Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

сборник учебно-методических материалов

для направления подготовки 20.03.01 – Техносферная безопасность

Благовещенск, 2017

*Печатается по решению
редакционно-издательского совета
инженерно-физического факультета
Амурского государственного
университета*

Составитель: Аверьянов В.Н.

Теория погрешностей: сборник учебно-методических материалов для направления подготовки 20.03.01 – Техносферная безопасность / АмГУ, ИФФ; - Благовещенск: Изд-во Амур.гос. ун-та, 2017. – 39 с.

СОДЕРЖАНИЕ:

1. КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ЛЕКЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Измерение физических величин

Получение информации о процессе (объекте), т.е. измерение, является обязательным и необходимым этапом процесса управления. Поэтому рассмотрим процесс получения и обработки информации более подробно.

Информация (от лат. informatio – разъяснение, изложение) – общенаучное понятие, включающее обмен сведениями между людьми, человеком и автоматом, автоматом и автоматом.

Свойство – философская (от фило… и греч. – мудрость) категория, выражающая такую сторону объекта (процесса, явления), которая обусловливает его общность или различие с другими объектами (процессами, явлениями) и обнаруживается в отношениях с ним. По своей сути свойство – категория качественная. Для количественного описания различных свойств процессов и физических тел вводится понятие величины.

Величина – свойство чего-либо, которое может быть выделено среди других свойств и оценено тем или иным способом, в том числе количественно. Величина не существует сама по себе, она имеет место лишь постольку, поскольку существует объект со свойствами, выраженными данной величиной.

Физическая (греч. , от – природа) величина – одно из свойств физического объекта, физической системы, явления или процесса, общее в качественном отношении для многих физических объектов, но в количественном отношении индивидуальное для каждого из них.

Измеряемая физическая величина – физическая величина, подлежащая измерению, измеряемая или измеренная в соответствии с основной целью измерительной задачи.

Размер физической величины – качественная определённость физической величины, присущая конкретному материальному объекту, системе, явлению или процессу.

Значение физической величины – выражение размера в виде некоторого числа принятых для неё единиц.

Истинное значение физической величины есть её значение, которое идеальным образом характеризует в качественном и количественном отношении физическую величину. Оно может быть получено только в результате бесконечного процесса измерений с бесконечным совершенствованием методов и СИ.

Действительное значение физической величины – значение физической величины, полученное экспериментальным путём и настолько близкое к истинному значению, что в поставленной измерительной задаче может быть использовано вместо него.

Физический параметр (от др.-греч. παραμετρέω – соразмеряю) – физическая величина, рассматриваемая при измерении данной физической величины как вспомогательная. Например, при измерении электрического напряжения переменного тока частоту тока рассматривают как параметр напряжения. При оценивании качества продукции нередко применяют выражение «измеряемые параметры». Здесь под параметрами, как правило, подразумевают физические величины, обычно наилучшим образом отражающие качество изделий или процесса.

Измерение – это процесс нахождения значения физической величины опытным путём с помощью специальных технических средств. Метрологическая суть измерения сводится к основному уравнению измерения (основному уравнению метрологии)

$$X = n[x] \quad \text{или} \quad n = X/[x], \tag{1}$$

где X – измеряемая величина; [x] – единица величины; n – число.

Первым постулатом (от лат. postulatum — требование) теории измерений считают следующий: в принятой модели объекта исследования существует определённая физическая величина и её истинное значение. Так как при различных целях исследований данному объекту могут быть сопоставлены различные модели, то из этого постулата вытекает следствие: для данной физической величины объекта измерения существует множество измеряемых величин (и соответственно их истинных значений). Из первого постулата теории измерений также следует, что измеряемому свойству объекта измерений должен соответствовать некоторый параметр его модели, который в течение времени измерения должен быть неизменным. Указанный факт описывается вторым постулатом: истинное значение измеряемой величины постоянно.

Результат измерения физической величины – значение величины, полученное путём её измерения. В основе любых измерений лежат различные физические явления, определяющие принцип измерения.

Принцип (от лат. principium – начало, основа) измерений – физическое явление или эффект (от лат. effectus – исполнение, действие), положенное в основу измерений.

Метод (от греч. – исследование) измерений – приём или совокупность приёмов сравнения измеряемой физической величины с её единицей в соответствии с реализованным принципом измерений.

Раздел 2. Погрешности измерений. Неопределенность измерений

Погрешность результата измерений – отклонение результата измерений от истинного (действительного) значения измеряемой величины. Она имеет размерность измеряемой величины. Истинное значение величины неизвестно, его применяют только в теоретических исследованиях. На практике используют действительное значение величины Хд, в результате чего абсолютную погрешность измерения ΔX определяют по формуле

$$\Delta X = X_{изм} - X_{д}, \qquad (2)$$

где Хизм – измеренное значение величины. Кроме абсолютной, погрешность может быть относительной

$$\delta = \frac{\Delta X}{X} 100\% \qquad (3)$$

и приведённой

$$\delta_{np} = 1 \frac{\Delta X}{X_{\max} - X_{\min}} 100\% \qquad (4)$$

Погрешность средства измерений есть разность между показанием СИ и истинным (действительным) значением измеряемой физической величины.

Погрешность измерений зависит от метрологических характеристик используемых СИ, совершенства выбранного метода измерений, внешних условий, а также от свойств объекта измерения и измеряемой величины. Погрешности измерений обычно превышают погрешности используемых СИ, однако, используя специальные методы устранения ряда погрешностей и статистическую обработку данных многократных наблюдений, можно в некоторых случаях получить погрешность измерения меньше погрешности используемых СИ.

Абсолютную погрешность, остающуюся постоянной на всём диапазоне измерений, называют аддитивной (от лат. additivus – прибавляемый). Если она имеет систематический характер, то её можно скорректировать путём установки положения указателя прибора на нулевую отметку шкалы. Поэтому иногда её называют погрешностью нуля.

Абсолютную погрешность, увеличивающуюся с ростом входного сигнала, называют мультипликативной (от лат. multiplico – умножаю, увеличиваю). Она обычно является следствием изменения чувствительности измерительных преобразователей, входящих в измерительную цепь. Мультипликативную погрешность иногда называют погрешностью чувствительности.

Поскольку относительная погрешность при малых значениях Х вели-ка, диапазон измерений прибора выбирают таким образом, чтобы измеряемая величина находилась в последней трети шкалы, где она минимальна

На рис. 1 показана структурная схема погрешности измерения и её составляющие.

Рисунок 1. Погрешность измерения и её составляющие

Систематическая погрешность измерения – составляющая погрешности результата измерений, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же физической величины. В зависимости от характера измерения систематические погрешности подразделяют на постоянные, прогрессивные, периодические и погрешности, изменяющиеся по сложному закону.

Постоянная систематическая погрешность в случае, когда она известна и её значение в виде поправки указано в НТД на СИ, учитывается в каждом из результатов измерений. При этом поправка на систематическую погрешность, вводимая в результат измерений, равна ей по абсолютной величине и противоположна по знаку.

Систематическую погрешность наиболее просто выявить путём сопоставления результатов измерений физической величины, проведённых с помощью исследуемого СИ, и другого, но более точного.

Рассеяние результатов в ряду измерений – несовпадение результатов измерений одной и той же величины в ряду равноточных измерений, как правило, обусловленное действием случайных погрешностей. Количественную оценку рассеяния результатов измерений вследствие действия случайных погрешностей обычно получают после введения поправок на действие систематических погрешностей.

К оценкам рассеяния результатов относят: размах, среднюю арифметическую погрешность, среднюю квадратическую погрешность (СКП), доверительные границы погрешности (доверительная граница и доверительный интервал).

Доверительные границы погрешности результата измерений – наибольшее и наименьшее значения погрешности измерений, ограничивающие интервал, внутри которого с заданной вероятностью находится искомое (истинное) значение погрешности результата измерений. Доверительные границы для нормального закона распределения вычисляют следующим образом:

$$\pm tS, \quad \pm tXS, \qquad (5)$$

где S, XS – СКП соответственно единичного и среднего арифметического результатов измерений; t – коэффициент, зависящий от доверительной вероятности P и числа измерений п.

Пример записи в техническом задании на разработку МВИ расхода жидкости. Норма на относительную погрешность измерений объёмного расхода жидкости: δ = 0,2 %, P = 0,95 или, что одно и то же, норма на относительную расширенную неопределённость измерений объёмного расхода жидкости: Uотн = 0,2 %, P = 0,95. Условия, при которых должны быть выполнены указанные требования к характеристикам качества измерений: диапазон значений измеряемого расхода от 10 до 50 м3/с, температура жидкости от 15 до 30 °С, кинематическая вязкость жидкости от 1 10–6 до 1,5 10–6 м2/с.

Раздел 3. Случайные величины и функции

Законы распределения вероятностей погрешностей в различных СИ весьма разнообразны. Рассмотрим три варианта распределения случайной величины (рис. 2).

Безусловная энтропия H(X) зависит только от распределения вероятностей различных значений измеряемой величины и не зависит от распределения вероятностей погрешности. А неопределённость, остающаяся после измерения, т.е. условная энтропия H(X/Xп), равна энтропии распределения вероятностей погрешностей. Поэтому каждый из членов основного соотношения теории информации можно исследовать отдельно и независимо от другого члена.

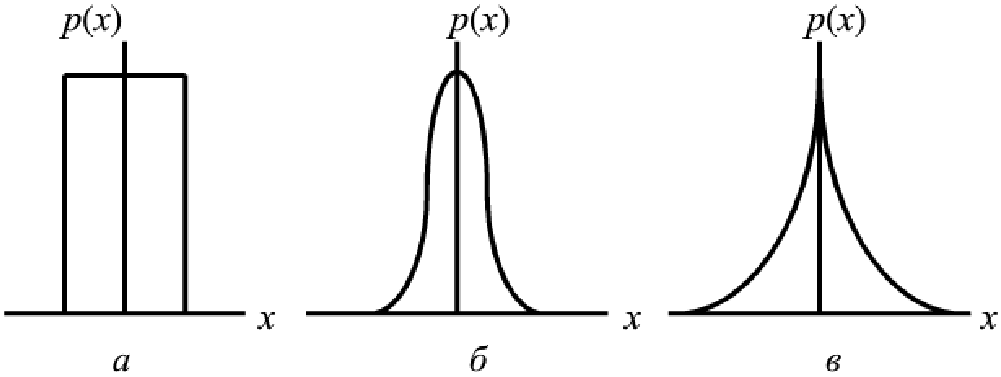


Рисунок 2. Распределения случайной величины: 1 – равномерное; 2 – нормальное; 3 – островерхое

Плотность вероятности p(x) для равномерного закона распределения (рис. 2, а) может быть записана по участкам:

$p(x) = 0$ при $x < -\Delta$ и $x > \Delta$, т.е. при $|x| > \Delta$,

$p(x) = 1/(2\Delta)$ при $-\Delta \le x \le \Delta$, т.е. при $|x| \le \Delta$.

Величина интервала неопределённости может быть выражена также через значение СКП. Для равномерного распределения дисперсия

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \tfrac{1}{2\Delta} dx = \tfrac{\Delta^2}{3} \tag{6}$$

Отсюда для равномерного распределения $\sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$, $\Delta = \sqrt{3}\sigma$ и интервал неопределённости $2\Delta = 2\sqrt{3}\sigma$, а следовательно.

