forall x \in M$.

2) M равностепенно непрерывно, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$\forall t_1, t_2 \in [0,1]$ и $|t_1 - t_2| < \delta$ вытекает, что $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ для всех

$x(t) \in M$.

Для доказательства равномерной непрерывности покажем, что ограничена первая производная функция $x(t)$. Воспользуемся равенством:

$x'(t) = \int_0^t x''(\tau)d\tau + x'(0)$; тогда $|x'(t)| \leq \int_0^t |x''(\tau)|d\tau + |x'(0)| \leq 4 + |x'(0)|$.

Покажем, что $x'(0)$ ограничена. Имеем

$$x(t) - x(0) = \int_0^t x'(\tau)d\tau = \int_0^t \left(x'(\tau) - x'(0) + x'(0)\right)d\tau = \int_0^t \left(x'(\tau) - x'(0)\right)d\tau +$$

$$+ \int_0^t x'(0)d\tau = \int_0^t \int_0^\tau x''(s)\,ds + tx'(0).$$

Тогда $tx'(0) = x(t) - x(0) - \int_0^t \int_0^\tau x''(s)\,ds$ и поэтому $\forall t \in [0,1]$

$$|tx'(0)| = |x(t)| - |x(0)| - \int_0^t \int_0^\tau |x''(s)|\,ds \leq 1 + 1 + 4 = 6.$$

А это означает, что $|x'(0)| \leq 6$. Следовательно, $|x'(t)| \leq 4 + 6 = 10$.

Пусть $\forall t_1, t_2 \in [0,1]$ такие, что $|t_1 - t_2| < \delta$, тогда

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq |x'(\tau)||t_1 - t_2| \leq 10\delta < \varepsilon.$$

В этом случае $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \dfrac{\varepsilon}{10}$, что $\forall\, t_1, t_2$ $|t_1 - t_2| < \delta$ вытекает, что $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$. А это означает равностепенную непрерывность множества *M*.

Таким образом, *M* – относительно компактно.

Задача № 4. Выяснить, является ли множество *M* относительно компактным в $C[0,2]$, где $M = \{ x \in C[0,1]: |x(t)| \le 1, \forall\, t \in [0,1]\}$.

Решение. Функции вида $x_n(t) = \sin 2n\pi t,\ n = 1,2,...$ принадлежат множеству *M*, но последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ не содержит последовательности Коши, так как при *k*>*n*

$$\|x_n - x_k\| = \max_{0 \le t \le 1} |x_n(t) - x_k(t)| \ge \left| x_n\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) - x_k\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) \right| = 1.$$

По определению, множество *M* не относительно компактно.

Задача № 5. Выяснить, будет ли множество *M* компактным в $C[0,1]$, если $M = \{ x(t) \in C[0,1]: x(0) = 0, x(1) = 1, |x(t)| \le 1 \quad \forall\, t \in [0,1]\}$.

Решение. Рассмотрим отображение $f: C[0,1] \to R$, где $f(x) = \int_0^1 x^2(t)dt$. Заметим, что $f(x) \ge 0$ для $\forall\, x(t) \in C[0,1]$. Данное отображение является равномерно непрерывным. Поэтому, если *M* компактно, то по теореме Вейерштраса $\exists\, x_0 \in M$, что $f(x_0) = \min_{x \in M} f(x)$. Пусть $x_n(t) = t^n, t \in [0,1], n \in N, x_n(t) \in M$ и $f(x_n) = \int_0^1 t^{2n}dt = \dfrac{1}{2n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Следовательно $f(x_0) = 0$. Поэтому $x_n(t) \to x_0(t)$ такой, что $\int_0^1 x_0^2(t)dt = 0$, но тогда $x_0(t) \equiv 0$. Однако $x_0(t) \equiv 0$ не принадлежит множеству *M*. А это означает, что *M* не компактно.

10 УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО КУРСУ.

10.1 Задания типового расчета

Задание №1. Можно ли в пространстве дважды непрерывно-дифференцируемых функций $C^2[a,b]$ на отрезке *[a,b]* принять за норму величину:

1.1. $|x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{c[a,b]}$;

1.2. $\|x''\|_{c[a,b]} + \|x\|_{CL_2[a,b]}$;

1.3. $|x(a)| + |x(b)| + \|x''\|_{c[a,b]}$;

1.4. $|x(a)| + \|x'\|_{c[a,b]} + \|x''\|_{CL[a,b]}$;

Можно ли в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций $C^1[a,b]$ на отрезке *[a,b]* принять за норму величину:

1.5. $\max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

1.6. $|x(b) - x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

1.7. $|x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

1.8. $\int\limits_a^b |x(t)|dt + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

Найти условия, при которых функция $\varphi(x)$ в пространстве l_2 определяет норму

1.9. $\varphi(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i^2\right)^{1/2}, \quad a_{i\geq 0}$;

1.10 $\varphi(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i x_i^2\right)^{1/2}, \quad a_{i\geq 0}, \quad m$ – фиксировано;

Определить, задает ли пара $(X,\|x\|)$ нормированное векторное пространство:

1.11. $X = \left\{x(t)\in C[a,b] \| x(a)=0\right\}, \quad \|x\| = \int\limits_a^b |x(t)|dt;$

1.12. $X = \left\{x(t)\in C^1[a,b] \| x(a)=x(b)\right\}, \quad \|x\| = \int\limits_a^{(a+b)/2} |x(t)|dt + \int\limits_{(a+b)/2}^{b} |x'(t)|dt;$

1.13. $X = \left\{x(t)\in C^1[a,b] \| x'(a)=0\right\}, \quad \|x\| = \int\limits_a^b |x'(t)|dt + |x(a)|;$

1.14. $X = \left\{x(t)\in C^1[a,b] \| x'(t)\leq 0\right\}, \quad \|x\| = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2};$

1.15. $X = \left\{x(t)\in C^2[a,b]\right\}, \quad \|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)| + \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$

Задание №2. Найти предел последовательности x_n в нормированном векторном пространстве $C[a,b]$, если он существует.

