Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Амурский государственный университет
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

сборник учебно-методических материалов

для специальности 24.05.01 – Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов

Благовещенск 2018 г.

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
университета

Составитель: Рыженко А.В.
Вариационные методы: сборник учебно-методических материалов для специальности 24.05.01. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2018.

Рассмотрен на заседании кафедры математического анализа и моделирования «___» ______________ 201 ___ г., протокол № __________.

Методические материалы по дисциплине

Методические указания для подготовки к лекциям и теоретическим вопросам

Лекция. Предмет вариационного исчисления. Вариация и ее свойства.

План лекции. Основные понятия. Определение функционала. Приращение функционала. Непрерывность функционала. Кривые близкие в смысле близости нулевого порядка, первого и т.д. порядков. Линейный функционал. Вариация функционала. Максимум и минимум функционала.

Задачей вариационного исчисления называется задача нахождения экстремума *интегрального функционала* $I[y(x)]$, например, функционала вида $\int_a^b f(x,y,y')dx$, $\int_a^b f(x,y,y',...,y^{(n)})dx$, $\int_a^b f(x,y,z,y'_x,z'_x)dx$ и т.п. Подынтегральная функция называется *интегрантом*.

Введем следующие определения.

Определение 1. Функционал $I[y(x)]$ называется *непрерывным*, если малому приращению функции y соответствует малое приращение функционала.

Предметом рассмотрения будут пространства C^0 и C^1. Пространство $C^0[a, b]$ состоит из непрерывных функций $y(x)$, определенных на отрезке $[a, b]$. Норма в этом пространстве вводится следующим образом: $\|y\|_0 = \max\limits_{x\in[a,b]}|y(x)|$.

Определение 2. *ε-окрестностью нулевого порядка* кривой $y^*(x)\in C^0[a,b]$ называется совокупность кривых $y(x)\in C^0[a,b]$, такая, что $\|y-y^*\|_0 = \max\limits_{x\in[a,b]}|y(x)-y^*(x)| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0 - const$.

Это означает, что расстояние от кривой $y^*(x)$ до кривых $y(x)$ мало, т.е. графики кривых $y(x)$ целиком лежат внутри полосы шириной 2ε, окружающей график функции $y^*(x)$. В данном случае можно считать близкими кривые, близкие по ординатам.

Пространство $C^1[a, b]$ состоит из непрерывных функций $y(x)$, определенных на отрезке $[a, b]$ и имеющих на данном отрезке непрерывную производную. Норма в этом пространстве вводится следующим образом: $\|y\|_1 = \max\limits_{x\in[a,b]}|y(x)| + \max\limits_{x\in[a,b]}|y'(x)|$.

Определение 3. *ε-окрестностью первого порядка* кривой $y^*(x)\in C^1[a,b]$ называется совокупность кривых $y(x)\in C^1[a,b]$, такая, что $\|y-y^*\|_0 = \max\limits_{x\in[a,b]}|y(x)-y^*(x)| + \max\limits_{x\in[a,b]}|y'(x)-y^*{}'(x)| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0 - const$.

Это означает, что у кривой $y^*(x)$ и кривых $y(x)$ близки не только ординаты, но и значения производных. При этом следует отметить, что кривая, принадлежащая ε-окрестности первого порядка, принадлежит и ε-окрестности нулевого порядка.

Кривые $y(x)$, на которых сравнивают значения функционала, называют *допустимыми кривыми* или *кривыми сравнения*.

Обозначим через $y^*(x)$ допустимую кривую (под допустимостью понимается принадлежность тому или иному функциональному пространству), на которой функционал достигает экстремума, а через $y(x)$ произвольную допустимую кривую. Разность $\delta\, y(x) = y(x) - y^*(x)$ называется *вариацией* кривой $y^*(x)$.

Вариация $\delta\, y(x)$ есть функция аргумента x и принадлежит тому же функциональному пространству, что и функция $y(x)$. Используя вариацию, можно представить любую допустимую кривую $y(x)$ в виде $y(x) = y^*(x) + \delta\, y(x)$.

Однако будем использовать и другую запись $y(x) = y^*(x) + \alpha\,\delta\, y(x)$, где $\delta\, y(x)$ – фиксированная функция, α – числовой параметр.

Приращением функционала ΔI называется разность

$$\Delta I = I[y(x)] - I[y^*(x)] = I[y(x) + \alpha\,\delta\, y^*(x)] - I[y^*(x)].$$

Первой вариацией функционала называют выражение

$$\delta I = \delta I[y^*(x), \delta\, y(x)] = \lim_{\alpha\to 0} \frac{I[y^*(x) + \alpha\,\delta\, y(x)] - I[y^*(x)]}{\alpha} =$$

$$= \frac{d}{d\alpha} I[y^*(x) + \alpha\,\delta\, y(x)]\Big|_{\alpha=0}.$$

Второй вариацией называют выражение

$$\delta^2 I = \delta^2 I[y^*(x), \delta\, y(x)] = \frac{d^2}{d\alpha^2} I[y^*(x) + \alpha\,\delta\, y(x)]\Big|_{\alpha=0}.$$

Говорят, что функционал $I[y(x)]$, определенный на некотором классе M функций, достигает на кривой $y^*(x)$ *глобального минимума* (*максимума*), если

$$I[y^*(x)] \le I[y(x)] \qquad (I[y^*(x)] \ge I[y(x)]) \qquad \forall y(x) \in M.$$

Понятие локального минимума (максимума) связано с исследованием поведения функционала на близких кривых.

Говорят, что функционал $I[y(x)]$ достигает на кривой $y^*(x)$ *сильного минимума* (*максимума*), если $I[y^*(x)] \le I[y(x)]$ ($I[y^*(x)] \ge I[y(x)]$) в ε-окрестности нулевого порядка кривой $y^*(x)$.

Говорят, что функционал $I[y(x)]$ достигает на кривой $y^*(x)$ *слабого минимума* (*максимума*), если $I[y^*(x)] \le I[y(x)]$ ($I[y^*(x)] \ge I[y(x)]$) в ε-окрестности первого порядка кривой $y^*(x)$.

Локальные минимумы и максимумы функционала называют его *локальными экстремумами*.

Необходимые условия локального экстремума одинаковы для сильного и слабого экстремума и определяются теоремой.

Теорема 1.1 *(необходимые условия локального экстремума).*

Если функционал $I[y(x)]$*, имеющий вариацию, достигает минимума или максимума на кривой* $y^*(x)$*, где* $y^*(x)$ *есть внутренняя точка области определения функционала, то при* $y(x) = y^*(x)$ *первая вариация функционала равна нулю*: $\delta I = 0$.

При выводе необходимых условий экстремума для различных постановок вариационных задач применяется следующая важная теорема.

Теорема 1.2 *(основная лемма вариационного исчисления).*

Если для каждой непрерывной функции η(x) $\int_a^b f(x)\eta(x)dx = 0$, где функция $f(x)$ непрерывная на отрезке интегрирования, то $f(x)\equiv 0$ на этом отрезке.

Замечание 1.1. Утверждение основной леммы вариационного исчисления и ее доказательство не изменятся, если на функцию η(x) наложить следующие ограничения: η(x) имеет непрерывную производную; η(a) = η(b) = 0.

Замечание 1.2. Все изложенное в этом разделе без изменения переносится на функционалы $I[y(x)] = I[y_1(x),..., y_n(x)]$, зависящие от вектор-функций $y(x) = \left(y_1(x),..., y_n(x)\right)^T$ одной переменной или зависящие от функций нескольких переменных. Для таких функционалов вариация также определяется как главная линейная часть приращения функционала и доказывается, что на функциях (вектор-функциях), на которых реализуется экстремум, вариация равна нулю.

Цель лекций состоит в том, чтобы ввести студентов в курс вариационного исчисления. Дать основные понятия вариационного исчисления.

Ключевые вопросы:1) Определение функционала. 2) Определение приращение функционала. 3) Определение непрерывности функционала. 4) Кривые близкие в смысле близости нулевого порядка, первого и т.д. порядков.5) Определение линейности функционала. 6) Определение вариация функционала. 7) Определение максимум и минимум функционала.

Лекция. Уравнение Эйлера.

План лекции. Функционалы $\int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx$, зависящие от одной функции. Задачей поиска безусловного экстремума. Уравнением Эйлера. $f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$. Его решение $y = y(x, C_1, C_2)$ зависит от двух произвольных постоянных и определяет двухпараметрическое *семейство экстремалей*.

Необходимые условия экстремума.

Теорема 2.2. *Пусть* $y = y^*(x)$ *– решение уравнений Эйлера (2.4). Если функция* $f(x, y(x), y'(x))$ *имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, то во всех точках* $(x, y^*(x))$*, где* $f_{y'y'}(x, y^*(x), y^{*}{}'(x)) \neq 0$*, функция* $y = y^*(x)$ *имеет непрерывную вторую производную.*

Уравнение Эйлера интегрируется в квадратурах лишь в исключительных случаях. Следует выделить некоторые простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера.

1) Функция $f(x, y, y')$ зависит только от y'. Тогда уравнение Эйлера записывается в виде $\frac{d}{dx} f_{y'} = 0$ и допускает понижение прядка: $f_{y'} = C$. Это уравнение является алгебраическим относительно производной y'. Все его решения можно записать в виде $y' = C_1$. Тогда экстремалями является семейство линейных функций $y(x) = C_1 x + C_2$.

2) Интеграл не зависит от y. В этом случае уравнение Эйлера также записывается в виде $\frac{d}{dx} f_{y'} = 0$ и допускает понижение порядка: $f_{y'} = C$. Последнее уравнение является

обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка или алгебраическим уравнением.

3) Интеграл не зависит от *x*. Тогда уравнение Эйлера, в предположении, что $f_{y'y'} \neq 0$, сводится к следующему: $f_y - f_{y'y}y' - f_{y'y'}y'' = 0$.

Умножив его на *y'*, получим $\frac{d}{dx}\left(f - y' f_{y'}\right) = 0$. Таким образом, и в этом случае уравнение Эйлера допускает понижение порядка: $f - y' f_{y'} = C$

4) Интеграл не зависит от *y'*. Тем самым получаем уравнение $f_{y'}(x, y) = 0$, которое является алгебраическим относительно неизвестной функции *y*(*x*). Решения этого уравнения могут и не удовлетворять поставленным краевым условиям.