Если же погрешность СИ распределена по нормальному закону

$$p(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{7}$$

где σ – среднеквадратическое значение абсолютной погрешности, то условная энтропия равна

$$H(X / X_n) = \ln(\sqrt{2\pi e}\sigma)$$

Раздел 4. Энтропийное описание погрешностей

В наиболее часто встречающихся случаях статическая характеристика СИ Y = f(x) имеет линейный характер (рис. 3). При традиционном подходе связь между измеряемой величиной Хп и выходным сигналом Yп предполагается однозначной. В действительности же, вследствие погрешностей прибора эта функция не является строго детерминированной. При подаче на вход СИ определённого значения входной величины Хп его выходная величина Yп может принять любое значение в некоторой полосе шириной 2Δ вокруг номинальной статической характеристики. Поэтому для полного описания свойств СИ необходимо указать распределение вероятности в каждой оцифрованной точке его шкалы (см. рис. 3).

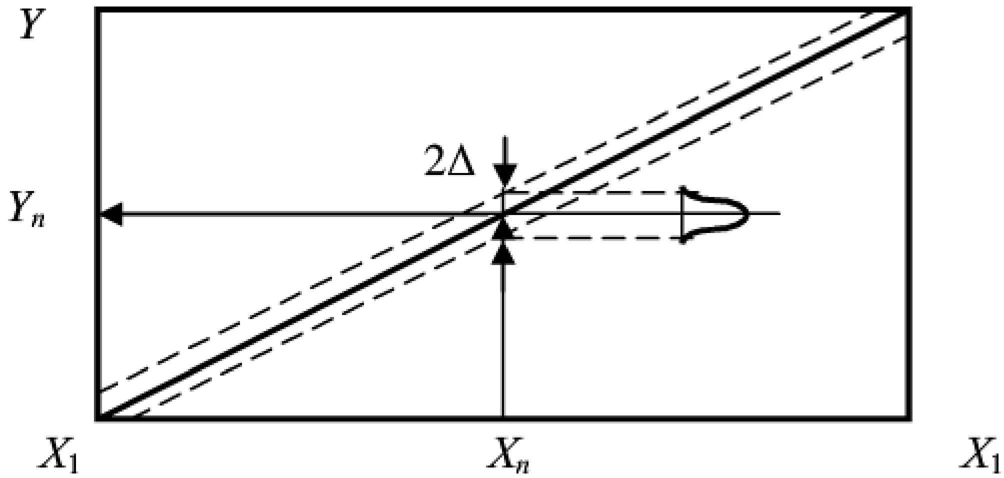


Рисунок 3. Статическая характеристика СИ

Однако такое исчерпывающее статистическое описание слишком громоздко и принципиально не даёт резких границ полосы погрешности. Поэтому на практике более удобно заменить это исчерпывающее описание сжатым приближённым описанием, не содержащим подробностей.

Энтропийным значением погрешности считается значение погрешности с равномерным законом распределения, которое вносит такое же дезинформационное действие, что и погрешность с данным законом распределения вероятностей. Если погрешность с произвольным законом распределения вероятностей имеет энтропию H(X/Xп), то эффективный интервал неопределённости вне зависимости от вида закона распределения будет

$$2\Delta = \exp H(X/Xп), \quad (8)$$

а энтропийное значение погрешности, определяемое как половина от интервала неопределённости, будет

$$\Delta = \pm 1/2 \exp(H(X/Xп)), \quad (9)$$

Таким образом, в результате введения понятия энтропийного значения погрешности появилась возможность любую погрешность с произвольным законом распределения всегда заменить погрешностью с равномерным распределением с тем же значением энтропии. Это позволяет заменить реальную полосу погрешностей с плавными спадами плотности вероятности, полностью эквивалентной ей в информационном смысле резко ограниченной полосой погрешностей [–Δ; Δ] с равномерным распределением вероятностей.

Энтропийное и среднеквадратическое значение погрешности связаны между собой через коэффициент К

$$\Delta = K\sigma \quad (10)$$

Коэффициент К зависит от вида закона распределения вероятности погрешности и поэтому его называют энтропийным коэффициентом данного закона распределения вероятностей.

Наибольшей энтропией при заданном значении мощности, т.е. наибольшим помехосодержанием, из всех возможных в природе законов распределения вероятностей обладает нормальное распределение. Поэтому оно имеет наибольший, предельно возможный энтропийный коэффициент Кн

$$K_H = \sqrt{\frac{\pi e}{2}} \approx 2{,}066 \approx 2{,}07$$

Любое другое распределение, отличное от нормального, может иметь энтропийный коэффициент, только меньший этого значения.

Раздел 5. Обработка результатов прямых однократных измерений

Обработка результатов однократных измерений изложена в Р 50.2.038–2008.

Однократное измерение – измерение, выполненное один раз. Стандартную неопределённость, оцениваемую по типу А, uA вычисляют по формуле

$$u_A = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}(x_i - \bar{x})^2} \tag{11}$$

где $\bar{x}$ – среднее арифметическое экспериментальных данных, полученных при измерении.

Стандартную неопределённость, оцениваемую по типу В, uB вычисляют по формуле

$$u_B = \frac{\Theta}{\sqrt{3}} \tag{12}$$

где θ – неисключённая систематическая погрешность (НСП), заданная границами ±θ.

1. Общие положения.

1.1. За результат однократного измерения А принимают значение величины, полученное при измерении.

1.2. На этапе перехода от погрешности к неопределённости целесообразно указывать характеристики и погрешности, и неопределённости результата измерения. Составляющие погрешности результата измерения должны быть известны до проведения измерения. Предполагают, что известные систематические погрешности исключены (внесены поправки на все известные источники неопределённости, имеющие систематический характер).

1.3. Полагают, что распределение случайных погрешностей не противоречит нормальному распределению, а НСП, представленные заданными границами ±θ, распределены равномерно.

Неопределённость результата измерений понимают как неполное знание значения измеряемой величины, и для количественного выражения этой неполноты вводят распределение вероятностей возможных значений измеряемой величины – параметр, который количественно характеризует точность результата измерений. Полагают, что распределение вероятностей возможных значений измеряемой величины не противоречит нормальному распределению. В целях количественного выражения неопределённости результата измерения, представленной в виде границ отклонения значения величины от её оценки [θ; +θ] (неполное знание о значении величины), полагают, что распределение возможных значений измеряемой величины в указанных границах не противоречит равномерному распределению.

1.4. Выполнение однократных измерений обосновывают следующими факторами:

– производственной необходимостью (разрушение образца, невозможность повторения измерения, экономическая целесообразность и т.д.);

– возможностью пренебрежения случайными погрешностями;

– случайные погрешности существенны, но доверительная граница погрешности результата измерения не превышает допускаемой погрешности измерений;

– стандартная неопределённость, оцениваемая по типу А, существенна, но расширенная неопределённость не превышает заданного предела.

1.5. При определении доверительных границ погрешности или расширенной неопределённости для уровня доверия Р результата измерения принимают вероятность, равную 0,95. В особых случаях, например при измерениях, которые нельзя повторить, допускается указывать доверительные границы или расширенную неопределённость для уровня доверия Р и более высоких вероятностей.

1.6. При вычислениях следует пользоваться правилами округления в соответствии с МИ 1317–86. Доверительные границы погрешности (характеристики погрешности) и расширенная неопределённость (расширенная неопределённость для уровня доверия Р) результата измерения должны быть представлены не более чем двумя значащими цифрами.

2. Составляющие погрешности и неопределённости результата измерения.

2.1. Составляющими погрешности результата однократного измерения являются погрешности СИ, метода, оператора, а также погрешности, обусловленные изменением условий измерения.

2.2. Погрешность результата однократного измерения чаще всего представлена НСП и случайными погрешностями. Неопределённость результата однократного измерения может быть представлена стандартными неопределённостями, оцениваемыми по типам А и В.

2.3. К характеристикам НСП относятся: – границы $\pm\theta$; – доверительные границы $\pm\theta(P)$.

2.4. Характеристикой случайных погрешностей могут быть: – СКО S; – доверительные границы ± (Р).

2.5. Погрешность СИ определяют на основании их метрологических характеристик, которые должны быть указаны в нормативных и технических документах.

2.6. Погрешности метода и оператора должны быть установлены при разработке и аттестации конкретной МВИ.

3. Оценивание НСП и стандартной неопределённости результата измерения по типу В.

3.1. НСП результата измерения выражают границами этой погрешности, если среди составляющих погрешности результата измерения в наличии одна НСП. При указанном условии стандартную неопределённость uB, обусловленную НСП, заданной своими границами $\pm\theta$, оценивают по формуле (5.52).

3.2. Доверительные границы НСП результата измерения вычисляют следующим образом.

3.2.1. При наличии нескольких НСП, заданных своими границами $\pm\theta j$, доверительную границу НСП результата измерения $\theta(P)$ (без учёта знака) вычисляют по формуле где k – поправочный коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью и числом m составляющих θj. При доверительной вероятности Р = 0,95 поправочный коэффициент k принимают равным 1,1.

При доверительной вероятности Р = 0,99 поправочный коэффициент k принимают равным 1,45, если число суммируемых составляющих m > 4. Если же число составляющих равно четырём (m = 4), то поправочный коэффициент k 1,4; при m = 3 k ≈ 1,3; при m = 2 k 1,2. Более точное значение k для доверительной вероятности Р = 0,99 при числе составляющих m 4 в зависимости от соотношения составляющих I определяют по графику k = f(m, l) (рис. 5.4) в соответствии с ГОСТ 8.207–76. Погрешность, возникающая при использовании формулы (5.58) для суммирования НСП и при нахождении поправочного коэффициента k для доверительной вероятности Р = 0,99 по графику k = f(m, l) (рис. 5.4), не превышает 5 %.

Раздел 6. Обработка результатов прямых измерений с многократными наблюдениями

Обработку результатов многократных измерений проводят в соответствии с ГОСТ 8.207–76 ГСИ. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений.

Неисправленный результат наблюдения – результат наблюдения до введения поправок с целью устранения систематических погрешностей.

Исправленный результат наблюдения – результат наблюдения, получаемый после внесения поправок в неисправленный результат наблюдения.

Неисправленный результат измерения – среднее арифметическое результатов наблюдений до введения поправок с целью устранения систематических погрешностей.

Исправленный результат измерений – результат измерения, получаемый после внесения поправок в неисправленный результат измерения.

Группа результатов наблюдений – совокупность результатов наблюдений, полученная при условиях, которые в соответствии с целью измерения необходимы для получения результата измерения с заданной точностью.

Исключённая систематическая погрешность результата измерения – систематическая погрешность, которая остаётся неустранённой из результата измерения.

1. Общие положения.

1.1. При статистической обработке группы результатов наблюдений следует выполнить следующие операции:

– исключить известные систематические погрешности из результатов наблюдений;

– вычислить среднее арифметическое исправленных результатов наблюдений, принимаемое за результат измерения;

– определить оценку СКО результата наблюдения;

– вычислить оценку СКО результата измерения;

– проверить гипотезу о том, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению;

– найти доверительные границы случайной погрешности (случайной составляющей погрешности) результата измерения;

– установить границы НСП (неисключённых остатков систематической погрешности) результата измерения; – определить доверительные границы погрешности результата измерения.

1.2. Проверку гипотезы о том, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению, следует проводить с уровнем значимости q от 2 до 10 %. Конкретные значения уровней значимости должны быть указаны в конкретной МВИ.

1.3. Для определения доверительных границ погрешности результата измерения доверительную вероятность P принимают равной 0,95.

В тех случаях, когда измерение нельзя повторить, помимо границ, соответствующих доверительной вероятности P = 0,95, допускается указывать границы для доверительной вероятности P = 0,99.

В особых случаях, например при измерениях, результаты которых имеют значение для здоровья людей, допускается вместо P = 0,99 принимать более высокую доверительную вероятность.