2.1. $a=0, \quad b=1, \quad x_n(t) = t^n - t^{n-1}$;

2.2. $a=0, \quad b=1, \quad x_n(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} - \dfrac{t^{n+2}}{n+2}$;

2.3. $a=0, \quad b=2, \quad x_n(t) = \sqrt{t^2 + \dfrac{1}{n^2}}$;

2.4. $a=1, \quad b=2, \quad x_n(t) = n\left(\sqrt{t+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{t}\right)$;

2.5. $a = 0, \quad b = 1, \quad x_n(t) = \dfrac{nt}{1 + n + t};$

2.6. $a = 0, \quad b = 1, \quad x_n(t) = \dfrac{2nt}{1 + n^2t^2};$

2.7. $a = 0, \quad b = 2, \quad x_n(t) = \sqrt[n]{1 + t^n};$

2.8. $a = 0, \quad b = 1, \quad x_n(t) = \dfrac{nt}{1 + n^2t};$

2.9. $a = 0, \quad b = \dfrac{1}{2}, \quad x_n(t) = 2^n t^n (1 - 2t);$

2.10. $a = {}^{1}\!/_{2}, \quad b = {}^{3}\!/_{2}, \quad x_n(t) = \dfrac{t^n}{1 + t^n};$

2.11. $a = -5\pi, \quad b = -4\pi, \quad x_n(t) = \dfrac{4\cos^{n/3} t}{5 + \cos^n t};$

2.12. $a = 0, \quad b = 3, \quad x_n(t) = \dfrac{3^n t^n - t^{2n}}{3^{2n}};$

2.13. $a = 0, \quad b = 1, \quad x_n(t) = \dfrac{nt}{\sqrt{n^2 + 1}};$

2.14. $a = 0, \quad b = 1, \quad x_n(t) = \sin\dfrac{t}{n};$

2.15. $a = 0, \ b = 1, \quad x_n(t) = \sin t - \sin\dfrac{t}{n}.$

Задание №3. Найти предел последовательности x_n в нормированном пространстве l_p, если он существует.

3.1. $x_n = \left(\underbrace{\left(\dfrac{3n+1}{3n+2}\right)^n, \ldots, \left(\dfrac{3n+1}{3n+2}\right)^n}_{n}, 0, \ldots \right), \qquad p = \dfrac{5}{2};$

3.2. $x_n = \left(\underbrace{\dfrac{1}{n^2}, \ldots, \dfrac{1}{n^2}}_{n}, 0, \ldots \right), \qquad p = \dfrac{3}{2};$

3.3. $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n},0,\dots\right), \qquad p = 1;$

3.4. $x_n = \left(\underbrace{\frac{\sin(n)}{n},\dots,\frac{\sin(n)}{n}}_{n},0,\dots\right), \qquad p = 1;$

3.5. $x_n = \left(1,\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\dots,\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\,0,\dots\right), \qquad p = 4;$

3.6. $x_n = \left(\underbrace{\sin\frac{\pi n}{12},\dots,\sin\frac{\pi n}{12}}_{n},0,\dots\right), \qquad p = \frac{5}{4};$

3.7. $x_n = \left(1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\dots,\sqrt[n]{n}\,0,\dots\right), \qquad p = \frac{14}{5};$

3.8. $x_n = \left(1,\frac{1}{\sqrt{2}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}},0,\dots\right), \qquad p = \frac{6}{5};$

3.9. $x_n = \left(\frac{n}{1+n},\frac{n}{1+2n},\dots,\frac{n}{1+kn},\dots\dots\right), \qquad p = 3;$

3.10. $x_n = \left(\frac{n^2}{1+n^2},\frac{n^2}{1+2n^2},\dots,\frac{n^2}{1+kn^2},\dots\dots\right), \qquad p = \frac{3}{2};$

3.11. $x_n = \left(\underbrace{0,\dots,0}_{n-1},\frac{1}{n^\sigma},\frac{1}{(n+1)^\sigma},\dots\right), \delta > 1,\ p = 1;$

3.12. $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n},0,\dots,0,1}_{n},0,\dots\right), p = 2;$

3.13. $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n^2},\dots,\frac{1}{n^2}}_{n^2},0,\dots\right), p = 4;$

3.14. $x_n = \left(1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},0,\dots\right), \quad p = 5;$

3.15. $x_n = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \ldots\right), \quad p = l_2$.

Задание №4. Определите, является ли данное множество замкнутым, открытым в пространстве $C[a,b], CL[a,b]$. Найдите его замыкание, внутренние и граничные точки в каждом указанном пространстве.

4.1. $M = \{x(t) | \ x(a)x(b) = 0\}$;

4.2. $M = \{x(t) | \ x(a) = x(b)\}$;

4.3. $M = \{x(t) \| x(t)| < 1, \forall \ t \in [a,b] \}$;

4.4. $M = \{x(t) | \ x(a) > 0\}$;

4.5. $M = \{x(t) \in C^1[a,b] | \ x(a) = 0\}$;

4.6. $M = \left\{x(t) \middle| \int\limits_a^b |x(t)| \, dt < 1\right\}$;

4.7. $M = \left\{x(t) \middle| \int\limits_a^b x(t) \, dt = 0\right\}$;

4.8. $M = \left\{x(t) \middle| \max\limits_{a \le t \le b} |x(t)| < 1\right\}$;

4.9. $M = \{x(t) | \ x(a) < 0\}$;

4.10. $M = \{x(t) \in C^1[a,b] | \ x'(t) < 0\}$;

4.11. $M = \{x(t) \in C^1[a,b] | \ x'(a) = 0\}$;

4.12. $M = \{x(t) \in C^1[a,b] | \ x'(a) > 0\}$;

4.13. $M = \{x(t) | \ x(t) = const\}$.

Задание 5. Для данного множества М выяснить,является ли множество $B = M \cap l_p$ открытым, замкнутым, ограниченным в l_p.

5.1. $M = \left\{x : x_k \le \frac{1}{k}, k = 1,2...\right\}, \quad p = 1$;

5.2. $M = \{x : 0 < x_k < 1, k = 1,2...\}, \quad p = \infty$;

5.3. $M = \{x : x_k > 0, k = 1,2...\}, \quad p = 2$;

5.4. $M = \left\{ x : \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k < 1, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2;$

5.5. $M = \{ x : x_1 = ... = x_n = 0, k = 1,2... \}, \quad p = 2;$

5.6. $M = \left\{ x : x_k \le \dfrac{1}{k}, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2;$

5.7. $M = \left\{ x : \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < 1, k = 1,2\ldots \right\}, \quad p = 1;$

5.8. $M = \{ x : 0 < x_k < 1, k = 1,2... \}, \quad p = 2;$

5.9. $M = \left\{ x : |x_k| \le \dfrac{1}{\sqrt[3]{k^2}}, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2;$

5.10. $M = \{ x : x_k > 0, k = 1,2... \}, \quad p = 4;$

5.11. $M = \left\{ x : |x_k| < \dfrac{1}{k}, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2;$

5.12. $M = \left\{ x : \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| < 1, k = 1,2\ldots \right\}, \quad p = 2;$

5.13. $M = \left\{ x : 0 \le x_k \le \dfrac{1}{k}, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2$

5.14. $M = \{ x : 0 \le x_k < 1, k = 1,2... \}, \quad p = \infty$.