5) Интеграл линейно зависит от *y'*, то есть может быть представлен в виде $f(x, y(x), y'(x)) = P(x, y) + Q(x, y)y'$. Этот случай, включающий в себя предыдущий, охватывает те функционалы, интеграл которых удовлетворяет условию $f_{y'y'} = 0$. Такие функционалы называют *вырожденными*. Уравнение Эйлера в этом случае принимает вид $\frac{dQ}{dx} - P_y - Q_y y' = 0$, или $Q_x + Q_y y' - P_y - Q_y y' = 0$, откуда $Q_x - P_y = 0$. Это уравнение алгебраическое; его решения могут и не удовлетворять краевым условиям.

Цель лекции. Научить студентов исследовать на экстремум функционалы. Задачей поиска безусловного экстремума.

Ключевые вопросы. 1) Записать уравнение Эйлера. 2) Что называется экстремалями. 3) Где достигается экстремум функционала?. 4) Какие функционалы называют *вырожденными*?5) Простейшие случаи интегрирования уравнения Эйлера.

Лекция. Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка.

План лекции. *Функционалы* $\int_a^b f(x, y_1(x), ..., y_n(x), y_1'(x), ..., y_n'(x))dx$, *зависящие от нескольких функций*

Рассмотрим множество *M* допустимых вектор-функций $y(x) = (y_1(x), ..., y_n(x))^T$, удовлетворяющих условиям:

а) функции $y_k(x)$, $k = 1, \ldots, n$, принадлежат функциональному пространству $C^1[a, b]$;

б) функции $y_k(x)$, удовлетворяют граничным условиям

$y_k(a) = y_{ka}$, $y_k(b) = y_{kb}$, $k = 1, \ldots, n$, где значения y_a, y_b заданы, т.е. каждая из кривых $y_k(x)$ проходит через две закрепленные граничные точки.

Среди допустимых вектор-функций *y*(*x*), принадлежащих множеству *M*, требуется найти вектор-функцию $y^*(x) = (y_1^*(x), ..., y_n^*(x))^T$, для которой выполнено условие

$$I[y_1^*(x), ..., y_n^*(x)] = \underset{y(x) \in M}{extr} \int_a^b f(x, y_1(x), ..., y_n(x), y_1'(x), ..., y_n'(x))dx$$

. Подынтегральная функция $f(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным. Эта задача также называется задачей поиска безусловного экстремума.

Стратегия поиска решения задачи опирается на теорему о необходимом условии экстремума функционала: $\delta I = 0$ на экстремали $y^*(x)$. Поскольку эта проблема сформулирована для скалярной функции $y(x)$, применим ее к функционалу $I[y_1(x),...,y_n(x)] = \int_a^b f(x, y_1(x),..., y_n(x), y_1'(x),..., y_n'(x))dx$ задачи, варьируя лишь функцию $y_k(x)$, а остальные оставляя неизменными. При этом функционал будет зависеть лишь от одной функции $y_k(x)$.

Функционалы $\int_a^b f(x, y(x), y'(x),..., y^{(m)}(x))dx$***, зависящие от производных высшего порядка одной функции***

Рассмотрим множество M допустимых функций (кривых) $y(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $y(x)$ определены и m раз непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, где a и b заданы, т.е. $y(x) \in C^m[a,b]$;

б) функции $y(x)$ удовлетворяют граничным условиям $\begin{matrix} y(a) = y_a,\ y^{(i)}(a) = y_a^{(i)}, i = 1,...,m\text{-}1, \\ y(b) = y_b,\ y^{(i)}(b) = y_b^{(i)}, i = 1,...,m\text{-}1, \end{matrix}$ где y_a, $y_a^{(i)}$, y_b, $y_b^{(i)}$ заданы.

Среди допустимых кривых $y(x)$, принадлежащих множеству M, требуется найти кривую $y^*(x)$, для которой выполнено условие

$$I[y^*(x)] = \underset{y(x)\in M}{extr} \int_a^b f(x, y(x), y'(x),..., y^{(m)}(x))dx .$$

Подынтегральная функция $f(x, y(x), y'(x),..., y^{(m)}(x))$ имеет непрерывные частные производные до (m+2)-го порядка включительно.

Стратегия поиска решения также состоит в нахождении первой вариации функционала и приравнивании его к нулю. Пусть $y^*(x) \in C^m[a,b]$ – кривая, на которой допускается экстремум функционала I. Тогда допустимая кривая $y(x)$ и ее производные $y^{(i)}(x)$, $i = 1,...,m$, представляются в виде $y(x) = y^*(x) + \alpha\,\delta\, y(x)$, $y'(x) = y^*{}'(x) + \alpha\,\delta\, y'(x)$, …, $y^{(m)}(x) = y^{*(m)}(x) + \alpha\,\delta\, y^{(m)}(x)$, где $\delta\, y(x)$ – фиксированная вариация, удовлетворяющая условиям: $\delta\, y(a) = \delta\, y(b) = \delta\, y'(a) = \delta\, y'(b) = ... = \delta\, y^{(m-1)}(a) = \delta\, y^{(m-1)}(b) = 0$.

Имеем

$$\delta I = \frac{d}{d\alpha} I\left[y^*(x) + \alpha\,\delta\, y(x)\right]\Big|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x, y^*(x) + \alpha\,\delta\, y(x),\ ...,\ y^{*(m)}(x) + \alpha\,\delta\, y^{(m)}(x))\Big|_{\alpha=0} dx =$$

$$= \int_a^b \Big[f_y(x, y^*(x) + \alpha\,\delta y(x), ..., y^{*(m)}(x) + \alpha\,\delta y^{(m)}(x))\delta y(x) + f_{y'}(x, y^*(x) + \alpha\,\delta y(x), ..., y^{*(m)}(x)$$

$$+ \alpha\,\delta y^{(m)}(x))\delta y'(x) + ... + f_{y^{(m)}}(x, y^*(x) + \alpha\,\delta y(x), ..., y^{*(m)}(x) + \alpha\,\delta y^{(m)}(x))\delta y^{(m)}(x) \Big] dx.$$

Интегрируем по частям второе слагаемое один раз:

$$\int_a^b f_{y'}\delta y'(x)dx = f_{y'}\delta y(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} f_{y'}\delta y(x)dx;$$

третье слагаемое- два раза:

$$\int_a^b f_{y''}\delta y''(x)dx = f_{y''}\delta y'(x)\Big|_a^b - \left[\frac{d}{dt} f_{y''}\delta y(x)\right]_a^b + \int_a^b \frac{d^2}{dt^2} f_{y''}\delta y(x)dx;$$

и так далее до последнего слагаемого, которое интегрируем по частям m раз:

$$\int_a^b f_{y^{(m)}}\delta y^{(m)}(x)dx =$$

$$= f_{y^{(m)}}\delta y^{(m-1)}(x)\Big|_a^b - \left[\frac{d}{dt} f_{y^{(m)}}\delta y^{(m-2)}(x)\right]_a^b + ... + (-1)^{(m)} \int_a^b \frac{d^{(m)}}{dt^{(m)}} f_{y^{(m)}}\delta y(x)dx.$$

получаем необходимые условия экстремума:

$$\delta I = \int_a^b \left[f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} + \frac{d^2}{dt^2} f_{y''} + ... + (-1)^{(m)} \frac{d^{(m)}}{dt^{(m)}} f_{y^{(m)}} \right] \delta y(x)dx = 0.$$

Так как вариация $\delta y(x)$ может быть выбрана произвольно, а выражение в квадратных скобках является непрерывной по x функцией на $y^*(x)$, то по основной лемме вариационного исчисления имеем

$$f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} + \frac{d^2}{dt^2} f_{y''} + ... + (-1)^{(m)} \frac{d^{(m)}}{dt^{(m)}} f_{y^{(m)}} = 0.$$

Это уравнение называется *уравнением Эйлера-Пуассона*. Оно имеет порядок $2m$, его общее решение $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_{2m})$ содержит $2m$ произвольных постоянных, которые могут быть определены из граничных условий.

<u>Ключевые вопросы</u>: 1) Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка. 2) В каком виде записывается уравнение Эйлера-Пуассона. 3) Экстремали уравнение Эйлера-Пуассона.

<u>Лекция.</u> Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных. Вариационные задачи в параметрической форме.

<u>План лекции.</u> *Функционалы* $\int_a^b f(x, y_1(x), ..., y_1^{(m)}(x), ..., y_n(x), ..., y_n^{(m)}(x))dx$, *зависящие от производных высшего порядка нескольких функций*

Рассмотрим множество M допустимых вектор-функций $y(x) = (y_1(x), ..., y_n(x))^T$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $y_k(x)$ определены и m раз непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, где a и b заданы, т.е. $y_k(x) \in C^m[a,b], k = 1,...,n$;

б) функции $y_k(x)$ удовлетворяют граничным условиям

$$y_k(a) = y_{ka},\ y_k^{(i)}(a) = y_{ka}^{(i)},\ k = 1,...,n,\ i = 1,...,m-1,$$

$$y_k(b) = y_{kb},\ y_k^{(i)}(b) = y_{kb}^{(i)},\ k = 1,...,n,\ i = 1,...,m-1,$$

где $y_{ka}, y_{kb}, y_{ka}^{(i)}, y_{kb}^{(i)},\ k = 1,...,n,\ i = 1,...,m-1$, заданы.

Среди допустимых вектор-функций $y(x)$, принадлежащих множеству M, требуется найти вектор-функцию $y^*(x) = (y_1^*(x), ..., y_n^*(x))^T$, для которой выполнено условие

$$I[y^*(x)] = \underset{y(x)\in M}{extr} \int_a^b f(x, y_1(x), ..., y_1^{(m)}(x), ..., y_n(x), ..., y_n^{(m)}(x))dx.$$

Подынтегральная функция $f(x, y_1(x), ..., y_1^{(m)}(x), ..., y_n(x), ..., y_n^{(m)}(x))$ имеет непрерывные частные производные до (m+2)-го порядка включительно по всем переменным.