2. Результат измерения и оценка его СКО.

2.1. Способы обнаружения грубых погрешностей должны быть указаны в МВИ. Если результаты наблюдений можно считать принадлежащими к нормальному распределению, то грубые погрешности исключают в соответствии с указаниями НТД.

2.2. За результат измерения принимают среднее арифметическое результатов наблюдений, в которые предварительно введены поправки для исключения систематических погрешностей.

Если во всех результатах наблюдений содержится постоянная систематическая погрешность, допускается исключать её после вычисления среднего арифметического неисправленных результатов наблюдений.

2.3. СКО σ результата наблюдения оценивают согласно НТД.

2.4. СКО σ(A~) результата измерения оценивают по формуле

$$S(\widetilde{A}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widetilde{A})^2}{n(n-1)}} \qquad (13)$$

где xi – i-й результат наблюдения; $\widetilde{A}$ – результат измерения (среднее арифметическое исправленных результатов наблюдений); n – число результатов наблюдений; S(Ã)– оценка СКО результата измерения.

3. Доверительные границы случайной погрешности результата измерения.

3.1. Доверительные границы случайной погрешности результата измерения устанавливают для результатов наблюдений, принадлежащих нормальному распределению. Если это условие не выполняется, то методы вычисления доверительных границ случайной погрешности должны быть указаны в методике выполнения конкретных измерений.

3.1.1. При числе результатов наблюдений n > 50 для проверки принадлежности их к нормальному распределению по НТД предпочтительным является один из критериев: χ2 Пирсона или ω2 Мизеса-Смирнова.

3.1.2. При числе результатов наблюдений 15 < n < 50 для проверки принадлежности их к нормальному распределению предпочтительным является составной критерий. При числе результатов наблюдений n ≤ 15 принадлежность их к нормальному распределению не проверяют. При этом нахождение доверительных границ случайной погрешности результата измерения возможно в том случае, если заранее известно, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению.

3.2. Доверительные границы ε (без учёта знака) случайной погрешности результата измерения находят по формуле

$$\varepsilon = t \cdot S(\widetilde{A}), \tag{14}$$

где t – коэффициент Стьюдента.

4. Доверительные границы НСП результата измерения.

4.1. НСП результата образуется из составляющих, в качестве которых могут быть НСП: – метода; – средств измерений; – вызванные другими источниками. В качестве границ составляющих НСП принимают например, пределы допускаемых основных и дополнительных погрешностей СИ, если случайные составляющие погрешности пренебрежимо малы.

4.2. При суммировании составляющих НСП результата измерения НСП СИ каждого типа и погрешности поправок рассматривают как случайные величины. При отсутствии данных о виде распределения случайных величин их распределения принимают за равномерные.

4.3. Границы НСП θ результата измерения вычисляют путём построения композиции НСП СИ, метода и погрешностей, вызванных другими источниками. При равномерном распределении НСП эти границы (без учёта знака) можно определить по формуле

$$\Theta = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\Theta_i^2} \tag{15}$$

где θi – граница i-й НСП; k – коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью. Коэффициент k принимают равным 1,1 при доверительной вероятности P = 0,95.

При доверительной вероятности P = 0,99 коэффициент k принимают равным 1,4, если число суммируемых НСП более четырёх (m > 4). Если же число суммируемых погрешностей равно четырём или менее четырёх (m ≤ 4), то коэффициент k определяют по графику зависимости (рис. 4, где l = θ1/θ2).

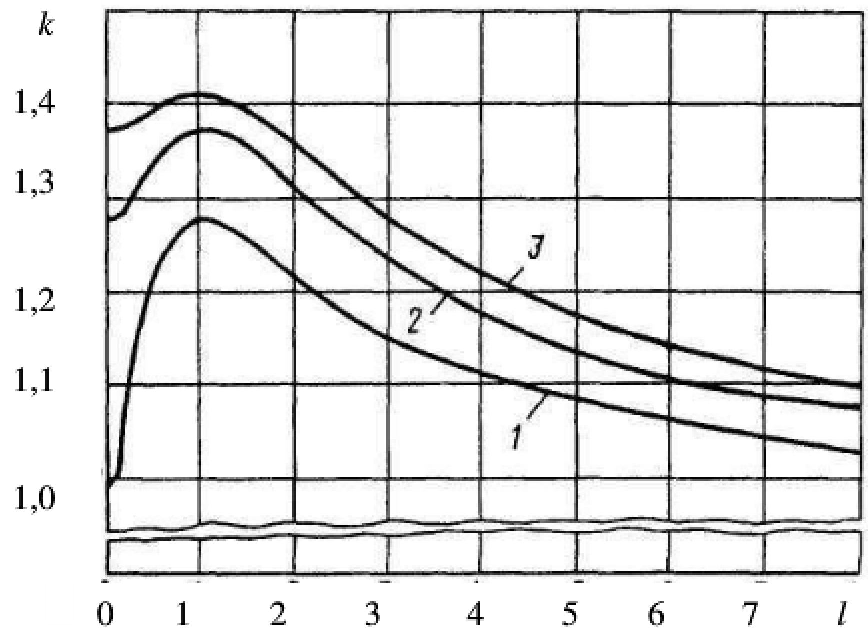


Рисунок 4. График зависимости k = f(m, l): 1 – m = 2; 2 – m = 3; 3 – m = 4

При трёх или четырёх слагаемых в качестве θ1, принимают составляющую, по числовому значению наиболее отличающуюся от других, в качестве θ2 следует принять ближайшую к θ1 составляющую. Доверительную вероятность для вычисления границ НСП принимают той же, что при вычислении доверительных границ случайной погрешности результата измерения.

Раздел 7. Обработка результатов косвенных измерений

1. Общие положения.

1.1. Искомое значение физической величины А находят на основании результатов измерений аргументов a1, ... am, связанных с искомой величиной уравнением (МИ 2083–90)

A = f(a1, … am).

Функция f должна быть известна из теоретических предпосылок или установлена экспериментально с погрешностью, которой можно пренебречь.

1.2. Результаты измерений аргументов и оценки их погрешностей могут быть получены из прямых, косвенных, совокупных, совместных измерений. Сведения об аргументах могут быть взяты из справочной литературы и технической документации.

1.3. При оценивании доверительных границ погрешностей результата косвенного измерения обычно принимают вероятность, равную 0,95 или 0,99. Использование других вероятностей должно быть обосновано.

1.4. Основные положения рекомендации устанавливаются для оценивания косвенно измеряемой величины и погрешностей результата измерения:

– при линейной зависимости и отсутствии корреляции между погрешностями измерений аргументов;

– при нелинейной зависимости и отсутствии корреляции между погрешностями измерений аргументов;

– для коррелированных погрешностей измерений аргументов при наличии рядов отдельных значений измеряемых аргументов.

2. Косвенные измерения при линейной зависимости.

2.1. Искомое значение А связано с m измеряемыми аргументами a1, ... am уравнением

A = b1a1 + b2a2 + ... + bmam, (16)

где b1, ... bm – постоянные коэффициенты при аргументах a1, ... am соответственно.

Корреляция между погрешностями измерений аргументов отсутствует.

Если коэффициенты b1, ... bm определяют экспериментально, то задача определения результата измерения величины решается поэтапно: сначала оценивают каждое слагаемое biai как косвенно измеряемую величину, полученную в результате произведения двух измеряемых величин, а потом находят оценку измеряемой величины A.

2.2. Результат косвенного измерения A~ вычисляют по формуле

$$\widetilde{A} = \sum_{i=1}^{m} b_i a_i \tag{17}$$

где ia~ – результат измерения аргумента ai; m – число аргументов.

2.3. СКО результата косвенного измерения)~(AS находят по формуле

$$S(\widetilde{A}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2 S^2(\widetilde{a}_i)} \tag{18}$$

где)~(aS – СКО результата измерения аргумента ai.

2.4. Доверительные границы случайной погрешности результата косвенного измерения при условии, что распределения погрешностей результатов измерений аргументов не противоречат нормальным распределениям, определяют (без учёта знака) по формуле

$$\varepsilon(p) = t_q\, S(\tilde{A}) \tag{19}$$

2.5. Границы НСП результата косвенного измерения определяют следующим образом.

2.5.1. Если НСП результатов измерений аргументов заданы границами θi; то доверительные границы НСП результата косвенного измерения θ(p) (без учёта знака) при вероятности P вычисляют по формуле

$$\Theta(p) = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2 \Theta_i^2} \tag{20}$$

где k – поправочный коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью и числом m составляющих θi. При доверительной вероятности P = 0,95 поправочный коэффициент k принимают равным 1,1. При доверительной вероятности P = 0,99 поправочный коэффициент принимают равным 1,4, если число суммируемых составляющих $m > 4$. Если же число составляющих $m \le 4$, то поправочный коэффициент $k \le 1,4$.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Погрешности средств измерений

Задача 1

Определить пределы инструментальных абсолютной и относительной погрешностей измерения тока I = 67 мА, если измерения проводились магни-тоэлектрическим миллиамперметром с нулем в начале шкалы, классом точности 1.0 и пределом измерения А = 100 мА.

Решение

Для магнитоэлектрического миллиамперметра класс точности определяется значением максимальной приведенной погрешности, т.е. $\gamma = \pm 1{,}0$ %.

$$\gamma = \pm \frac{\Delta}{X_N} 100\,\%,$$

то предел инструментальной абсолютной погрешности

$$\Delta = \pm \frac{\gamma\, X_N}{100\,\%} \text{ (мА)}.$$

Миллиамперметр имеет равномерную шкалу с нулем в начале шкалы, и поэтому $X_N = A = 100$ мА:

$$\Delta = \pm \frac{1{,}0\,\% \cdot 100\,\text{мА}}{100\,\%} = \pm 1{,}0\,(\text{мА}).$$

Предел инструментальной относительной погрешности

$$\delta = \pm \frac{1{,}0\,\text{мА}}{67\,\text{мА}} \cdot 100\,\% \approx \pm 1{,}5\,\%.$$

Задача № 2

Определить пределы инструментальных абсолютной и относительной погрешностей измерения напряжения U=8,6 В, если измерения проводились магнитоэлектрическим вольтметром с нулем в середине шкалы, классом точности 2,5 и пределами измерения А = ± 25 В.

Решение

Как и в предыдущей задаче, предел абсолютной погрешности находится из формулы:

$$\gamma = \pm \frac{\Delta}{X_N} 100\,\%.$$

Вольтметр имеет равномерную шкалу с нулем в середине шкалы. Поэтому

$$X_N = |-25| + |25| = 50 \text{ (В)},$$

$$\Delta = \pm(2{,}5 \cdot 50)/100\,\% = \pm 1{,}25 \text{ (В)}.$$

Найдем предел относительной погрешности измерения:

$$\delta = \pm(\Delta/U) \cdot 100\,\% = \pm(1{,}25 \cdot 100)/8{,}6 \approx \pm 15\ (\%).$$

Задача № 3

Оценить инструментальные погрешности измерения тока двумя магни-тоэлектрическими миллиамперметрами с классами точности 0,5 и 1.0 и указать, какой из результатов получен с большей точностью, а также, могут ли показания $I_1 = 19{,}0$ мА и $I_2 = 18{,}6$ мА исправных приборов отличаться так, как задано в условии? Миллиамперметры имеют нули в начале шкалы и пределы $A_1 =$
$= 50$ мА и $A_2 = 20$ мА.