Задание №6. Определите, являются ли две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентными в нормированном пространстве $C^2[a,b]$ два раза непрерывно-дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций.

6.1. $\|x\|_{C^2[a,b]}$ и $\|x\| = |x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a,b]}$;

6.2. $\|x\|_{C^2[a,b]}$ и $\|x\| = |x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]} + \|x''\|_{C[a,b]}$;

6.3. $\|x\|_{C^2[a,b]}$ и $\|x\| = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \|x''\|_{C[a,b]}$;

6.4. $\|x\|_1 = |x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a,b]}$ и

$\|x\|_2 = |x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]} + \|x''\|_{C[a,b]}$;

6.5. $\|x\|_1 = |x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a,b]}$ и

$$\|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \|x''\|_{C[a,b]};$$

6.6. $\|x\|_1 = |x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]} + \|x''\|_{C[a,b]}$ и

$$\|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \|x''\|_{C[a,b]};$$

Определите, являются ли две нормы эквивалентными в нормированном пространстве $C^1[a,b]$ непрерывно-дифференцируемых на отрезке [a,b] функций.

6.7. $\|x\|_{C^1[a,b]}$ и $\|x\| = |x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]}$;

6.8. $\|x\|_{C^1[a,b]}$ и $\|x\| = \int_a^b |x(t)| dt + \|x'\|_{C[a,b]}$;

6.9. $\|x\|_1 = |x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]}$ и $\|x\|_2 = \int_a^b |x(t)| dt + \|x'\|_{C[a,b]}$.

6.10. Доказать, что в $C[a,b]$ $\|x\|_{L[a,b]}$ эквивалентна норме

$\|x\| = \left(\int_a^b v(t)\, x^2(t)\, dt \right)^{1/2}$, где $v(t) \geq \alpha > 0$ и $v(t) \in C[a,b]$.

Доказать по определению эквивалентность норм в пространстве R^n

6.11. $\|x\|_k$ и $\|x\| = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \left(\alpha_k |x_k| \right)$;

6.12. . $\|x\|_C$ и $\sum$ $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{i} |x_k|^2 \right)^{1/2}$;

6.13. $\|x\|_D$ и $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k |x_k|$;

6.14. $\|x\|_k$ и $\|x\| = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \left| \sum\limits_{i=1}^{k} x_i \right|$;

Задание №7. Является ли последовательность x_n последовательностью Коши в пространстве E. Найти ее предел, если он существует.

7.1. $x_n(t) = \begin{cases} e^{-t/n}, & t \notin Q, \\ 0, & t \in Q. \end{cases}$, $E = L_2[0,1]$;

7.2. $x_n(t)=\begin{cases}\sin nt, & t\in Q\cap[-1,2],\\ \sqrt{t^2+\dfrac{1}{n^3}}, & t\in[-1,2]\setminus Q.\end{cases}$, $E=L_1[-1,2]$;

7.3. $x_n(t)=\begin{cases}ne^{nt}, & t\in K,\\ \dfrac{t^3}{n}, & t\in[0,1]\setminus K.\end{cases}$, $E=L_{3/2}[0,1]$;

7.4. $x_n(t)=\begin{cases}nt, & t\in[-2,0]\cap Q,\\ ne^{nt}, & t\in[-2,0]\setminus Q.\end{cases}$, $E=L_4[-2,0]$;

7.5. $x_n(t)=\begin{cases}\sqrt{t^2+\dfrac{1}{n^4}}, & t[-1,1]\setminus K,\\ \cos(n+t), & t\in[-1,1]\cap K.\end{cases}$, $E=L_2[-1,1]$;

7.6. $x_n(t)=\begin{cases}\left(\dfrac{t}{3}\right)^n, & t\in[0,3]\setminus Q,\\ \sin\pi nt, & t\in[0,3]\cap Q.\end{cases}$, $E=L_5[0,3]$;

7.7. $x_n(t)=\begin{cases}(n+t)^{-1}, & t\in[0,1]\setminus K,\\ \exp(n^2t), & t\in[0,1]\cap K.\end{cases}$, $E=L_{9/5}[0,1]$;

7.8. $x_n(t)=\begin{cases}\sin\dfrac{t}{n}, & t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\setminus Q,\\ \cos\dfrac{t}{n}, & t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\cap Q.\end{cases}$, $E=L_2\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$;

7.9. $x_n(t)=\begin{cases}\dfrac{\cos nt}{n}, & t\in[0,1]\setminus K,\\ \exp(\pi t^n), & t\in[0,1]\cap K.\end{cases}$, $E=L_{5/3}[0,1]$;

7.10. $x_n(t)=\begin{cases}(0.5t)^n, & t\in[0,2]\setminus K,\\ ne^{nt}, & t\in[0,2]\cap K.\end{cases}$, $E=L_{4/3}[0,2]$;

7.11. $x_n(t)=\begin{cases}(\sin t)^n, & t\in[0,1]\setminus Q,\\ (n+t)^{-1}, & t\in[0,1]\cap Q.\end{cases}$, $E=L_{9/2}[0,1]$;

7.12. $x_n(t)=\begin{cases} ne^{nt}, & t\in K, \\ \dfrac{t^2}{n}, & t\in[0,1]\setminus K. \end{cases}, E=L_2[0,1];$

7.13. $x_n(t)=\begin{cases} \sqrt{t^2+{}^1\!/_n}, & t\in[-1,1]\setminus K, \\ \sin(n+t), & t\in K. \end{cases}, \ E=L_2[-1,1];$

7.14. $x_n(t)=\begin{cases} \sqrt{t^2+{}^1\!/_n}, & t\in[-1,2]\setminus Q, \\ \sin n^2 t, & t\in[-1,2]\cap Q. \end{cases}, E=L_1[-1,2].$

Задание №8. Выяснить, является ли заданное пространство полным по указанной норме.