Стратегия поиска решения также состоит в нахождении первой вариации функционала и приравнивании его к нулю. Рассуждая аналогично предыдущему пункту, нетрудно получить, что вектор-функция $y^*(x)$, доставляющая экстремум функционалу, необходимо удовлетворяет системе уравнений Эйлера-Пуассона:

$$f_{y_k} - \frac{d}{dt} f_{y_k{'}} + \frac{d^2}{dt^2} f_{y_k{''}} + ... + (-1)^{(m)} \frac{d^{(m)}}{dt^{(m)}} f_{y_k^{(m)}} = 0,\ k = 1,...,n.$$

Общее решение этой системы $y_k = y_k(x, C_1, C_2, ..., C_{2mn})$ зависит от $2mn$ произвольных постоянных, которые могут быть определены из граничных условий.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы (необходимые условия экстремума).

<u>Цель лекции</u>: Научить студентов получать уравнение Остроградского. Ознакомить с уравнением Лапласа, Пуассона и задачей Дирихле. Получить бигармоническое уравнение.

<u>Ключевые вопросы</u>: 1) Сформулировать общую первую краевую задачу для уравнений Лапласа. 2) Записать уравнение Остроградского 3) Уравнения Пуассона? 4) Получить бигармоническое уравнение.

<u>Лекция.</u> Вариационные задачи с подвижными границами. Простейшая задача с подвижными границами. Задачи с подвижными границами для функционалов.

<u>План лекции</u>. Рассмотрим функционал у которого одна из граничных точек перемещается, а другая неподвижна или обе граничные точки подвижны.

Функционалы $\int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx$***, зависящие от одной функции. Случай гладких экстремалей***

Рассмотрим множество M допустимых функций $y(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $y(x)$ непрерывно дифференцируемы, т.е. $y(x) \in C^1(\Delta)$, где Δ – некоторый конечный отрезок, внутренними точками которого являются точки a и b, которые заранее не заданы;
б) значения a, $y_a = y(a)$ и b, $y_b = y(b)$, определяющие концы допустимых кривых, удовлетворяют граничным условиям

$$\psi(a, y_a) = 0, \ \varphi(b, y_b) = 0 . \qquad (1)$$

Среди допустимых кривых $y(x)$, принадлежащих множеству M, требуется найти кривую $y^*(x)$, для которой выполнено условие

$$I[y^*(x)] = \underset{y(x)\in M}{extr} \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx . \qquad (2)$$

Подынтегральная функция $f(x, y(x), y'(x))$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно.
Замечание 3.1.1. Условия (1) определяют подвижные границы. Таким образом, экстремум в поставленной задаче ищется на классе гладких функций, концы которых скользят по двум заданным линиям, описываемым уравнениями $\psi(a, y_a) = 0$ (для левого конца) и $\varphi(b, y_b) = 0$ (для правого конца).
Можно выделить следующие частные случаи общей постановки задачи:
1) концы допустимых кривых скользят по двум заданным вертикальным прямым, описываемыми уравнениями $x = a, \ x = b$;
2) концы допустимых кривых скользят по двум заданным кривым, описываемыми уравнениями $y = \psi(x), \ y = \varphi(x)$.
В рамках рассматриваемого частного случая можно выделить задачу, в которой заданные кривые являются прямыми линиями, параллельными оси абсцисс: $y = y_a$, $y = y_b$.
Замечание 3.1.2. В поставленной задаче наряду с поиском кривой $y^*(x)$ фактически производится выбор значений $a^*, \ b^*$, то есть ищется тройка $\left(y^*(x), a^*, b^*\right)$. При этом ε-окрестность первого порядка (ε > 0) образуется тройками $\left(y(x), a, b\right)$, удовлетворяющими условию

$$\left\| y(x) - y^*(x) \right\|_{C^1(\Delta)} < \varepsilon, \quad \left| a - a^* \right| < \varepsilon, \ \left| b - b^* \right| < \varepsilon .$$

Функционал в задаче (3.2) точнее записывается в форме

$$I[y(x), a, b] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx$$

Функционал достигает на тройке $\left(y^*(x), a^*, b^*\right)$ слабый минимум, если $I[y(x), a, b] \geq I[y^*(x), a^*, b^*]$ в ε-окрестности первого порядка.

Стратегия поиска решения задачи (2) строится на использовании необходимого условия экстремума функционала: $\delta I = 0$.
Пусть на тройке $\left(y^*(x), a^*, b^*\right)$ функционал $I[y(x), a, b]$ достигает экстремум. Тогда допустимые кривые определяются соотношениями

$y(x) = y^*(x) + \alpha\,\delta\,y(x)$, $y'(x) = y^*{}'(x) + \alpha\,\delta\,y'(x)$,

где $\delta\,y(x)$ – фиксированная вариация кривой, α – числовой параметр, а допустимые значения пределов интегрирования – формулами $a = a^* + \alpha\,\delta\,a, \quad b = b^* + \alpha\,\delta\,b$.

Найдем первую вариацию функционала. Для этого воспользуемся определением:

$$\delta\,I = \frac{d}{d\alpha}\int\limits_{a^*+\alpha\delta a}^{b^*+\alpha\delta b} f(x, y^*(x) + \alpha\,\delta\,y(x), y^*{}'(x) + \alpha\,\delta\,y'(x))dx\Bigg|_{\alpha=0}.$$

Воспользуемся формулой дифференцирования по параметру:

$$\frac{d}{d\alpha}\int\limits_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x,\alpha)dx = \int\limits_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx + f(v(\alpha),\alpha)\frac{dv}{d\alpha} - f(u(\alpha),\alpha)\frac{du}{d\alpha}.$$

Тогда получаем

$$\delta\,I = \Bigg\{\int\limits_{a^*+\alpha\delta a}^{b^*+\alpha\delta b}\Big[f_y(x, y^*(x) + \alpha\,\delta\,y(x), y^*{}'(x) + \alpha\,\delta\,y'(x))\Big|_{\alpha=0}\delta\,y(x) +$$

$$+ f_{y'}(x, y^*(x) + \alpha\,\delta\,y(x), y^*{}'(x) + \alpha\,\delta\,y'(x))\Big|_{\alpha=0}\delta\,y'(x)\Big]dx +$$

$$+ f(x, y^*(x) + \alpha\,\delta\,y(x), y^*{}'(x) + \alpha\,\delta\,y'(x))\Big|_{x=b^*+\alpha\delta b}\cdot\delta b -$$

$$- f(x, y^*(x) + \alpha\,\delta\,y(x), y^*{}'(x) + \alpha\,\delta\,y'(x))\Big|_{x=a^*+\alpha\delta a}\cdot\delta a\Bigg\}_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_{a^*}^{b^*}\Big[f_y\delta\,y(x) + f_{y'}\delta\,y'(x)\Big]dx + f(b^*, y^*(b^*), y^*{}'(b^*))\delta b - f(a^*, y^*(a^*), y^*{}'(a^*))\delta a.$$

Вычислив второе слагаемое в интеграле по частям, получим необходимое условие экстремума в виде

$$\delta\,I = \int\limits_{a^*}^{b^*}\left[f_y - \frac{d}{dx}f_{y'}\right]\delta\,y(x)dx + f_{y'}\delta\,y(x)\Big|_{a^*}^{b^*} + f\Big|_{x=b^*}\delta b - f\Big|_{x=a^*}\delta a = 0 \qquad (3)$$

Из выражения (3) видно, что вариация функционала $\delta\,I$ состоит из интегральной части, которая определяется вариацией кривой $\delta\,y(x)$ при фиксированных значениях $a^*,\ b^*$, и трех слагаемых, зависящих от вариаций $\delta a,\ \delta b$ концов интервала интегрирования и вариаций $\delta\,y(x)$ концов экстремали при $x = a^*,\ x = b^*$.

Из условия $\delta\,I = 0$ следуют два равенства:

1. $$\int\limits_{a^*}^{b^*}\left[f_y - \frac{d}{dx}f_{y'}\right]\delta\,y(x)dx = 0,$$

то есть экстремаль $y^*(x)$ в задаче (3.2) должна быть решением уравнения Эйлера

$$f_y - \frac{d}{dx}f_{y'} = 0.$$

2. $$f_{y'}\delta\,y(x)\Big|_{a^*}^{b^*} + f\Big|_{x=b^*}\delta b - f\Big|_{x=a^*}\delta a = 0. \qquad (4)$$

Заметим, что $\delta y(x)\big|_{x=a^*}$ не совпадает с δy_a, а $\delta y(x)\big|_{x=b^*}$ не совпадает с δy_b.

Рисунок

На рисунке $BD = \delta y(x)\big|_{x=b^*}$, $FC = \delta y_b$, $DE = \delta b$, $EC \cong y'(b^*)\cdot \delta b$, $BD = FC - EC$, то есть $\delta y(x)\big|_{x=b^*} \cong \delta y_b - y'(b^*)\cdot \delta b$.

Заметим, что приближенное равенство справедливо с точностью до бесконечно малых величин более высокого порядка.

Аналогично $\delta y(x)\big|_{x=a^*} \cong \delta y_a - y'(a^*)\cdot \delta a$.

Поэтому равенство (3.4) можно переписать в форме

$$f_{y'}\big|_{x=b^*}\delta y_b + \left[f - y' f_{y'}\right]_{x=b^*}\delta b - f_{y'}\big|_{x=a^*}\delta y_a - \left[f - y' f_{y'}\right]_{x=a^*}\delta a = 0. \qquad (5)$$

Заметим, что с учетом замены (4) на (5) вариация функционала и соответствующее необходимое условие экстремума записывается в форме

$$\delta I = \int_{a^*}^{b^*}\left[f_y - \frac{d}{dx}f_{y'}\right]\delta y(x)dx +$$
$$+ f_{y'}\big|_{x=b^*}\delta y_b + \left[f - y' f_{y'}\right]_{x=b^*}\delta b - f_{y'}\big|_{x=a^*}\delta y_a - \left[f - y' f_{y'}\right]_{x=a^*}\delta a = 0. \qquad (6)$$

В силу наличия граничных условий вариации δy_b и δb, а также δy_a и δa связаны:

$$\delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg|_{\left(a^*, y^*(a^*)\right)}\delta a + \frac{\partial\psi}{\partial y}\bigg|_{\left(a^*, y^*(a^*)\right)}\delta y_a = 0,$$

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_{\left(b^*, y^*(b^*)\right)}\delta b + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bigg|_{\left(b^*, y^*(b^*)\right)}\delta y_b = 0. \qquad (7)$$

Однако, вариации δy_b, δb не связаны с вариациями δy_a, δa. Поэтому (5) можно переписать в виде

$$f_{y'}\big|_{x=b^*}\delta y_b + \left[f - y' f_{y'}\right]_{x=b^*}\delta b = 0,$$
$$f_{y'}\big|_{x=a^*}\delta y_a + \left[f - y' f_{y'}\right]_{x=a^*}\delta a = 0. \qquad (8)$$

Условия (8), (7) называются *условиями трансверсальности*.