Решение

Инструментальные абсолютные погрешности можно найти из формул:

$$\Delta_1 = \pm(\gamma_1\, X_{N1})/100\,\% = \pm(\gamma_1\, A_1)/100\,\% = \pm(0{,}5 \cdot 50)/100 = \pm 0{,}25 \text{ (мА)},$$

$$\Delta_2 = \pm(\gamma_2\ X_{N2})/100\ \% = \pm(\gamma_2\ A_2)/100\ \% = \pm(1{,}0\cdot 20)/100 = \pm 0{,}20\ (мА).$$

Для определения, какое из измерений проведено с большей точностью, необходимо определить инструментальные относительные погрешности:

$$\delta_1 = \pm(\Delta_1/I_1)\ 100\ \% = \pm(0{,}25/19{,}0)\cdot 100\ \% \approx \pm 1{,}3\ \%,$$

$$\delta_2 = \pm(\Delta_2/I_2)\ 100\ \% = \pm(0{,}20/18{,}6)\cdot 100\ \% \approx \pm 1{,}1\ \%.$$

Видно, что второе измерение проведено с большей точностью, так как точность обратно пропорциональна модулю относительной погрешности.

В наихудшем случае (когда погрешности приборов будут иметь противоположные знаки) модуль разницы между результатами измерений $|\Delta| = |I_1 - I_2|$ не должен превышать сумму модулей абсолютных погрешностей, т.е.

$$|\Delta| < |\Delta_1| + |\Delta_2|\ .$$

Получаем

$$|\Delta| = 0{,}4\ (мА) < |\Delta_1| + |\Delta_2| = 0{,}45\ (мА).$$

Таким образом, при исправных миллиамперметрах можно получить указанные значения I_1 и I_2.

Задача № 4

Определить инструментальную абсолютную погрешность измерения сопротивления R_x = 200 кОм с помощью комбинированного прибора, если он имеет класс точности 4,0, длину рабочей части шкалы L = 80 мм, отметке 200 кОм соответствует длина шкалы l = 40 мм.

Решение

В комбинированном приборе используется магнитоэлектрический омметр, причем шкала прибора при измерении сопротивлений неравномерная. Инструментальная относительная погрешность измерения сопротивления δ_{R_X} с помощью таких омметров вычисляется через их класс точности по формуле

$$\delta_{R_X} = \pm(\gamma\cdot L/l),$$

т.е.

$$\delta_{R_X} = \pm(4{,}0\cdot 80/40) = \pm 8{,}0\ (\%)$$

С другой стороны

$$\delta_{R_X} = \pm(\Delta_{R_X}/R_X)\cdot 100\ \%,$$

где Δ_{R_X} - инструментальная абсолютная погрешность измерения сопротивления.

Тогда

$$\Delta_{R_X} = \pm(\delta_{R_X}\cdot R_X)/100 = \pm(8{,}0\cdot 200)/100 = \pm 16\ (кОм).$$

Задача № 5

Определить относительную и абсолютную погрешности воспроизведения сопротивлений R_1 = 0,52 Ом; R_2 = 120,00 Ом; R_3 = 18412,00 Ом с помощью образцового магазина сопротивлений, если его класс точности $0{,}05/4\ 10^{-6}$, магазин содержит 7 декад и цена младшей декады 0,01 Ом.

Решение

Сначала определим наибольшее значение воспроизводимой данным магазином сопротивлений величины:

$$R_к = 9\ 10^4 + 9\ 10^3 + 9\ 10^2 + 9\ 10^1 + 9\ 10^0 + 9\ 10^{-1} + 9\ 10^{-2}\ (Ом);$$

$$R_к = 99999{,}99\ (Ом) \approx 10^5\ (Ом).$$

Для нормирования пределов погрешности магазинов мер одночленные формулы не применяются, поскольку они не отражают всегда имеющей место зависимости абсолютной или относительной погрешности меры от номинального значения воспроизводимой величины. Для них используются двухчленные формулы:

для абсолютной погрешности:

$$\Delta = \pm(a + b\cdot X),$$

для относительной погрешности:

$$\delta = \pm[c + d\cdot(|X_к/X|-1)].$$

В нашем случае заданы величины c и d:

$$c = 0{,}05\ \%; \qquad d = 4\cdot10^{-6}\ \%.$$

Найдем относительные погрешности воспроизведения сопротивлений R_1, R_2, R_3:

$$\delta_{R_1} = \pm[0{,}05 + 4\cdot10^{-6}\ (|10^5/0{,}52| - 1)] \approx \pm0{,}3\ (\%),$$

$$\delta_{R_2} = \pm[0{,}05 + 4\cdot10^{-6}\ (|10^5/120| - 1)] \approx \pm0{,}53\ (\%),$$

$$\delta_{R_3} = \pm[0{,}05 + 4\cdot10^{-6}\ (|10|^{-5}/18412| - 1)] \approx \pm0{,}050\ (\%).$$

Известно, что связь между a, b, c, d - следующая:

$$d = a/R_к, \qquad c = b+d.$$

Для удобства выразим c и d в относительных единицах:

$$c = 5\cdot10^{-4}, \quad d = 4\cdot10^{-8}.$$

Тогда

$$a = d\,|R_к| = 4\cdot10^{-8}\ 10^{-5} = 0{,}004\ (Ом);$$

$$b = c-d = 5\cdot10^{-4} - 4\cdot10^{-8} \approx 5\cdot10^{-4}.$$

Теперь можно определить абсолютные погрешности воспроизведения сопротивлений R_1, R_2, R_3

$$\Delta_{R_1} = \pm(0{,}004+5\ 10^{-4}\cdot 0{,}52) \approx \pm0{,}0043\ (Ом),$$

$$\Delta_{R_2} = \pm(0{,}004+5\ 10^{-4}\cdot 120) \approx \pm0{,}0064\ (Ом),$$

$$\Delta_{R_3} = \pm(0{,}004+5\ 10^{-4}\cdot 18412) \approx \pm9{,}2\ (Ом).$$

Обработка результатов измерений с однократными наблюдениями

Задача № 2

Резонансная частота колебательного контура определялась путем однократного измерения индуктивности L = 0,346 мГн и емкости C = 6,5 нФ входящих в него катушки индуктивности и конденсатора с последующим вычислением по формуле $f = 1/(2\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}$). На основании предыдущих измерений частоты аналогичных контуров известна оценка СКО измерения частоты $\hat{\sigma}_{\bar{f}} = 0{,}14$ êÃö, границы неисключенных остатков систематической погрешности измерения индуктивности Δ_{c_L} = 0,11 мГн и емкости Δ_{c_C} = 0,11 нФ. Определить доверительные границы погрешности косвенного измерения частоты с доверительной вероятностью $P_д$ = 0,95.

Решение

1 Рассчитывается значение результата косвенного измерения частоты:

$$f = 1/(2\pi\cdot\sqrt{L\cdot C} = 1/(2\cdot3{,}14\cdot\sqrt{0{,}346\cdot6{,}5}) = 106{,}2\ (кГц).$$

2 Рассчитываются оценки частных систематических погрешностей косвенного измерения индуктивности

$$\hat{E}_L = (\partial f/\partial L)\cdot\Delta_{c_L} = -\Delta_{c_L}/(4\pi\cdot\sqrt{C\cdot L^3}) =$$

$$= -0{,}01\cdot10^{-3}/(4\cdot3{,}14\sqrt{6{,}5\cdot10^{-9}\cdot0{,}041\cdot10^{-9}}) = -1{,}54\ (кГц);$$

емкости

$$\hat{E}_C = (\partial f/\partial Ñ)\cdot\Delta_{c_C} = -\Delta_{c_C}/(4\pi\cdot\sqrt{C^3\cdot L}) =$$

$$= -0{,}01\cdot10^{-9}/(4\cdot3{,}14\cdot\sqrt{274{,}625\cdot10^{-27}\cdot0{,}346\cdot10^{-3}}) = -0{,}28\ (кГц).$$

3 Находятся доверительные границы неисключенной систематической погрешности результата измерения. Поскольку данные о виде распределения неисключенных систематических погрешностей отсутствуют, то их распределение принимается за равномерное. Тогда

$$\Delta_c = k \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{2} E_i^2} = 1{,}1\sqrt{(1{,}54)^2 + (0{,}28)^2} = 1{,}72 \ \text{(кГц)},$$

так как при доверительной вероятности $P_д = 0{,}95$ $k = 1{,}1$,

$$\Delta_c' = \hat{E}_L + \hat{E}_c = 1{,}54 + 0{,}28 = 1{,}82 \ \text{(кГц)}.$$

4 За оценку границ неисключенных систематических погрешностей принимается меньшее из Δ_c и Δ_c':

$$\Delta_c = 1{,}72 \text{ кГц}.$$

5 Оцениваются доверительные границы случайной погрешности измерения

$$\overset{\circ}{\Delta} = t \cdot \hat{\sigma}_{\bar{f}} = 2 \cdot 0{,}14 = 0{,}28 \ \text{(кГц)},$$

так как для однократных измерений и $P_д = 0{,}95$ коэффициент Стьюдента t принимают равным 2.

6 Оцениваются доверительные границы суммарной погрешности результата измерения

$$\Delta_f = \sqrt{\Delta_c^2 + \overset{\circ}{\Delta}{}^2} = \sqrt{(1{,}72)^2 + (0{,}28)^2} = 1{,}74 \ \text{(кГц)}.$$

7 Результат измерения записывается в следующем виде:

$$f = (106{,}2 \pm 1{,}8) \ \text{(кГц)}, \qquad P = 0{,}95.$$

Обработка результатов многократных наблюдений при прямых измерениях

Общие положения алгоритма обработки результатов многократных наблюдений при прямых измерениях

1 При статистической обработке группы результатов наблюдений следует выполнить следующие операции:

- исключить известные систематические погрешности из результатов наблюдений;
- вычислить среднее арифметическое исправленных результатов наблюдений, принимаемое за результат измерения;
- вычислить оценку среднего квадратического отклонения результата измерения;
- проверить гипотезу о том, что результаты измерений принадлежат к нормальному распределению;
- вычислить доверительные границы случайной погрешности (случайной составляющей погрешности) результата измерения;
- вычислить границы неисключенной систематической погрешности (неисключенных остатков систематической погрешности) результата измерения;
- вычислить доверительные границы суммарной погрешности результата измерения.

2 Проверку гипотезы о том, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению, следует проводить с уровнем значимости q от 10 до 2 %. Конкретные значения уровней значимости должны быть указаны в конкретной методике выполнения измерений.

3 Для определения доверительных границ погрешности результата измерения доверительную вероятность P принимают равной 0,95. В тех случаях, когда измерения нельзя повторить, и других особых случаях, результаты которых имеют важное значение, допускается указывать границы для доверительной вероятности $P_д = 0{,}99$.

Задача № 1

Обработать ряд результатов наблюдений X_i (таблица 1), полученный по результатам многократных прямых измерений сопротивления, и оценить случайную погрешность измерения, считая результаты исправленными и равноточными. Доверительную вероятность принять $P_д$ = 0,95. Результат измерения представить по одной из форм, предусмотренных ГОСТ 8.207-76.

Таблица 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X_i	32,700	32,744	32,786	32,578	32,848	32,593	32,588	32,519	32,603

Продолжение таблицы 1

i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
X_i	32,627	32,635	32,970	32,754	32,702	32.879	32.799	32.775	32.690

Окончание таблицы 1

i	19	20	21	22	23	24	25
X_i	32,671	32,645	32,701	32,688	32,676	32,685	32,826

Решение

1 Так как в условии задачи указано, что результаты измерения являются исправленными и равноточными, то производить исключение систематических погрешностей нет необходимости.

