

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Амурский государственный университет
(ГОУВПО «АмГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой ТиЭФ

_____ Е.А. Ванина

«__» _____ 2007 г.

Учебно-методический комплекс дисциплины

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА МНОГОМЕРНЫХ СИГНАЛОВ

для специальности

01071 – Физика;

Составитель: Семичевская Н.П.

2007 г.

*Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики
и информатики
Амурского государственного
университета*

Цифровая обработка многомерных сигналов для специальности 010701
«Физика»: учебно-методический комплекс дисциплины. / Семичевская Н.П. –
Благовещенск. Изд-во Амурского гос. ун-та, 2007. 140с.

©Амурский государственный университет, 2007

©Кафедра информационных и управляющих систем, 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Рабочая программа	3
2. График самостоятельной работы студентов	15
3. Методические рекомендации по проведению самостоятельной работы студентов	15
4. Перечень учебников, учебных пособий	16
5. Конспект лекций	17
6. Методические указания по выполнению лабораторных работ	94
7. Методические указания по выполнению контрольных работ	122
8. Перечень используемых программных продуктов	126
9. Методические указания по организации межсессионного контроля знаний студентов	126
10. Комплекты экзаменационных билетов	127
11. Карта кадровой обеспеченности дисциплины	139

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине
"Цифровая обработка многомерных сигналов"

для специальности 010701 Физика

курс 5 семестр 9

Лекции 30 (час.) Экзамен 9 семестр

Практические (семинарские) занятия (час.) Зачет семестр

Лабораторные занятия 15 (час.)

Самостоятельная работа 30 (час.)

Всего часов 75 час.

Составитель Семичевская Наталья Петровна

Факультет Математики и информатики

Кафедра Информационных и управляющих систем

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине «Цифровая обработка многомерных сигналов».

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе.

Цифровая обработка многомерных сигналов, а именно, изображений представляет собой самостоятельную область знания, которая быстро развивается во многих странах, в том числе и в России, этому способствует повышение скорости работы, уменьшение стоимости и размеров ЦВМ и технических средств обработки сигналов. На сегодняшний день выпускаются устройства ввода и регистрации изображений, дисплеи, графопостроители, специализированные процессоры и другое оборудование, находящее широкое применение в человеческой деятельности. Созданы мощные научные центры цифровой обработки изображений для исследования природных ресурсов и охраны окружающей среды. Многочисленные цифровые установки для медицинской диагностики, в том числе и томографические работают на принципах аппаратной и программной обработки изображений. Методы обработки изображений играют значительную роль в научных исследованиях, промышленности, медицине, космических исследованиях и информационных системах.

Для студентов, специализирующихся в области электронной вычислительной техники и обработки информации необходимы знания методов и принципов обработки видеоинформации. В курсе «Цифровая обработка многомерных сигналов» студентам специальности 010701–«Физика» будут предложены основные методы дискретизации и квантования, обсуждены вопросы математического описания дискретных изображений и методы двумерной обработки многомерных сигналов (изображений).

Цифровая обработка многомерных сигналов (изображений) – предмет широкого профиля, охватывающий вопросы физики (Оптика), физиологии, электронной и вычислительной техники (Архитектура ЭВС, Компьютерная графика, Обработка сигналов), математики (Фурье анализ, Алгебра матриц).

Предполагается, что студенты имеют подготовку в объеме программы технического вуза.

2. Содержание дисциплины

2.1. Федеральный компонент

Дисциплина «Цифровая обработка многомерных сигналов» является дисциплиной, входящей в цикл специальных дисциплин ДС.06 для специальности 010701 «Физика».

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ

Наименование темы	Кол-во часов
1. Визуальная информация. Методы кодирования графической информации. Аппаратные средства ввода изображений в память ЭВМ.	2
2. Непрерывное изображение, математические модели описаний непрерывных изображений.	2
3. Двумерное преобразование Фурье. Свойства ДПФ. Анализ линейных систем с помощью ДПФ.	2
4. Дискретизация и восстановление непрерывных изображений.	4
5. Математическое описание дискретных изображений. Векторное представление изображений.	4
6. Квантование изображений: квантование скалярной величины и векторной величины. Оптимальное положение уровня квантования и пороговых уровней, выражение Пантера-Дайтга.	4
7. Дискретная линейная двумерная обработка. Линейные операторы.	4
8. Дискретная линейная двумерная обработка. Двумерные унитарные преобразования.	4
9. Двумерные методы линейной обработки изображений. Обработка с использованием преобразования Фурье.	4
ИТОГО	30

Содержание лекций

Тема 1. Визуальная информация. Методы кодирования графической информации. Аппаратные средства ввода изображений в память ЭВМ. Цифровая визуальная информация.

Тема 2. Непрерывное изображение, математические модели описаний непрерывных изображений. Двумерные системы. Сингулярные операторы. Линейные и дифференциальные операторы двумерных систем.

Тема 3. Двумерное преобразование Фурье. Свойства ДПФ. Анализ линейных систем с помощью ДПФ.

Тема 4. Дискретизация и восстановление непрерывных изображений. Одномерные интерполяционные функции. Реальные системы дискретизации изображений. Когерентная оптическая система восстановления изображений. Неидеальная дискретизация и ее последствия.

Тема 5. Математическое описание дискретных изображений. Векторное представление изображений. Статистическое описание дискретных изображений. Модели плотностей вероятности дискретных изображений. Гауссова плотность. Одномерное распределение вероятностей – гистограмма.

Тема 6. Квантование изображений: квантование скалярной величины и векторной величины. Оптимальное положение уровня квантования и пороговых уровней, выражение Пантера-Дайтга. Оптимальное размещение пороговых уровней в зависимости от числа уровней квантования, таблица Макса. Квантование с преобразованием, характеристики прямого и обратного нелинейных преобразований для плотностей вероятности Гаусса, Рэля и Лапласа. Обработка квантованных величин. Квантование двухцветных изображений. Квантование цветных изображений.

Тема 7. Дискретная линейная двумерная обработка. Линейные операторы. Оператор суперпозиции. Дискретизованный оператор суперпозиции.

Тема 8. Дискретная линейная двумерная обработка. Двумерные унитарные преобразования. Операторы унитарных преобразований. Косинусное и

синусное преобразование. Преобразование Адамара. Преобразование Хаара. Преобразование Карунена-Лозва.

Тема 9. Двумерные методы линейной обработки изображений. Обработка с использованием преобразования Фурье. Свертка с использованием БПФ. Фильтры на основе ПФ. Псевдообращение с преобразованием.

Темы лабораторных работ.

- 30 ч.

1. Цифровое изображение, формирование тестовых изображений в системе MATLAB (IPT) (случайная раскраска, использование двух цветов при формировании изображения). 2(ч.)
2. Битовая карта изображения. Функции PIXVAL, MEAN2. (4ч.)
3. Работа с контрастностью изображения (функции IMADJUST, HISTEQ). Полутонное изображение, формирование полутонного изображения n -уровней яркости. 4(ч.)
4. Построение гистограммы распределения яркостей элементов изображения (функция IMHIST) для маски тестового изображения. Вычисление моментов первого и второго порядка. (4ч.)
5. Дискретная линейная двумерная обработка. Дискретизованный оператор суперпозиции. (4ч.)
6. Двумерные унитарные преобразования. Двумерное дискретное преобразование Фурье. (4ч.)
7. Двумерные унитарные преобразования. Преобразование Адамара (Уолша). (4ч.)
8. Двумерные унитарные преобразования. Преобразование Хаара. (4ч.)

По предложенным лабораторным работам студентами должны быть выполнены отчеты, требования к оформлению отчетов приведены в лабораторном практикуме [4].

2.3. Самостоятельная работа студентов

Темы для самостоятельного рассмотрения.

1. Реальные системы дискретизации изображений. Неидеальная дискретизация, ее последствия.
2. Квантование двухцветных изображений.
3. Дискретная линейная двумерная обработка.
4. Двумерные унитарные преобразования. Преобразование Фурье.
5. Двумерные методы линейной обработки изображений. Обработка с использованием преобразования.
6. Двумерные методы линейной обработки изображений. Фильтры на основе преобразования Фурье.
7. Двумерные методы линейной обработки изображений. Рекурсивная фильтрация.
8. Меры качества дискретизованных изображений. Метрики светлоты и цвета.
9. Субъективные оценки качества изображений. Шкала общего качества (абсолютная шкала), шкала места в группе (относительная шкала), шкала погрешностей.
10. Оценка качества по контрольным сигналам и испытательным таблицам.

По предложенным темам студентами должны быть выполнены семестровые реферативные работы.

Вопросы к экзамену по дисциплине «Обработка изображений»

1. Области практического применения методов обработки изображений. Дистанционное обнаружение.
2. Области практического применения методов обработки изображений. Сейсмология.
3. Области практического применения методов обработки изображений. Электрокардиография. Рентгенография.
4. Получение цифровых изображений, на примере рентгенографических систем.
5. Представление непрерывных изображений (детерминированное математическое описание). Системы воспроизведения цветных и бесцветных изображений.
6. Двумерные системы. Линейные операторы двумерных систем.
7. Двумерные системы. Дифференциальные операторы двумерных систем.
8. Двумерные системы. Функция импульсного отклика и получение выходного изображения на выходе линейной двумерной системы.
9. Двумерное преобразование Фурье. Свойства преобразования Фурье (ПФ).
10. Двумерное преобразование Фурье. Свойство делимости двумерного ПФ.
11. Анализ линейных систем с помощью преобразования Фурье. (Теорема о свертке)
12. Дискретизация непрерывных изображений (процесс идеальной дискретизации). Спектр дискретизированного изображения.
13. Процесс восстановления непрерывных изображений из дискретизованных. Частотное условие для идеального восстановления изображения.
14. Квантование изображений. Задача об оптимальном положении уровня квантования.
15. Статистическое описание дискретных изображений. Построение двумерного распределения вероятностей (гистограммы первого и второго порядка).

16. Обзор методов цифровой обработки изображений. Методы обработки в частотной области. Методы обработки в пространственной области.
17. Математическое описание дискретных изображений. Алгебра матриц. Формулы для векторного представления изображений.
18. Дискретная линейная двумерная обработка. Обобщенный линейный оператор.
19. Дискретная линейная двумерная обработка. Дискретный оператор суперпозиции.
20. Двумерные унитарные преобразования. Дискретное преобразование Фурье.
21. Дискретное преобразование Фурье. Свойство делимости двумерного дискретного ПФ.
22. Преобразование четное косинусное.
23. Преобразование Адамара.
24. Преобразование Хаара.
25. Дискретная линейная фильтрация. Быстрое преобразование Фурье.

Критерии оценок на экзамене: В семестре студентом должны быть выполнены все лабораторные работы по лабораторному практикуму и сделаны к ним отчеты (представлены в электронном виде), также посещены лекции и выполнены работы текущего контроля.

Студенту на экзамене предлагается один теоретический и один практический вопрос.

«Отлично» - студент не имеет долгов по семестровым лабораторным работам, ответ на теоретический материал полный, хорошо владеет материалом и отвечает на дополнительные вопросы, задача решена.

«Хорошо» - студент не имеет долгов по семестровым лабораторным работам, ответ на теоретический материал неполный, хорошо отвечает на дополнительные вопросы, задача решена.

«Удовлетворительно» - студент погасил имеющуюся задолженность по семестровым лабораторным работам, ответ на теоретический материал неполный, плохо отвечает на дополнительные вопросы, задача решена.

«Неудовлетворительно» - студент не отчитался по семестровым лабораторным работам, не знает теоретический материал, не может решить задачу.

3. Учебно-методические материалы по дисциплине

Список основной литературы

1. Прэтт У. Цифровая обработка изображений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. Кн.1
2. Кодирование и обработка изображений. Сборник трудов. Ответственные редакторы Зяблов В.В., Лебедев Д.С. - М. «Наука», 1988
3. Яншин В.В., Калинин Г.А. Обработка изображений на языке СИ для IBM PC: Алгоритмы и программы. - М.: Мир, 1994.
4. Павлидис Т. Алгоритмы машинной графики и обработки изображений [Текст]: пер. с англ./Т. Павлидис; под ред. И. Б. Гуревича. - М.: Радио и связь, 1986. - 400 с.
5. Семичевская Н.П., Соловцова Л.А. **Обработка изображений в среде MATLAB с использованием IMAGE PROCESSING TOOLBOX. Лабораторный практикум. Электронное издание, 2005**

Список дополнительной литературы по обработке изображений

1. **Беликова Т.П.** Моделирование линейных фильтров для обработки рентгеновских изображений в задачах медицинской диагностики // Цифровая оптика. Обработка изображений и полей в экспериментальных исследованиях / Под ред. В.И. Сифорова и Л.П. Ярославского. – М.: Наука, 1990. – 176 с.
2. **Беликова Т.П., Ярославский Л.П.** Использование адаптивных амплитудных преобразований для препарирования изображений // Вопросы радиоэлектроники, сер. Общетехническая. – 1974, вып.14. – С. 88 – 98.
3. **Беликова Т.П., Яшунская Н.И., Коган Е.А.** Цифровая обработка томограмм и измерение статистических признаков в задаче ранней дифференциальной диагностики шаровидных образований легких // Цифровая оптика в медицинской интроскопии.– М.: Ин-т проблем передачи информ., 1992. – С. 73–88.
4. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений / Под ред. Т.С. Хуанга. М.: Радио и связь, 1984. – 224 с.
5. **Бьемон Ж., Лагендейк Р.Л., Марсеро Р.М.** Итерационные методы улучшения изображений // ТИИЭР. – 1990. – Т.78, № 5. – С. 58–84.

6. **Гимельфарб Г.Л.** Аппаратные средства и особенности программного обеспечения диалоговой цифровой обработки изображений // Зарубежная радиоэлектроника. – 1985. – N 10. – С.87 – 128.
7. **Голд Б., Рэйдер Ч.** Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ. / Под ред. А.М. Трахтмана. – М.: Советское радио, 1973. – 368 с.
8. **Даджион Д., Мерсеро Р.** Цифровая обработка многомерных сигналов: Пер. с англ. под ред. Л.П. Ярославского. – М.: Мир, 1988. – 488 с.
9. **Литван Р.И., Аверьянов Ю.И., Быковская Ф.С.** Оптимальное градационное преобразование изображений. // Техника кино и телевидения. – 1979. – №2. – С. 38 – 41.
10. **Смирнов А.Я.** Критерии качества дискретизированных изображений // Труды ГОИ им. С.И. Вавилова. – т. 57. – вып. 191. – Л. – 1984.
11. Справочник по устройствам цифровой обработки информации / Н.А. Виноградов, В.Н. Яковлев, В.В. Воскресенский и др. – К.: Техника, 1988. – 415 с.
12. **Стокхэм Т. мл., Кэннон Т.М., Ингебретсен Б.Б.** Цифровое восстановление сигналов посредством неопределенной инверсной свертки // ТИИЭР. – 1975. – Т.63, N 4. – С. 160–177.
13. Телевизионные методы обработки рентгеновских и гамма – изображений / Н.Н. Блинов, Е.М. Жуков, Э.Б. Козловский, А.И. Мазуров. – М.: Энергоатомиздат, 1982. – 200 с.

4. Учебно-методическая (технологическая) карта дисциплины

Номер недели	Номер темы	Вопросы, изучаемые на лекции	Занятия (номера)		Используемые нагляд. и метод. пособия	Самостоятельная работа студентов		Форма контроля
			(семинар.) Практич	Лаборат.		Содержание	Часы	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1,2,3,4		1	Л/пр		2	Отч.
2	2	1,2,3,4		2	Л/пр			
3	3	1,2,3		2	Л/пр		2	Отч.
4	4	1,2,3		3	Л/пр	К.р№1	2	
5	4	4,5		3	Л/пр		2	Отч.
6	5	1,2,3		4	Л/пр			
7	5	4,5,6		4	Л/пр	К.р№2	2 2	Отч.
8	6	1,2		5	Л/пр			
9	6	3,4		5	Л/пр		2	Отч.
10	7	1,2		6	Л/пр			
11	7	3,4		6	Л/пр		2	Отч.
12	8	1,2,3		7	Л/пр	К.р№3	2	
13	8	4,5,6		7	Л/пр		2	Отч.
14	9	1,2,3,4,5		8	Л/пр		2	Отч.
15	10	1,2,3,4		8	Л/пр	Реф-т	8	

Примечание

К.р.№1 «Двумерное преобразование Фурье. Свойства ПФ.»

К.р.№2 «Гистограмма двумерного массива. Определение среднего по гистограмме»

К.р.№3 «Дискретизованный оператор суперпозиции»

2. ГРАФИК САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Содержание	Объем в часах	Сроки и форма контроля
Контрольная работа №1	2	4 неделя
Контрольная работа №2	2	7 неделя
Контрольная работа №3	2	12 неделя
Выполнение отчетов по лабораторным работам	16	Кжд.2-ую нед.
Реферат	8	15 неделя
Итого	30 часов	

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРОВЕДЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

По каждой лабораторной работе студенты выполняют отчет, требования к выполнению отчета указаны в методических разработках к лабораторным работам.

В течение семестра студенты выполняют три контрольных работы по тематике предложенной в рабочей программе. Подготовка к контрольной работе предусматривает изучение материалов лекции и демонстрацию умения решать предложенные задачи в контрольной работе.