Запишем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 3.1 *(необходимые условия экстремума в задаче (2)).*

Если на функции $y^*(x)\in C^1(\Delta)$*, удовлетворяющей граничным условиям (3.1), достигается слабый экстремум в задаче (3.2), то она необходимо удовлетворяет уравнению Эйлера*

$$f_y - \frac{d}{dx}f_{y'} = 0$$

и условиям трансверсальности (8), (7).

Замечание 3.1.3. Если один из концов допустимых кривых закреплен, то условия трансверсальности для него не записываются, поскольку в этом случае соответствующие вариации равны нулю.

Замечание 3.1.4. Если рассматривается задача, в которой концы кривых скользят по двум заданным вертикальным прямым $x = a,\ x = b$, поскольку *a* и *b* заданы, то вариации $\delta a = 0,\ \delta b = 0$. Следовательно, условия трансверсальности имеют вид

$$f_{y'}\Big|_{x=b^*} \delta y_b = 0, \qquad f_{y'}\Big|_{x=a^*} \delta y_a = 0,$$

и в силу произвольности вариаций $\delta y_b,\ \delta y_a$ получаем условия трансверсальности

$$f_{y'}\Big|_{x=b^*} = 0, \qquad f_{y'}\Big|_{x=a^*} = 0, \qquad (9)$$

Условия (7) выполняются, так как уравнения прямых можно записать в виде $\psi(a) = a - a^*,\ \varphi(b) = b - b^*$.

Замечание 3.1.5. Если концы допустимых кривых скользят по двум заданным кривым $y = \psi(x),\ y = \varphi(x)$, то условия (3.1) можно записать в виде

$$\psi(a, y_a) = y_a - \psi(a) = 0, \qquad \varphi(b, y_b) = y_b - \varphi(b) = 0.$$

Следовательно, из (7) получаем

$$-\psi'(a^*)\delta a + 1 \cdot \delta y_a = 0, \quad -\varphi'(b^*)\delta b + 1 \cdot \delta y_b = 0,$$

или $\delta y_a = \psi'(a^*)\delta a,\ \delta y_b = \varphi'(b^*)\delta b$.

Тогда из (3.8) следует

$$\left[f + (\varphi' - y') f_{y'}\right]_{x=b^*} \delta b = 0, \qquad \left[f + (\psi' - y') f_{y'}\right]_{x=a^*} \delta a = 0.$$

В силу произвольности вариаций $\delta a,\ \delta b$ получаем условия трансверсальности для данного случая:

$$\left[f + (\varphi' - y') f_{y'}\right]_{x=b^*} = 0,$$

$$\left[f + (\psi' - y') f_{y'}\right]_{x=a^*} = 0. \qquad (10)$$

Если рассматривается случай задания кривых в виде $y = y_a = \psi(x) = const$, $y = y_b = \varphi(x) = const$, то условия (3.10) упрощаются

$$\left[f - y' f_{y'}\right]_{x=b^*} = 0, \qquad \left[f - y' f_{y'}\right]_{x=a^*} = 0. \qquad (11)$$

Замечание 3.1.6. Если условия (3.1) отсутствуют, то вариации $\delta y_b, \delta b, \delta y_a, \delta a$ произвольны. Тогда из условия (3.8) следует, что

$$f_{y'}\Big|_{x=b^*} = 0, \qquad \left[f - y' f_{y'}\right]_{x=b^*} = 0,$$

$$f_{y'}\Big|_{x=a^*} = 0, \qquad \left[f - y' f_{y'}\right]_{x=a^*} = 0. \qquad (12)$$

Замечание 7. Если условия (1) записаны в форме $y(a) = y_a, y(b) = y_b$, то есть рассматривается задача с неподвижными границами, то, поскольку вариации $\delta y_b = \delta b = \delta y_a = \delta a = 0$, условия трансверсальности (3.8) выполняются, а произвольные постоянные в общем уравнении Эйлера определяются граничными условиями.

<u>Цель лекции:</u> состоит в том, чтобы научить студентов исследовать на экстремум функционалы с подвижными границами.

Ключевые вопросы: 1) Записать условия трансверсальности для функционала. 2) Записать необходимые условия экстремума в задаче с подвижными границами. 3) Найти экстремальное расстояние между двумя поверхностями.

Лекция. Экстремали с угловыми точками. Односторонние вариации

План лекции. Задача об отражении экстремалей. Основное необходимое условие экстремума. Преломление экстремалей. Нахождение ломаных экстремали. Односторонние вариации.

Цель лекции: Научить студентов решать задачи на отражение и преломление экстремалей, являющихся обобщением соответствующих задач на отражение и преломление света.

Ключевые вопросы: 1) Сформулировать задачу об отражения экстремалей. 2) Сформулировать основную задачу преломления экстремалей. 3) Записать условия, которые должны выполняться в точках перелома. 4) Дать понятие односторонней вариации.

Лекция. Поле экстремалей. Функция Вейерштрасса E(x,y,p,y').

План лекции. Рассмотрим собственное поле. Центральное поле, наклон поля в точке. Поле экстремалей. Функции наклона поля. Условие построения поля экстремалей- условия Якоби. Уравнение Якоби.

Цель лекции: Познакомить студентов с полем экстремалей. Научить студентов строить центральное поле экстремалей на основе условия Якоби.

Ключевые вопросы: 1) Что называется собственным полем? 2) Что называется центральным полем, наклоном поля в точке? 3) Что называется полем экстремалей? 4) Функции наклона поля. 5) Условие построения поля экстремалей - условия Якоби. 6) Записать уравнение Якоби. 7) Как исследовать на экстремум функционал?

Лекция. Преобразование уравнений Эйлера к каноническому виду.

План лекции. Преобразование уравнений Эйлера к каноническому виду. Вывод уравнения Гамильтона-Якоби.

Цель лекции: Показать, как уравнение Эйлера преобразуется к каноническому виду. Научить студентов интегрировать каноническую систему. Уметь интегрировать уравнение Гамильтона-Якоби.

Ключевые вопросы: 1)Записать каноническое уравнение Эйлера. 2)Записать уравнение Гамильтона-Якоби

Лекция. Исследовать на экстремум функционалы. Вариационные задачи на условный экстремум. Задачи с подвижными границами. Вариационные задачи на условный экстремум. Изопериметрические задачи

План лекции. Рассмотреть вариационные задачи на условный экстремум при различных связях. Голономные и неголономные связи. Задачи на условный экстремум с конечными связями. Задачи на условный экстремум с дифференциальными связями. Задачи на условный экстремум с интегральными связями. Изопериметрические задачи.

Цель лекции: Научить студентов решать вариационные задачи на условный экстремум.

Ключевые вопросы: 1) Сформулировать вариационную задачу на условный экстремум. 2) Записать уравнение голономных и неголономных связей. 3) Сформулировать изопериметрическую задачу.

Лекция. Конечно-разностный метод Эйлера. Метод Ритца. Метод Канторовича.

План лекции. Рассмотрим вариационную задачу как предельную. Конечно- разностный метод Эйлера. Метод Ритца. Метод Канторовича.

Цель лекции: Научить студентов, интегрировать дифференциальные уравнения вариационных задач прямыми методами.

Ключевые вопросы: 1) Сформулировать идею конечно-разностного метода. 2) Сформулировать идею метода Ритца. 3) Сформулировать идею метод Канторовича.

Методические указания к практическим занятиям

Занятие. Простейшая задача вариационного исчисления.

Вопросы для подготовки: 1) Определение функционала. 2) Определение приращение функционала. 3)Определение непрерывности функционала. 4)Кривые близкие в смысле близости нулевого порядка, первого и т.д. порядков.5) Определение линейности функционала. 6) Определение вариация функционала. 7) Определение максимум и минимум функционала.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач № №1.1-1.8

Занятие. Уравнение Эйлера. Граничные условия. Экстремали.

Вопросы для подготовки: 1) Записать уравнение Эйлера. 2) Что называется экстремалями. 3) Где достигается экстремум функционала?. 4) Какие функционалы называют *вырожденными*?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №2.1-2.22.

Занятие. Различные случаи интегрируемости уравнений Эйлера.

Вопросы для подготовки. 1) Простейшие случаи интегрирования уравнения Эйлера.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №2.23-2.40.

Занятие. Примеры физических и геометрических экстремальных задач

Вопросы для подготовки: 1)Сформулировать задачу Штурма-Лиувилля. 2) В каком виде Фурье представил решение уравнения свободных колебаний струны? 3) Какое движение струны называется стоячей волной? 4) Чему равна собственная частота колебаний струны? 5) В чем заключается принцип суперпозиции? Имеет ли он место для нелинейных уравнений?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №2.41-2.46.

Занятие. Задача на экстремум функционала, зависящего от производных высших порядков неизвестной функции

Вопросы для подготовки: 1) В чем заключается метод решения неоднородной смешанной задачи? 2) Какие неоднородности называются стационарными? 3) В каком виде ищем решение неоднородного уравнения? 4) Как обнулить граничные условия?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №2.35-2.39; 38-44.

Занятие. Задача об экстремуме функционала, зависящего от нескольких функций.

Вопросы для подготовки: 1) Записать систему уравнений Эйлера- Пуассона. 2) Необходимые условия экстремума.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №2.40;27-31.

Занятие. Задачи с подвижными границами.

Вопросы для подготовки: 1) Записать условия трансверсальности для функционала. 2) Записать необходимые условия экстремума в задаче с подвижными границами. 3) Найти экстремальное расстояние между двумя поверхностями.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач № 2.41-2.46.

Занятие. Слабый экстремум. Условия трансверсальности.

Вопросы для подготовки: 1)Записать систему уравнений Эйлера. 2) Найти общее решение системы. 3) Записать условие трансверсальности.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №2.49-2.54.

Занятие. Задача Больца.