8.1. Пространство $C^1[a,b]$ непрерывно-дифференцируемых на отрезке [*a*, *b*] функций с нормой $\|x\|=\max\limits_t|x(t)|+\max\limits_t|x'(t)|$;

8.2. Пространство $C^1[a,b]$ с нормой $\|x\|=\int\limits_a^b|x(t)|+\max\limits_t|x'(t)|$;

8.3. Пространство $C^1[0,1]$ с нормой $\|x\|=\max\limits_{0\le t\le 1/2}|x(t)|+\max\limits_t|x'(t)|$;

8.4. Пространство l_2 числовых последовательностей $x=(x_1,\dots,x_n,\dots,)$, для которых выполняются следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2<+\infty \quad \text{с нормой} \quad \|x\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{1/2};$$

8.5. Пространство $C^1[a,b]$ с нормой $\|x\|=\max\limits_t|x'(t)|+|x(a)|$;

8.6. Пространство $C^1[a,b]$ с нормой $\|x\|=\int\limits_a^b|x'(t)|dt+|x(a)|$;

8.7. Пространство R^n столбцов $x=(x_k)_{k=1}^n$, $x_k\in R$ с нормой

$$\|x\|=\max_{1\le k\le n}(\alpha_k|x_k|),\ \alpha_k>0,\ k=1,2,\dots,n;$$

8.8. Пространство R^n столбцов $x=(x_k)_{k=1}^n$, $x_k\in R$ с нормой

$$\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k|x|_k^2\right)^{1/2},\ \alpha_k>0,\ k=1,2,\dots,n;$$

8.9. Пространство $C[0,1]$ непрерывных функций с нормой

$$\|x\| = \max_{0\le t\le 3/4}|x(t)| + \int_{1/2}^{1}|x(t)|\,dt;$$

8.10. Пространство $C^1[0,1]$ с нормой $\|x\| = \max_{0\le t\le 1}|x(t)| + \max_{0\le t\le 1/2}|x'(t)|$;

8.11. Пространство R^n столбцов $x = (x_k)_{k=1}^{n}$, $x_k \in R$ с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}|x_k|^2\right)^{1/2};$$

8.12. Пространство R^n столбцов $x = (x_k)_{k=1}^{n}$, $x_k \in R$ с нормой

$$\|x\| = \max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k} x_i\right|;$$

8.13. Пространство k непрерывных на R конечных функций (равных нулю за пределами некоторого промежутка, своего для каждой функции) с нормой

$$\|x\| = \max_{t}|x(t)|;$$

8.14. Пространство $m_\alpha = \{x(x_1,\ldots,x_n,\ldots\}, \sup\alpha_i|x_i| < +\infty, \alpha_i > 0$ с нормой

$$\|x\| = \sup_i \alpha_i|x_i|.$$

Задание №9. Проверить, сходится ли ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ в нормированном пространстве E.

9.1. $x_k(t) = \dfrac{4^k t^k - t^{2k}}{4^{2k}}$, $E = C[0,1]$;

9.2. $x_k(t) = \dfrac{t^k}{k} - \dfrac{t^{k+1}}{k+1}$, $E = C[0,1]$;

9.3. $x_k(t) = \dfrac{1}{t^2 + n^2}$, $E = C[0,1]$;

9.4. $x_k(t) = t^2 e^{-kt}$, $E = C[0,1]$;

9.5. $x_k(t) = \dfrac{t}{1 + n^4 t^2}$, $E = C[0,1]$;

9.6. $x_k(t) = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\left(k^2 + e^t\right)^{-1/3}$, $E = C[-10,10]$;

9.7. $x_k(t) = \dfrac{1}{k+t}, \qquad E = L_{4/3}[1,2];$

9.8. $x_k(t) = \dfrac{\cos kt}{k^2}, \qquad E = L_1[-3\pi, 2\pi];$

9.9. $x_k(t) = \dfrac{\sin kt}{k^2}, \qquad E = L_1[-3\pi, 2\pi];$

9.10. $x_k(t) = \left(\underbrace{\dfrac{(-1)^k}{k},\dots,\dfrac{(-1)^k}{k}}_{k},0,\dots\right), \qquad E = l_1;$

9.11. $x_k(t) = \left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},\dots,\dfrac{1}{3^k}\right), \qquad E = l_{3/2};$

9.12. $x_k(t) = \left(\underbrace{\dfrac{k}{2^k},\dots,\dfrac{k}{2^k}}_{k},0,\dots\right), \qquad E = m;$

9.13. $x_k(t) = \left(\underbrace{\dfrac{\sin k}{k},\dots,\dfrac{\sin k}{k}}_{k},0,\dots\right), \qquad E = l_{5/3};$

9.14. $x_k(t) = \left(\underbrace{\dfrac{k^2}{3^k},\dots,\dfrac{k^2}{3^k}}_{k},0,\dots\right), \qquad E = m.$

Задание №10. Определите, при каких $\lambda \neq 0$ для следующих интегральных уравнений Фредгольма второго рода в пространстве $C[a,b]$, $L_2[a,b]$ можно применить метод сжимающих отображений. При $\lambda = \lambda_0$ найти приближенное решение методом последовательных приближений с точностью $\varepsilon = 0.001$, сравнить его с точным решением.