По выбранной теме студенты выполняют реферативную работу.

Реферативная работа включает следующие разделы:

1. Обоснование актуальности выбранной тематики и описание целей выполнения работы.
2. Систематизация и анализ найденных в научной печати, в сети Интернет и других источниках материалов.
3. Выводы.
4. Предложения по использованию результатов работы в конкретных областях и возможные направления дальнейших исследований.

4. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНИКОВ, УЧЕБНЫХ ПОСОБИЙ

Список основной литературы

1. Прэтт У. Цифровая обработка изображений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. Кн.1
2. Кодирование и обработка изображений. Сборник трудов. Ответственные редакторы Зяблов В.В., Лебедев Д.С. - М. «Наука», 1988
3. Яншин В.В., Калинин Г.А. Обработка изображений на языке СИ для IBM PC: Алгоритмы и программы. - М.: Мир, 1994.
4. Павлидис Т. Алгоритмы машинной графики и обработки изображений [Текст]: пер. с англ./Т. Павлидис; под ред. И. Б. Гуревича. - М.: Радио и связь, 1986. - 400 с.
5. Семичевская Н.П., Соловцова Л.А. **Обработка изображений в среде MATLAB с использованием IMAGE PROCESSING TOOLBOX. Лабораторный практикум. Электронное издание, 2005.**

5. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Лекция 1

Изображение служит для представления информации в визуальном виде. Эффективность восприятия этой информации человеком зависит от многих факторов. Максимальный учет влияния этих факторов возможен при условии изучения целого ряда вопросов, связанных со способами получения, свойствами зрительного восприятия и обработкой изображений.

Методы получения цифровых изображений

На современном этапе развитие технической и медицинской диагностики неразрывно связано с визуализацией внутренних структур объекта. Существует много различных видов визуализации. Разные методы визуализации основываются на разнообразных физических взаимодействиях электромагнитного излучения с материалами, средами, биологическими тканями и, как следствие, обеспечивают измерение разных физических свойств этих объектов. Рассмотрим несколько основных методов получения изображений, которые представляют интерес для технической и медицинской диагностики.

1. Системы получения рентгенографических изображений

Рентгеновское излучение активно используется для получения изображений с момента его открытия в 1895 г. Изображение формируется в результате взаимодействия квантов рентгеновского излучения с приемником и представляет собой распределение квантов, которые прошли через объект диагностики и были зарегистрированы детектором (рис. 1).

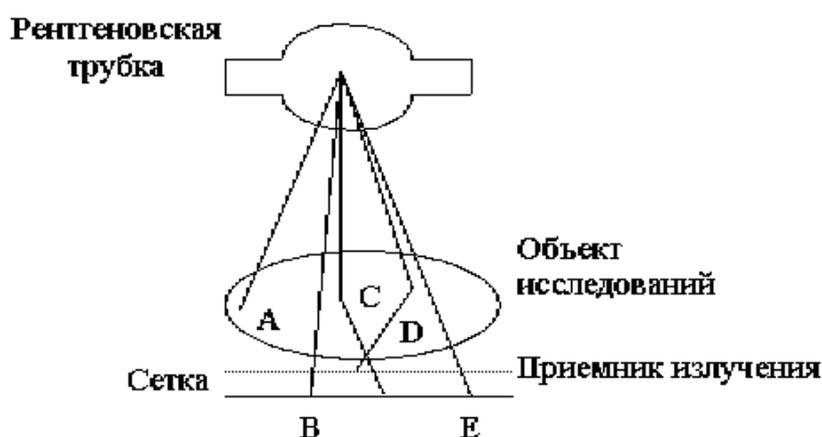


Рис. 1. Компоненты системы для получения рентгеновских изображений. В и Е - кванты, которые прошли через исследуемый объект без взаимодействия; С и D - рассеянные кванты. Квант D отсеивается сеткой, которая препятствует рассеянному излучению, а квант А - поглощается в объекте.

Блок-схема типичной цифровой рентгенографической системы представлена на рис. 2.



Рис. 2. Элементы цифровой системы получения рентгеновских изображений.

Рентгеновский аппарат и приемник изображения связаны с компьютером, а полученное изображение запоминается и отображается (в цифровой форме) на телеэкране.

В цифровой рентгенографии используют такие приемники изображения как усилитель изображения, ионографическая камера и устройство с вынужденной люминесценцией. Эти приемники могут непосредственно формировать цифровые изображения без промежуточной регистрации. Усилители изображения не имеют наилучшей пространственной разрешающей способности или контраста, но имеют высокое быстродействие. Аналогово-цифровое преобразование флюорограммы с числом точек на изображении 512×512 может занимать время меньше, чем 0,3с. Если число точек на изображении 2048×2048 , то время его превращения в цифровую форму составляет всего несколько секунд. Время считывания из пластины с люминесценцией или с ионографической камеры значительно больше, хотя здесь лучшая разрешающая способность и динамический диапазон.

Записанное на фотопленке изображение можно перевести в цифровую форму с помощью сканирующего микроденситометра, но любая информация, зафиксированная на фотопленке с очень маленькой или очень высокой оптической плотностью, будет обезображена влиянием характеристик пленки. В цифровую форму можно превратить и ксерорентгенограмму также с помощью сканирующего денситометра, который работает в отраженном свете, но недостатком полученного изображения является наличие уже усиленных контуров.

К преимуществам цифровых рентгенографических систем относятся следующие факторы: цифровое отображение информации; низкая доза облучения; цифровая обработка изображений и улучшения качества.

2. Получение изображений с помощью радиоизотопов

В последние десятилетия значительно развилась клиническая диагностика заболеваний человека с помощью введения в его организм радиоизотопов в индикаторном количестве. Визуализация с помощью радиоизотопов включает в себя ряд методов получения изображений, которые отражают распределение в организме меченных радионуклидами веществ. Эти вещества называются радиофармпрепаратами и предназначены для наблюдения и оценки физиологических функций отдельных внутренних органов. Характер распределения радиофармпрепаратов в организме определяется способами его введения, а также такими факторами, как величина кровотока объема циркулирующей крови и наличием того ли другого метаболического процесса.

Радиоизотопные изображения позволяют получать ценную диагностическую информацию. Наиболее распространенным методом этого класса является статическая изотопная визуализация в плоскости, которая называется планарной сцинтиграфией. Планарные сцинтиграммы представляют собой двумерные распределения, а именно проекции трехмерного распределения активности изотопов, которые находятся в поле зрения детектора. Томографические исследования с применением системы многоракурсного сбора информации об объекте разрешают преодолеть большинство проблем, связанных с наложением информации при одноракурсном способе сбора данных. Прогресс компьютерных технологий привел к применению компьютеров при исследованиях с помощью радиоизотопов, где важную роль играет томографическая и динамическая информация. Использование компьютерной техники повышает качество изображения и дает возможность при радиоизотопной визуализации получать количественную информацию об исследуемых объектах.

3. Ультразвуковая диагностика

Ультразвуковые методы визуализации широко применяются при разных диапазонах частот - от подводной локации и биоэхолокации (частоты до 300 КГц) до акустической микроскопии (от 12 МГц до 1 ГГц и выше). Промежуточное положение по частотам занимают ультразвуковая диагностика и терапия, а также неразрушающий контроль в промышленности. Информация о структуре исследуемого объекта закодирована в лучах, которые прошли через него и в рассеянном излучении. Задача системы визуализации состоит в расшифровке этой информации. В отличие от рентгеновских лучей, ультразвуковые волны преломляются и отбиваются на границах раздела сред с разными акустическими показателями преломления. Эти эффекты могут быть довольно заметными, что разрешает создать фокусирующие системы.

С точки зрения выбора конкретного способа построения систем визуализации, в зависимости от вида излучения между ультразвуком и рентгеновским излучением есть существенные различия. Ультразвуковые волны распространяются довольно медленно, поэтому при характерных

размерах исследуемого объекта легко измерять соответствующее время распространения, которое разрешает использовать эхо-импульсные методы для формирования акустических изображений. С другой стороны, скорость ультразвуковых волн достаточно большая для того, чтобы накапливать и реконструировать всю информацию о виде полного кадра изображения за время 80 мс. Другими словами, появляется возможность наблюдать движение объектов в динамике. Ультразвуковые приборы отличаются один от другого лишь деталями.

4. Использование эффекта ядерного магнитного резонанса (ЯМР) для получения изображений

Несмотря на то, что во многих больших исследовательских центрах ЯМР-визуализация является одним из важных диагностических средств, сам метод еще находится на относительно ранней стадии своего развития. Само явление ядерного магнитного резонанса было открыто в 1946 году независимо Блохом и Парселлом с Паундом. Этот метод с помощью небольших изменений резонансной частоты (через наличие околмолекулярной электронной тучи) позволяет идентифицировать ядра в разном химическом окружении. Сначала ЯМР-методы с высокой разрешающей способностью разрабатывались как универсальное средство изучения химического состава и структуры твердого тела и жидкостей, а далее нашли свое применение и в других областях, в частности, медицине. Рядом с развитием ЯМР-спектроскопии развивались и методы визуализации - это и точечные методы, методы "быстрой" визуализации и прочие. Роль центрального процессора в современных ЯМР-системах выполняет мощный миникомпьютер, который обеспечивает канал связи с оператором и контроль функций узлов системы, а также обеспечивает запоминание и архивирование информации, отображение результатов исследований и во многих случаях соединяется с устройством быстрой обработки типа матричного процессора.

Лекция 2

Современное развитие технологий автоматической обработки визуальной информации позволяет применять их в системах технического зрения при выполнении широкого ряда производственных операций, контроля продукции и др.

ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ НАБЛЮДЕНИЯ

Дистанционное обнаружение

Не будем подробно останавливаться на роли и важности наблюдения за поверхностью Земли и других планет – это и различные спутники, и корабли многоразового использования, и орбитальные станции, и многое другое. Каждая из этих систем, наполненных различными приборами и устройствами восприятия, выдает огромные потоки информации. Поскольку число потенциальных потребителей этой информации быстро возрастает, представляется необходимым выполнять автоматическую классификацию наблюдений за минимальное время, согласованное со срочностью запросов. Идеальным было бы обрабатывать каждое изображение по мере его восприятия, т.е. в реальном масштабе времени, и выдавать результаты непосредственно заинтересованным пользователям.

Перечень областей, для которых требуется выполнять орбитальные наблюдения, можно продолжать почти неограниченно. Это обнаружение облачных образований и наблюдение за их изменениями, обнаружение выбросов и загрязнения водных пространств, наблюдение за снежным покровом и ростом сельскохозяйственных культур, оценка ущерба от стихийных бедствий, обнаружение пожаров и засушливых зон, определение изменений береговой линии, обнаружение обильных снегопадов и т.д. К этому можно добавить многочисленные и разнообразные применения в военном деле.

Во многих задачах возникает необходимость автоматической классификации изображений в реальном масштабе времени. Действительно, если, например, получатель информации интересуется ходом роста сельскохозяйственных культур, а изображения полей закрыты густой облачностью, то нет смысла сохранять такие изображения. И наоборот, если для потребителя представляет интерес облачный покров, то такие изображения содержат важные признаки, и они должны быть ему направлены.

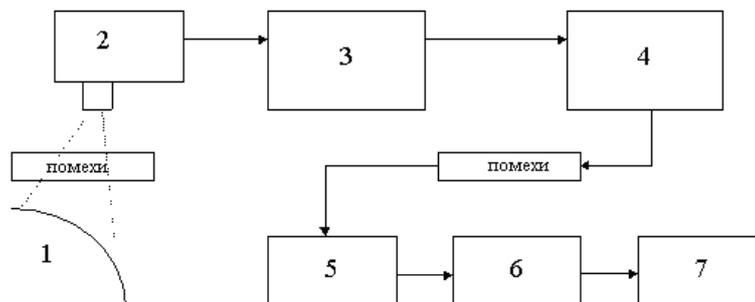


Рис. 3. Упр. 1 – прием телеметрической информации; 2 – датчик; 3 – предварительная обработка на борту, передача на телеметрической информации; 5 – прием телеметрической информации; 6 – обработка, классификация, распознавание; 7 – использование.

Упрощенная схема системы дистанционного наблюдения показана на рис. 3. Предварительная обработка данных, выполняемая на борту спутника, необходима для уменьшения влияния атмосферных или иных помех. Такие же операции повторяются на Земле после приема информации с орбиты, наряду с другими операциями (обработки, распределения и др.). В перспективе, по мере развития космической техники, особенно в целях навигации (наземной, морской и воздушной), будут разрабатываться методы обнаружения движущихся объектов, наведения датчиков и отслеживания траекторий, которые могли бы выполняться на борту летательного аппарата. Одна из наиболее важных задач, примыкающих к этой области, это обнаружение облаков и выработка признаков для автоматического различения их от снегового покрова. Такая операция необходима для устранения ошибок при наведении навигационных приборов.

ПРИМЕНЕНИЕ В СЕЙСМОЛОГИИ

Сейсмические волны можно наблюдать и записывать в любой точке земной поверхности. Для этого предназначены сейсмографы — приборы, обладающие чрезвычайно высокой чувствительностью к механическим колебаниям Земли. Автоматическое дешифрирование этих записей представляет огромный интерес для понимания явлений, происходящих в толще земной коры. В частности, проводились работы по выявлению различий в сейсмограммах, вызванных различными причинами — землетрясениями и ядерными взрывами.

Поскольку сейсмограммы имеют достаточно большую продолжительность, то было предложено [9] отображать их в форме фраз, слов, символов. Такой же метод используется при описании биологических сигналов, в частности, электрокардиограмм и электроэнцефалограмм. Первая и наиболее серьезная трудность на этом пути — представление исходной информации.

Очень важно правильно выбрать параметры первичного разбиения сигнала на отдельные отрезки. Чем они короче, тем более простым оказывается их представление, но в то же время тем длиннее становится время распознавания, так как оно растет пропорционально числу исследуемых отрезков. Кроме того, чем короче отрезки, тем они более чувствительны к шумам. В типовом режиме одна запись длится 120 с., скорость измерений — 10 отсчетов в секунду, и запись делят на 20 отрезков по 60 замеров в каждом. Типичные примеры записи сейсмограмм показаны на рис. 2. Глаз сразу усматривает сходство между кривыми *a* и *b*, а также между *b* и *c*, хотя в каждой из этих пар представлены записи, вызванные разными источниками. Это доказывает, что задача классификации не так проста, как кажется на первый взгляд. Кроме того, чем дальше размещен сейсмограф от эпицентра землетрясения или от места взрыва, тем больше визуальное сходство между сигналами.

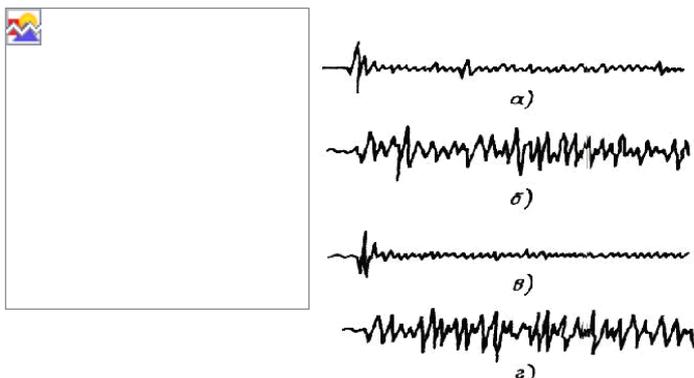


Рис. 4. Примеры сейсмограмм: *а, б* – землетрясения; *в, г* – взрывы.

Для решения задачи автоматической классификации в частотной области можно было бы использовать аппарат спектрального анализа. Однако она решается и более простыми средствами, при помощи всего двух признаков, характеризующих каждый отрезок. Это соответственно энергия сигнала за время длительности отрезка и число переходов сигнала через нуль. Множество этих значений и представляет массив исходных данных. Каждый отрезок представляется двухкомпонентным вектором: x_1 (энергия) и x_2 (число переходов через нуль). Можно использовать и другие признаки, но это приводит лишь к усложнению вычислений.

Следующий этап – классификация, устанавливающая связь со словами, входящими в словарь описаний.

Для классификации сейсмических волн была разработана грамматика, реализуемая на детерминированном конечном автомате.

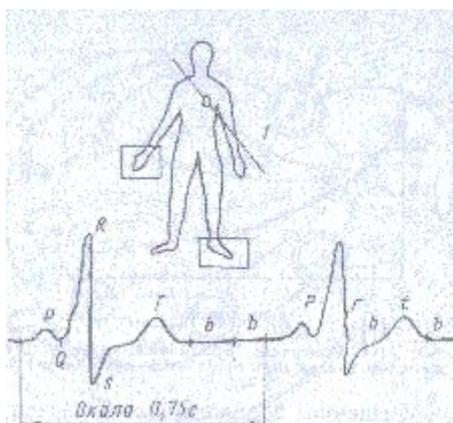
ПРИМЕНЕНИЕ В БИОЛОГИИ

Электрокардиография

Электрокардиография представляет собой один из методов исследования работы сердца, основанный на записи разности электрических потенциалов, возникающей в процессе сердечной деятельности. Диагностические возможности метода исключительно широки. Разность потенциалов снимается с определенных участков поверхности кожи с помощью электродов, изготовленных из соответственно подобранного металла. Поскольку снимаемые сигналы имеют амплитуду порядка милливольт, они поступают на вход усилителя, после которого подаются на регистрацию.