Вопросы для подготовки: 1) Записать функционал Больца. 2) Записать систему уравнений Эйлера. 3) Найти общее решение системы. 4) Записать условие трансверсальности.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №2.55-2.57.

Занятие. Задачи на условный экстремум. Функция Лагранжа. Множители Лагранжа.

Вопросы для подготовки: 1)Дайте определение условного экстремума. 2) Что называется функцией Лагранжа? 3)Что называется множителями Лагранжа?
Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №3.1-3.6.

Занятие. Изопериметрическая задача.

Вопросы для подготовки: 1) Составить функцию Лагранжа. 2) Записать систему уравнений Эйлера и уравнений связей. 3) Найти общее решение системы и выражения для множителей Лагранжа.
Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №3.7-3.13.

Занятие. Прямые методы вариационного исчисления: метод Ритца.

Вопросы для подготовки: 1)Записать частные решения уравнения Лапласа, обладающие сферической симметрией. 2) Записать частные решения уравнения Лапласа, обладающие цилиндрической симметрией.3) какие решения называются фундаментальными?
Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №188-190.

Занятие. Метод Канторовича.

Вопросы для подготовки: 1) Как решить уравнение Лапласа в прямоугольнике? 2) Каким методом решить уравнение Лапласа вне круга?
Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №717-722.

Занятие. Метод Галеркина. Координатные функции.

Вопросы для подготовки: 1) Сформулировать внутреннюю задачу Дирихле. 2) Сформулировать внутреннюю задачу Неймана. 3) Сформулировать внешнюю задачу Дирихле. 4) Сформулировать внешнюю задачу Неймана. 5)Сформулировать теорему единственности для первой краевой задачи.

Методические указания для выполнения практических заданий

Индивидуальная работа 1 «Решение краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка вариационным методом Ритца»

1 Постановка задачи и алгоритм метода

Рассмотрим краевую задачу в следующей постановке. Требуется на отрезке [a, b] найти решение $\phi^*(x)$ дифференциального уравнения $L(\phi) \equiv (K(x)\phi')' - \beta(x)\phi = g(x)$ удовлетворяющее краевым условиям: $A_0\phi(a) + A_1\phi'(a) = A_2$, $B_0\phi(b) + B_1\phi'(b) = B_2$, где $K(x), K'(x), \beta(x), g(x)$ – заданные непрерывные на [a, b] функции ($K(x)>0$); A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2 – заданные действительные числа, причем $A_0^2+A_1^2>0$, $B_0^2+B_1^2>0$.

Краевую задачу вида $L(\phi) \equiv \phi'' + p(x)\phi' + q(x)\phi = f(x)$ можно свести к данной задаче после умножения уравнения на положительный множитель $K(x) = \exp\int\limits_a^x p(t)dt$, и тогда $\beta(x) = -K(x)q(x)$, $g(x) = K(x)f(x)$.

Идея вариационного метода состоит в замене краевой задачи равносильной задачей об отыскании дважды непрерывно дифференцируемой на [a, b] функции $\phi^*(x)$, доставляющей экстремум следующему функционалу $I(\phi) = \int\limits_a^b \left(K(x)\phi'^2 + \beta(x)\phi^2 + 2g(x)\phi\right)dx +$

$\alpha_b\left(\phi^2(b) - 2T_b\phi(b)\right) + \alpha_a\left(\phi^2(a) - 2T_a\phi(a)\right) + 2q_b\phi(b) - 2q_a\phi(a)$ причем значения параметров в этом функционале определяются в зависимости от значений A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2 по таблице:

Значения параметров функционала

№	A_0	A_1	B_0	B_1	T_a	T_b	α_a	α_b	q_a	q_b
1	$\neq 0$	0	$\neq 0$	0	A_2/A_0	B_2/B_0	0	0	0	0
2	$\neq 0$	0	0	$\neq 0$	A_2/A_0	0	0	0	0	$-K(b)B_2/B_1$
3	$\neq 0$	0	$\neq 0$	$\neq 0$	A_2/A_0	B_2/B_0	0	$K(b)B_0/B_1$	0	0

№	A_0	A_1	B_0	B_1	T_a	T_b	α_a	α_b	q_a	q_b
4	0	≠0	≠0	0	0	B_2/B_0	0	0	$-K(a)A_2/A_1$	0
5	0	≠0	0	≠0	0	0	0	0	$-K(a)A_2/A_1$	$-K(b)B_2/B_1$
6	0	≠0	≠0	≠0	0	B_2/B_0	0	$K(b)B_0/B_1$	$-K(a)A_2/A_1$	0
7	≠0	≠0	≠0	0	A_2/A_0	B_2/B_0	$-K(a)A_0/A_1$	0	0	0
8	≠0	≠0	0	≠0	A_2/A_0	0	$-K(a)A_0/A_1$	0	0	$-K(b)B_2/B_1$
9	≠0	≠0	≠0	≠0	A_2/A_0	B_2/B_0	$-K(a)A_0/A_1$	$K(b)B_0/B_1$	0	0

В методе Ритца для нахождения приближенного решения краевой задачи строится функциональная последовательность $\{\phi_m(x)\}_0^\infty$ из пробных решений $\phi_m(x)$ следующим образом. Как и в методе Галеркина, задаемся на [a, b] функцией $\psi(x)$ и пробными функциями $N_1(x)$, …, $N_m(x)$, такими, что $\psi(x)$ удовлетворяет главным краевым условиям, а базисные функции $N_1(x)$, …, $N_m(x)$ удовлетворяют однородным краевым условиям, и составляем функцию $\phi_M(x) = \psi(x) + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m(x)$, где a_m – некоторые постоянные. Значения постоянных a_m подберем так, чтобы аппроксимация доставляла экстремум указанному выше функционалу. Если подставить аппроксимацию в функционал, то получим квадратичную функцию переменных a_1, …, a_M:

$$I(\phi_m(x)) = \int_a^b \left[K(x)\left(\psi'(x) + \sum_{m=1}^{M} a_m N'_m(x)\right)^2 + \beta(x)\left(\psi(x) + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m(x)\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2g(x)\left(\psi(x) + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m(x)\right) dx \right] + \alpha_b \left[\left(\psi(b) + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m(b)\right)^2 - 2T_b\left(\psi(b) + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m(b)\right) \right] +$$

$$+ \alpha_a \left[\left(\psi(a) + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m(a)\right)^2 - 2T_a\left(\psi(a) + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m(a)\right) \right] + +2q_b\left(\psi(b) + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m(b)\right) -$$

$$- 2q_a\left(\psi(a) + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m(a)\right) = \chi(a_1, a_2, \ldots, a_M).$$

Необходимые условия экстремума данной функции, как известно из математического анализа, имеют вид: $\frac{\partial \chi}{\partial a_l} = 0,\ l = \overline{1, M}$.

Записав эти условия в развернутом виде, для определения значений переменных a_1, …, a_m получаем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений n-го порядка.

Контрольные вопросы

1. Опишите алгоритм решения краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка аналитическим методом.
2. Каким образом уравнение первого типа свести к равносильному уравнению второго типа?
3. В чем основная идея вариационного подхода к решению краевой задачи?
4. Проверьте правильность данных, представленных в таблице.
5. Какими свойствами должны обладать пробные функции в методе Ритца?
6. Как в методе Ритца находится невязка пробного решения?
7. Докажите, что ортогональная на отрезке [a, b] система функций, среди которых нет тождественно равной нулю, линейно независима.

8. Как в методе Ритца строится система алгебраических уравнений для определения коэффициентов пробного решения? Проверьте справедливость соотношений полученных соотношений.

9. Опишите алгоритм приближенного решения краевой задачи методом Ритца.

10. Приведите пример пробных функций для решения задачи методом Ритца.

11. Проверьте, что функции являются собственными функциями данной задачи.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите расстояние между функциями $y_1(x)=x^2$, $y_2(x)=x^3$ по норме пространства: а) $C^0[0,1]$; б) $C^1[0,1]$.

2. Найдите расстояние между функциями $y_1(x)=xe^{-x}$, $y_2(x)=0$ по норме пространства: $C^0[0,2]$; б) $C^1[0,2]$.

3. Найдите расстояние между функциями $y_1(x)=x$, $y_2(x)=\ln x$ по норме пространства: $C^0[e^{-1},e]$; б) $C^1[e^{-1},e]$.

4. Покажите, что функционал $I[y]=\int\limits_0^1 (y-y')dx$, определенный на $C^1[0,1]$ с нормой $\|\cdot\|_1$, является непрерывным на функции $y_0(x)=x^3$.

5. Покажите, что функционал $I[y]=\int\limits_0^1 (y')^2 dx$, определенный на $C^1[0,1]$, разрывен на функции $y_0(x)\equiv 0$ в случае нормы $\|\cdot\|_0$, но непрерывен на этой функции в случае нормы $\|\cdot\|_1$.

6. Покажите, что функционал $I[y]=\int\limits_0^1 x^3\sqrt{1+y^2}\,dx$, определенный на пространстве $C[0,1]$, непрерывен на функции $y_0(x)=x^2$ по норме $\|\cdot\|_0$.

7. Докажите, что любой линейный непрерывный функционал в нормированном пространстве является дифференцируемым. Запишите его дифференциал.

8. Докажите, что функционал $I[y]=\int\limits_a^b y^2 dx$, определенный в $C^0[a,b]$, является всюду дифференцируемым. Запишите его дифференциал.

9. Проверьте, являются ли дифференцируемыми следующие функционалы: а) $I[y]=y(a)$ в $C^0[a,b]$; б) $I[y]=y(a)$ в $C^1[a,b]$; в) $I[y]=|y(a)|$ в $C^0[a,b]$; г) $I[y]=\sqrt{1+y'(a)}$, в $C^1[a,b]$.

10. Найдите первую вариацию функционала, определенного на нормированном пространстве непрерывно дифференцируемых функций: а) $I[y]=\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1+y^2}\,dx$; б) $I[y]=\int\limits_{-1}^1 (y'e^y+xy^2)dx$; в) $I[y]=\int\limits_0^\pi y'\sin y\,dx$; г) $I[y]=y^2(0)+\int\limits_0^1 (xy+(y')^2)dx$.