10.1. $a = 0,\ b = 1 \qquad x(t) = \lambda \int_0^1 ts^2 x(s)\,ds + 1;$

10.2. $a = 0,\ b = 1 \qquad x(t) = \lambda \int_0^1 e^{t-s} x(s)\,ds + 1;$

10.3. $a = 0,\ b = 1 \qquad x(t) = \lambda \int_0^1 \cos\pi(t-s)\, x(s)\,ds + 1;$

10.4. $a = 0, b = 1$ $\quad x(t) = \lambda \int_0^1 \sqrt[3]{ts}\, x(s)\, ds + t^2;$

10.5. $a = 0, b = 1$ $\quad x(t) = \lambda \int_0^1 (t^2 - 1) s x(s)\, ds + t;$

10.6. $a = 0, b = 1$ $\quad x(t) = \lambda \int_0^1 \frac{t}{1+s} x(s)\, ds - 5;$

10.7. $a = 0, b = 1$ $\quad x(t) = \lambda \int_0^1 t^2 s\, x(s)\, ds + t;$

10.8. $a = -1, b = 1$ $\quad x(t) = \lambda \int_{-1}^1 (t^2 - 1) s x(s)\, ds + t;$

10.9. $a = -2, b = 1$ $\quad x(t) = \lambda \int_{-2}^1 (1+s)(1-t)\, x(s)\, ds + t;$

10.10. $a = 0, b = 1$ $\quad x(t) = \lambda \int_0^1 \sqrt{1-t}\, x(s)\, ds + 3;$

10.11. $a = -1, b = 1$ $\quad x(t) = \lambda \int_{-1}^1 s^{-1/3}\, x(s)\, ds + t^2;$

10.12. $a = -2, b = 3$ $\quad x(t) = \lambda \int_{-2}^3 t s^2\, x(s)\, ds + t^3;$

10.13. $a = 0, b = 1$ $\quad x(t) = \lambda \int_0^1 \sin\frac{\pi s}{2} \cos\frac{\pi t}{2}\, x(s)\, ds + \cos\frac{\pi t}{2};$

10.14. $a = -1, b = 1$ $\quad x(t) = \lambda \int_{-1}^1 t s\, x(s)\, ds + 2;$

10.15. $a = 0, b = 1$ $\quad x(t) = \lambda \int_0^1 t^2 s^2\, x(s)\, ds + t^3;$

10.16. $a = 0, b = \pi / 4$ $\quad x(t) = \lambda \int_0^{\pi/4} t\, \mathrm{tg} s\, x(s)\, ds + 1;$

10.17. $a = 0, b = \pi / 4$ $\quad x(t) = \lambda \int_0^{\pi/2} \sin t \cos s\, x(s)\, ds + \sin t;$

10.18. $a = 0, b = \pi$ $\quad x(t) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(t - 2s)\, x(s)\, ds + \cos(2t);$

10.19. $a = -1, b = 1$ $\quad x(t) = \lambda \int_{-1}^1 (ts - t^2 s^2)\, x(s)\, ds + t^4 + t^2;$

10.20. $a = 0,\ b = \pi$ $\qquad x(t) = 1\int_{0}^{p} \sin t \cos t\, x(s)\, ds + \sin t$;

Задание №11. Составьте и реализуйте на ЭВМ алгоритм решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода с задания №10 методом последовательных приближений, с учетом следующих этапов.

1) вычисление $\left\{ x_m(t_k),\ m = 1,2,...,\ k = 1,2,...,n \right\}$ по реккурентным соотношениям в равноотстоящих узлах $t_1, t_2, \ldots, t_n$;

2) вычисление интеграла по формуле Симпсона с шагом 0.05;

3) конечные результаты оформить в виде следующей таблицы:

t	приближенное решение	точное решение

4) напечатать величину погрешности приближения и номер последней итерации в пространствах $C[a,b]$, $L_2[a,b]$.

Задание №12. Вычислить приближенное решение следующих уравнений с точностью 0.01.

Указание: уравнение $g(x) = 0$ привести к виду $x = f(x)$ и найти точку x_0 и радиус r такие, что промежуток $[a, b]$, $a = x_0 - r$, $b = x_0 + r$ инвариантен относительно f и на этом промежутке отображение f - сжимающее.

12.1. $g(x) = 3x^2 - 18x + 11$;

12.2. $g(x) = 2x^2 + 16x - 9$;

12.3. $g(x) = 3x^2 - 10x - 14$;

12.4. $g(x) = 2x^2 + 8x - 3$;

12.5. $g(x) = 3x^2 - 100x + 5$;

12.6. $g(x) = x^2 - 5x + 4$;

12.7. $g(x) = 2x^2 + 8x + 5$;

12.8. $g(x) = 5x^2 - 18x + 4$;

12.9. $g(x) = 4x^2 + 12x - 1$;

12.10. $g(x) = x^3 + 5x^2 - 15x - 7$;

12.11. $g(x) = 3x^2 + 25x - 1$.

Задание №13. Определить, является ли отображение f нормированного пространства на себя сжимающим. Вычислить x_3, где $x_k = f(x_{k-1})$, $x_0 = 0$, и оценить расстояние от x_3 до неподвижной точки.

13.1. $E = C[-1, 1] \quad f(x)(t) = \frac{1}{3}\cos(x(t)) + e^t$;

13.2. $E = C[0, 1] \quad f(x)(t) = e^{x(t)} + \sin t$;

13.3. $E = L_2[0, 1] \quad f(x)(t) = \frac{1}{4}x\left(\sqrt[4]{t}\right) + t$;

13.4. $E = L_2[-1, 1] \quad f(x)(t) = \frac{1}{3}t^{1/9}x\left(\sqrt[3]{t}\right) + \sin t$;

13.5. $E = C[0, 1] \quad f(x)(t) = x(t) - \frac{1}{2}\sin t$;

13.6. $E = R^3 \quad f(x)(t) = \left(\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{8}x_3 + 1, \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + 2, -\frac{1}{4}x_3 - 3\right)$;

13.7. $E = l_2 \quad f(x)(t) = \left(0, \frac{1}{2}x(1) + \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}x(2) + \frac{1}{3}, \frac{1}{2^k}x(k) + \frac{1}{k+1}\right)$;

13.8. $E = L_2[0,1] \quad F(x) = \int_0^1 \frac{tx(s)}{\sqrt{s}}ds$;

13.9. $E = L_2[0,1] \quad F(x) = t^{-1/4}x(t)$;

13.10. $E = C[0,2] \quad F(x) = 2x\left(\frac{t}{2}\right)$;

13.11. $E = L_2[0,1] \quad F(x) = x\left(t^2\right)$;

13.12. $E = L_2[0,1] \quad F(x) = x\left(\sqrt{t}\right)$;

13.13. $E = L_2[-1,1] \quad F(x) = t^{1/3} x\left(\sqrt{t}\right) + \cos t;$

13.14. $E = L_2[0,1] \quad F(x) = \dfrac{1}{3}\sin x(t) + e^t.$

Задание №14. Выяснить, является ли отображение F: $X \to Y$ непрерывным, равномерно непрерывным, удовлетворяющим условию Липшица.