2 Вычисляем среднее арифметическое результатов наблюдений

$$\overline{X} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{25}\sum_{i=1`}^{25} X_i = 32,707 \text{ кОм.}$$

Значение $\overline{X}$ принимается за результат измерения.

3 Определяем случайные отклонения V_i результатов отдельных наблюдений по формуле

$$V_i = X_i - \overline{X}.$$

Результаты промежуточных расчетов заносим в таблицу 2.

Таблица 2

i	1	2	3	4	5
V_i	– 0,007	0,037	0,079	- 0,129	0,133
V^2_i	$0,049\cdot10^{-3}$	$1,369\cdot10^{-3}$	$6,241\cdot10^{-3}$	$16,641\cdot10^{-3}$	$17,689\cdot10^{-3}$

Продолжение таблицы 2

i	6	7	8	9	10
V_i	– 0,114	– 0,119	– 0,188	– 0,104	– 0,080
V^2_i	$12,996\cdot10^{-3}$	$14,161\cdot10^{-3}$	$35,344\cdot10^{-3}$	$10,816\cdot10^{-3}$	$6,4\cdot10^{-3}$

Продолжение таблицы 2

i	11	12	13	14	15
V_i	– 0,072	0,263	0,047	– 0,005	0,172
V^2_i	$5,184\cdot10^{-3}$	$69,169\cdot10^{-3}$	$2,209\cdot10^{-3}$	$0,025\cdot10^{-3}$	$29,584\cdot10^{-3}$

Продолжение таблицы 2

i	16	17	18	19	20
V_i	0,092	0,068	– 0,017	– 0,036	– 0,062
V^2_i	$8,464\cdot10^{-3}$	$4,624\cdot10^{-3}$	$0,289\cdot10^{-3}$	$1,296\cdot10^{-3}$	$3,844\cdot10^{-3}$

Продолжение таблицы 2

i	21	22	23	24	25
V_i	– 0,006	– 0,019	– 0,031	– 0,022	0,119
V^2_i	$0,036\cdot10^{-3}$	$0,361\cdot10^{-3}$	$0,961\cdot10^{-3}$	$0,484\cdot10^{-3}$	$14,161\cdot10^{-3}$

Правильность вычислений $\overline{X}$ и V_i определяем по формуле $\sum_{i=1}^{n} V_i \approx 0$. Если $\sum_{i=1}^{n} V_i \neq 0$, то имеют место ошибки в вычислениях.

4 Вычисляем оценку среднего квадратического отклонения результатов наблюдений $\hat{\sigma}_X$

$$\hat{\sigma}_X = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} V_i^2} = 0{,}105 \text{ кОм.}$$

5 С помощью критерия грубых погрешностей (критерий «трёх сигм») проверяем наличие грубых погрешностей.

В соответствии с этим критерием, если $|V_i| > 3\hat{\sigma}_X$, то такое наблюдение содержит грубую погрешность. В случае обнаружения грубой погрешности в i-м наблюдении необходимо это наблюдение исключить из результатов наблюдений и повторить вычисления по пп. 1-5 для меньшего числа n.

В решаемой задаче $3\hat{\sigma}_X = 3 \cdot 0{,}105 = 0{,}315$ кОм и, как видно из таблицы 2, грубые погрешности отсутствуют.

6 Определяем оценку среднего квадратического отклонения результата измерения $\hat{\sigma}_{\overline{X}}$ из выражения

$$\hat{\sigma}_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} V_i^2} = \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}105}{\sqrt{25}} = 0{,}021 \text{ кОм.}$$

7 Выдвигаем гипотезу о принадлежности результатов наблюдений нормальному распределению и проверяем эту гипотезу.

а) При числе результатов наблюдений n > 50 для проверки принадлежности их к нормальному распределению в соответствии с ГОСТ 11.006-74 предпочтительным является один из критериев χ^2 Пирсона или ω^2 Мизеса-Смирнова.

При числе результатов наблюдений 50>n>15 для проверки принадлежности их к нормальному распределению предпочтительным является составной критерий, приведённый в [9].

При числе результатов наблюдений n≤15 принадлежность их к нормальному распределению не проверяют. При этом нахождение доверительных границ случайной погрешности результата измерения по методике, предусмотренной [1], возможно в том случае, если заранее известно, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению. Если условие принадлежности результатов наблюдений нормальному распределению не выполняется, методы вычисления доверительных границ случайной погрешности должны быть указаны в методике выполнения конкретных измерений.

В решаемой задаче n = 25. Поэтому принадлежность результатов наблюдений к нормальному распределению проверяем по составному критерию.

б) Критерий 1. Вычисляем смещённую оценку среднего квадратического отклонения по формуле

$$\hat{\sigma}^*_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} V_i^2} = 0{,}1029 \text{ кОм.}$$

Вычисляем параметр

$$\hat{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |V_i|}{n \cdot \hat{\sigma}_x^*} = 0{,}789 \cdot$$

Результаты наблюдений можно считать распределенными нормально, если

$$d_{1-q_1/2} < \hat{d} \le d_{q_1/2},$$

где $d_{1-q_1/2}$ и $d_{q_1/2}$ - квантили распределения, получаемые из таблицы 3 по n, $q_1/2$ и (1 - $q_1/2$), причем q_1 - заранее выбранный уровень значимости критерия.

Выбираем уровень значимости q равным 5 %. Из таблицы 3 находим $d_{q_1/2}$= =0,868, $d_{1-q_1/2}$= 0,704. Сравнивая полученное значение $\hat{d}$ с этими величинами, делаем вывод о том, что по критерию 1 результаты наблюдений распределены по нормальному закону.

Критерий 2. Этот критерий используется дополнительно для проверки «концов» распределений.

Гипотеза о нормальности по критерию 2 не отвергается, если не более m разностей V_i превзошли значение $Z_{P/2} \cdot \hat{\sigma}_{\overline{x}}$, где верная квантиль распределения нормированной функции Лапласа отвечает вероятности P/2.

Таблица 3 - Статистика d

n	$q_1/2 \cdot 100\%$		$(1 - q_1/2) \cdot 100\%$	
	1 %	5 %	95 %	99 %
16	0,9137	0,8884	0,7236	0,6829
21	0,9001	0,8768	0,7304	0,6950
26	0,8901	0,8686	0,7360	0,7040
31	0,8826	0,8625	0,7404	0,7110
36	0,8769	0,8578	0,7440	0,7167
41	0,8722	0,8540	0,7470	0,7216
46	0,8682	0,8508	0,7496	0,7256
51	0,8648	0,8481	0,7518	0,7291

Таблица 4 - Значения P для вычисления $Z_{P/2}$.

n	m	$q_2 \cdot 100\%$		
		1 %	2 %	5 %
10	1	0,98	0,98	0,96
11 - 14	1	0,99	0,98	0,97
15 - 20	1	0,99	0,99	0,98
21 - 22	2	0,98	0,97	0,96
23	2	0,98	0,98	0,96
24 - 27	2	0,98	0,98	0,97
28 - 32	2	0,99	0,98	0,97
33 - 35	2	0,99	0,98	0,98
36 - 49	2	0,99	0,99	0,98

Значения P определяются из таблицы 4 по выбранному уровню значимости q_2 и числу результатов наблюдений, а значения $Z_{P/2}$ - из таблицы 5.

Для решаемой задачи выбираем уровень значимости q_2 = 5% и для n = 25 из таблицы 4 находим P = 0,97 и m = 2. Тогда, обращаясь к таблице 5, находим $Z_{P/2}$ = 2,17. Отсюда

$$Z_{P/2} \cdot \hat{\sigma}_{\overline{X}} = 0{,}229 \text{ кОм}.$$

Согласно критерию 2 не более двух (m = 2) разностей V_i могут превзойти значение 0,229 кОм.

По данным, приведенным в таблице 2, видим, что только V_{12} превышает критическое значение. Следовательно, критерий 2 выполняется.

Таким образом, с уровнем значимости $q \le q_1 + q_2 = 0{,}1$ гипотеза о нормальности полученных данных согласуется с данными наблюдений.

Таблица 5 - Значения нормированной функции Лапласа ф(z).

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	`27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42768	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44259	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2.1	48214	48256	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49226	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

Примечание - Значения Ф (z) при z = 3.0 - 4.5 следующие:

3.07......0.49865 3.4......0.49966 3.8......0.49993
3.1.......0.49903 3.5......0.39977 3.9......3.49995
3.2.......0.49931 3.6......0.49984 4.0......0.499968
3.3.......0.49952 3.7......0.49989 4.5......0.499999

8 По заданной доверительной вероятности $P_д$ и числу степеней свободы (n−1) распределения Стьюдента определим коэффициент t из таблицы 6.

Для нашей задачи (P = 0,95 и n-1 = 24) значение t = 2,064.

Рассчитываем доверительные границы случайной погрешности результата измерения

$$\overset{\circ}{\Delta} = t \cdot \hat{\sigma}_{\overline{x}} = 2{,}064 \cdot 0{,}021 = 0{,}043 \text{ кОм.}$$

Таблица 6 - Значение коэффициента t для случайной величины x, имеющей распределение Стьюдента с n–1 степенями свободы

n–1	$P_д = 0{,}95$	$P_д = 0{,}99$	n–1	$P_д = 0{,}95$	$P_д = 0{,}99$
3	3,182	5,841	16	2,120	2,921
4	2,776	4,604	18	2,110	2,878
5	2,571	4,032	20	2,086	2,845
6	2,447	3,707	22	2,074	2,819
7	2,365	3,499	24	2,064	2,797
8	2,306	3,355	26	2,056	2,779
10	2,228	3,169	28	2,048	2,763
12	2,179	3,055	30	2,043	2,750
14	2,145	2,977	∞	1,960	2,576

9 Записываем результат измерения.

При симметричной доверительной погрешности результаты измерений представляют в виде

$$\overline{X} \pm \overset{\circ}{\Delta}, \qquad P_д.$$

При этом значащих цифр в $\overset{\circ}{\Delta}$ должно быть не более двух , а числовое значение результата измерения должно оканчиваться цифрой того же разряда, что и значение погрешности $\overset{\circ}{\Delta}$.

Результат измерения записываем в следующем виде:

$$R = (32{,}707 \pm 0{,}044) \text{ кОм}; \qquad P_д = 0{,}95.$$

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) К ЛАБОРАТОРНЫМ ЗАНЯТИЯМ

Лабораторная работа №1
ИЗМЕРЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Цель работы: ознакомиться с методикой обработки результатов прямых и косвенных измерений физических величин; измерить плотность твердого тела.

1. Теоретическая часть

1.1. Измерения. Виды измерений

Роль измерений в науке и технике чрезвычайно велика, поскольку измерения являются основным способом получения количественной информации об окружающем нас мире и протекающих в нем процессах. Д.И.Менделеев писал: «Наука начинается с тех пор, как начинают измерять».

Под измерением физической величины понимается сравнение с однотипной величиной, принятой за единицу измерения (эталон). Измерение проведено, если установлено, сколько раз эталонная величина укладывается в измеряемой.

Любое измерение включает в себя ***наблюдение и отсчет. Наблюдением*** называется фиксирование факта наступления какого-либо события, например – существования электрического тока в цепи. ***Отсчет*** заключается в считывании результата измерения по шкале прибора (следует помнить, что отсчет всегда производится по ближайшему к показанию прибора делению шкалы).