Схематически сердце может быть представлено в виде электрического диполя переменной длины, зависящей от сердечного ритма. Форма электрического сигнала, изменяющегося во времени, и его амплитуда зависят от точки съема. Обычно расположение электродов стандартно. Так, ЭКГ ДП соответствует разности потенциалов между правой рукой и левой ногой. Типичная осциллограмма ЭКГ-сигнала показана на рис. 5.

Буквы PQRST, предложенные Эйнтховеном, позволяют в удобной форме описывать отдельные особенности этой непрерывной кривой.



Периодический сигнал ЭКГ имеет сравнительно простую структуру, поэтому уже достаточно давно была предложена процедура его автоматического распознавания на основе грамматического описания.

Рис. 5. Типичная электрокардиограмма: 1 – электрическая ось сердца.

Используемая здесь сегментация несколько отлична от той, которая была предложена Эйнтховеном. Описание ЭКГ составляется из четырех символов — p, r, b, t, каждый из которых соответствует определенному участку кривой (см. рис. 3). Символ p соответствует волне P, r — RS-переходу, b — относительно плоской части, разделяющей экстремумы S и T (около 0,1 с), t — волне T. Если за начало отсчета принять волну P, то в таких обозначениях нормальная ЭКГ может быть описана последовательностями символов: prbtb, prbtbb, prbtbbb и т. д.

Синтаксические описания такого вида могут быть получены с использованием грамматики G:

$$G=[V_t, V_n, P, S],$$

где $V_t=[p, r, t, b]$, $V_n=[S, A, B, C, D, E, H]$, а множество P правил подстаново.

Такой тип распознающего автомата весьма примитивен: он способен обнаруживать лишь грубые отклонения от нормы. В действительности анализ аномальной ЭКГ представляет собой серьезную задачу, которая выполняется квалифицированным специалистом.

РАСПОЗНАВАНИЕ АВТОМОБИЛЕЙ

Работы по совершенствованию дорожного движения требуют изучения транспортных потоков. Для того чтобы сведения о частоте движения автомашин были достоверными, необходимо проводить измерения при прохождении автомобилями одного и того же отрезка пути. Одно из возможных решений состоит в том, чтобы характеризовать каждую машину на входе контролируемого участка, а затем распознавать машины на выходе с помощью одних и тех же средств. Обработка данных, полученных таким способом, позволяет получить информацию о плотности и средней скорости движущегося потока.

Известны различные методы распознавания автомашин. Один из них основан на анализе издаваемого ими шума, другие — на изучении их теплового портрета. Однако опыт показывает, что для данной задачи эти

методы слишком сложны. Хорошие результаты можно получить при помощи значительно более простых средств – подземных датчиков в виде индукционной петли, несложных в изготовлении и обслуживании.

Принцип действия индукционного датчика достаточно прост. На проезжей части, под дорожным покрытием, расположена проволочная петля, связанная с устройством обработки данных. В результате прохождения автомашины импеданс петли изменяется (явление взаимной индукции), вызывая изменение напряжения в схеме, с которой петля соединена. Полученный сигнал после аналого-цифрового преобразования используется для обработки в ЭВМ. Два примера осциллограмм сигналов, вызванных прохождением автомашин, показаны на рис. 5.

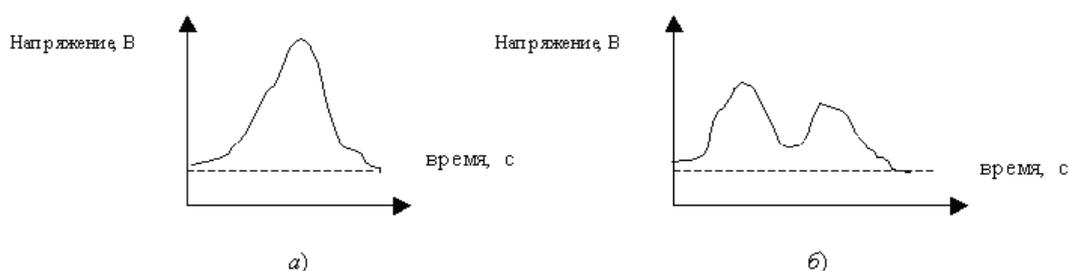


Рис. 5. Осциллограммы сигналов от автомобилей: *а* – легковая машина; *б* – грузовая машина с двухосным прицепом.

Формы сигналов от легковой машины и от грузовика сильно отличаются друг от друга. Для удобства дальнейшей обработки сигналы приводят к нормализованному виду путем введения коррекции, зависящей от скорости и траектории движения.

Путем распознавания этих сигналов можно получить данные о средней скорости и количестве машин в единицу времени. Этот метод может быть использован и в других областях, где приходится наблюдать за линейным перемещением как дискретных объектов, так и движущихся непрерывно (листовой прокат, проволока и т.п.).

РАСПОЗНАВАНИЕ САМОЛЕТОВ

Автоматическое распознавание летательных аппаратов (в том числе самолетов) представляет собой исключительно важную задачу для управления воздушным движением. Разумеется, хорошо известны специальные системы активного распознавания с помощью автоответчиков, принцип которых состоит в том, что автоматический передатчик (автоответчик), установленный на борту самолета, излучает определенный код по запросу с Земли. Однако его использование не всегда возможно, поэтому были предложены и другие методы, в частности классификация самолетов по их контурам.

Были разработаны метод грамматического описания контура и грамматика, объем которой должен учесть все разнообразие положений самолета относительно наблюдателя. Однако продолжительность обработки информации этим методом слишком велика и не дает возможности создания прибора, который действовал бы в реальном масштабе времени, по крайней мере, в процессе сближения с самолетом.

Другой метод распознавания основан на использовании инвариантных характеристик контура самолета. В качестве таких инвариант рассматриваются центральные моменты, вычисляемые по формулам:

$$M_1 = M_{20} + M_{02}$$

$$M_3 = (M_{30} - 3M_{12})^2 + (3M_{21} - M_{03})^2$$

Были исследованы несколько моментов:

Эти моменты являются составляющими многомерного вектора, описывающего каждый контур. Группирование выполняется по правилу ближайшего соседства. Однако в работе было показано, что при такой классификации несколько различных моделей самолетов попадают в один и тот же класс, а такое совпадение во многих задачах недопустимо.

Третий метод заключается в представлении самолета вектором, составляющими которого являются коэффициенты разложения контура в ряд Фурье. Поскольку контур, как правило, замкнут, то его разлагают в ряд как периодическую функцию. В противном случае разомкнутый контур рассматривают как один период периодической функции.

Ряд Фурье записывают в виде:

$$z(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(i2\pi k\theta)$$

где θ  — угол отклонения радиус-вектора z . Комплексные коэффициенты ряда вычисляются. Достоинство этого метода состоит в том, что при соответствующей нормировке такое описание не зависит от изменения масштаба, угла поворота и сдвига.

Для распознавания необходимо составить библиотеку контуров всех возможных типов самолетов, подлежащих классификации. Разделение на классы выполняется по принципу минимального расстояния от границы раздела классов.

Цифровая визуальная информация. Типы изображений.

Интегрированные среды для моделирования и исполнения программ цифровой обработки изображений и сигналов содержат мощные средства для инженерно-научных расчетов и визуализации данных. Большинство современных пакетов поддерживает визуальное программирование на основе блок-схем. Это позволяет создавать программы специалистам, не владеющим техникой программирования. К таким пакетам относится Image Processing Toolbox системы MATLAB, разработанный фирмой MathWorks. Этот пакет владеет мощными средствами для обработки изображений. Они имеют открытую архитектуру и позволяют организовывать взаимодействие с аппаратурой цифровой обработки сигналов, а также подключать стандартные драйвера.

Система MATLAB и пакет прикладных программ Image Processing Toolbox (IPT) является хорошим инструментом разработки, исследования и моделирования методов и алгоритмов обработки изображений. При решении задач обработки изображений пакет IPT позволяет идти двумя путями. Первый из них состоит в самостоятельной программной реализации методов и алгоритмов. Другой путь позволяет моделировать решение задачи с помощью готовых функций, которые реализуют наиболее известные методы и алгоритмы обработки изображений. И тот, и другой способ оправдан. Но все же для исследователей и разработчиков методов и алгоритмов обработки изображений предпочтительным является второй путь.

Рассмотрим коротко особенности представления изображений в MATLAB IPT.

Изображения бывают **векторными** и **растровыми**.

Векторным называется изображение, описанное в виде набора графических примитивов.

Растровые же изображения представляют собой двумерный массив, элементы которого (пикселы) содержат информацию о цвете. В цифровой обработке используются растровые изображения. Они в свою очередь делятся на типы - *бинарные, полутоновые, палитровые, полноцветные*.

Элементы *бинарного* изображения могут принимать только два значения - 0 или 1. Природа происхождения таких изображений может быть самой разнообразной. Но в большинстве случаев, они получаются в результате обработки полутоновых, палитровых или полноцветных изображений методами бинаризации с фиксированным или адаптивным порогом. Бинарные изображения имеют то преимущество, что они очень удобны при передаче данных.

Полутоновое изображение состоит из элементов, которые могут принимать одно из значений интенсивности какого-либо одного цвета. Это один из наиболее распространенных типов изображений, который применяется при различного рода исследованиях. В большинстве случаев используется глубина цвета 8 бит на элемент изображения.

В *палитровых* изображениях значение пикселов является ссылкой на ячейку карты цветов (палитру). Палитра представляет собой двумерный массив, в столбцах которого расположены интенсивности цветовых составляющих одного цвета.

В отличие от палитровых, элементы *полноцветных* изображений непосредственно хранят информацию о яркостях цветовых составляющих.

Выбор типа изображения зависит от решаемой задачи, от того, насколько полно и без потерь нужна информация может быть представлена с заданной глубиной цвета. Также следует учесть, что использование полноцветных изображений требует больших вычислительных затрат.

В зависимости от типа изображения они по-разному представляются в разных форматах. Этот момент будет очень важным при создании программ в среде IPT.

Лекция 3

Физические свойства света изучены довольно хорошо, но механизм взаимодействия света с органами зрения еще не вполне понятен.

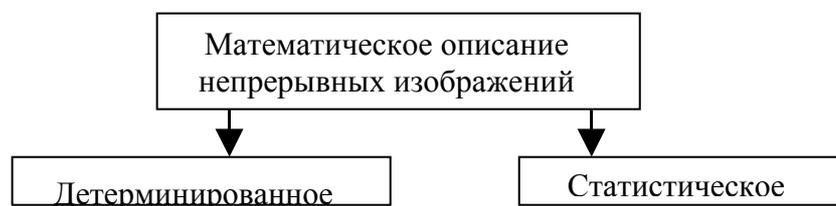
Свет есть форма электромагнитного излучения, лежащего в относительно узкой области спектра в диапазоне длин волн 350-780 нм.

Характеристикой источника света является *интенсивность излучения I* заданной длины волны.

В зрительную систему человека попадает свет либо от самосветящегося источника, либо отраженный от некоторого предмета, либо прошедший через него.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

При разработке и анализе систем обработки изображений удобно и необходимо иметь математическое описание подлежащих обработке изображений.



Детерминированный подход – математическая функция представляет изображение и рассматривает свойства изображения в каждой его точке:

$S(x,y,t,\lambda)$ - распределение энергии источника светового излучения:

x,y – пространственные координаты;

t – время;

λ – длина волны.

Статистический подход – изображение определяется усредненными характеристиками:

$F(x, y, t)$ – непрерывная случайная функция:

x,y – пространственные координаты

t – время.

$P\{F_1, F_2, \dots, F_j, x_1, y_1, t_1, x_2, y_2, t_2, \dots, x_j, y_j, t_j\}$ – случайный процесс $F(x,y,t)$ описывается совместной плотностью вероятности.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ (ДЕТЕРМИНИРОВАННОЕ ОПИСАНИЕ)

$S(x, y, t, \lambda)$ – распределение энергии источника светового излучения.

Энергия излучения пропорциональна квадрату амплитуды электрического поля и поэтому представляет собой действительную положительную величину.

В изображающих системах тах яркость изображения ограничена из-за насыщения светочувствительной пленки или перегревания люминофора кинескопа.

$$0 \leq C(x, y, t, \lambda) \leq A - \text{тах яркость изображения.}$$

Размеры изображения ограничены формирующей системой и средой, на которой оно записывается. Для простоты будем считать, что изображение отлично от нуля только в прямоугольной области

$$-L_x \leq x \leq L_x$$

$$-L_y \leq y \leq L_y$$

Изображение наблюдается в течение конечного промежутка времени

$$0 \leq t \leq T$$

$C(x, y, t, \lambda)$ – ограниченная функция четырех ограниченных переменных. Функция $C(x, y, t, \lambda)$ непрерывна в области определения.

Во многих системах воспроизведения изображений (например, проекционных устройствах) изображение не меняется во времени (статическое) и переменная t может быть упущена. В кинематографических системах аргумент t меняется дискретно.

Ощущение светлоты, возникающее в зрительной системе человека, обычно определяется мгновенной яркостью светового поля:

где $V_s(\lambda)$ - спектральная чувствительность человеческого зрения.

Световые ощущения можно описать набором координат света RGB, пропорциональных интенсивностям красного (R), зеленого (G) и синего (B) цвета, смесь которых дает заданный цвет.

$$R(x, y, t) = \int_0^{\infty} C(x, y, t, \lambda) R_s(\lambda) d\lambda$$

$$G(x, y, t) = \int_0^{\infty} C(x, y, t, \lambda) G_s(\lambda) d\lambda$$

$$B(x, y, t) = \int_0^{\infty} C(x, y, t, \lambda) B_s(\lambda) d\lambda$$

R_s, G_s, B_s - удельные координаты для набора цветов красный, зеленый и синий, равные координатам цвета монохроматического излучения единичной интенсивности с длиной волны λ .

Для простоты во всех случаях изображение описывается с помощью функции $F(x, y, t)$.

Для одноцветной системы функция $F(x, y, t)$ представляет распределение яркости или какой-либо другой физической величины, связанной с яркостью.

Для системы воспроизведения цветных изображений $F(x, y, t)$ – есть одна из координат цвета.

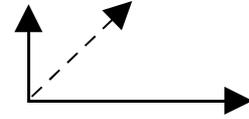
ДВУМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ, СИСТЕМЫ ОПИСЫВАЕМЫЕ ФУНКЦИЯМИ ВИДА $F(x, y, t)$.

Сингулярные операторы

Сингулярные операторы широко применяются при анализе двумерных систем, особенно систем, в которых производится дискретизация непрерывных функций.

Двумерная δ -функция Дирака есть сингулярный оператор.

$$\delta(x, y) = \begin{cases} \infty, & x = 0, y = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



$$\delta(x - \xi, y - \eta) = \begin{cases} \infty, & x = \xi, y = \eta \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$\delta(x, y)$ можно определить следующим тождеством:

$$\delta(x - \xi, y - \eta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i(u(x - \xi) + v(y - \eta))\} dudv, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Свойства δ -функции:

1) $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x, y) dx dy = 1$, при $\varepsilon > 0$, ε - бесконечно малый предел интегрирования.

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) \delta(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta = F(x, y).$$

3) $\delta(x, y) = \delta(x) \cdot \delta(y)$ - произведение одномерных δ -функций.

Способы получения δ -функции:

$\delta(x, y) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} [\alpha^2 \text{rect}\{\alpha x\} \cdot \text{rect}\{\alpha y\}]$ - предел прямоугольной функции, где

$$\text{rect}\{x\} = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\delta(x, y) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^2 \cdot \exp(-\alpha^2 \cdot \pi(x^2 + y^2))$ - предел Гауссовой функции

$\delta(x, y) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha \cdot J_1(2\pi\alpha \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$ - предел функции Бесселя

п.1 ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ

Двумерная система называется линейной, если для нее справедливы

принципы суперпозиции:
 $\theta \{ a_1 \cdot F_1(x, y) + a_2 \cdot F_2(x, y) \} = a_1 \theta \{ F_1(x, y) \} + a_2 \theta \{ F_2(x, y) \}$, где a_1, a_2 – постоянные, могут быть комплексными.

Свойство суперпозиции распространяется на отображения общего вида. Используя свойства δ -функции Дирака, функцию на входе системы $F(x, y)$ можно представить как взвешенную сумму дельта функций

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) \delta(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \quad \text{где} \quad F(\xi, \eta) \quad \text{взвешенный}$$

множитель δ -импульса.

Если функция на выходе линейной системы получена в результате действия линейного оператора $G(x, y) = \theta \{ F(x, y) \}$, то

$$G(x, y) = \theta \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) \cdot \delta(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \right\} \quad \text{или}$$

$$G(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) \cdot \theta \{ \delta(x - \xi, y - \eta) \} d\xi d\eta \quad - \quad \text{изменен} \quad \text{порядок}$$

выполнения операций линейного преобразования и интегрирования.

$$\text{Обозначим } H(x, y, \xi, \eta) \equiv \theta \{ \delta(x - \xi, y - \eta) \}$$

Будем называть эту функцию H импульсным откликом двумерной системы. Импульсный отклик оптической системы часто называют *функцией рассеяния точки*.

$$\text{Получим интеграл суперпозиции } G(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) \cdot H(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta .$$

Линейная двумерная система называется *пространственно-инвариантной* (изопланической), если ее импульсный отклик зависит только от разностей координат.