14.1. $F: C[0,1] \to C[0,1] \quad F(x) = x^3(t)$;

14.2. $F: C[0,1] \to C[0,1] \quad F(x) = \sqrt{|x(t)|}$;

14.3. $F: C[0,1] \to C[0,1] \quad F(x) = \dfrac{x(t)}{1 + x^2(t)}$

14.4. $F: C[-2,4] \to C[-2,4] \quad F(x) = x(t)\sin x(t)$;

14.5. $F: C[0,1] \to C[0,1] \quad F(x) = \sqrt[3]{|x(t)|}$;

14.6. $F: L[0,1] \to L[0,1] \quad F(x) = x^3(t)$;

14.7. $F: L[0,1] \to L[0,1] \quad F(x) = \int_0^1 e^t x(s)\,ds$;

14.8. $F: L \to L \quad F(x) = x\left(t^2\right)$;

14.9. $F: R \to R \quad F(x) = |x|^4$;

14.10. $F: R \to R \quad F(x) = \sqrt{|x|}$;

14.11. $F: C[0,1] \to R \quad F(x) = x(1)$;

14.12. $F: L_2[0,1] \to R \quad F(x) = x(1)$;

14.13. $F: L[0,1] \to C[0,1] \quad F(x) = x^2(t)$;

14.14. $F: L[0,1] \to C[0,1] \quad F(x) = \sqrt{|x(t)|}$.

Задание №15. Провести процесс ортогонализации векторов x_1, x_2, x_3 в гильбертовом пространстве $H_p[a, b]$, в котором скалярное произведения имеет вид:

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, p(t)\, dt .$$

15.1. $a = -1, b = 1, p(t) = 1; \quad x_1 = t, x_2 = 2t - t^2, x_3 = e^t;$

15.2. $a = -1, b = 1, p(t) = e^t; \quad x_1 = e^{-t}, x_2 = t + t^2, x_3 = t^2 + 1;$

15.3. $a = -2, b = 2, p(t) = 1; \quad x_1 = \cos\pi t, x_2 = \sin\pi t, x_3 = t - 8;$

15.4. $a = -\pi, b = \pi, p(t) = \cos t; \quad x_1 = \cos^2 t, x_2 = \sin t, x_3 = 1 + t;$

15.5. $a = 0, b = 1, p(t) = 1; \quad x_1 = 3t^2 - 2t, x_2 = 1, x_3 = 3t^2 - 1;$

15.6. $a = 0, b = 1, p(t) = t; \quad x_1 = t + 2, x_2 = t - 3, x_3 = e^t + 1;$

15.7. $a = -1, b = 1, p(t) = 1; \quad x_1 = \cos\pi t, x_2 = 1, x_3 = e^t + 1;$

15.8. $a = -1, b = 1, p(t) = t^2; \quad x_1 = t, x_2 = 1 - t^2, x_3 = t^3;$

15.9. $a = -\pi, b = \pi, p(t) = t^2; \quad x_1 = \cos t, x_2 = \sin t, x_3 = t;$

15.10. $a = 0, b = 1, p(t) = e^t; \quad x_1 = \sin t, x_2 = t, x_3 = e^t + 1;$

15.11. $a = -1, b = 1, p(t) = t^2; \quad x_1 = t + 1, x_2 = 3t^2, x_3 = t^3 + 1;$

15.12. $a = -1, b = 1, p(t) = e^t; \quad x_1 = t + 1, x_2 = 2t - t^2, x_3 = e^t - 1;$

15.13. $a = -1, b = 1, p(t) = t; \quad x_1 = e^t, x_2 = t + t^2, x_3 = t^2 + 1$

15.14. $a = -2, b = 2, p(t) = \cos\pi t; \quad x_1 = \cos^2\pi t, x_2 = \sin\pi t, x_3 = t - 8;$

15.15. $a = -\pi, b = \pi, p(t) = t^2; \quad x_1 = \cos t, x_2 = \sin t, x_3 = 1 + t;$

15.16. $a = 0, b = 1, p(t) = e^t; \quad x_1 = 3t^2 - 2t, x_2 = 1, x_3 = 3t^2 - 1;$

15.17. $a = 0, b = 1, p(t) = e^{-t}; \quad x_1 = t + 2, x_2 = t - 3, x_3 = e^t + 1;$

15.18. $a = -1, b = 1, p(t) = \cos^2\pi t; \quad x_1 = \cos\pi t, x_2 = 1, x_3 = e^t + 1;$

15.19. $a = 0, b = 1, p(t) = t^3; \quad x_1 = t, x_2 = 1 - t^2, x_3 = t^3$

15.20. $a = 0, b = 1, p(t) = e^t; \quad x_1 = 1, x_2 = t, x_3 = t^2;$

15.21. $a = 0, b = 1, p(t) = e^{-t}; \quad x_1 = 1, x_2 = t, x_3 = t^2.$

Задание №16. В гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим подпространство L многочленов степени $n \le 4$. Для заданной непрерывно-дифференцируемой функции $x(t)$ найти элемент наилучшей аппроксимации ее многочленами $u^*(t)$ подпространства L по норме $L_2[0,1]$. Реализовать на ЭВМ алгоритм решениая этой задачи со следующими этапами:

1) вычисление элементов матрицы и правых частей системы по формуле Симпсона с шагом 0.05;

2) решение системы методом Гаусса;

3) проверка правильности алгоритма на примере функции $x(t) = t^2$.

16.1. $x(t) = 3^t$;

16.2. $x(t) = \cos(\pi t)$;

16.3. $x(t) = e^t$;

16.4. $x(t) = \sin(\pi t)$;

16.5. $x(t) = \cos(2\pi t)$;

16.6. $x(t) = t\sqrt{t}$;

16.7. $x(t) = \sin(4\pi t)$;

16.8. $x(t) = \ln(1+t)$;

16.9. $x(t) = tg(t-0.5)$;

16.10. $x(t) = \left(1-2t^2\right)^3$;

16.11. $x(t) = \sin(2\pi t)$;

16.12. $x(t) = \ln\left(1+t^2\right)$;

16.13. $x(t) = 2^{1+t}$;

16.14. $x(t) = t^5$.

Задание 17. В гильбертовом пространстве L_2 найти проекцию элемента x_0 на подпространство L.