Различают два вида измерений: ***прямые и косвенные***. В первом случае (прямые измерения) физическая величина сравнивается с эталоном посредством соответствующего измерительного прибора. В качестве примера можно привести измерение длины линейкой, промежутка времени – секундомером, силы тока – амперметром. Во втором случае (косвенные измерения) искомое значение находится не путем изменения, но в результате вычисления по формуле, выражающей функциональную зависимость интересующей нас величины от других величин, значения которых находятся путем прямых измерений. Примером косвенных измерений может быть вычисление электрического сопротивления проводника по измеренным значениям силы тока и напряжения на его концах, плотности тела по измеренным значениям его массы и объема. Равенство вида $A = f(a_1, a_2, ..a_m)$, где a_1, a_2, … a_m - это величины, численные значения которых находятся путем прямых измерений, называется ***уравнением измерения*** физической величины A. Необходимо отметить, что численные значения некоторых величин можно находить как прямыми, так и косвенными измерениями. Например, упомянутое выше электрическое сопротивление проводника можно вычислить по закону Ома (косвенное измерение), но можно измерить с помощью специального прибора – омметра.

1.2. Погрешности измерений

Опыт показывает, что из-за влияния разнообразных факторов в серии измерений определенной физической величины получаются, вообще говоря, различные значения. Иначе говоря, измерение физической величины всегда сопряжено с погрешностями, поэтому результат единичного измерения нельзя принимать в качестве ее истинного значения.

Абсолютной погрешностью i-ого измерения физической величины x называется разность $\Delta x_i = x_i - x_0$, где x_i - результат i-ого измерения, x_0 - наиболее достоверное (наилучшее) значение. Согласно ГОСТ 8.207-76, за x_0 принимается среднее арифметическое значение всех проведенных измерений. ***Относительной погрешностью (точностью)*** i-ого измерения называется отношение

$$\varepsilon_i = \frac{|\Delta x_i|}{x_0}.$$

Относительная погрешность часто выражается в процентах:

$$\varepsilon_i = \frac{|\Delta x_i|}{x_0} \cdot 100\%.$$

По характеру проявления при выполнении серии измерений абсолютные погрешности делятся на ***грубые, систематические и случайные***. Грубые погрешности (промахи) обычно связаны с неисправностью измерительной аппаратуры, с ошибкой оператора при считывании показаний приборов, либо с резким изменением условий эксперимента, например – скачком напряжения в сети. Результаты измерений, соответствующие промахам, необходимо отбрасывать. Систематическими называются погрешности, которые при многократных измерениях остаются неизменными либо изменяются по определенному закону; они включают ***методические*** и ***инструментальные*** погрешности.

Методические погрешности обусловлены недостатками применяемого способа измерений, несовершенством теории рассматриваемого физического явления, неточностью расчетной формулы, используемой для вычисления измеряемой величины и т.п. Например, при взвешивании тела на аналитических (особо точных) весах будет допущена методическая погрешность, если не учитывать различие архимедовых сил, действующих со стороны воздуха на взвешиваемое тело и разновесы. Понятно, что подобного рода погрешности можно уменьшить путем совершенствования методики измерений. Инструментальные (приборные) погрешности вызываются несовершенством конструкции и неточностью изготовления измерительного прибора, например – небольшим различием длины плеч рычажных весов, несовпадение в стрелочном приборе центра шкалы с осью вращения стрелки, и т.п. Величина инструментальной погрешности устанавливается предприятием-изготовителем измерительного прибора и указывается в его техническом паспорте. При отсутствии сведений об инструментальной погрешности она принимается равной половине цены наименьшего деления шкалы прибора. Уменьшение инструментальных погрешностей достигается путем применения более совершенных и точных измерительных средств, однако полностью их устранить невозможно.

Случайными называются погрешности, абсолютная величина и знак которых хаотично (непредсказуемо) изменяются при многократных измерениях одной и той же физической величины. Случайные погрешности вызываются разнообразными факторами, не поддающимися учету. Например, на показания аналитических рычажных весов могут влиять пылинки, оседающие в различных количествах на взвешиваемое тело и разновесы, конвективные потоки воздуха, действующие на чашки весов, и другие причины. Полностью избавиться от случайных погрешностей невозможно, однако их можно уменьшить путем многократного повторения измерения (при этом происходит частичная компенсация случайных отклонений результатов измерений в сторону занижения и завышения). Окончательный результат измерений необходимо представить в виде

$$A = \langle A \rangle \pm \Delta A, \ \varepsilon = \ldots\%.$$

Здесь $\langle A \rangle$ - наиболее достоверное (наилучшее) значение, ΔA - положительная величина, называемая средней абсолютной погрешностью, ε - относительная погрешность серии измерений. Следует отметить, что оценка величин $\langle A \rangle$, ΔA и ε регламентирована государственным стандартом (ГОСТ 8.207-76 «Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений»). Для их вычислений используются соответствующие формулы теории погрешностей, которая в свою очередь базируется на теории вероятностей и математической статистике. Поскольку эти дисциплины изучаются студентами лишь в четвертом семестре, для оценки погрешностей при выполнении данной лабораторной работы используется несколько упрощенная методика.

1.3. Оценка погрешностей измерений

При обработке результатов ***прямых*** измерений выполняются следующие действия.

1. Результаты n измерений записываются в таблицу.
2. Вычисляется среднее арифметическое значение результатов n проведенных измерений

$$\langle x\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

которое принимается за наилучшее значение.

3. Вычисляются абсолютные погрешности каждого измерения:

$$\Delta x_i = x_i - \langle x\rangle .$$

4. Вычисляется стандартная (среднеквадратичная) погрешность:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2} .$$

Найденное значение σ сравнивается с инструментальной погрешностью прибора (Δ). Если $\sigma < \Delta$, то в качестве средней абсолютной погрешности n измерений принимается инструментальная погрешность: $\Delta x = \Delta$. Если же $\sigma > \Delta$, то $\Delta x = \sigma$.

5. Вычисляется относительная погрешность серии измерений:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\langle x\rangle} .$$

6. Окончательный результат измерения записывается в виде

$$x = \langle x\rangle \pm \Delta x , \quad \varepsilon = ...\% .$$

Обработка результатов ***косвенных*** измерений физической величины x проводится следующим образом.

1. Для каждой из величин $a_1, a_2, ...a_m$, входящих в уравнение измерения

$x = f(a_1, a_2, ...a_m)$, проводится обработка в соответствии с перечисленными выше п.1…4 (иначе говоря, для каждой из величин $a_1, a_2, ...a_m$ находятся наилучшие значения и средние абсолютные погрешности).

2. Вычисляется наилучшее значение измеряемой величины x:

$$\langle x\rangle = f(\langle a_1\rangle, \langle a_2\rangle ... \langle a_m\rangle)$$

(здесь $\langle a_1\rangle, \langle a_2\rangle ... \langle a_m\rangle$ - наилучшие значения величин $a_1, a_2, ...a_m$).

3. Вычисляется относительная погрешность серии измерений по формуле

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial}{\partial a_i}\ln f(a_1, a_2, ...a_m)\,\Big|_{a_i=\langle a_i\rangle}\cdot \Delta a_i\right)^2} .$$

Здесь символическая запись $\frac{\partial}{\partial a_i}$ обозначает ***частную*** производную по переменной a_i прологарифмированного уравнения измерения (примеры вычисления частных производных рассматриваются в отчете по лабораторной работе «Измерение плотности прямоугольного параллелепипеда», включенного в «Приложение» в качестве образца). Численное значение частной производной по переменной a_i вычисляется для наилучших значений входящих в нее переменных и умножается на среднюю абсолютную погрешность Δa_i. Все подкоренное выражение представляет собой сумму квадратов таких произведений, найденных для всех m переменных.

4. Вычисляется средняя абсолютная погрешность величины x:

$$\Delta x = \varepsilon \cdot \langle x\rangle .$$

5. Окончательный результат измерения записывается в виде

$$x = \langle x\rangle \pm \Delta x , \quad \varepsilon = ...\% .$$

2. Экспериментальная часть

2.1. Описание лабораторной установки

Плотность твердого тела находится путем косвенного измерения, т.е. численные значения его массы и объема подставляются в формулу

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Здесь m - масса тела (предполагается известной), $V = f(a_1, a_2, \ldots a_m)$ - объем тела как функция его m линейных размеров.

2.2. Порядок выполнения работы

1. Изучите правила приближенных вычислений.
2. Изучите отчет по лабораторной работе «Измерение плотности прямоугольного параллелепипеда».
3. Изучите методику измерения линейных размеров тела штангенциркулем.
4. Сделайте эскиз тела, предложенного преподавателем, с обозначением всех величин, подлежащих измерению.
5. Составьте таблицу результатов измерений.
6. Проведите необходимые измерения не менее трех раз и результаты поместите в таблицу.
7. Впишите в таблицу массу тела (справочные данные у преподавателя). Следуя правилам, изложенным в п. 1.3, найдите наилучшее значение плотности, среднюю абсолютную и относительную погрешности, и представьте результат измерений в виде

$$x = \left(\langle x \rangle \pm \Delta x\right) \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \varepsilon = \ldots \%.$$

Правила вычислений при обработке результатов измерений

Как уже отмечалось, любые измерения неизбежно сопряжены с различного рода погрешностями. Понятно, что количество цифр в числе, выражающем численное значение измеряемой величины, во многом определяется точностью используемого прибора.

Значащими цифрами числа называются все отличные от нуля цифры и нули, расположенные между этими цифрами и в конце числа. Например, числа 0,072 и 8,4 имеют по две значащие цифры, число 6,40 – три значащие цифры. При считывании показаний измерительного прибора цифра числа является ***верной,*** если половина цены разряда, в котором она находится, не меньше инструментальной погрешности. Например, при измерении длины школьной линейкой получен результат 23,1 см. Последняя цифра верна, поскольку она находится в разряде миллиметров (половина цены этого разряда составляет 0,5 мм, что не меньше инструментальной погрешности линейки).

Если приближенное значение величины содержит недостоверные цифры, его ***округляют***, сохраняя только верные цифры и отбрасывая остальные. При этом руководствуются следующими правилами.

1. Если первая отбрасываемая цифра больше 4, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу. Например, округляя число 27,3763 до сотых, следует записать 27,38.
2. Если первая отбрасываемая цифра равна 4 или меньше 4, то последняя сохраняемая цифра не изменяется. Например, округляя число 13847 до сотен, записывают $138 \cdot 10^2$.
3. Если отбрасываемая часть числа состоит из одной цифры 5, то число округляют так, чтобы последняя сохраняемая цифра была четной. Например, при округлении до десятых 23,65≈23,6, но 17,75≈17,8.

Производя различные математические действия над приближенными числами, руководствуются следующими правилами.

1. При сложении и вычитании в результате оставляют столько десятичных знаков, сколько их содержится в числе с наименьшим количеством десятичных знаков.
2. При умножении и делении в результате оставляют столько значащих цифр, сколько их имеет число с наименьшим количеством значащих цифр. Исключение из этого правила допускается в тех случаях, когда один из сомножителей начинается с единицы, а сомножитель, содер-

жащий наименьшее количество значащих цифр, - с какой-нибудь иной цифры. В этих случаях в результате сохраняют на одну цифру больше.

3. При возведении в степень (целую или дробную) в результате оставляют столько значащих цифр, сколько их в основании степени.

4. При вычислении логарифмов в мантиссе оставляют столько значащих цифр, сколько их в логарифмируемом числе. При вычислении тригонометрических функций в результате оставляют две значащие цифры, если аргумент задан с точностью до градуса. Аналогичным образом поступают при отыскании числа по его логарифму либо аргумента тригонометрической функции по ее значению.

5. При вычислении абсолютной погрешности округление производится всегда с ***избытком***, т.е. последняя сохраняемая цифра ***всегда*** увеличивается на единицу. При этом, если первая значащая цифра 1, при записи погрешности оставляют две цифры, в противном случае – одну цифру.