Для пространственно-инвариантной системе имеет место, следующее тождество:

$$H(x, y, \xi, \eta) = \dot{I}(x - \xi, y - \eta)$$

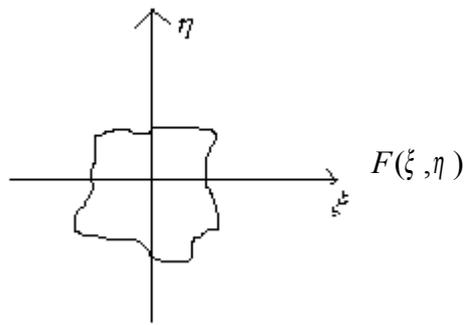
и интеграл суперпозиции имеет форму свертки:

$$G(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) \cdot H(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta = F(x, y) * H(x, y) , \text{ так как}$$

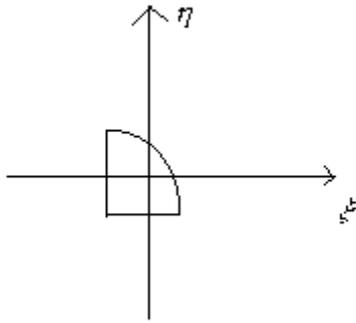
интеграл свертки симметричен, можно записать

$$G(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x - \xi, y - \eta) \cdot H(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

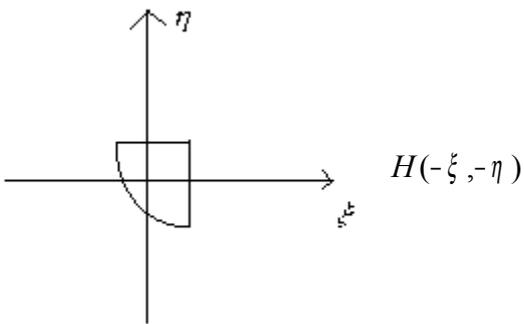
Рассмотрим пример:



- функция на входе;

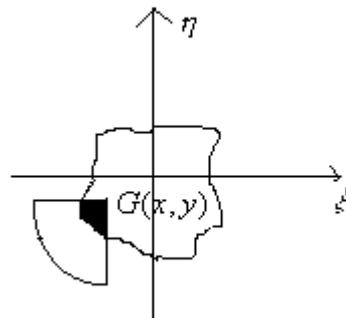
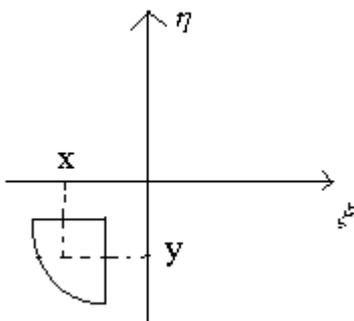


импульсный отклик;



- импульсный отклик при обращении

координат:



$H(x - \xi, y - \eta)$ - импульсный отклик со сдвигом на x, y ; $F(\xi, \eta) * H(x - \xi, y - \eta)$ - двумерная свертка.

Интегрирование по заштрихованной области дает величину $G(x, y)$.

Таким образом, функция $G(x, y)$ на входе может быть найдена сканированием входной функции скользящим «окном» - обращенным импульсным откликом, и интегрированием по области, в которой эти функции перекрываются.

п. 2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Обнаружение и выделение контуров (границ) на изображении, т.е. точек с резкими перепадами яркости обычно осуществляются дифференцированием функции $F(x,y)$ по пространственным координатам x , y и сравнением результата дифференцирования с пороговым значением.

Первые производные по пространственным координатам:

$$d_x = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}, \quad d_y = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}.$$

Производные второго порядка по пространственным координатам:

$$d_{xx} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2}, \quad d_{yy} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}.$$

Производная по направлению Z , составляющему угол φ с горизонтальной осью $\nabla \{F(x,y)\} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial z} = d_x \cdot \cos \varphi + d_y \cdot \sin \varphi$.

Модуль градиента $|\nabla \{F(x,y)\}| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2}$.

Сумма d_{xx} и d_{yy} – Лапласиан

$$L\{F(x,y)\} = d_{xx} + d_{yy} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}.$$

Замечание: Лапласиан есть скалярная величина (не зависит от направления). Градиент – есть зависящая от направления векторная величина.

ДВУМЕРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

В результате двумерного преобразования Фурье функции $F(x,y)$, описывающей изображение, получается частотный спектр этого изображения, который определяется формулой

$$\Phi(\omega_x, \omega_y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) \cdot \exp\{-i(\omega_x x + \omega_y y)\} dx dy, \quad (1)$$

где ω_x, ω_y - пространственные частоты; $i = \sqrt{-1}$.

$\Phi(\omega_x, \omega_y)$ – комплексная величина, поэтому ее можно представить как $\Phi(\omega_x, \omega_y) = \text{Re}\{\Phi(\omega_x, \omega_y)\} + i \text{Im}\{\Phi(\omega_x, \omega_y)\}$

или в форме Эйлера $\Phi(\omega_x, \omega_y) = \mu(\omega_x, \omega_y) \cdot \exp(i\varphi(\omega_x, \omega_y))$,

$$\mu(\omega_x, \omega_y) = \sqrt{\text{Re}^2 \Phi(\omega_x, \omega_y) + \text{Im}^2 \Phi(\omega_x, \omega_y)},$$

$$\varphi(\omega_x, \omega_y) = \text{arctg} \frac{\text{Im}\{\Phi(\omega_x, \omega_y)\}}{\text{Re}\{\Phi(\omega_x, \omega_y)\}}.$$

Достаточным условием существования Фурье-спектра функции $F(x,y)$ является абсолютная интегрируемость:

$$\int \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)| dx, dy < \infty. \quad (*)$$

Исходная функция $F(x,y)$ может быть восстановлена обратным преобразованием Фурье

$$F(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_x, \omega_y) \cdot \exp\{i(\omega_x \cdot x + \omega_y \cdot y)\} d\omega_x d\omega_y \quad (2)$$

Ядро двумерного преобразования Фурье разделимо, поэтому это преобразование выполняется в два этапа:

I) этап

$$\Phi_y(\omega_x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) \cdot \exp\{-i\omega_x x\} dx \quad (1^*)$$

II) этап

$$\Phi(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_y(\omega_x, y) \cdot \exp\{-i\omega_y y\} dy \quad (1^{**})$$

Свойства двумерного преобразования Фурье (ДПФ):

1. Функциональные свойства
2. Линейность
3. Изменение масштаба
4. Сдвиг
5. Свертка
6. Теорема Парсеваля
7. Теорема о спектре автокорреляционной функции
8. Спектры пространственных производных

Анализ линейных двумерных систем с помощью двумерного преобразования Фурье (ДПФ)

Теорема о ПФ свертки оказывается очень полезным средством при анализе линейных систем.

Свойство свертки

Фурье-спектр функции, полученной в результате свертки двух функций равен произведению спектров исходных функций:

$$\hat{I}_F \{F(x, y) * H(x, y)\} = \Phi(\omega_x, \omega_y) \cdot J(\omega_x, \omega_y), \quad (3)$$

где \hat{I}_F оператор преобразования Фурье.

Обратная теорема

$$\hat{I}_F \{F(x, y) \cdot H(x, y)\} = \frac{1}{4\pi^2} \Phi(\omega_x, \omega_y) * J(\omega_x, \omega_y). \quad (4)$$

Рассмотрим функцию $F(x, y)$, описывающую изображение на входе линейной системы с импульсным откликом $H(x, y)$. Изображение на выходе $G(x, y)$ получается в результате свертки

$$G(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\eta, \xi) H(x - \eta, y - \xi) d\eta d\xi \quad (5)$$

Выполнив ДПФ обеих частей равенства (5), поменяв порядок интегрирования, получим:

$$\Gamma(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\eta, \xi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x - \eta, y - \xi) \cdot \exp\{-i(\omega_x x + \omega_y y)\} \right] d\eta d\xi. \quad (6)$$

Согласно теореме о сдвиге, внутренний интеграл равен произведению спектра функции $H(x, y)$ и экспоненциального множителя фазового сдвига. Поэтому запишем

$$\Gamma(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\eta, \xi) J(\omega_x, \omega_y) \cdot \exp\{-i(\omega_x \eta + \omega_y \xi)\} d\eta d\xi \quad (7)$$

Выполнив ПФ, получим:

$$\Gamma(\omega_x, \omega_y) = J(\omega_x, \omega_y) \cdot \Phi(\omega_x, \omega_y) \quad (8)$$

Обратное ПФ дает функцию, описывающую изображение на выходе:

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J(\omega_x, \omega_y) \cdot \Phi(\omega_x, \omega_y) \cdot \exp\{i(\omega_x x + \omega_y y)\} d\omega_x d\omega_y \quad (9)$$

Выражения (5) и (9) есть два способа определения выходного изображения линейной пространственно-инвариантной системы.

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Процессы идеальной дискретизации и восстановления непрерывных изображений

При разработке и анализе систем дискретизации и восстановления непрерывных изображений, обрабатываемые изображения обычно принято рассматривать как детерминированные поля.

Однако в некоторых случаях удобнее предполагать, что входной сигнал системы обработки изображений (особенно шумового происхождения) является реализацией двумерного случайного процесса.

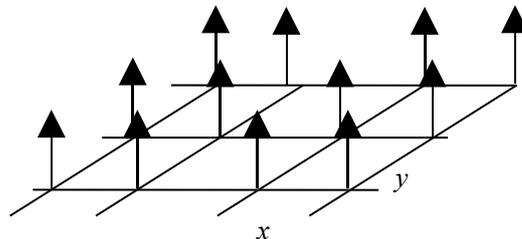
ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Пусть $F_I(x, y)$ функция описывает исходное непрерывное изображение бесконечных размеров. $F_I(x, y)$ – функция распределения яркости, оптической плотности или другого параметра реального изображения.

В идеальной системе дискретизации изображений пространственные отсчеты исходного изображения получаются путем перемножения функции $F_I(x, y)$ с пространственно-дискретизирующей функцией $S(x, y)$:

$$S(x, y) = \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} \delta(x - j_1 \Delta x, y - j_2 \Delta y), \quad (1)$$

где $S(x, y)$ состоит из бесконечного числа δ -функций, заданных в узлах решетки с шагом $(\Delta x, \Delta y)$.



Дискретизованное изображение $F_p(x, y)$ описывается соотношением

$$F_p(x, y) = F_I(x, y)S(x, y) = \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} F_I(j_1 \Delta x, j_2 \Delta y) \delta(x - j_1 \Delta x, y - j_2 \Delta y) \quad (2)$$

В соотношении (2) учитывается, что функцию $F_I(x, y)$ можно внести под знак суммирования и задать её значения только в точках отсчета $(j_1 \Delta x, j_2 \Delta y)$.

АНАЛИЗ ПРОЦЕССА ИДЕАЛЬНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Для анализа процесса дискретизации используется спектр $\Phi_p(\omega_x, \omega_y)$, получаемый как непрерывное двумерное Фурье преобразование дискретизированного изображения

$$\Phi_p(\omega_x, \omega_y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} F_p(x, y) \exp\{-i(\omega_x x + \omega_y y)\} \cdot \quad (3)$$

По теореме о свертке, спектр дискретизированного изображения можно представить в виде свертки спектра исходного изображения $\Phi_I(\omega_x, \omega_y)$ и спектра дискретизирующей функции $\Psi(\omega_x, \omega_y)$:

$$\hat{O}_\delta(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{4\pi^2} \Phi_I(\omega_x, \omega_y) * \Psi(\omega_x, \omega_y). \quad (4)$$

Двумерное преобразование Фурье дискретизирующей функции дает в результате бесконечный набор дельта-функций в плоскости пространственных частот с шагом $\omega_{xs} = \frac{2\pi}{\Delta x}$ $\omega_{ys} = \frac{2\pi}{\Delta y}$:

$$\Psi(\omega_x, \omega_y) = \frac{4\pi^2}{\Delta x \Delta y} \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_x - j_1 \omega_{xs}, \omega_y - j_2 \omega_{ys}). \quad (5)$$

Предполагаем, что спектр исходного изображения $\Phi_I(\omega_x, \omega_y)$ ограничен по ширине, т.е. при $\Phi_I(\omega_x, \omega_y) = 0$ при $|\omega_x| > \omega_{xc}$ и $|\omega_y| > \omega_{yc}$.

Вычисляем свертку:

$$\Phi_\delta(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_I(\omega_x - \eta, \omega_y - \xi) \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} \delta(\eta - j_1 \omega_{xs}, \xi - j_2 \omega_{ys}) d\eta d\xi$$

Меняя порядок операций и учитывая свойство δ -функций, получаем выражение для спектра дискретизированного изображения:

$$\Phi_\delta(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} \Phi_I(\omega_x - j_1 \omega_{xs}, \omega_y - j_2 \omega_{ys}). \quad (6)$$

Вывод из формулы (6)

Спектр дискретизированного изображения получается путем бесконечного повторения исходного изображения со сдвигом на величины, кратные $(\frac{2\pi}{\Delta x}, \frac{2\pi}{\Delta y})$.

СПЕКТР ДИСКРЕТИЗИРОВАННОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

Спектр дискретизированного изображения получается путем бесконечного повторения исходного изображения со сдвигом на величины, кратные $(\frac{2\pi}{\Delta x}, \frac{2\pi}{\Delta y})$.

Если Δx и Δy выбраны слишком большими по сравнению с шириной спектра $\Phi_I(\omega_x, \omega_y)$, то соседние спектры будут перекрываться друг с другом.

Из отсчетов функции $F_p(x, y)$ можно получить непрерывное изображение путем линейно-пространственной интерполяции или с помощью линейно-пространственной дискретизованного изображения.

Пусть $R(x, y)$ – импульсный отклик интерполирующего фильтра, а $\mathfrak{R}(\omega_x, \omega_y)$ – его частотная характеристика. Восстановленное изображение получается как свертка последовательности отсчетов с импульсным откликом восстанавливающего фильтра.

Таким образом, восстановленное непрерывное изображение описывается соотношением:

$$F_R(x, y) = F_p(x, y) * R(x, y) \quad (7)$$

Подставляя выражение для F_p , и вычисляя свертку получим:

$$F_R(x, y) = \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} F_I(j_1 \Delta x, j_2 \Delta y) R(x - j_1 \Delta x, y - j_2 \Delta y) \quad (8)$$

Видно, что импульсный отклик $R(x, y)$ выполняет роль двумерной функции, интерполирующей отсчеты на всю плоскость.

Пространственно-частотный спектр изображения, восстановленного согласно равенству (7), есть произведение частотной характеристики восстанавливающего фильтра со спектром дискретизированного изображения, т.е.:

$$\Phi_R(\omega_x, \omega_y) = \Phi_p(\omega_x, \omega_y) \mathfrak{R}(\omega_x, \omega_y) \quad (9)$$

или:

$$\hat{O}_R(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \mathfrak{R}(\omega_x, \omega_y) \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} \Phi_I(\omega_x - j_1 \omega_{xs}, \omega_y - j_2 \omega_{ys}) \quad (9^*)$$

Если спектры не перекрываются, а множитель $\mathfrak{R}(\omega_x, \omega_y)$ подавляет все сдвинутые спектры при $j_1, j_2 \neq 0$, то спектр восстановленного непрерывного изображения будет совпадать со спектром исходного изображения и поэтому изображения также будут одинаковыми.

Для изображения с ограниченной шириной спектра первое условие выполняются, если интервал дискретизации выбран так, что прямоугольная область, ограниченная верхними границами частот спектра изображения $(\omega_{xc}/2, \omega_{yc}/2)$ лежит внутри прямоугольной области, определяемой половинами частот дискретизации $(\omega_{xs}/2, \omega_{ys}/2)$. Следовательно, должны выполняться неравенства вида:

$$\omega_{xc} \leq \frac{\omega_{xs}}{2}, \tag{10}$$

$$\omega_{yc} \leq \frac{\omega_{ys}}{2}.$$

или

$$\Delta x \leq \frac{\pi}{\omega_{xc}}, \tag{10*}$$

$$\Delta y \leq \frac{\pi}{\omega_{yc}}.$$

Шаг дискретизации не должен превышать половины периода пространственной гармоники, соответствующей самым мелким деталям изображения. Это условие эквивалентно теореме о дискретизации одномерных сигналов.

Если соотношения (10) или (10*) выполняются со знаками «=», то изображение дискретизируется с найквистовской частотой (теорема Котельникова), если Δx и Δy меньше или больше, чем требуется по критерию Найквиста, то изображение дискретизируется с избыточной или недостаточной частотой.

В тех случаях, когда пространственная частота дискретизации изображения достаточна для устранения наложения спектров в дискретизованном изображении, исходное изображение можно абсолютно точно восстановить путем пространственной фильтрации отсчетов с помощью соответствующего фильтра.

Пример.