11. Найти приращение и вариацию следующих функционалов: а) $I[y]=\int\limits_{-1}^e (yy'+xy'^2)dx$, если $y=\ln x$, $\delta y=\dfrac{\alpha(x-1)}{e-1}$; б) $I[y]=\int\limits_0^\pi y'^2\sin x\,dx$, если $y=\sin x$, $\delta y=\alpha\cos x$.

Найдите все экстремали функционала $I[y]$, удовлетворяющие заданным краевым условиям:

12. $I[y]=\int\limits_0^{\pi/2} ((y')^2-y^2)dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(\pi/2)=1$. Отв. $y(x)=Sinx$.

13. $I[y]=\int\limits_0^1 ((y')^2+12xy)dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=1$. Отв. $y(x)=x^3$.

14. $I[y]=\int\limits_{\pi}^{2\pi}(4(y')^2-7yy'-y^2)dx,\ \ y(\pi)=0,\ \ y(2\pi)=0$. Отв. *y(x)=0*

15. $I[y]=\int\limits_{0}^{\pi/8}(16y^2+(y')^2+2y(\sin 2x+16x))dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(\pi/8)=-\pi/8$. Отв.
$y(x)=\dfrac{\sqrt{2}Sh4x}{40Sh(\pi/2)}-\dfrac{1}{20}Sin2x-x$.

16. $I[y]=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}(3x^2y^2+\cos y+y'(2x^3y\text{ - }x\sin y))dx,\ \ \ \ y(\pi/4)=0,\ \ y(\pi/2)=1$. Отв. $y(x)\in C^1[\pi/4,\pi/2]$

17. $I[y]=\int\limits_{2}^{4}(x(y')^4-2y(y')^3)dx,\ \ y(2)=4,\ \ y(4)=5$. Отв. *y(x)=0.5x+3*

18. $I[y]=\int\limits_{0}^{1}((y')^2-2x^6y'-2xy)dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=-1/6$. Отв. $y(x)=2\cdot x^7/7-x^3/3\text{-}5x/42$

19. $I[y]=\int\limits_{0}^{1}tg\ y'dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=2$. Отв. *y(x)=2x*

20. $I[y]=\int\limits_{0}^{1}((y')^2+\dfrac{2xy}{1+x^2})dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=-1$. Отв. $y(x)=05x\ln(x^2+1)\text{-}x+arctgx\text{-}0.25(2\ln 2\text{-}\pi)$

21. Покажите, что функционал $I[y]=\int\limits_a^b(p(x)y'+q(x)y+r(x))\,dx$, где $p(x)\in C^1[a,b]$, $q(x)$, $r(x)\in C[a,b]$, не имеет экстремумов.

22. Покажите, что для всякого дифференциального уравнения $y''=\varphi(x,y,y')$ с дважды непрерывно дифференцируемой правой частью $\varphi(x,y,y')$ можно найти такую функцию $f(x,y,y')$, что решения этого уравнения будут экстремалями функционала $\int\limits_a^b f(x,y,y')dx$.

Найдите все экстремали заданного функционала, удовлетворяющие заданным краевым условиям: а) $I[y]=\int\limits_0^1(120\,xy-(y'')^2)\,dx$, $y(0)=0$, $y(1)=1$, $y'(0)=0$, $y'(1)=6$;

б) $I[y]=\int\limits_0^1((y'')^2+y^2-2yx^2)\,dx$, $y(0)=0$, $y(1)=1$, $y'(0)=0$, $y'(1)=2$;

23. Среди всех функций класса $C^2[0,\pi]$, удовлетворяющих граничным условиям $y(0)=y(\pi)=0$, $y'(0)=y'(\pi)=1$, найти такую, которая реализует экстремум функционала $I[y]=\int\limits_0^{\pi}(16y^2-(y'')^2+x^2)\,dx$.

24. Найти экстремали заданных функционалов:

$I[y]=\int\limits_0^1((y'')^2+2(y')^2+y^2)\,dx$, $y(0)=y(1)=0$, $y'(0)=1$, $y'(1)=\text{-sh}1$.

25. Найти все экстремали функционала *J[y]*,удовлетворяющие граничным условиям.

26. $J(y)=\int\limits_0^1 y''^2 dx;\quad y(0)=y(1)=y'(1)=0,\ y'(0)=1.$

27. $J(y)=\int\limits_0^1 (48y-y''^2)dx;\quad y(0)=y'(0)=0,\ y(1)=1, y'(1)=4.$

28. $J(y)=\int\limits_0^1 (y''^2-24xy)dx;\quad y(0)=y'(0)=0,\ y(1)=1/5, y'(1)=1.$

29. $J(y)=\int\limits_0^{\pi/2} (y''^2-y'^2)dx;\quad y(0)=y'(0)=0,\ y(\pi/2)=\pi/2,\ y'(\pi/2)=0.$

30. $J(y)=\int\limits_0^b (y''^2+y'^2)dx;\quad y(0)=y'(0)=y(b)=y'(b)=0.$

31. $J(y)=\int\limits_0^1 e^{-x}y''^2 dx;\quad y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y(1)=e,\ y'(1)=2e.$

32. $J(y)=\int\limits_0^1 (x+1)^3 y''^2 dx;\quad y(0)=1,\ y'(0)=-1,\ y(1)=1/2,\ y'(1)=-1/4.$

33. $J(y)=\int\limits_0^{\pi/2} (y''^2-y^2+x^2)dx;\quad y(0)=1,\ y'(0)=y(\pi/2)=0,\ y'(\pi/2)=-1.$

34. $J(y)=\int\limits_0^1 y'''^2 dx;\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=4,\ y''(1)=12.$

35. $J(y)=\int\limits_0^1 (y'''^2+y''^2)dx;\quad y(0)=y''(0)=0,\ y'(0)=1, y(1)=y''(1)=\operatorname{sh}1, y'(1)=\operatorname{ch}1.$

36. $J(y)=\int\limits_0^{\pi} (y'''^2-y''^2)dx;\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0,\ y(\pi)=\pi,\ y'(\pi)=2, y''(\pi)=0.$

37. $J(y)=\int\limits_0^{\pi} (y'''^2-y'^2)dx;\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0, y(\pi)=y''(\pi)=\operatorname{sh}\pi, y'(\pi)=\operatorname{ch}\pi+1.$

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и для промежуточной аттестации: зачетная система оценки знаний учащихся, (которая является составной частью зачета по практической части курса).

Для самостоятельного решения домашних работ приведем ряд разобранных примеров.

Пример 1. Показать, что функционал $I[y(\cdot)]=\int\limits_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$, определенный на множестве функций $y=y(x)$, непрерывных вместе с первой производной на отрезке $[a, b]$, непрерывен в пространстве $C^1[a,b]$, но не является непрерывным в $C^0[a,b]$.

Решение. Вначале покажем, что функционал непрерывен в пространстве $C^1[a,b]$. Действительно, имеем соотношения

$$\left|I[y]-I[y_0]\right|=\left|\int\limits_a^b \left(\sqrt{1+y'^2}-\sqrt{1+y_0'^2}\right)dx\right|\le\int\limits_a^b \frac{|y'+y_0'|\,|y'-y_0'|}{\sqrt{1+y'^2}+\sqrt{1+y_0'^2}}\,dx.$$

Из непрерывности производных y' и y_0' следует, что $\dfrac{|y'+y_0'|}{\sqrt{1+y'^2}+\sqrt{1+y_0'^2}} \le M$.

Далее, из определения нормы в пространстве $C^1[a,b]$ заключаем, что

$$\max_{x\in[a.b]}|y'-y_0'| = \|y'-y_0'\|_0 \le \|y-y_0\|_1 .$$

По заданному $\varepsilon>0$ выберем $\delta=\varepsilon/(M(b-a))$. Тогда для всех $y(\cdot)\in C^1[a,b]$ и таких, что $\|y-y_0\|_1<\delta$, имеем $|I[y]-I[y_0]| \le M \max\limits_{x\in[a.b]}|y'-y_0'|\ (b-a) \le M(b-a)\|y-y_0\|_1 < \varepsilon$, а это означает, что функционал непрерывен в пространстве $C^1[a,b]$.

Функционал не будет непрерывным в пространстве $C^0[a,b]$, так как он не ограничен в любой сильной δ-окрестности любой «точки» $y(\cdot)\in C^1[a,b]$ ввиду неограниченности всей совокупности значений производных функций $y(x)\in C^1[a,b]$.

Пример 2. Показать, что функционал $L(f)=\int\limits_a^b \alpha(x)f(x)dx$, где $\alpha(x)$ - непрерывная фиксированная функция, является линейным в пространстве $C^0[a,b]$.

Решение. Аддитивность этого функционала очевидна. Покажем его непрерывность. Учитывая, что функция $\alpha(x)$ ограничена ($|\alpha(x)|<M$), оценим модуль разности; имеем

$$|L(f)-L(f_1)| \le \int\limits_a^b |\alpha(x)|\,|f(x)-f_1(x)|dx \le \le M \max_{x\in[a,b]}|f(x)-f_1(x)|(b-a) \le M\|f-f_1\|_0(b-a) < \varepsilon ,$$

как только норма $\|f-f_1\|_0 < \dfrac{\varepsilon}{M(b-a)}$. А это означает, что функционал непрерывен.

Функционал не является линейным в пространстве $C^0[a,b]$, ибо для него не выполнены условия непрерывности и аддитивности. Этот же функционал не будет линейным и в пространстве $C^1[a,b]$; хотя он и непрерывен, но не является аддитивным.

Пример 3. Найти расстояния $\|y-y_0\|_0$, $\|y-y_0\|_1$ между кривыми $y(x)=x^2$ и $y_0(x)=x^3$ в пространствах $C^0[0,1]$ и $C^1[0,1]$.

Решение. Найдем расстояние в пространстве $C^0[0,1]$: $\rho_0(x,y)=\|y-y_0\|_0 = \max\limits_{x\in[0,1]}\left|x^2-x^3\right|$.