6. В окончательном результате измерения следует оставлять последней цифру в том же разряде, в котором находится последняя сохраненная цифра средней абсолютной погрешности.

Отчет по лабораторной работе

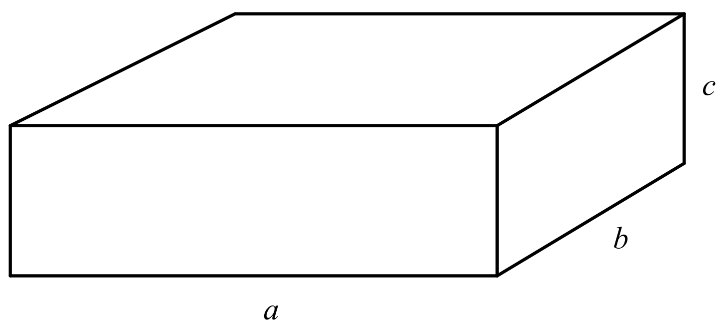
«Измерение плотности прямоугольного параллелепипеда»

Выполнили: Иванов П.С, Петров И.С. Сидоров П.И.

Цель работы: ознакомиться с методикой обработки результатов прямых и косвенных измерений физических величин; измерить плотность твердого тела.

Приборы и принадлежности: штангенциркуль, весы лабораторные.

Эскиз тела:



Уравнение измерения:

$$\rho = \frac{m}{abc}, \qquad (1)$$

где ρ - плотность, m - масса, a, b, c - линейные размеры тела.

Результаты измерений:

№ изм.	a ,мм	b ,мм	c ,мм	m ,г
1	38,9	29,4	17,5	160,3
2	39,0	30,1	17,4	160,3
3	39,1	29,9	17,5	160,3

Вычисление наилучших значений линейных размеров:

$\langle a \rangle = \frac{1}{3}(38{,}9 + 39{,}0 + 39{,}1) = 39{,}0$ мм, $\langle b \rangle = \frac{1}{3}(29{,}4 + 30{,}1 + 29{,}9) = 29{,}8$ мм,

$\langle c \rangle = \frac{1}{3}(17{,}5 + 17{,}4 + 17{,}5) = 17{,}5$ мм.

Вычисление абсолютных погрешностей:

$\Delta a_1 = a_1 - \langle a \rangle = 38{,}9 - 39{,}0 = -0{,}1$ мм, аналогично находим $\Delta a_2 = 0$, $\Delta a_3 = 0{,}1$ мм;

$\Delta b_1 = b_1 - \langle b \rangle = 29{,}4 - 29{,}8 = -0{,}4$ мм, аналогично находим $\Delta b_1 = 0{,}3$ мм, $\Delta b_3 = 0{,}1$ мм;

$\Delta c_1 = c_1 - \langle c \rangle = 17{,}5 - 17{,}5 = 0$, аналогично находим $\Delta c_2 = -0{,}1$ мм, $\Delta c_3 = 0$.

Вычисление средней абсолютной погрешности линейных размеров:

$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{3(3-1)}\left(0{,}1^2 + 0 + 0{,}1^2\right)} = 0{,}057 \approx 0{,}06$ мм; поскольку σ_a больше инструментальной погрешности штангенциркуля (0,05 мм), $\Delta a = 0{,}06$ мм;

$\sigma_b = \sqrt{\frac{1}{3(3-1)}\left(0{,}4^2 + 0{,}3^2 + 0{,}1^2\right)} = 0{,}208 \approx 0{,}2$ мм; поскольку $\sigma_b > \Delta$, $\Delta b = 0{,}2$ мм;

$\sigma_c = \sqrt{\frac{1}{3(3-1)}\left(0 + 0{,}1^2 + 0\right)} = 0{,}0408 \approx 0{,}04$ мм; поскольку $\sigma_c < \Delta$, $\Delta c = 0{,}05$ мм.

Учитывая, что масса тела предполагается известной, считаем, что $\sigma_m = \Delta m = 0.$ Вычисление наилучшего значения плотности тела:

$$\rho = \frac{160{,}3 \cdot 10^{-3}}{39{,}0 \cdot 29{,}8 \cdot 17{,}5 \cdot 10^{-9}} = 7{,}88 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Для вычисления относительной погрешности плотности необходимо найти частные производные по переменным m, a, b, c уравнения измерения (1), прологарифмированного по натуральному основанию:

$\ln \rho = \ln m - \left(\ln a + \ln b + \ln c\right)$.

Частные производные находятся по тем же правилам, которые используются при дифференцировании функций одной переменной. Например, вычисляя частную производную $\ln \rho$ по переменной a, остальные переменные полагаем константами и находим:

$\frac{\partial \ln \rho}{\partial a} = -\frac{1}{a}$.

Аналогично имеем:

$\frac{\partial \ln \rho}{\partial m} = \frac{1}{m}$, $\frac{\partial \ln \rho}{\partial b} = -\frac{1}{b}$, $\frac{\partial \ln \rho}{\partial c} = -\frac{1}{c}$.

В соответствии с этим получим формулу для вычисления относительной погрешности:

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{\langle m \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{\langle a \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{\langle b \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c}{\langle c \rangle}\right)^2}.$$

В результате подстановки численных значений имеем (с учетом правил приближенных вычислений):

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{0}{160{,}3}\right)^2 + \left(\frac{0{,}06}{39{,}0}\right)^2 + \left(\frac{0{,}2}{29{,}8}\right)^2 + \left(\frac{0{,}05}{17{,}5}\right)^2} = 0{,}007,$$

что составляет 0,7%.

Вычисляем среднюю абсолютную погрешность:

$$\Delta \rho = \langle \rho \rangle \varepsilon = 7{,}88 \cdot 10^3 \cdot 0{,}07 = 0{,}06 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Таким образом,

$\rho = (7{,}88 \pm 0{,}06) \cdot 10^3$ кг/м^3, $\varepsilon = 0{,}7\%$.

Вывод: изучили методику обработки результатов прямых и косвенных измерений, измерили плотность твердого тела, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда.

Лабораторная работа № 2

Исследование распределения результатов физических измерений.

Цель работы: определение статистических характеристик распределения результатов измерений, построение гистограмм и получение приближенного вида функции распределения.

Оборудование: стенд «Эффективность и качество освещения», пульсметр-люксметр ТКА-ПКМ модель 08.

Введение

1. Понятие о функциях распределения случайной величины

Важная роль в установлении физических закономерностей принадлежит эксперименту, в котором исследователь получает информацию. Эта информация может быть качественной, например, чего-то стало больше, чем было, или количественной, когда описание событий происходит с указанием числовых значений физических величин. Числовое значение получает исследователь по шкале прибора. Очевидно, что отсчет по шкале прибора (результат измерений) и значение физического параметра, который измеряется, - не одно и то же. Физические параметры являются вполне определенными, неслучайными (толщина пластины, разность давлений, масса предмета и т.п.). В процессе измерений из-за влияния различных факторов (колебание почвы, перепады температур, изменение положения экспериментатора относительно шкалы прибора при повторении опыта и т.д.) результаты измерений – случайные величины.

Случайной называют такую величину, значение которой изменяется при повторении опытов некоторым заранее не предсказуемым образом. Для случайной величины нельзя заранее сказать, какое конкретное значение она примет в определенных условиях, а можно только указать закон ее распределения.

Закон распределения считается заданным, если:

- указано множество возможных значений случайной величины;
- указан способ количественного определения вероятности попадания случайной величины в любую область множества возможных значений.

Вероятность попадания в заданную область может быть определена следующим образом:

$$P_m = \lim_{N \to \infty} \frac{N_m}{N}, \qquad (1)$$

где N_m – количество измерений случайной величины, оказавшейся в заданной области; N – общее число измерений.

Аналитическим выражением законов распределения случайной величины x являются функции распределения вероятностей – интегральная $F(x)$ и дифференциальная $f(x)$.

Интегральная функция случайной величины x_i обладает следующими свойствами:

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0;$	2) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = F(\infty) = 1;$
3) $F(x) \geq 0$ для всех x;	4) $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

Если функция $F(x)$ дифференцируемая для всех значений случайной величины, то закон распределения вероятностей может быть выражен с помощью дифференциальной функции распределения вероятностей.

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \qquad (2)$$

Таким образом, значение функции $f(x)$ приближенно равно отношению вероятности попадания случайной величины в интервал $(x, x+\Delta x)$ к длине Δx этого интервала, когда Δx – бесконечно малая величина. Поэтому дифференциальную функцию называют также функцией ***плотности распределения вероятностей*** (или короче – ***функцией плотности вероятности***).

Функция плотности вероятности обладает следующими свойствами:

1) $f(x) \geq 0$;	2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;
3) $\int_{-\infty}^{x} f(z)dz = F(x)$;	4) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$,

(z – переменная интегрирования).

Интегральная и дифференциальная функции распределения являются исчерпывающими вероятностными характеристиками случайной величины. Однако некоторые основные свойства случайных величин могут быть описаны более просто с помощью определенных числовых параметров. Важную роль среди таковых на практике играют два параметра:

• математическое ожидание m_x случайной величины – характеристика центра рассеяния случайной величины;

• σдисперсия ^{2} – характеристика степени рассеяния случайной величины.

2. Нормальное распределение

Одним из важнейших распределений является *нормальное распределение.* Этот термин ввел К.Пирсон, более старое название – Гаусса закон (*распределение Гаусса*). Распределение вероятностей случайной величины x_i называется нормальным, если оно имеет плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma^2}} . \qquad (3)$$

Функция $f(x)$ зависит от математического ожидания m_x

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \qquad (4)$$

σи от дисперсии ^{2}

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)\, dx . \qquad (5)$$

Квадратный корень из дисперсии называется *средним квадратичным отклонением* $\sigma = \sqrt{\sigma^<}$.

Кривая нормального распределения имеет вид колокола (рис.1), симметрична относительно ординаты, проходящей через точку $x = m_x$ и в этой точке у кривой максимум равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

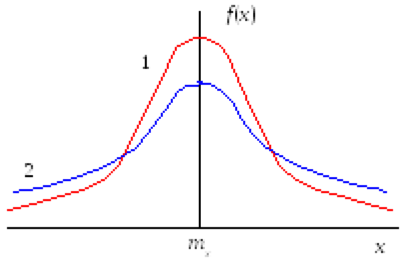


Рис. 1

С уменьшением дисперсии кривая нормального распределения становится все более островершинной (см. рис.1).

Изменение m_x σпри постоянной ^{2} не меняет форму кривой, а вызывает лишь ее смещение по оси абсцисс.

Площадь, заключенная под кривой нормального распределения, всегда равна единице.

Во многих практических задачах пренебрегают отклонением случайной величины x_i от m_x, для которых соответствующая вероятность меньше 0,003 (так называемое правило трех сигма).σ, превышающими 3

Нормальное распределение является хорошим приближением каждый раз, когда рассматриваемая случайная величина представляет собой сумму большого числа независимых случайных величин, максимальная из которых мала по сравнению со всей суммой.

Статистическое описание результатов наблюдений

Фундаментальными понятиями статистической теории являются *генеральная совокупность* и *выборка*.

• Генеральная совокупность – это набор всех возможных результатов случайной величины, которые могут быть определены или получены при данных условиях. Например, имея цилиндр и штангенциркуль, экспериментатор за учебное занятие (45 минут) при определенных навыках и опыте может около тысячи раз измерить диаметр этого цилиндра. Считается, что свойства объекта наблюдения не изменяются во времени и присущие генеральной совокупности.