Фильтр-частотная характеристика приведена на рисунке и описывается выражениями:

$$\mathfrak{H}(\omega_x, \omega_y) = \begin{cases} K, & \text{если } |\omega_x| \leq \omega_{xL} \text{ и } |\omega_y| \leq \omega_{yL}; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

где K – масштабная постоянная, удовлетворяющая условию точного восстановления, если $\omega_{xL} > \omega_{xc}$, $\omega_{yL} > \omega_{yc}$. Функция рассеяния точки (импульсный отклик) данного восстанавливающего фильтра имеет вид

$$R(x, y) = \frac{K \omega_{xL} \omega_{yL}}{\pi^2} \frac{\sin(\omega_{xL} x)}{\omega_{xL} x} \frac{\sin(\omega_{yL} y)}{\omega_{yL} y}.$$

При использовании этого фильтра изображение восстанавливается с помощью бесконечной суммы функций вида $\sin(cx)$.

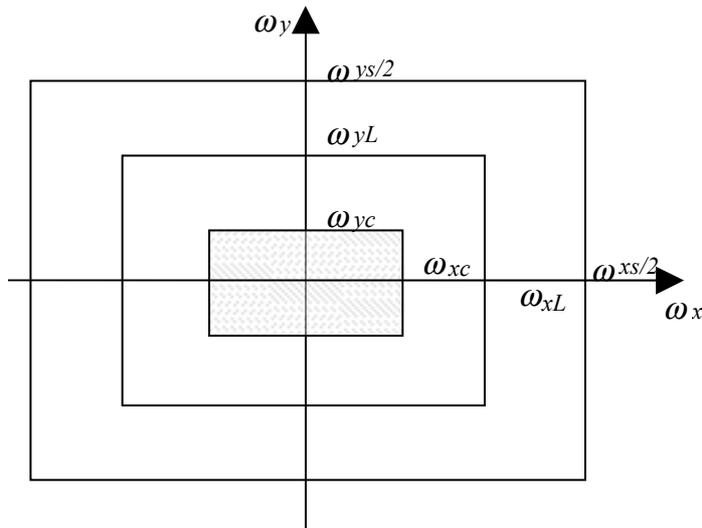
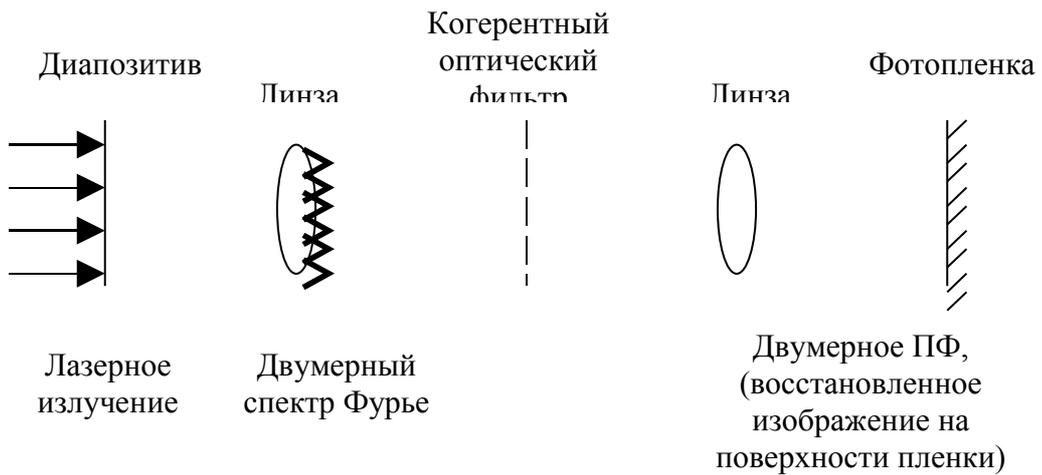


Рис.1. Прямоугольный фильтр.

Когерентная оптическая система восстановления



Устройство сравнительно просто в изготовлении восстанавливающего фильтра. Оптимальный фильтр – диафрагма, пропускающая только дифракционную картину нулевого порядка.

Интерполяционные функции (одномерные)

Функция	Определение	Ошибка восстановления и коэффициент потери резкости для разделимых двумерных интерполяционных функций	
		$\varepsilon_R, \%$	$\varepsilon_H, \%$
<i>sinc</i>	$R(x, y) = \frac{4}{T_x T_y} = \frac{\sin(2\pi x / T_x) \sin(2\pi y / T_y)}{(2\pi x / T_x) (2\pi y / T_y)}$ $T_x = 2\pi / \omega_{xs}, \quad T_y = 2\pi / \omega_{ys}$ $\mathfrak{R}(\omega_x, \omega_y) = \begin{cases} 1, & \omega_x \leq \omega_{xs}, \omega_y \leq \omega_{ys} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$	0.0	0.0
Прямоугол.	$R_0(x, y) = \begin{cases} 1/(T_x T_y), & x \leq 0.5T_x, y \leq 0.5T_y; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ $\mathfrak{R}(\omega_x, \omega_y) = \frac{\sin(\omega_x T_x / 2) \sin(\omega_y T_y / 2)}{(\omega_x T_x / 2) (\omega_y T_y / 2)}$	26,9	15,7
Треугольн.	$R_1(x, y) = R_0^2(x, y)$ $\mathfrak{R}_1(\omega_x, \omega_y) = \mathfrak{R}_0^2(\omega_x, \omega_y)$	44,0	3,7
Колоколообразная	$R_2(x, y) = R_0(x, y) * R_1(x, y)$ $\mathfrak{R}_2(\omega_x, \omega_y) = \mathfrak{R}_0^3(\omega_x, \omega_y)$	55,4	1,1
Кубическ. В-сплайн	$R_3(x, y) = R_0(x, y) * R_2(x, y)$ $\mathfrak{R}_3(\omega_x, \omega_y) = \mathfrak{R}_0^4(\omega_x, \omega_y)$	63,2	0,3
Гауссова а) $\sigma_{\omega} = 3T/8$ б) $\sigma_{\omega} = T/2$ в) $\sigma_{\omega} = 5T/8$	$R(x, y) = [2\pi\sigma_{\omega}^2]^{-1} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma_{\omega}^2}\right\}$ $\mathfrak{R}(\omega_x, \omega_y) = \exp\left\{-\frac{\sigma_{\omega}^2(\omega_x^2 + \omega_y^2)}{2}\right\}$	а) 38,6 б) 54,6 в) 66,7	10,3 2,0 0,3
		Потери резкости	Ошибка восстановления

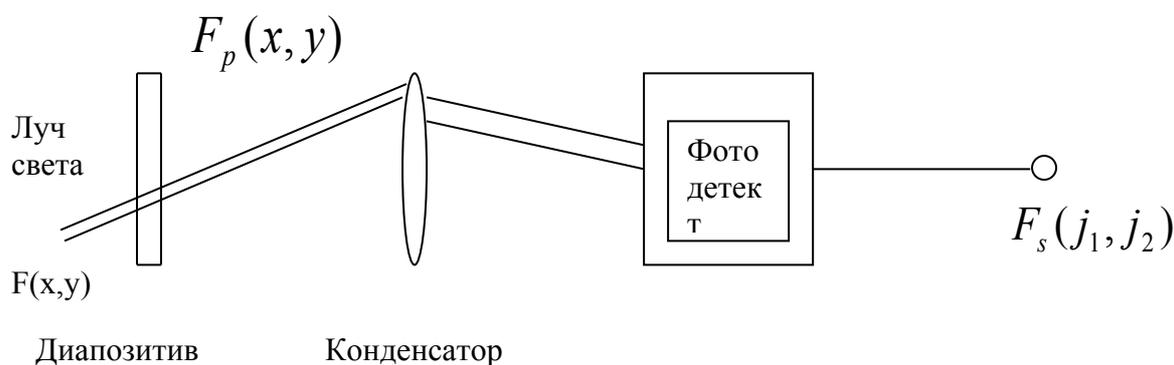
РЕАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

(тема для реферата)

ИДЕАЛЬНАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И ЕЕ ПОСЛЕДСТВИЯ

В реальной системе дискретизации изображений дискретизирующая решетка имеет конечные размеры, ширина дискретизирующих импульсов заметно отличается от нуля, а отсчеты изображения могут быть взяты с недостаточной частотой (или избыточной).

Реальная система



Эффекты, связанные с наложением спектров

1. Недостаточная частота дискретизации приводит к появлению в восстановленном изображении ложных низкочастотных гармоник. В оптике это явление называют муаровыми узорами или муар-эффектом.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Ранее были рассмотрены вопросы, связанные с математическим описанием непрерывных изображений. Рассмотрим два способа формального представления дискретных изображений с использованием как детерминированных, так и статистических моделей.

Действия с векторами и матрицами

Коротко рассмотрим встречающиеся в тексте математические действия, выполняемые с векторами и матрицами.

Вектор

Вектор-столбец f размера $N \times 1$ представляет собой совокупность элементов $f(n)$, где $n=1, 2, \dots, N$, расположенных в виде вертикального столбца

$$f = \begin{bmatrix} f(1) \\ f(2) \\ \dots \\ f(j) \\ \dots \\ f(N) \end{bmatrix}.$$

Вектор-строка h размера $1 \times N$ представляет собой упорядоченную совокупность элементов $h(n)$, где $n=1, 2, \dots, N$, расположенных в виде горизонтальной строки

$$h = [h(1) \quad h(2) \quad \dots \quad h(i) \quad \dots \quad h(N)].$$

Матрица

Матрица F размера $M \times N$ представляет собой совокупность элементов $F(m, n)$, где $m=1, 2, \dots, M$ и $n=1, 2, \dots, N$, расположенных в виде строк и столбцов двумерной таблицы

$$F = \begin{bmatrix} F(1, 1) & F(1, 2) & \dots & F(1, N) \\ F(2, 1) & F(2, 2) & \dots & F(2, N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F(M, 1) & F(M, 2) & \dots & F(M, N) \end{bmatrix}.$$

Символ 0 обозначает нулевую матрицу, все элементы которой равны нулю. Диагональная матрица — это квадратная матрица (когда $M = N$), все элементы которой, не лежащие на главной диагонали, равны нулю, т. е. $F(m, n) = 0$, если $m \neq n$. Единичная матрица, обозначаемая символом I , есть диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны единице. Индекс при символе единичной матрицы указывает ее размеры;

I_{MN} обозначает единичную матрицу размера $M \times N$. Матрица F может быть разделена на блоки (подматрицы) F_{PQ} :

$$F = \begin{bmatrix} F_{1,1} & F_{1,2} & \dots & F_{1,Q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{P,1} & F_{P,2} & \dots & F_{P,Q} \end{bmatrix}.$$

1. Сложение матриц

Сумма двух матриц $C=A + B$ определена только в том случае, когда обе матрицы имеют одинаковые размеры. Матрица C — сумма матриц A и B , имеет размеры $M \times N$, а ее элементы представляют собой суммы соответствующих элементов матриц $C(i, j)=A(i, j) + B(i, j)$.

2. Умножение матриц

Произведение двух матриц $C = AB$ определено только тогда, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . При умножении матрицы A размера $M \times P$ на матрицу B размера $P \times N$ получается матрица C размера $M \times N$, элементы которой определяются равенством

$$C(m, n) = \sum_{i=1}^P A(m, i)B(i, n).$$

При умножении матрицы A размера $M \times N$ на скаляр k получается матрица C размера $M \times N$, элементы которой $C(i, j) = k A(i, j)$.

3. Обратные матрицы

Если A - квадратная матрица, то матрица, обратная к A и обозначаемая как A^{-1} , обладает следующими свойствами: $AA^{-1} = I$ и $A^{-1}A = I$. Если матрица A^{-1} существует то матрица A называется неособенной (невырожденной). В противном случае она называется особенной (вырожденной). Если у некоторой матрицы есть обратная, то эта обратная матрица единственна.

Матрица, обратная относительно обратной, совпадает с исходной матрицей, т. е. $(A^{-1})^{-1} = A$.

Если матрицы A и B неособенные, то $[AB]^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Если матрица A неособенная, а скаляр $k \neq 0$, то $[kA]^{-1} = (1/k)A^{-1}$.

Матрицу, обратную относительно блочной квадратной матрицы

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix},$$

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} [F_{11} - F_{12}F_{22}^{-1}F_{21}]^{-1} & -F_{11}^{-1}F_{12} [F_{22} - F_{21}F_{11}^{-1}F_{12}]^{-1} \\ -F_{22}^{-1}F_{21} [F_{11} - F_{12}F_{22}^{-1}F_{21}]^{-1} & [F_{22} - F_{21}F_{11}^{-1}F_{12}]^{-1} \end{bmatrix}$$

при условии, что матрицы F_{11} и F_{22} не являются особенными.

4. Транспонирование матриц

При транспонировании матрицы A размера $M \times N$ образуется матрица размера $N \times M$, которую обозначают через A^T . Строки матрицы A^T совпадают со столбцами, а столбцы - со строками матрицы A . Для любой матрицы A выполняется $[A^T]^T = A$.

Если $A=A^T$, то матрицу A называют симметричной. Для любых матриц A и B выполняется $[AB]^T = B^T A^T$.

Если матрица A неособенная, то матрица A^T также неособенная и $[A^T]^{-1} = [A^{-1}]^T$.

5. Прямое произведение матриц

Левое прямое произведение матрицы A размера $P \times Q$ на матрицу B размера $M \times N$ представляет собой матрицу размера $PM \times QN$:

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix} B(1, 1)A & B(1, 2)A & \dots & B(1, N)A \\ B(2, 1)A & B(2, 2)A & \dots & B(2, N)A \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B(M, 1)A & B(M, 2)A & \dots & B(M, N)A \end{bmatrix}.$$

Аналогично можно определить правое прямое произведение. Прямые произведения $B \otimes A$ и $A \otimes B$ могут различаться между собой.

Свойства операций умножения, сложения, транспонирования и обращения прямого произведения матриц:

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(C \otimes D) &= (AC) \otimes (BD), \\ (A + B) \otimes C &= A \otimes C + B \otimes C, \\ [A \otimes B]^T &= A^T \otimes B^T, \\ [A \otimes B]^{-1} &= A^{-1} \otimes B^{-1}. \end{aligned}$$

6. След матрицы

След квадратной матрицы F размера $N \times N$ равен сумме ее диагональных элементов и обозначается как

$$tr[F] = \sum_{n=1}^N F(n, n).$$

Если A и B - квадратные матрицы, то

$$tr[AB] = tr[BA].$$

След прямого произведения двух матриц равен

$$tr(A \otimes B) = tr(A)tr(B).$$

7. Норма вектора

Евклидовой нормой вектора f размера $N \times 1$ называется скаляр определяемый как $\|f\| = f^T f$.

8. Норма матрицы

Евклидовой нормой матрицы F размера $M \times N$ называется скаляр, определяемый следующим образом: $\|F\| = \text{tr}[F^T F]$.

9. Ранг матрицы

Матрица A размера $M \times N$ имеет ранг R , если наибольший из всех ее квадратных неособенных блоков имеет размер $R \times R$. Понятие о ранге используется при обращении матриц.

Если матрицы A и B неособенные, а C – произвольная матрица, то $\text{ранг}[C] = \text{ранг}[AC] = \text{ранг}[CB] = \text{ранг}[ACB]$.

Ранг произведения матриц A и B удовлетворяет неравенствам: $\text{ранг}[AB] \leq \text{ранг}[A]$, $\text{ранг}[AB] \leq \text{ранг}[B]$.

Ранг суммы матриц A и B удовлетворяет неравенству: $\text{ранг}[A + B] \leq \text{ранг}[A] + \text{ранг}[B]$.

10. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов f и g размера $N \times 1$ является скаляр

$$k = g^T f = f^T g, \text{ или } k = \sum_{n=1}^N g(n)f(n).$$

11. Матричное произведение векторов

Матричным произведением вектора g размера $M \times 1$ на вектор f размера $N \times 1$ является матрица $A = gf^T$, (5.1.30)

где $A(m, n) = g(m)f(n)$.

12. Квадратичная форма

Квадратичной формой вектора f размера $N \times 1$ является скаляр $k = f^T A f$, где A – матрица размера $N \times N$. Часто матрицу A берут симметричной.

13. Векторная производная

Производная от скалярного произведения $a^T x$ по x есть $\partial[a^T x]/\partial x = a$, производная от скалярного произведения $x^T a$ по вектору x равна $\partial[x^T a]/\partial x = a$.

Производная от квадратичной формы $x^T A x$ по x есть $\partial[x^T A x]/\partial x = 2Ax$, где A – симметричная матрица.

ВЕКТОРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Раньше яркость, координата цвета или какой-то другой подходящий параметр, описывающий изображение, представлялись непрерывной функцией $F(x, y, t)$. С помощью методов дискретизации изображений, рассмотренных в л. №__, непрерывное" изображение, зафиксированное в некоторый момент времени, можно представить в виде массива отсчетов $F(j_1, j_2)$ в некоторой прямоугольной области $-J_i \leq j_i \leq J_i$. Часто этот массив полезно рассматривать как матрицу с элементами: $F = [F(n_1, n_2)]$, где $1 \leq n_i \leq N_i$, а индексы отсчетов перенумерованы так, как это принято в теории матриц.