Рассмотрим функцию $f(x)=x^2-x^3$. Из необходимого условия экстремума $f'(x)=0$ получаем $2x-3x^2=0$, или $x_1=0$, $x_2=2/3$. Сравнивая значения функции $f(x)$ в точках экстремума и на концах промежутка $[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$, устанавливаем искомое расстояние:

$$\rho_0(x,y)=|f(x)|_{x=2/3}=4/27 .$$

Найдем расстояние в пространстве $C^1[0,1]$:

$$\rho_1(x,y)=\|y-y_0\|_1 = \max\left\{\|f\|_0, \|f'\|_0\right\} = \max\left\{\left\|x^2-x^3\right\|_0, \left\|2x-3x^2\right\|_0\right\}.$$

Исследуя дополнительно функцию $g(x)=2x-3x^2$ на экстремум, из условия $g'(x)=0$ получаем $2-6x=0$, или $x_3=1/3$ – стационарная точка. Сравнивая значения функции $g(x)$ в стационарной точке и на концах отрезка $[0,1]$, $g(0)=0$, $g(1/3)= 1/3$, $g(1)= -1$, устанавливаем

$$\|g\|_0 = \left\|2x-3x^2\right\|_0 = \left|2x-3x^2\right|_{x=1} = 1 ,$$

то есть $\rho_1(x,y)=\max\{4/27, 1\}=1$.

Пример 4. Найти первую вариацию функционала $I[y(\cdot)]=\int\limits_a^b y^2(x)\,dx$.

Решение. Сначала найдем вариацию функционала как линейную часть его приращения $\Delta I = \int_a^b [y(x) + \delta y(x)]^2 dx - \int_a^b y^2(x)\, dx = \int_a^b 2y(x)\cdot \delta y(x)dx + \int_a^b [\delta y(x)]^2\, dx$.

Заметим, что первое слагаемое линейно относительно вариации $\delta y(x)$; второе слагаемое имеет более высокий порядок малости при $\|\delta y\|_0 \to 0$. Действительно

$$\int_a^b [\delta y(x)]^2\, dx \le \int_a^b [\max_{x\in[a,b]} |\delta y(x)|]^2\, dx = [\max_{x\in[a,b]} |\delta y(x)|]^2 (b-a) = (b-a)\|\delta y\|_0^2 .$$

Таким образом $\delta I = \int_a^b 2y(x)\cdot \delta y(x)dx$.

Найдем вариацию функционала другим способом. Рассмотрим изменение функционала на семействе функций $y(x,\alpha)=y(x)+\alpha\,\delta y(x)$: $I[y(x)+\alpha\delta y(x)] = \int_a^b [y(x)+\alpha\delta y(x)]^2 dx$.

Тогда $\delta I = \left.\dfrac{\partial I[y(x)+\alpha\delta y(x)]}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = \left.\int_a^b 2[y(x)+\alpha\delta y(x)]\delta y(x)dx\right|_{\alpha=0} = \int_a^b 2y(x)\delta y(x)dx$.

Конечно, оба способа приводят к одному результату.

Пример 5. Доказать, что на кривой $y^*(x)=x$ функционал $I[y(\cdot)] = \int_0^1 y'^2(x)\, dx;\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=1$ достигает глобального минимума.

Решение. Очевидно, функция $y^*(x)=x\in C^1[0,1]$. Рассмотрим вариации $\delta y(x)\in C^1[0,1]$, удовлетворяющие условиям $\delta y(0)=\delta y(1)=0$. Исследуем приращение функционала:

$$I[y^*(x)+\delta y(x)] - I[y^*(x)] = \int_0^1 [y^*{}'(x)+\delta y'(x)]^2 dx - \int_0^1 [y^*{}'(x)]^2 dx =$$

$$= 2\int_0^1 y^*{}'(x)\delta y'(x)dx + \int_0^1 [\delta y'(x)]^2 dx = 2\delta y(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 [\delta y'(x)]^2 dx \ge 0,$$

так как $y^*{}'(x)=1$. Поскольку кривая $y(x)=y^*(x)+\delta y(x)\in C^1[0,1]$ произвольна и $I[y(x)]=I[y^*(x)+\delta y(x)]\ge I[y^*(x)]$, то на функции $y^*(x)=x$ достигается глобальный минимум.

Пример 6. Доказать, что на кривой $y^*(x)=0$ функционал

$I[y(\cdot)] = \int_0^\pi y^2(x)[3-y'^2(x)]dx;\ \ y(0)=y(\pi)=0$ достигает слабого минимума.

Решение. Так как $I[y^*(x)]=0$, то согласно определению требуется доказать, что существует $\varepsilon>0$ такое, что для всех $y(x)$, удовлетворяющих условию

$$\|y(x)-y^*(x)\|_1 = \max_{x\in[0,\pi]}\left\{\|y(x)-y^*(x)\|_0, \|y'(x)-y^*{}'(x)\|_0\right\} = \max_{x\in[0,\pi]}\left\{\|y(x)\|_0, \|y'(x)\|_0\right\} < \varepsilon ,$$

справедливо неравенство $I[y(x)]\ge I[y^*(x)]=0$.

Пусть $\varepsilon=1$, тогда для всех кривых из $\varepsilon-$ окрестности первого порядка кривой $y^*(x)\equiv 0$ выполняются условия:

$$\max_{x\in[0,\pi]}|y(x)|<\varepsilon=1,\quad \max_{x\in[0,\pi]}|y'(x)|<\varepsilon=1.$$

Поэтому $0\le y^2(x)<1$, $3-y'^2(x)>0$ и $I[y(\cdot)]=\int\limits_0^{\pi} y^2(x)[3-y'^2(x)]dx\ge 0$, что и требовалось доказать. Следовательно, на кривой $y^*(x)\equiv 0$ функционал достигает слабого минимума.

Исследуем функционал на наличие сильного минимума. При $\varepsilon=1$ ε – окрестность нулевого порядка кривой $y^*(x)\equiv 0$ образуют кривые, удовлетворяющие условию

$$\|y(x)-y^*(x)\|_0=\max_{x\in[0,\pi]}|y(x)-y^*(x)|=\max_{x\in[0,\pi]}|y(x)|<\varepsilon=1 \quad .$$

Рассмотрим последовательность функций $y_n(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\pi}\right)^n$ из этой ε – окрестности. Нетрудно заметить, что функционал на этих функциях принимает следующие значения

$$I[y_n(\cdot)]=\int\limits_0^{\pi} y_n^2(x)[3-y_n'^2(x)]dx=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{x}{\pi}\right)^{2n}[3-\frac{n^2}{4\pi^2}\left(\frac{x}{\pi}\right)^{2n-2}]dx=\frac{48\pi^2 n-2n^3-n^2-12\pi^2}{16\pi(2n+1)(4n-1)},$$

которые становятся отрицательными, начиная уже с $n>n_0=15$. Аналогичные рассуждения справедливы при других значениях ε. Следовательно, на кривой $y^*(x)\equiv 0$ функционал не достигает сильного минимума.

Пример. Найти функцию $y(x)\in C^1[0,b]$, на которой достигается экстремум функционала $I[y]=\int\limits_0^b y(y-2x^2)dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y(0)=0$, $y(b)=y_1$.

Решение. Уравнение Эйлера принимает вид $2y-2x^2=0$, отсюда $y=x^2$. Граничные условия удовлетворяются только, если $y_1=b^2$. В противном случае задача не имеет решения в пространстве $C^1[a,b]$.

2. $F(x,y)=M(x,y)+y'\cdot N(x,y)$, то есть подынтегральная функция в функционале линейно зависит от y'. Тогда уравнение в этом случае принимает вид $M_y(x,y)-N_x(x,y)=0$.

Это уравнение не является дифференциальным, а его решение может не удовлетворять граничным условиям. Это означает, что в пространстве $C^1[a,b]$ экстремали функционала отсутствуют, и исходная задача имеет решение в исключительных случаях. Заметим, что если последнее условие выполняется в некоторой области, имеющей граничные точки (a,y_0) и (b,y_1), то значение функционала не зависит от вида кривой $y(x)\in C^1[a,b]$. В этом случае функционал можно рассматривать как криволинейный интеграл от дифференциальной формы $M(x,y)dx+N(x,y)dy$, для которой последнее условие является условием полного дифференциала. Исходная задача на отыскание экстремалей теряет смысл.

3. Функция F зависит только от y': $F=F(y')$. Уравнение Эйлера принимает вид $F_{y'y'}\cdot y''=0$, а его решение $y(x)=C_1x+C_2$. Таким образом, в данном случае экстремалями функционала $I[y(x)]$ являются всевозможные прямые.

Пример. Найти функцию $y(x)\in C^1[0,1]$, на которой достигается экстремум функционала, $I[y]=\int\limits_0^1 (y')^2 e^{\cos y'}dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y(0)=0$, $y(1)=-4$.

Решение. Подынтегральная функция зависит только от y', $F(y')=(y')^2e^{\cos y'}$. Поэтому семейство экстремалей представляет собой двухпараметрическое семейство прямых, $y(x)=C_1x+C_2$. Используя граничные условия, получаем $C_1=-4$, $C_2=0$. Таким образом, искомой экстремалью является функция $y(x)=-4x$.

4. Функция F не зависит от y, т.е. $F = F(x, y')$. Тогда уравнение записывается в виде $\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y') = 0$, откуда получаем первый интеграл уравнения Эйлера $F_{y'}(x, y') = C_1$, т.е. дифференциальное уравнение первого порядка, решив которое, найдем экстремали функционала.

Пример. Материальная точка перемещается из точки $A(1,0)$ в точку $B(2,1)$ со скоростью $v=x$. Найти кривую, по которой время движения будет минимальным.

Решение: Используя известное кинематическое выражение $v = \frac{ds}{dt}$, где $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ – длина элемента дуги траектории точки, получаем дифференциальное соотношение для t: $dt = \frac{ds}{x}$. Поэтому время, затраченное на прохождение дуги кривой $y=y(x)$ $(1 \le x \le 2)$, определяется с помощью интеграла $t[y] = \int\limits_1^2 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}dx$,

представляющего собой функционал, в котором рассматриваемые кривые $y(x)$ удовлетворяют условиям $y(1)=0$, $y(2)=1$. Подынтегральная функция $F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}$ не зависит от y, поэтому из $F_{y'} = C_1 = const$ имеем равенство $\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{C_1}$.