17.1. $x_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{3^k}, \ldots\right)$, $L = \left\{\alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in R; x_k = \frac{1}{5^k}, y_k = \frac{1}{6^k}\right\}$;

17.2. $x_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots\right)$, $L = \left\{\alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in R; x = (1,1,0,\ldots), y = (1,0,0,\ldots)\right\}$;

17.3. $x_0 = (0,1,1,2,0,\ldots)$, $L = \left\{x: \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{x_k}{2^k} = 0 \quad x_2 = 0\right\}$;

17.4. $x_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{3^k}, \ldots\right)$,

$L = \left\{\alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in R; x = (1,0,1,0,\ldots), y = (1,1,1,0,\ldots)\right\}$;

17.5. $x_0 = \left(1, 0, \frac{1}{2}, 0, 1, 0, \ldots\right)$, $L = \left\{x: \sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{x_k}{k} = 0 \quad x_1 - x_3 = 0\right\}$;

17.6. $x_0 = (1,1,0,\ldots)$ $L = \left\{x\colon\ x_2 + x_3 = 0, x_2 - x_4 = 0, \sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{x_{2k}}{k^2} = 0\right\}$;

17.7. $x_0 = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2^2}, \ldots, \dfrac{1}{2^k}, \ldots\right)$, $L = \left\{x\colon\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x_{2k+1}}{2^k} = 0 \quad x_1 - 2x_3 = 0\right\}$;

17.8. $x_0 = \left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{5^2}, \ldots, \dfrac{1}{5^k}, \ldots\right)$,

$L = \left\{\alpha x + \beta y\colon \alpha, \beta \in R; x = \left(1, \dfrac{1}{2}, \ldots, \dfrac{1}{2^k}\ldots\right), y = (1,0,1,0,0,\ldots)\right\}$;

17.9. $x_0 = \left(1,0,\dfrac{1}{2},0,\ldots,0,\dfrac{1}{2^k},0,\ldots\right)$

$L = \left\{\alpha x + \beta y\colon \alpha, \beta \in R; x = (0,1,1,0,\ldots), y = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots\right)\right\}$.

Найти $L^{\perp}$ к подпространству $L \subset L_2[-\pi, \pi]$

17.10. $L = L\left\{(e^{-\mathrm{int}}, n \in Z)\right\}$;

17.11. $L = L\left\{(e^{-\mathrm{int}}, n \geq 0)\right\}$;

17.12. $L = L\left\{(\sin nt, n \geq 1)\right\}$;

17.13. $L = L\left\{(\cos nt, n \geq 0)\right\}$.

Найти $L^{\perp}$ к подпространству $L \subset L_2[0,1]$

17.14. $L = L\left\{(e^{i2k\pi t}, k = \pm 2, \pm 3, \ldots)\right\}$;

17.15. $L = \left\{x(t) \in L_2[0,1], \int\limits_0^1 x(t)dt = 0\right\}$.

Задание №18. Являются ли относительно компактными следующие множества в пространстве $C[0,1]$?

18.1. $M = \left\{t^n\colon n \in N\right\}$;

18.2. $M = \left\{\sin(nt)\colon n \in N\right\}$;

18.3. $M = \left\{\sin(n + t)\colon n \in N\right\}$;

18.4. $M = \left\{\cos(n + t)\colon n \in N\right\}$;

18.5. $M = \left\{ \sin(\alpha\ t) : \alpha \in (0,1) \right\};$

18.6. $M = \left\{ arctg(\alpha\ t) : \alpha \in (0,1) \right\};$

18.7. $M = \left\{ e^{t-\alpha} : \alpha \geq 0 \right\};$

18.8. $M = \left\{ a\sin(b + t) : |a| < 10, b > 0 \right\};$

18.9. $M = \left\{ at^{n} : |a| \leq 1, b > 0 \right\};$

18.10. $M = \left\{ |x(t)| < \sin(t) \right\};$

18.11. $M = \left\{ at^{\alpha} : 0 \leq a \leq 1, 0 < \alpha < 1 \right\};$

18.12. $M = \left\{ at^{\alpha} : |a| \leq 1, 1 \leq \alpha \leq 10 \right\};$

18.13. $M = \left\{ arctg(at + b) : |a| < 1, b > 1 \right\};$

18.14. $M = \left\{ \dfrac{\sin(at)}{at} : 0 < a < \infty \right\};$

18.15. $M = \left\{ x(t) : |x(t)| \leq B \right\};$

18.16. $M = \left\{ x(t) : |x(t)| \leq B; \left| x(t_1) - x(t_2) \right| < L|t_1 - t_2| \right\};$

18.17. $M = \left\{ x(t) \in C^{(2)}[0,1] : |x(t)| \leq B_0, |x''(t)| \leq B_2 \right\};$

18.18. $M = \left\{ x(t) \in C^{(2)}[0,1] : |x(t)| \leq 2, |x'(t)| \leq 3 \right\};$

18.19. $M = \left\{ x(t) \in C^{(2)}[0,1] : |x(t)| \leq |x''(t)| \leq 1 \right\};$

18.20. $M = \left\{ x(t) \in C^{(2)}[0,1] : |x(0)| \leq 1, \left| x(t_1) - x(t_2) \right| \leq |t_1 - t_2| \right\};$

18.21. $M = \left\{ x(t) \in C^{(2)}[0,1] : |x(0)| \leq 1, |x''(t)| \leq 4 \right\};$

18.22. $M = \left\{ x(t) \in C^{(2)}[0,1] : |x'(t)| \leq 2 \right\}.$

Задание №2. Является ли множество M относительно компактным в пространстве l_p? В случае положительного ответа построить для множества конечную ε-сеть для ε=0,1.