Для облегчения анализа удобно перейти от матричного представления изображения к векторному, собирая элементы столбцов (или строк) матрицы F в один длинный вектор f . Формально эту операцию можно представить с помощью вспомогательного вектора v_n размера $N_2 \times 1$ и матрицы N_n размера $N_1 N_2 \times N_1$ определяемых следующим образом:

$$v_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \\ n+1 \\ \vdots \\ N_2 \end{matrix}, \quad N_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \\ n+1 \\ \vdots \\ N_2 \end{matrix}$$

В этом случае матрица F будет представлена в векторной форме с помощью операции упорядочения $f = \sum_{n=1}^{N_2} N_n v_n$. (1)

Вектор v_n выделяет n -й столбец матрицы F , а матрица N_n помещает этот столбец на место, отведенное для n -го отрезка вектора f . Таким образом, вектор f содержит все элементы матрицы F , последовательно считанные по столбцам.

Обратная операция преобразования вектора f в матрицу F описывается соотношением $F = \sum_{n=1}^{N_2} N_n^T f v_n^T$. (2)

С помощью формул (1) и (2) легко установить связь между матричным и векторным представлениями двумерного массива.

Достоинствами представления изображения в векторной форме являются большая компактность обозначений и возможность непосредственного использования методов, разработанных для обработки одномерных сигналов. Следует отметить, что выражения (1) и (2) не только описывают лексикографическую связь между матрицей и вектором, но и определяют некоторые операторы, которыми можно пользоваться при математическом анализе.

Контрольное задание:

Для массива $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, применив операцию упорядочения (1)

получить вектор столбец f , используя вспомогательные вектор v_n и матрицы N_n .

**СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ.
МОДЕЛИ ПЛОТНОСТЕЙ ВЕРОЯТНОСТИ ДИСКРЕТНЫХ
ИЗОБРАЖЕНИЙ. ГАУССОВА ПЛОТНОСТЬ**

Статистические методы описания непрерывных изображений, можно непосредственно применить и для описания дискретных изображений. В данной лекции получены выражения для моментов дискретных изображений и модели совместных плотностей вероятностей.

Среднее значение матрицы, описывающей дискретное изображение, представляет собой матрицу $E\{F\} = E\{F(n_1, n_2)\}$ (1)

Если эта матрица разверткой по столбцам преобразована в вектор, то среднее значение этого вектора есть $\eta_f = E\{f\} = \sum_{n=1}^{N_2} N_n E\{F\} v_n$ (2)

Корреляция двух элементов изображения с координатами (n_1, n_2) и (n_3, n_4) $R(n_1, n_2; n_3, n_4) = E\{F(n_1, n_2) F^*(n_3, n_4)\}$. (3)

Ковариация двух элементов изображения есть $K(n_1, n_2; n_3, n_4) = E\{[F(n_1, n_2) - E\{F(n_1, n_2)\}] \times [F^*(n_3, n_4) - E\{F^*(n_3, n_4)\}]\}$. (4)

Дисперсия элемента изображения равна $\sigma^2(n_1, n_2) = K(n_1, n_2; n_1, n_2)$. (5)

Если матрица изображения преобразована в вектор f , то корреляционную матрицу этого вектора можно выразить через корреляции элементов матрицы F :

$$R_f = E\{ff^*T\} = E\{[\sum_{m=1}^{N_2} N_m F v_m][\sum_{n=1}^{N_2} v_n^T F^* T N_n^T]\} \text{ или}$$

$$R_f = \sum_{m=1}^{N_2} \sum_{n=1}^{N_2} N_m E\{F v_m v_n^T F^* T\} N_n^T. \quad (6)$$

Выражение $E\{F v_m v_n^T F^* T\} = R_{m,n}$ (7) представляет собой корреляционную матрицу m -го и n -го столбцов матрицы F и имеет размеры $N_1 \times N_1$. Следовательно, R_f можно представить в виде блочной матрицы

$$R_f = \begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & \dots & R_{1,N_2} \\ R_{2,1} & R_{2,2} & \dots & R_{2,N_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{N_2,1} & R_{N_2,2} & \dots & R_{N_2,N_2} \end{bmatrix}.$$

Ковариационную матрицу вектора f можно получить на основе его корреляционной матрицы и вектора средних значений: $K_f = R_f - \eta_f \eta_f^*T$.

Матрица дисперсий V_F массива чисел $F(n_1, n_2)$ по определению является матрицей, элементы которой равны дисперсиям соответствующих элементов массива. Элементы матрицы V_F можно непосредственно выделить из блоков матрицы K_f : $V_F(n_1, n_2) = K_{n_2 n_2}(n_1, n_1)$.

МОДЕЛИ ПЛОТНОСТЕЙ ВЕРОЯТНОСТИ ДИСКРЕТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Дискретное изображение, представленное массивом $F(n_1, n_2)$ можно полностью описать с помощью совместной плотности вероятности его элементов.

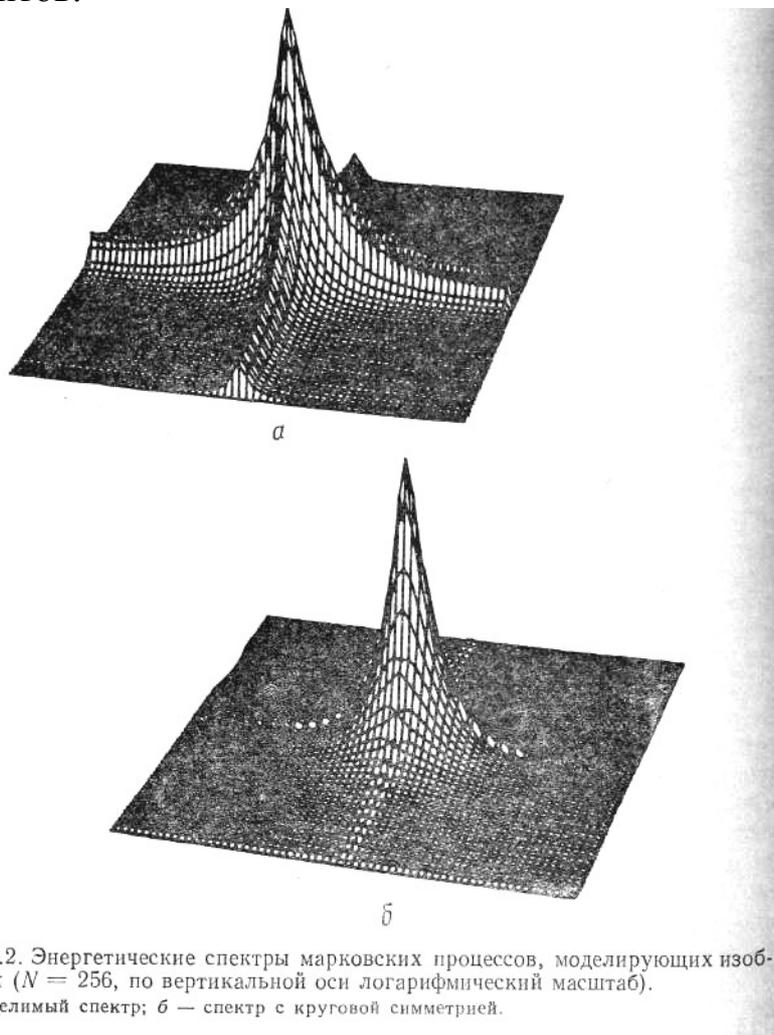


Рис. 5.4.2. Энергетические спектры марковских процессов, моделирующих изображения ($N = 256$, по вертикальной оси логарифмический масштаб).
а — разделимый спектр; б — спектр с круговой симметрией.

Рис. 1

При задании $F(n_1, n_2)$ в матричной форме эта плотность записывается как $p(F) = p \{ F(1, 1), F(2, 1), \dots, F(N_1, N_2) \}$, (8)

в векторной форме — как $p(\mathbf{f}) = p \{ f(1), f(2), \dots, f(Q) \}$, (9)

где $Q = N_1 \times N_2$ определяет порядок совместной плотности.

Если все элементы изображения статистически независимы, то совместная плотность вероятности равна произведению одномерных безусловных плотностей

$$p(\mathbf{f}) = P \{ f(1) | P \{ f(2) \} \dots p \{ f(Q) \} \} \quad (10)$$

Наиболее распространенным видом совместной плотности вероятности является *гауссова плотность*

$$p(\mathbf{f}) = (2\pi)^{-Q/2} |K_f|^{-1/2} \exp \{ -1/2 (\mathbf{f} - \eta_f)^T K_f^{-1} (\mathbf{f} - \eta_f) \}, \quad (11)$$

где K_f — ковариационная матрица вектора \mathbf{f} , η_f — среднее значение \mathbf{f} , а символом $|K_f|$ обозначен определитель матрицы K_f . Гауссова плотность является полезной моделью совместной плотности вероятности

коэффициентов, полученных в результате унитарных преобразований изображений. Однако гауссова плотность не подходит для описания яркости элементов изображения, поскольку яркость может быть только положительной, а гауссовы случайные величины принимают как положительные, так и отрицательные значения.

В литературе редко встречаются выражения для совместных плотностей, не являющихся гауссовыми. Хунс разработал методику формирования подобных плотностей высокого порядка на основе заданной безусловной плотности первого порядка и заданной ковариационной матрицы элементов ансамбля. Для плотности с нулевым средним эта процедура сводится к линейному преобразованию набора независимых случайных величин g , совместную плотность вероятности которых можно записать в виде произведения заданных плотностей первого порядка.

Тогда искомая совместная плотность вероятности имеет вид

$$P_f = |A| p_f(A), \quad (12)$$

$$\text{где } A = EA^{-1/2}E^T, \quad (13)$$

$|A|$ определитель матрицы A . Столбцы матрицы E являются собственными векторами заданной ковариационной Матрицы K_f , матрица A – диагональная и состоит из собственных значений этой матрицы, причем выполняется соотношение $E^T K_f E = A$. (14)

Многомерная модель с распределением Рэлея полезна при рассмотрении совместной плотности вероятности яркостей элементов изображения, а модель с распределением Лапласа применяется для статистического описания последовательности разностных сигналов, образующихся в системах кодирования изображений методом предсказания.

На рис.2. приведены двумерные плотности вероятности пары коррелированных случайных величин, безусловные распределения которых являются распределениями Рэлея или Лапласа.

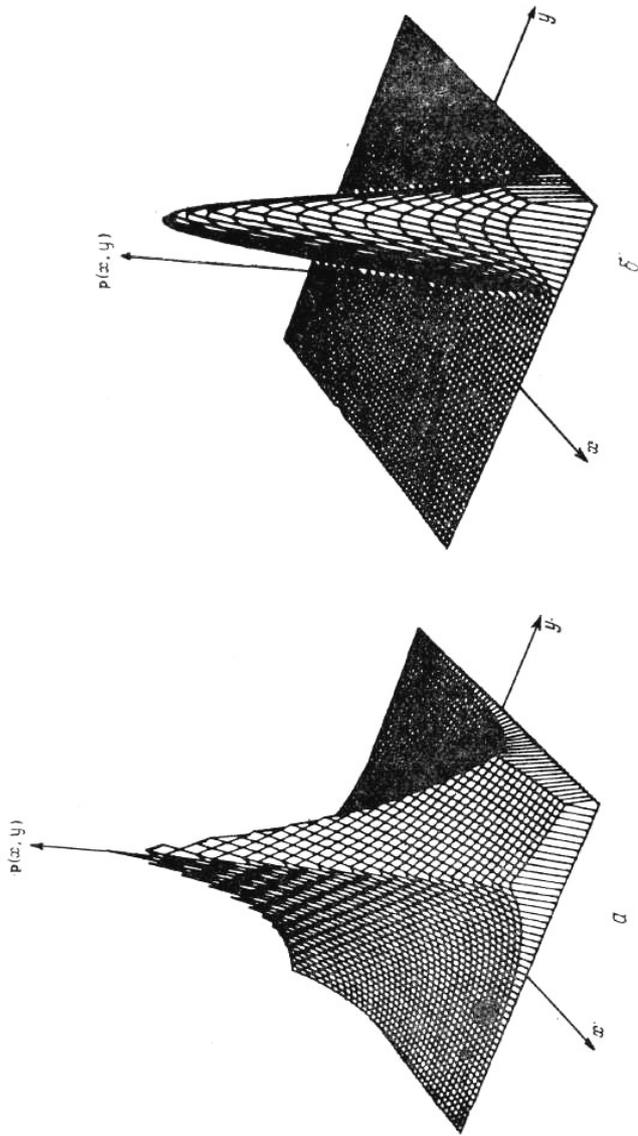


Рис. 5.5.1. Двумерные плотности вероятности пары коррелированных случайных величин ($\rho = 0,8$).
 а — плотность распределения вероятностей Лапласа; б — плотность распределения вероятностей Рэлея.

Рис. 2. Двумерные плотности вероятности

ГИСТОГРАММЫ

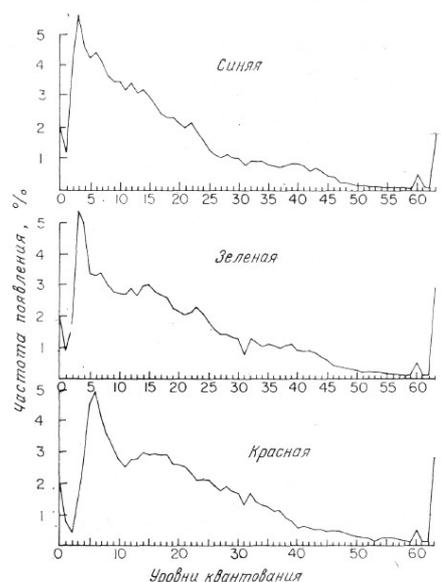


Рис. 3. Типичные гистограммы красной, зеленой и синей координат цвета цветного изображения.

В большинстве естественных изображений темных элементов гораздо больше, чем светлых, и частоты с ростом яркости убывают примерно по экспоненте.

Оценку двумерного распределения вероятностей для эргодического источника изображений можно найти с помощью распределения частот второго порядка, которые получают, подсчитывая случаи совместного появления определенных пар значений элементов, разделенных заданным расстоянием. Допустим, что $F(n_1, n_2)$ и $F(n_3, n_4)$ есть два элемента изображения, разделенные отрезком длиной r , который наклонен.

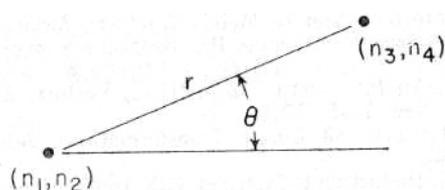


Рис. 5.5.3. Взаимное расположение пары элементов изображения.

КВАНТОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ: КВАНТОВАНИЕ СКАЛЯРНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ВЕКТОРНОЙ ВЕЛИЧИНЫ.

Оптимальное положение уровня квантования и пороговых уровней, выражение Пантера-Дайтта.

Любая аналоговая величина, подлежащая обработке в ЦВМ или цифровой системе, должна быть представлена в виде целого числа, пропорционального значению этой величины.

Процесс преобразования отсчетов, имеющих непрерывное множество значений, в отсчеты с дискретными значениями, называется **квантованием**.

Объясним принцип квантования на примере квантования *скалярной величины*.

В процессе квантования значение отсчета аналогового сигнала сравнивается с набором пороговых уровней. Если отсчет попадает в интервал между двумя соседними пороговыми уровнями, то ему приписывается значение фиксированного уровня квантования, соответствующего данному интервалу. В цифровой системе каждому квантованному отсчету ставится в соответствие двоичная кодовая комбинация. **Равномерный код** – код, имеющий постоянную длину кодовых комбинаций.

Пример

Пусть f – случайная величина, с плотностью вероятности $p(f)$. Кроме того, предполагается, что f не выходит за пределы некоторого интервала: $a_L \leq f \leq a_U$.

При решении задачи о квантовании необходимо выбрать такой набор пороговых уровней d_j и уровней квантования r_j , что если $d_j \leq f \leq d_{j+1}$, то исходный отсчет заменяется на число, равное уровню квантования r_j . На рис.1 приведен пример размещения пороговых уровней и уровней квантования на отрезке числовой оси, содержащем J пороговых уровней.