Определяя отсюда y': $y' = \pm\frac{x}{\sqrt{C_1^2 - x^2}}$ и интегрируя, находим экстремали

$$y = C_2 \pm \sqrt{C_1^2 - x^2}\text{, или } (y - C_2)^2 + x^2 = C_1^2.$$

Из граничных условий $y(1)=0$ и $y(2)=1$ для определения C_1 и C_2 получаем систему

$$C_2^2 + 1 = C_1^2, \quad (1 - C_2)^2 + 4 = C_1^2.$$

Отсюда находим, что $C_1=\sqrt{5}$, $C_2=2$ и уравнение искомой экстремали есть окружность $x^2 + (y-2)^2 = 5$ с центром в точке (0,2) радиуса $\sqrt{5}$.

Из физических соображений ясно, что максимума для времени движения по различным кривым не существует и функция $y = 2 - \sqrt{-5 - x^2}$ дает минимум функционалу $t[y]$.

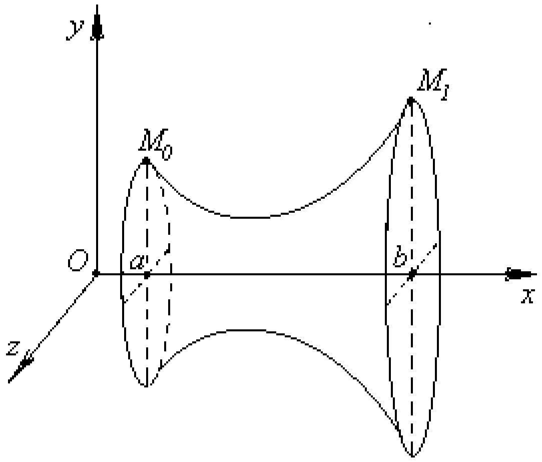
5. Функция F не зависит явно от x, т.е. $F = F(y, y')$. Уравнение Эйлера принимает вид

$$F_y - F_{yy'} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'' = 0,$$

или (после умножения обеих частей этого равенства на y') $\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = 0$, откуда получаем первый интеграл уравнения Эйлера $F - y'F_{y'} = C_1$.

Это дифференциальное уравнение первого порядка можно проинтегрировать, разрешив его относительно y' и разделив переменные, или путем введения параметра. [Еф-Сб-4, стр. 115]

Пример. Среди кривых, соединяющих две точки $M_0(a,y_0)$ и $M_1(b,y_1)$, найти ту, которая при вращении вокруг оси Ox образует поверхность наименьшей площади.



Форма поверхности вращения наименьшей площади.

Решение: Площадь поверхности вращения вокруг оси Оx задается функционалом $I[y]=2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx$ причем допустимые кривые $y(x)$ удовлетворяют условию $y(a)=y_0$, $y(b)=y_1$. Подынтегральная функция не зависит от x, поэтому можем воспользоваться первым интегралом уравнения Эйлера $F-y'F_{y'}=C_1$, который в данном случае принимает вид $y\sqrt{1+y'^2}-\dfrac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1$, или $y=C_1\sqrt{1+y'^2}$.

После элементарных преобразований получаем отсюда уравнение $C_1dy/\sqrt{y^2-C_1^2}=dx$, интегрируя которое, имеем $\ln\left|\dfrac{y}{C_1}+\sqrt{\left(\dfrac{y}{C_1}\right)^2-1}\right|=\dfrac{x}{C_1}+C_2$. Разрешая полученное равенство относительно y, придем к уравнению цепной линии $y=C_1\mathrm{ch}(x/C_1+C_2)$.

Постоянные C_1 и C_2 находим из системы $y_0=C_1\mathrm{ch}(a/C_1+C_2)$, $y_1=C_1\mathrm{ch}(b/C_1+C_2)$, которая может иметь одно, два или ни одного решения. Дальнейшие исследования показывают, что если система не имеет решения, а также при достаточно малых отношениях $y_i/(b-a)$ (i=0,1), множество значений площади фигур вращения имеют инфимум, равный $\pi(a^2+b^2)$, который не достигается в пространстве функций $C^1[a,b]$. При достаточно больших отношениях $y_i/(b-a)$ (i=0,1) и когда система имеет два решения, на ближней к оси x кривой достигается локальный максимум, а на дальней кривой – абсолютный минимум.

В общем случае приходится привлекать известные методы решения из теории дифференциальных уравнений.

Пример 4. Исследовать на экстремум функционал $I[y]=\int\limits_1^2(x^2y'^2+12y^2)dx,\ y(1)=1, y(2)=8.$

Решение: Уравнение Эйлера для данного функционала имеет вид $x^2y''+2xy'-12y=0$. Линейные уравнения такого типа в теории дифференциальных уравнений называются также уравнениями Эйлера. Его решение ищем в виде $y=x^\lambda$. Найдем производные $y'=\lambda x^{\lambda-1}, y''=\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$; подставив их в уравнение Эйлера, получим $x^\lambda(\lambda^2+\lambda-12)=0$. Для определения λ имеем характеристическое уравнение $\lambda^2+\lambda-12=0$, корни которого $\lambda_1=3$ и $\lambda_2=-4$. Общее решение уравнения Эйлера имеет вид $y=c_1x^3+c_2x^{-4}$.

Из граничных условий $y(1)=1, y(2)=8$ для определения постоянных C_1 и C_2 получаем систему $C_1+C_2=1, \qquad 8C_1+C_2/16=8.$

Отсюда находим C_1=1, C_2=0. Следовательно, $y=x^3$ есть экстремаль данного функционала. В этом примере экстремаль $y=x^3$ реализует минимум функционала.

Пример 5. Найти экстремали функционала $I[y]=\int\limits_0^{\pi}(y^2-y'^2-2y\sin x)dx$ при условии, что левый конец закреплен *(y(0)=0)*, а правый перемещается по прямой $x=\pi$.

Решение: На значение экстремали *y(x)* в правом конце $x=\pi$ не накладывается никаких условий, поэтому для отыскания экстремали следует найти решение уравнения Эйлера $y''+y=\sin x$ при естественном граничном условии $F_{y'}\Big|_{x=\pi}=y'\Big|_{x=\pi}=0$. Общее решение уравнение Эйлера записывается в виде $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\dfrac{1}{2}x\cos x$.

Тогда из условия $y(0)=0$ находим $C_1=0$, а из условия $y'(\pi)=0$ получаем уравнение

$$y'\Big|_{x=\pi}=\left(C_2\cos x-\frac{\cos x}{2}+\frac{x\sin x}{2}\right)\Bigg|_{x=\pi}=-C_2+\frac{1}{2}=0\,,$$

откуда C_2=1/2. Следовательно, экстремалью является кривая $y=\dfrac{1}{2}(\sin x-x\cos x)$.

Критерии оценки индивидуальных работ, домашнего задания и контрольной работы. Каждая индивидуальная работа оценивается, в зависимости от сложности, от 3 до 8 баллов (указано максимальное количество баллов). Студент получает максимальное количество баллов, если владеет теоретическим материалом по соответствующему разделу курса, отвечает на дополнительные вопросы, ориентируется в междисциплинарных связях данной дисциплины с другими предметами, выполнение задания в ППП соответствует заданию, задание выполнено в полном объеме, результаты верифицированы, работа оформлена в соответствии с указанными в дневнике требованиями.

При невыполнении отдельных подзаданий индивидуальных работ, контрольной работы и домашнего задания оценка может снижаться до 40 % от общего количества баллов.

Если студент не владеет теоретическим материалом, не отвечает на дополнительные вопросы или не выполнил существенную часть работы (выполнил менее 60 % заданий) – работа не зачитывается и студент продолжает подготовку. Ему рекомендуется посетить еженедельно проводимые консультационные занятия.

В случае несвоевременной сдачи индивидуальной работы, каждая работа оценивается меньшим количеством баллов.

Итоговый контроль знаний

Итоговый контроль осуществляется после успешного прохождения студентами текущего и промежуточного контроля в виде зачета.

Необходимым условием допуска на зачет является сдача всех практических и расчетных работ. В билет входят один вопрос и задача. Студент должен дать развернутый ответ на основной вопрос и решить задачу.

Студенты, имеющие пропуск по уважительной причине, могут выполнить задания теста в рамках времени, отведенных на консультацию по дисциплине.

Перечень теоретических вопросов к зачету по курсу: «Вариационные методы»

1. Предмет вариационного исчисления. Вариация и ее свойства.
2. Необходимое условие экстремума функционала.

3. Простейшая задача вариационного исчисления с неподвижными границами. Уравнение Эйлера. Экстремали.
4. Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка.
5. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных.
6. Простейшая задача с подвижными границами. Условие трансверсальности.
7. Экстремали с угловыми точками. Задачи об отражении и преломлении экстремалей.
8. Односторонние вариации. Вариационные задачи на условный экстремум. Геометрические и кинематические связи.
9. Преобразование уравнений Эйлера к каноническому виду. Уравнения Гамильтона-Якоби.
10. Задача оптимального управления и ее связь с вариационной задачей.
11. Задачи о быстродействии и о подъеме ракеты на максимальную высоту.
12. Безусловный экстремум.
13. Условный экстремум.
14. Функционал. Вариация функционала и ее свойства.
15. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.
16. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления.
17. Инвариантность уравнения Эйлера.
18. Поле экстремалей.
19. Достаточные условия условного экстремума.
20. Условный экстремум.
21. Вариационные задачи с подвижными границами.
22. Разрывные задачи. Односторонние вариации.
23. Теория Гамильтона-Якоби. Вариационные принципы механики.
24. Конечно-разностный метод Эйлера.
25. Метод Ритца.
26. Метод Канторовича.
27. Вариационные методы нахождения собственных значений и функций.
28. Принцип максимума Понтрягина.

Зачет сдается в конце учебного семестра. Форма сдачи – письменная или устная. Необходимым условием допуска к зачету является сдача всех индивидуальных работ. На зачете студенту предлагается один теоретический вопрос и задача. Зачет проходит в письменной форме с последующей индивидуальной беседой преподавателя с учащимся. На подготовку отводится 45 минут.

Критерии оценки. Каждый пункт оценен определенным количеством баллов, до начала зачета преподаватель озвучивает или отображает на доске шкалу перевода баллов (указана выше).

При изложении ответа на вопрос студент должен дать развернутый ответ на теоретический вопрос и объяснить решение задачи. Студент должен продемонстрировать ориентацию в материале, глубину знаний, междисциплинарные связи, владение специальными знаниями согласно программному материалу.

Итоговая оценка выставляется студенту с учетом общего рейтинга по дисциплине и набранных за семестр баллов, включая баллы на зачете.