• Выборка – это конечный набор значений случайной величины, полученный в результате измерений. Число элементов n выборки называется ее объемом. Выборка является репрезентативной, если она достаточно полно характеризует генеральную совокупность.

Если какая-либо физическая величина измеряется много раз, то возникает необходимость в статистической обработке результатов измерений этой величины.

Порядок выполнения работы и экспериментальный анализ одномерной случайной величины

В ходе выполнения работы многократно измеряется освещенность в стенде от системы искусственного света. В силу влияния большого количества причин, действующих случайно, результаты измерения освещенности представляют набор случайных величин. Поэтому проверяем полученный в эксперименте набор случайных величин на соответствие нормальному закону распределения.

Выполняя работу необходимо:

1. Получить выборку, измеряя освещенность в стенде. В результате получим набор случайных величин в количестве n-штук. Результаты измерений поместить в табл.1

Таблица 1

№ п.п	Измеряемая величина
1.	E_1
…………	…………
n	E_n

2. Находят статистические оценки выборки случайной величины:

• выборочное среднее (оценка математического ожидания)

$$< d > = \frac{1}{n}\sum d_i$$

• выборочную дисперсию (оценка дисперсии)

$$\sigma^2 \cong \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(d_i - < d >)^2$$

;

• стандартное отклонение (среднеквадратичное отклонение)

$$\sigma = \sqrt{\sigma^<}$$.

3. По выборке значений E_i случайной величины определяют ширину кванта(интервала) ΔE. Для этого находят в выборке минимальное E_{min} и максимальное E_{max} значения случайной величины и вычисляют по формуле

$$\Delta d = \frac{d_{max} - d_{min}}{m}$$

, где m – число квантов. Рекомендуется принять одно из значений m = (6 ÷ 8) . Числовое значение ΔE можно округлить до последней значащей цифры случайной величины в выборке. Количество интервалов должно быть таким, чтобы в совокупности они перекрыли всю область значений от E_{min} , до E_{max} .

4. Из выборки подсчитывают количество попаданий n_i случайной величины в каждый интервал, и результаты вносят в табл. 2. Отметим, что значение случайной величины, попавшее на границу между соседними интервалами, относят к правому интервалу.
5.

Таблица 2

Интервал	Число попаданий в интервал	Относительная частота попадания в интервал	Плотность частоты попадания в интервал
	n_i	$f_i = \frac{n_i}{n}$	$f(h) = \frac{n_i}{n\Delta d}$
$E_{min} \div E_1$	n_1		
$E_1 \div E_2$	n_2		
……			

В таблице 2 $E_1 = E_{min} + \Delta E$; $E_2 = E_1 + \Delta E$; ……..

5. Рассчитывают относительную частоту и плотность частоты попадания случайной величины в каждый интервал и результаты вносят в табл.2.

6. Строят гистограмму (столбчатую диаграмму) выборки, которая является эмпирическим аналогом функции плотности распределения f(E). Гистограмма представляет собой ступенчатый график, по оси абсцисс которого отложена случайная величина (применительно к таблице 2 это E), а сама ось разбита на отрезки, равные ширине интервала ΔE. По оси ординат откладывают плотность частоты попадания. На рис.2 показан возможный вид гистограммы.

7. Построить кривую распределения Гаусса. Для этого по формуле (3) вычисляют f(E) для произвольного набора (10 ÷ 15) значений диаметра, при этом желательно, чтобы выбранные значения попадали в каждый интервал и по одному значению за пределами E_{min} и E_{max} . Результаты вычислений вносят в табл.3.

Таблица 3

E, лк	E_1	E_2	….	E_k
f(E)	$f(E_1)$	$f(E_2)$	….	$f(E_k)$

По результатам в таблице 3 строят кривую нормального распределения, совмещая её с гистограммой (рис.2).

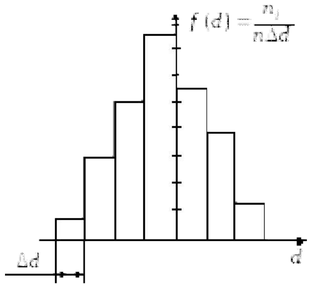


Рис. 2

8. Сравнить Гауссову кривую с гистограммой и проанализировать полученные результаты.

9. <u>Дополнительное задание</u>. Построить гистограммы для числа попаданий и для относительной частоты попаданий в интервал. Сравнить все построенные гистограммы.

Контрольные вопросы.

1. Что такое вариационный ряд?
2. Запишите нормальный закон распределения случайной величины и поясните параметры, входящие в этот закон.
3. Поясните методику построения гистограммы.
4. Как зависит форма и положение кривой Гаусса от математического ожидания и от дисперсии?
5. Как качественно сравнить дисперсии случайной величины для нескольких распределений по виду гистограммы или кривых Гаусса?

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

4.1 Методические рекомендации при работе над конспектом лекций во время проведения лекции

В ходе лекционных занятий вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском искусстве. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

4.2 Методические рекомендации при подготовке к практическим занятиям

Целью проведения практических занятий является закрепление полученного на лекциях теоретико-методического материала, развитие логического мышления и аналитических способностей у будущих бакалавров. Методика проведения практических занятий предусматривает решение общих (типовых) задач и нескольких задач для самостоятельного решения. Темы практических занятий сообщаются студентам заранее и определены рабочей программой дисциплины.

Методические рекомендации для выполнения практических работ, в которых кратко изложен основной теоретический материал по теме практической работы, а также приведен порядок выполнения работы с требованиями к отчету, выдаются на первом занятии в электронном виде.

В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, новыми публикациями в периодических изданиях по теме практического занятия. Изучить выданный преподавателем материал по темам практических работ. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования рабочей программы. Ознакомиться с исходными данными для выполнения индивидуального задания. На практических занятиях задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

Не ранее чем за две недели до окончания семестра сдать и защитить расчетно-графическую работу.

Оформление индивидуальных заданий выполняется в соответствии с требованиями стандарта АмГУ СТО СМК 4.2.3.05-2011 «Оформление выпускных квалификационных и курсовых работ (проектов)». Нормоконтроль проходить не требуется. Титульный лист приведен на рисунке 1.

В содержании должны быть отражены следующие пункты:

1. Содержание
2. Условие задачи
3. Теоретическая часть
4. Расчетная часть
5. Анализ результатов расчета
6. Выводы
7. Библиографический список
8. Приложения (при необходимости), например листинги программ по которым производились расчеты

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

Факультет:
Кафедра:
Направление подготовки:
Направленность (профиль) образовательной программы:

Расчетно-графическая работа

Вариант № _____

по дисциплине: ____

Выполнил
студент группы _________ ____________________ И.О.Ф.
(подпись, дата)

Проверил
должность, ученая степень ____________________ И.О.Ф.
(подпись, дата)

Благовещенск 20____

Рисунок 1 – Титульный лист отчета по индивидуальному заданию

4.3 Методические рекомендации при подготовке к лабораторным работам

Важной составной частью учебного процесса в вузе являются лабораторные занятия. Целью проведения лабораторных работ является закрепление полученного на лекциях и практических занятиях теоретико-методического материала.

Задачей преподавателя при проведении лабораторных работ является грамотное и доступное разъяснение принципов и правил проведения работ, побуждение студентов к самостоятельной работе, определения места изучаемой дисциплины в дальнейшей профессиональной работе будущего специалиста.

Цель лабораторной работы – научить студентов самостоятельно производить необходимые действия для достижения желаемого результата.

Прежде чем приступить к выполнению лабораторной работы, студенту необходимо ознакомиться с теоретическим материалом, соответствующим данной теме.

Выполнение лабораторной работы целесообразно разделить на несколько этапов:

-формулировка и обоснование цели работы;

-определение теоретического аппарата, применительно к данной теме;

-выполнение заданий;

-анализ результата;

-выводы.

Индивидуальные задания для лабораторных работ представлены конкретно-практическими и творческими задачами.

Начиная подготовку к лабораторному занятию, студент должен уяснить место конкретной лабораторной работы в изучаемом курсе, поработать с дополнительной литературой, сделать записи по рекомендованным источникам.

В ходе подготовки к лабораторным занятиям необходимо изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, новыми публикациями в периодических изданиях. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования рабочей программы.

Методические рекомендации для выполнения лабораторных работ, в которых кратко изложен основной теоретический материал по теме лабораторной работы, порядок выполнения лабораторной работы и требования к отчету, выдаются на первом занятии в электронном виде.

Методика проведения лабораторных работ предусматривает их выполнение в микро группах с написанием отчета и его защитой.

Не ранее чем за две недели до окончания семестра сдать и защитить отчеты по лабораторным работам.

Оформление отчета по лабораторным работам выполняется в соответствии с требованиями стандарта АмГУ СТО СМК 4.2.3.05-2011 «Оформление выпускных квалификационных и курсовых работ (проектов)». Нормоконтроль проходить не требуется. Титульный лист приведен на рисунке 2.

В содержании отчета по лабораторной работе должны быть отражены следующие пункты:

1. Содержание;
2. Цель работы;
3. Оборудование;
4.Теория, касающаяся объекта(ов) исследования;
5. Результаты исследований (в том числе таблицы, приведенные в описании к лабораторной работе);
6. Обработка результатов измерений;
7. Выводы;
8. Ответы на контрольные вопросы;
9. Библиографический список;
10. Приложения (при необходимости).

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУВО «АмГУ»)

Факультет:
Кафедра:
Направление подготовки бакалавров:
Направленность (профиль) образовательной программы:

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № _____

на тему: ____

по дисциплине: ____

Выполнил
студент группы _________ _____________________ И.О.Ф.
(подпись, дата)

Проверил
должность, ученая степень _____________________ И.О.Ф
(подпись, дата)

Благовещенск 20____

Рисунок 2 – Титульный лист отчета по лабораторной работе

4.4 Групповая консультация

Разъяснение является основным содержанием данной формы занятий, наиболее сложных вопросов изучаемого программного материала. Цель – максимальное приближение обучения к практическим интересам с учетом имеющейся информации и является результативным материалом закрепления знаний.

Групповая консультация проводится в следующих случаях:

- когда необходимо подробно рассмотреть практические вопросы, которые были недостаточно освещены или совсем не освещены в процессе лекции;
- с целью оказания помощи в самостоятельной работе (выполнение расчетно-графической работы, выполнение курсового проекта, сдача экзаменов).

4.5 Методические рекомендации студентам по изучению рекомендованной литературы

Эти методические рекомендации раскрывают рекомендуемый режим и характер различных видов учебной работы (в том числе самостоятельной работы над рекомендованной литературой) с учетом специфики выбранной студентом очной формы.

Изучение дисциплины следует начинать с проработки настоящей рабочей программы, особое внимание, уделяя целям и задачам, структуре и содержанию курса.

Студентам рекомендуется получить в научной библиотеке университета учебную литературу по дисциплине или доступ к электронным библиотечным ресурсам, которые необходимы для эффективной работы на всех видах аудиторных занятий, а также для самостоятельной работы по изучению дисциплины.

Теоретический материал курса становится более понятным, когда дополнительно к прослушиванию лекции и изучению конспекта, изучаются и книги. Легче освоить курс, придерживаясь одного учебника и конспекта. Рекомендуется, кроме «заучивания» материала, добиться состояния понимания изучаемой темы дисциплины. С этой целью рекомендуется после изучения очередного параграфа выполнить несколько простых упражнений на данную тему. Кроме того, очень полезно мысленно задать себе следующие вопросы (и попробовать ответить на них): о чем этот параграф, какие новые понятия введены, каков их смысл, что даст это на практике?

Успешное освоение курса предполагает активное, творческое участие студента путем планомерной, повседневной работы.