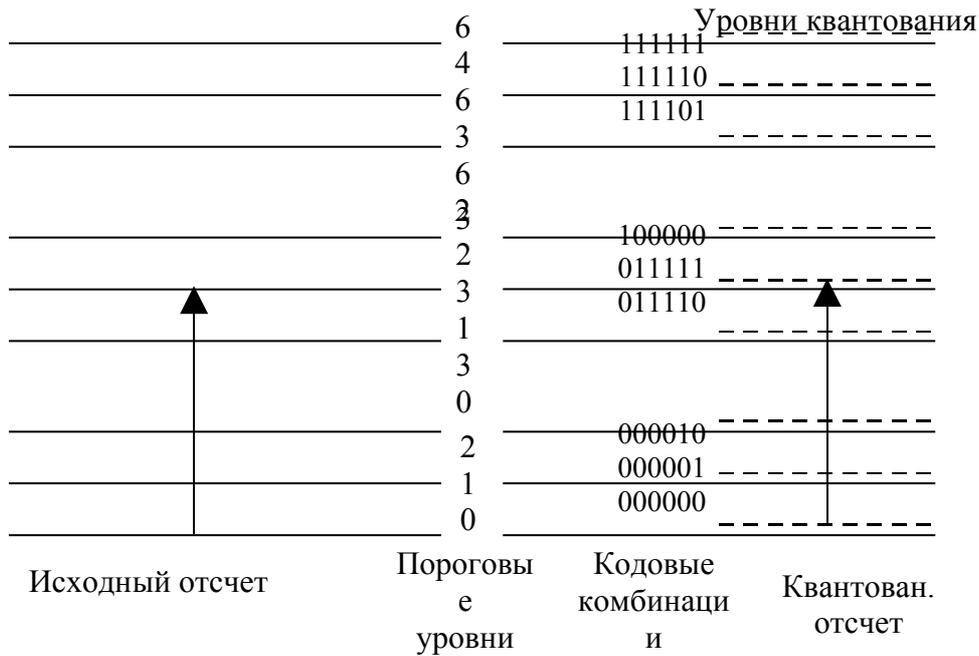
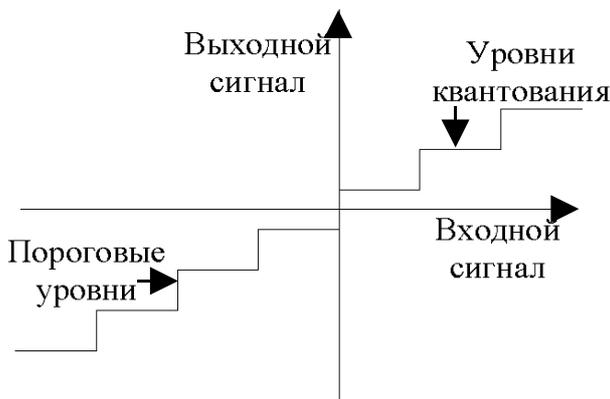


Рис. 1. Другой распространенной формой представления характеристики квантования является ступенчатая кривая.



Уровни квантования и пороговые уровни выбирают так, чтобы уменьшить до минимума некоторую заданную величину, характеризующую ошибку квантования, т.е. степень различия между f и \hat{f} (f и \hat{f} – значения отсчета действительного скалярного сигнала до и после квантования).

В качестве меры ошибки квантования обычно выбирают среднеквадратическую ошибку. Если J – число уровней квантования, то среднеквадратическая ошибка квантования равна:

$$\varepsilon = E \{(f - \hat{f})^2\} = \int_{a_L}^{a_U} (f - \hat{f})^2 p(f) df = \sum_{j=0}^{J-1} \int_{d_j}^{d_{j+1}} (f - \hat{f})^2 p(f) df \quad (1)$$

Если J велико, то плотность вероятности значений квантуемого сигнала на каждом из интервалов (d_j, d_{j+1}) можно считать постоянной и равной $p(r_j)$.

$$\varepsilon = \sum_{j=0}^{J-1} p(r_j) \int_{d_j}^{d_{j+1}} (f - r_j)^2 dj \quad (2)$$

или

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{J-1} p(r_j) [(d_{j+1} - r_j)^3 - (d_j - r_j)^3] \quad (2^*)$$

Оптимальное положение уровня квантования r_j в (d_j, d_{j+1}) можно найти, решая задачу о минимуме ошибки ε как функции r_j .

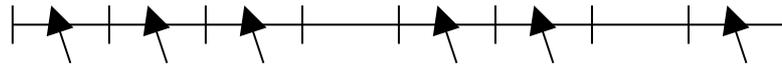
$$\frac{d\varepsilon}{dr_j} = 0$$

$$r_j = \frac{d_j + d_{j+1}}{2} \quad (3)$$

d_j – пороговые уровни, r_j – уровни квантования.

Таким образом, при сделанных допущениях оптимальным положением уровня квантования является середина интервала между соседними пороговыми уровнями.

Пороговые уровни: $d_0 \quad d_1 \quad d_2 \quad d_3 \dots d_{j-1} \quad d_j \quad d_{j+1} \dots d_{J-1} \quad d_J$



Уровни квантования: $a_L \quad \Gamma_0 \quad \Gamma_1 \quad \Gamma_2 \quad \Gamma_{j-1} \quad \Gamma_j \quad \Gamma_{j-1} \quad a_U$

Подставим в (2*) и получим:

$$\varepsilon = \frac{1}{12} \sum_{j=0}^{J-1} p(r_j) (d_{j+1} - d_j)^3 \quad (4)$$

Оптимальное положение пороговых уровней можно определить, находя минимум ошибки ε методом множителей Лагранжа.

Пантер и Дайт показали, что положения пороговых уровней довольно

точно определяются по формуле: $d_j = \frac{(a_U - a_L) \int_{a_L}^{a_j} p(f)^{-\frac{1}{3}} df}{\int_{a_L}^{a_U} p(f)^{-\frac{1}{3}} df} + a_L$,

где $a_j = \frac{j(a_U - a_L)}{J} + a_L$, $j=0, 1, \dots, J$.

Если плотность вероятности значений отсчетов равномерна, то пороговые уровни будут расставлены равномерно.

При неравномерных плотностях пороговые уровни чаще, где плотность вероятности велика, и реже там, где она мала.

Если число уровней квантования невелико, то приближение, с помощью которого получено равенство (2), становится неоправданным и следует использовать точное выражение для ошибки (1).

Дифференцируя его по переменным d_j и r_j и приравнявая производные к нулю, получаем:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial d_j} = (d_j - r_j)^2 \phi(d_j) - (d_j - r_{j-1})^2 p(d_j) = 0 \quad (a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial r_j} = 2 \int_{d_j}^{d_{j+1}} (f - r_j) p(f) df = 0 \quad (б)$$

После преобразований приходим к системе:

$$\begin{aligned} r_j &= 2d_j - r_{j-1} \\ r_j &= \frac{\int_{d_j}^{d_{j+1}} f_p(f) df}{\int_{d_j}^{d_{j+1}} p(f) df} \end{aligned} \quad (5)$$

Решая эти уравнения рекуррентным способом, можно для заданной плотности вероятности $p(f)$ найти оптимальные значения пороговых уровней и уровней квантования.

Макс решил такую задачу для Гауссовой плотности и составил таблицы оптимального размещения пороговых уровней в зависимости от числа уровней квантования.

**Расположение уровней квантования и пороговых уровней
в квантователе Макса**

Число разрядов	<i>Равномерное</i>		<i>Гаусса</i>		<i>Лапласа</i>		<i>Рэлея</i>	
	d_i	r_i	d_i	r_i	d_i	r_i	d_i	r_i
1	1,0000	-0,5000	$-\infty$	-0,7979	$-\infty$	-0,7071	0,0000	1,2657
	0,0000	0,5000	0,0000	0,7979	0,0000	0,7071	2,0985	2,9313
	1,0000		∞		∞		∞	
2	1,0000	-0,7500	$-\infty$	-1,5104	$-\infty$	-1,8340	0,0000	0,8079
	0,5000	-0,2500	-0,9816	-0,4528	-1,1269	-0,4198	1,2545	1,7010
	-0,0000	0,2500	0,0000	0,4528	0,0000	0,4198	2,1667	2,6325
	0,5000	0,7500	0,9816	1,5104	1,1269	1,8340	3,2465	3,8604
	1,0000		∞		∞		∞	
3	-1,0000	-0,8750	$-\infty$	-2,1519	$-\infty$	-3,0867	0,0000	0,5016
	-0,7500	-0,6250	-1,7479	-1,3439	-2,3796	-1,6725	0,7619	1,0222
	-0,5000	-0,3750	-1,0500	-0,7560	-1,2527	-0,8330	1,2594	1,4966
	-0,2500	-0,1250	-0,5005	-0,2451	-0,5332	-0,2334	1,7327	1,9688
	0,0000	0,1250	0,0000	0,2451	0,0000	0,2334	2,2182	2,4675
	0,2500	0,3750	0,5005	0,7560	0,5332	0,8330	2,7476	3,0277
	0,5000	0,6250	1,0500	1,3439	1,2527	1,6725	3,3707	3,7137
	0,7500	0,8750	1,7479	2,1519	2,3796	3,0867	4,2124	4,7111
	1,0000		∞		∞		∞	
4	-1,0000	-0,9375	$-\infty$	-2,7326	$-\infty$	-4,4311	0,0000	0,3057
	-0,8750	-0,8125	-2,4008	-2,0690	-3,7240	-3,0169	0,4606	0,6156
	-0,7500	-0,6875	-1,8435	-1,6180	-2,5971	-2,1773	0,7509	0,8863
	-0,6250	-0,5625	-1,4371	-1,2562	-1,8776	-1,5778	1,0130	1,1397
	-0,5000	-0,4375	-1,0993	-0,9423	-1,3444	-1,1110	1,2624	1,3850
	-0,3750	-0,3125	-0,7995	-0,6568	-0,9198	-0,7287	1,5064	1,6277
	-0,2500	-0,1875	-0,5224	-0,3880	-0,5667	-0,4048	1,7499	1,8721
	-0,1250	-0,0625	-0,2582	-0,1284	-0,2664	-0,1240	1,9970	2,1220
	0,0000	0,0625	0,0000	0,1284	0,0000	0,1240	2,2517	2,3814
	0,1250	0,1875	0,2582	0,3880	0,2644	0,4048	2,5182	2,6550
	0,2500	0,3125	0,5224	0,6568	0,5667	0,7287	2,8021	2,9492
	0,3750	0,4375	0,7995	0,9423	0,9198	1,1110	3,1110	3,2729
	0,5000	0,5625	1,0993	1,2562	1,3444	1,5778	3,4566	3,6403
	0,6250	0,6875	1,4371	1,6180	1,8776	2,1773	3,8588	4,0772
	0,7500	0,8125	1,8435	2,0690	2,5971	3,0169	4,3579	4,6385
	0,8750	0,9375	2,4008	2,7326	3,7240	4,4311	5,0649	5,4913
	1,0000		∞		∞		∞	

КВАНТОВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ ВЕЛИЧИН

Обычно квантование совокупности отсчетов выполняется последовательно. Каждый отсчет рассматривается как скалярная величина и квантуется независимо от остальных отсчетов с помощью уже описанных методов. Часто удается уменьшить ошибку квантования, если все отсчеты квантовать вместе.

Пусть сигнал f представляет собой вектор f размерности N . Будем считать, что вектор является реализацией случайного вектора с N -мерной плотностью вероятности: $p(f) = p\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$.

При квантовании вектора f N -мерное векторное пространство разделяется на J ячеек квантования D_j , каждой из которых соответствует один из J квантованных векторов. Векторный сигнал f заменяется на квантованный вектор r_j , если f попадает в ячейку D_j . В подобной общей постановке задачи о векторном квантовании векторный сигнал f преобразуется в вектор r_j , но компоненты вектора f при этом не обязательно будут квантоваться по отдельности по набору дискретных пороговых уровней рис.2.

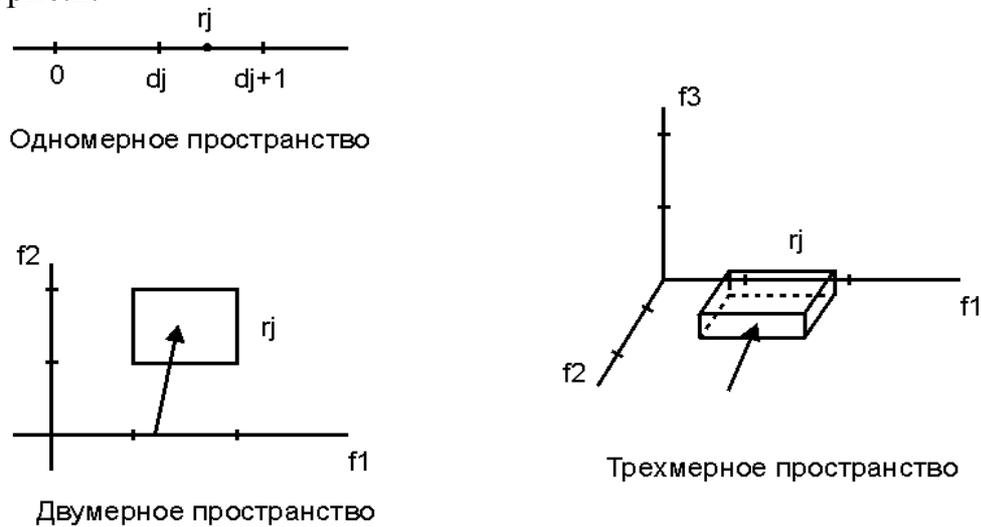


Рис.2. Ячейки квантования в векторном пространстве.

Среднеквадратическую ошибку векторного квантования можно представить в виде суммы:

$$\varepsilon' = \sum_{j=0}^{J-1} \int_{D_j} t_r [(f r_j)(f - r_j)^T] p(f) df, \quad (6)$$

t_r – Евклидова норма матрицы.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial r_j} = 0 = \int_{D_j} (f - r_j) p(f) df \quad (7)$$

оптимальное положение квантованных векторов r_j при фиксированных границах.

$$r_j = \frac{\int_{D_j} f p(f) df}{\int_{D_j} p(f) df} \quad (8)$$

условное математическое ожидание вектора f , когда он попадает в ячейку D_j .

$$r_j = E\{f \mid f \in D_j\} \quad (8^*)$$

В этом случае минимальная среднеквадратическая ошибка квантования равна:

$$\varepsilon_{\text{и\ddot{e}и}} = t_r [R_f - \sum_{j=0}^{J-1} r_j r_j^T P\{f \in D_j\}] \quad (9)$$

R_f – корреляционная матрица вектора f .

Оптимальные положения квантованных векторов r_j при фиксированных ячейках квантования D_j невозможно определить, не зная совместной плотности вероятности $p(f)$. Часто такая информация отсутствует. Еще одна существенная трудность связана с вычислением интегралов в формуле (8). Поэтому часто приходится упрощать процедуру векторного квантования.

- Если компоненты вектора f некоррелированы, то вектор квантования сводится к последовательному квантованию скалярных величин.
- Если отсчеты коррелированы, то задача определения оптимального вектора r_j не поддается решению без введения дополнительных упрощающих предположений.

Кэри получил решения применительно к совместным Гауссовым плотностям, когда ячейки квантования D_j достаточно малы. Хунс исследовал рекуррентный метод решения такой задачи, когда каждая компонента вектора определяется с помощью последовательных приближений на основе остальных квантованных компонент вектора.

Найдем набор ячеек квантования D_j , при котором минимизируется среднеквадратическая ошибка квантования.

Брюс разработал метод решения этой задачи на основе динамического программирования.

Большинство методов векторного квантования используют субоптимальный подход, когда для каждой компоненты вектора задается фиксированное число уровней квантования $I(i)$, где $i = 1, 2, \dots, N$, и все компоненты квантуются независимо. Задача оптимизации сводится в этом случае к выбору величин $I(i)$, произведение которых $\prod_{i=1}^N I(i) = I$ есть фиксированное число уровней квантования для данного вектора.

Ошибка квантования i – го сжатия равна

$$\varepsilon(i) = E\{f^2(i)\} - \sum_{j=0}^{I(i)-1} r_j^2(i) P\{d_j(i) \leq f(i) < d_{j+1}(i)\}. \quad (10)$$

В системах с цифровым кодированием число уровней квантования обычно выбирают равным двоичному числу $I(i) = 2^{b(i)}$, где $b(i)$ – целое число кодовых разрядов (бит) для i -ой компоненты вектора. Общее число кодовых разрядов должно быть постоянно и $B = \sum_{i=1}^N b(i)$. Такой способ квантования называется *блочным*.

Несколько специалистов разработали алгоритмы распределения числа разрядов $b(i)$ при фиксированном B , позволяющем минимизировать среднеквадратическую ошибку квантования.

Алгоритм Реди и Уинца

(для квантования независимых гауссовых величин по методу Макса)

1. Вычислить распределение числа разрядов по формуле $b(i) = (B/N) + 2 \lg[r^2(i)] - (2/N) \sum_{j=1}^N \lg[\sigma^2(j)]$, где $\sigma^2(i)$ - дисперсия i -го отчета.

2. Округлить $b(i)$ до ближайшего целого.

3. Изменить полученное распределение, пока не будет выполнено условие $B = \sum_{i=1}^N b(i)$.

Более надежные результаты можно получить, используя метод минимальной ошибки Прэтта.

ОБРАБОТКА КВАНТОВАННЫХ ВЕЛИЧИН

Числа, описывающие изображения (например, представляющие яркость или координаты цвета), обычно вводятся в цифровую вычислительную машину в виде целочисленных кодовых комбинаций, соответствующих уровням квантования отсчетов. Так, яркость одноцветного изображения обычно измеряют с помощью линейной целочисленной шкалы, ограниченной числами 0 (уровень черного) и 255 (уровень белого). Эти целочисленные кодовые комбинации, однако, не следует рассматривать как арифметические величины. Перед обработкой в машине кодовые комбинации следует преобразовать в действительные десятичные числа, соответствующие уровням квантования. Если этого не сделать, то можно получить совершенно неверные результаты. Так, если кодовые комбинации – номера уровней – изменяются вдоль шкалы яркостей немонотонно, то их вообще нельзя использовать для обработки. Рассмотрим теперь, что произойдет, если эти комбинации изменяются монотонно и обрабатываются в ЦВМ без преобразования в десятичные числа – значения уровней квантования.