19.1. $M = \left\{ x : |x_k| < \dfrac{1}{k}, k \in N \right\}, \quad p = 2;$

19.2. $M = \left\{ x: |x_k| < \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}, k \in N \right\}, \quad p = 1;$

19.3. $M = \left\{ x: |x_k| < \frac{1}{k^2}, k \in N \right\}, \quad p = 1;$

19.4. $M = \left\{ x: |x_k| < \frac{1}{\sqrt[5]{k^2}}, k \in N \right\}, \quad p = 1;$

19.5. $M = \left\{ x: |x_1| = 1, |x_{2k}| < \frac{1}{2^k}, |x_{2k+1}| < \frac{1}{3^{2k}}, \ k \in N \right\}, \quad p = 1;$

19.6. $M = \left\{ x: |x_k| < \frac{1}{2^{ak}}, k \in N, \frac{1}{2} < a < 1 \right\}, \quad p = 2;$

19.7. $M = \left\{ x: |x_k| = \frac{k}{1 + k^2}, k \in N \right\}, \quad p = 3;$

19.8. $M = \left\{ x: |x_k| = \frac{k}{1 + 2k^2}, k \in N \right\}, \quad p = 3;$

19.9. $M = \left\{ x: \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| \cdot 2^k < \infty, k \in N \right\}, \quad p = 2;$

19.10. $M = \left\{ x: x_k = \frac{\sin k}{k}, k \in N \right\}, \quad p = 2;$

19.11. $M = \left\{ x: x_k = \frac{k}{1 + 3k^2}, k \in N \right\}, \quad p = 2;$

19.12. $M = \left\{ x: x_k > 0, x_{k+1} < \frac{1}{2} x_k, k \in N \right\}, \quad p = 2;$

19.13. $M = \left\{ x: \frac{x_{2k+1}}{x_{2k}} \le \frac{1}{2^k}, k \in N, |x_1| < 1 \right\}, \quad p = 4;$

19.14. $M = \left\{ x: x_k = \frac{1}{2^k}, k \in N \right\}, \quad p = 2.$

9.2 Комплект экзаменационных билетов по дисциплине

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: __________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 3
Дисциплина
Функциональный анализ и интегральные уравнения

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__1___

1. Полные метрические пространства.
2. Теорема о минимальном свойстве сумм Фурье, следствия.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: __________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 3
Дисциплина
Функциональный анализ и интегральные уравнения

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__2___

1. Принцип неподвижной точки Банаха. Свойства сближающих операторов.

2. Теорема Рисса – Фишера.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>_____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ___________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 3
Дисциплина
Функциональный анализ и интегральные уравнения

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__3___

1. Оценка скорости сходимости итерационной последовательности к неподвижной точке сближающего оператора.
2. Теорема Рисса о представлении функционала в гильбертовом пространстве.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>_____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ___________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 3
Дисциплина
Функциональный анализ и интегральные уравнения

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__4___

1. Предкомпактные подмножества в метрических пространствах.
2. Теорема об отделении точек линейного нормированного пространства функционалами.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>_____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ___________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 3
Дисциплина
Функциональный анализ и интегральные уравнения

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__5___

1. Критерий предкомпактности в C[0,1] и l_p.
2. Теорема о замыкании.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>_____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ___________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 3
Дисциплина
Функциональный анализ и интегральные уравнения

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__6___

1. Сепарабельность метрических пространств.
2. Теорема о вложении X в X**.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>_____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ___________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 3
Дисциплина
Функциональный анализ и интегральные уравнения

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__7___

1. Линейные нормированные пространства.
2. Критерий слабой сходимости.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>_____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ___________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 3
Дисциплина
Функциональный анализ и интегральные уравнения

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__8___

1. Непрерывные линейные отображения в линейных нормированных пространствах.
2. Признак слабой сходимости в C[0,1].

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>_____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ___________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 3
Дисциплина
Функциональный анализ и интегральные уравнения

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__9___

1. Сопряженные пространства, теорема Хана - Банаха.
2. Общий вид линейных непрерывных функционалов на l_p.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>_____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ___________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 3
Дисциплина
Функциональный анализ и интегральные уравнения

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__10___

1. Теорема Банаха – Штейнгауза.
2. Критерий Рисса конечномерности линейного нормированного пространства.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>_____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ___________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 3
Дисциплина
Функциональный анализ и интегральные уравнения

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__11___

1. Теорема Бэра.
2. Теория Рисса решения операторных уравнений: лемма о ядре.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>_____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ___________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 3
Дисциплина
Функциональный анализ и интегральные уравнения

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__12___

1. Лемма Банаха о почти ограниченности линейного оператора на банаховом пространстве.
2. Теория Рисса решения операторных уравнений: лемма об образе.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>_____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ___________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 3
Дисциплина
Функциональный анализ и интегральные уравнения

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__13___

1. Теорема Банаха об обратном операторе.
2. Теорема Рисса о разрешимости уравнения $Ax - x = y$.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>_____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ___________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 3
Дисциплина
Функциональный анализ и интегральные уравнения

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__14___

1. Определение и примеры гильбертовых пространств.
2. Сопряженные операторы и их свойства.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>_____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ___________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 3
Дисциплина
Функциональный анализ и интегральные уравнения

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__15___

1. Теорема Грамма – Шмидта об ортогонализации. Лемма об уклонении.
2. Теорема о разрешимости уравнения $Ax - x = y$ в терминах сопряженных операторов.

9.3 Основная литература

1. Порошкин А.Г. Лекции по функциональному анализу / Издательство: Вузовская книга , 2004.- 432 с.
2. Рудин У.Функциональный анализ: Учебник для вузов (пер. с англ. Лина В.Я.) Изд. 2-е, испр., доп. / Издательство: Лань, 2005.- 448 с.
3. Садовничий В.А. Теория операторов: Учебник для вузов Изд. 3-е, стереотип. / Издательство: Высшая школа ,1999.- 368 с.
4. Справочник по интегральным уравнениям Издательство: Физматлит, 2003.- 608 с.
5. Треногин В.А.Функциональный анализ: Учебник для вузов Изд. 3-е, испр. / Издательство: Физматлит, 2002.- 488 с.
6. Федоров В.М. Курс функционального анализа: Учебник для вузов / Издательство: Лань, 2005.- 352 с.
7. Фомин С.В. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд.7-е / Издательство: Физматлит, 2004 г.

9.4 Дополнительная литература

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – Наука, 1979.
2. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984.

3. Балакришкинан А.В. Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1974.
4. Варга Р.С. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. – М.: Мир, 1974.
5. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
6. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967.
7. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965.

Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейной анализ. – М.: Мир, 1988.

10. НЕОБХОДИМОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Лекции и практические занятия проводятся в стандартной аудитории, оснащенной в соответствии с требованиями преподавания теоретических дисциплин.

11. КАРТА ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ КАДРАМИ ПРОФЕССОРСКО-ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОГО СОСТАВА

Лекционные и практические занятия по дисциплине "Функциональный анализ и интегральные уравнения" для специальности 010101 – «Математика» проводит старший преподаватель кафедры МАиМ Подопригора Сергей Алексеевич.