Существуют две основные формы представления чисел в цифровых вычислительных машинах: как целое число и как действительное число. Целые числа изменяются от 0 до некоторого максимального значения. Так, в 16-разрядной мини-ЭВМ наибольшее положительное целое число равно 32 768 (2^{15}). Если результат арифметической операции определен как целое число, а в результате получается дробное число, то дробная часть просто отбрасывается. Отношение $8/3$, например, будет представлено как целое число 2 без десятичной точки и знаков после нее. Если обрабатываемые величины определены как действительные числа, то дробная часть итога операции будет сохраняться и содержать столько знаков, сколько позволяет получить разрядность машины.

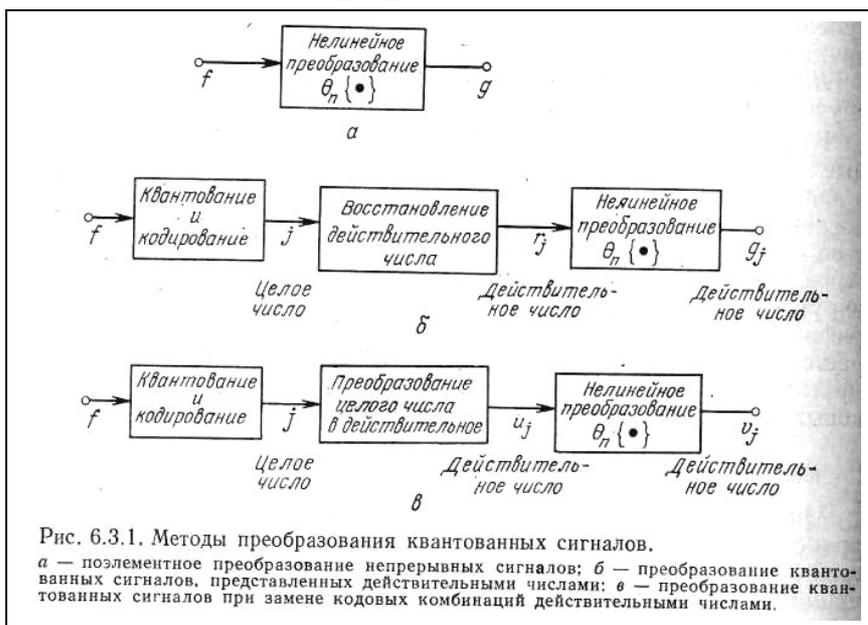


Рис.1. Методы преобразования квантованных сигналов

Отношение действительных чисел $8./3$. будет иметь вид 2.66...66. На рис. 1 для сравнения представлены три способа обработки сигналов. На рис. 1, а непрерывная скалярная величина f , изменяющаяся в интервале $a_L \leq f \leq a_U$, подвергается преобразованию $Q_P\{\bullet\}$, в результате которого получается непрерывная величина $g=Q_P\{f\}$.

На рис. 1, б показана схема обработки, в которой скалярная величина f перед обработкой подвергается равномерному квантованию и кодированию. Целочисленные значения кодовых комбинаций определяются по формуле

$$j = \left[(J - 1) \left(\frac{f - a_L}{a_U - a_L} \right) \right]_N,$$

где $[\]_N$ – означает округление аргумента до ближайшего целого числа. Код определенный как целое число, преобразуется в действительное число r_j согласно соотношению $r_j = [(r_{j-1} - r_0)/(J-1)]j + r_0$. (1)

Далее с квантованным отсчетом r_j выполняется необходимая операция и получается квантованный выходной сигнал, отличающийся от непрерывного выходного сигнала g , фигурирующего в равенстве (1), только из-за ошибки квантования исходной величины.

К сожалению, часто обработку квантованных сигналов производят неправильно. Кодовая комбинация f , рассматриваемая как целое число, преобразуется в действительное число u_j принимающее значения $0., 1., 2., \dots, (J-1)$. После этого по формуле $v_j = Q_P\{u_j\}$ вычисляются значения выходного сигнала v_j , определяемые как действительные числа. В общем случае v_j имеет и целую, и дробную части. Если, например $u_j = 17.$, то после преобразования, состоящего в извлечении квадратного корня с точностью до пятого знака, получается выходной сигнал $v_j = 4.12311$. Ясно, конечно, что ошибки квантования входного отсчета u_j проявятся и в выходном отсчете v_j . Однако существуют более серьезные трудности, если считать, что u может служить сравнительно хорошей аппроксимацией непрерывного выходного сигнала g .

Предположим, что число уровней квантования достаточно велико и поэтому $u_j \approx (J-1)[(f-a_L)/(a_U-a_L)]$. Тогда выходной сигнал будет равен

$$v_j \approx Q_P\{k_1 f + k_2\}, \text{ где постоянные}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= (J - 1)/(a_U - a_L), \\ k_2 &= -[(J - 1) a_L]/(a_U - a_L). \end{aligned}$$

Если преобразование $Q_P\{\bullet\}$ линейно, то

$$v_j \approx k_1 Q_P\{f\} + k_2$$

$$g \approx g_j \approx (v_j - k_2)/k_1.$$

таким образом, выходной сигнал рассматриваемой системы (Рис. 1, в) будет хорошей аппроксимацией непрерывного выходного сигнала системы с аналоговой обработкой (рис. 1, а), если преобразование,

выполняемое в системе, является линейным. С другой стороны, если это преобразование нелинейно, то аппроксимация одного сигнала другим обычно оказывается очень плохой. Так, например, обычно логарифм квантованной переменной существенно отличается от логарифма действительного числа, сформированного из кодовой комбинации, которая задает номер уровня квантования.

КВАНТОВАНИЕ ОДНОЦВЕТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В системах передачи одноцветных изображений с применением импульсно-кодовой модуляции (ИКМ) каждый отсчет квантуется (обычно на основе линейной шкалы), и ему ставится в соответствие двоичная кодовая комбинация. Как правило, применяют равномерный код, и поэтому число уровней квантования светлоты выбирают из условия $L = 2^n$, где n — число двоичных разрядов (бит), отведенных для кодирования отсчетов.

В системах с ИКМ можно сократить цифровой поток простым уменьшением числа разрядов в кодовых комбинациях. Если имеется аналитическая мера качества изображений, передаваемых с помощью такой системы, то величина n будет равна наименьшему числу разрядов, при котором качество изображения еще является удовлетворительным. При субъективной оценке качества величину n понижают до тех пор, пока эффекты, вызванные квантованием, не выйдут за пределы допустимого. Глаз способен определить от 10 до 15 градаций абсолютного значения светлоты, однако он имеет гораздо большую чувствительность к различию светлоты соседних элементов изображения. При уменьшении числа уровней квантования прежде всего бросается в глаза эффект появления контуров в тех областях, где светлота исходного изображения изменяется плавно. Появление контуров вызвано скачкообразным изменением светлоты квантованного изображения при переходе от одного уровня квантования к другому. Наименьшее число разрядов ИКМ, позволяющее предотвратить появление контуров в областях с плавным изменением светлоты, зависит от ряда факторов, в том числе от линейности характеристик дисплея и свойств шума до и после преобразования изображения в видеосигнал.

Предположим, что отсчеты на выходе датчика видеосигнала пропорциональны яркостям элементов изображения. Возникают вопросы: следует ли квантовать непосредственно сигнал яркости изображения или же некоторую функцию от него и какой должна быть характеристика квантователя — линейной или нелинейной? Последний вопрос скорее относится к практической реализации системы. Любую нелинейную характеристику квантователя можно получить, осуществляя нелинейное преобразование квантуемого сигнала, равномерное квантование и обратное нелинейное преобразование квантованного сигнала, как показано на схеме рис. 6.1.3. В связи с этим здесь будет рассматриваться только равномерное

квантование отсчетов, которые предварительно могут быть подвергнуты нелинейному преобразованию.

Известно большое число экспериментальных работ по определению количества (и расположения) уровней квантования, необходимого для сведения к минимуму эффекта ложных контуров. Гудолл одним из первых проводил опыты с цифровым телевидением и пришел к выводу, что для получения хорошего качества необходимо квантовать яркостное изображение на 64 уровня (6 разрядов), а при 32 уровнях (5 разрядах) ложные контуры не слишком заметны. Аналогичные результаты получили и другие исследователи. В большинстве работ в той или иной мере затрагиваются вопросы о линейности характеристик системы воспроизведения изображений и ее калибровке.

Сигналы телевизионной камеры и видеомонитора, как правило, нелинейно связаны с интенсивностью света. Фотоматериалы, применяемые для регистрации изображений, также имеют существенно нелинейные характеристики. Отметим, наконец, что любые шумы, создаваемые камерой или монитором, скрадывают ложные контуры.

КВАНТОВАНИЕ ЦВЕТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Цветное изображение можно описать с помощью красной, зеленой и синей координат цвета или произвольной (линейной или нелинейной) обратимой функции от этих величин. Если красная, зеленая и синяя координаты цвета квантуются по отдельности, то число и расположение уровней квантования выбираются по тем же общим правилам, что и при квантовании одноцветных изображений. Глаз реагирует на интенсивность света нелинейно, и поэтому субъективно качество квантованного цветного изображения оценивается выше, если перед квантованием подвергнуть координаты цвета нелинейному преобразованию, сжимающему их динамический диапазон. Известно, что глаз наиболее чувствителен к изменениям яркости в синей области спектра, умеренно чувствителен к таким изменениям в зеленой области и наименее чувствителен в красной области.



Рис.2. Квантование цветных изображений.

Учитывая это, можно получить более эффективное распределение уровней квантования, чем равномерное.

На рис. 2 представлена обобщенная блок-схема системы квантования цветных изображений. Три координаты цвета R_N , G_N , B_N , описывающие исходное изображение, преобразуются в три компоненты вектора $x(1)$, $x(2)$, $x(3)$, которые и поступают в квантователь. Затем квантованные компоненты $x(1)$, $x(2)$ и $x(3)$ преобразуются обратно в исходную координатную систему; в результате получается три координаты R_N , G_N ,

B_N . Квантователь по существу разделяет на ячейки квантования цветовое пространство, имеющее координаты $x(1)$, $x(2)$ и $x(3)$, и ставит в соответствие всем цветовым сигналам, попадающим в ячейку, одно и то же значение. Для большей эффективности следовало бы квантовать три цветовые компоненты $x(1)$, $x(2)$ и $x(3)$ совместно. Однако по техническим причинам часто приходится квантовать цветовые компоненты независимо. В этом случае цветовое тело заключается в прямоугольный параллелепипед, который делится на прямоугольные ячейки квантования. Если координаты цвета преобразуются в какую-то другую координатную систему, то сразу же возникают трудности. Рассмотрим, например, квантование координат цвета в системе UVW . На рис. 3 показано тело воспроизводимых цветов для системы

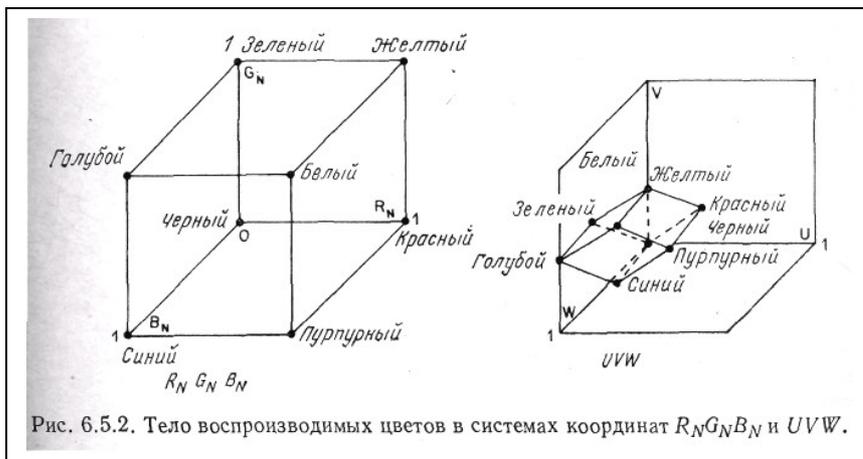


Рис.3. Тело воспроизводимых цветов.

$R_N G_N B_N$, представленное в форме куба, а также дан вид этого куба после преобразования его в координатную систему UVW . Можно заметить, что куб $R_N G_N B_N$ превращается в параллелепипед. Если координаты U, V, W квантуются независимо друг от друга, а диапазон квантования каждой из них охватывает весь интервал от минимального до максимального значения, то много ячеек квантования попадает в области невозпроизводимых цветов и поэтому оказываются бесполезными. Было бы желательно размещать все ячейки квантования внутри параллелепипеда воспроизводимых цветов, но, как правило, такую операцию сложно осуществить на практике.

Предположим для упрощения анализа, что каждая компонента квантуется равномерно на $2^{b(i)+1}$ уровней, причем $b(i)$ обозначает число разрядов, отведенных для квантования компоненты $x(i)$. Общее число таких разрядов фиксировано и равно $V=b(1)+b(2)+b(3)$.

Допустим, что $a_U(i)$ обозначает верхнюю, а $a_L(i)$ – нижнюю границу диапазона значений компоненты $x(i)$. Все цвета, цветовая компонента которых $x(i)$ попадает в одну и ту же ячейку, в ходе квантования будут заменяться одним цветом с квантованным значением этой компоненты.

Ошибка квантования по каждой компоненте равна

$$\varepsilon(i) = |x(i) - \hat{x}(i)| = |a_U(i) - a_L(i)|/2^{b_U(i)+1}.$$

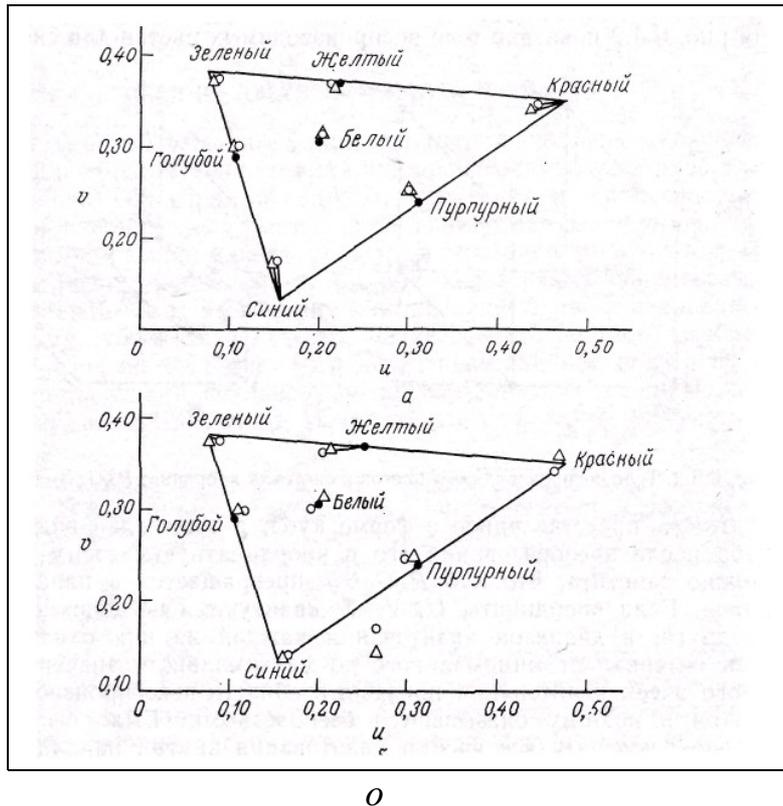


Рис. 4. Смещение цветов при равномерном квантовании изображения «Портрет».

a — смещение цветов при квантовании в системе координат — смещение цветов при квантовании в системе координат UVW . 4 разряда на каждую из трех координат; 5, 4, 3 разряда на соответствующие координаты.

Следует заметить, что значения $\varepsilon(i)$ всегда будут находиться внутри наименьшего куба, окружающего цветное тело, для данной цветовой координатной системы.

На рис. 4 показаны смещения различных цветов при квантовании в системах координат $R_N G_N B_N$ и UVW .

Джейн и Прэтт рассмотрели вопрос об оптимальном распределении пороговых уровней при квантовании цветных изображений, позволяющем уменьшить до возможного предела цветное расстояние между исходным цветом и его квантованным значением. Было установлено, что квантование в координатной системе $R_N G_N B_N$ дает лучшие результаты, чем в других распространенных цветовых координатных системах. Это объясняется тем, что в системе $R_N G_N B_N$ эффективно используются все ячейки квантования, а в других системах многие ячейки оказываются незанятыми. Последнее, по-видимому, существеннее, чем метрическая неоднородность цветового пространства $R_N G_N B_N$.

Обзор методов цифровой обработки изображений

Обработка изображений является многоплановой задачей. Сюда включают решение задач фильтрации шумов, геометрической коррекции, градационной коррекции, усиления локальных контрастов, резкости, восстановления изображений и др.

Методы обработки изображений разделяют на два класса.

Первый класс - *методы обработки в частотной области*, второй класс - *методы обработки в пространственной области*.

Методы обработки изображений в частотной области базируются на соответствующих моделях зрения человека, например, модели Стокхема, Ч.Холла и Э.Холла. Эти модели показывают, что эффективное изменение визуального качества изображения можно проводить через изменение двух основных составных частей изображения - низкочастотной (фоновой) и высокочастотной (детальной). Алгоритмы обработки в частотной области имеют большую вычислительную сложность, которая ограничивает их использование для обработки изображений в масштабе реального времени. Однако, линейная фильтрация широко используется в когерентных оптических системах обработки информации, где как и в цифровой обработке, сигналов она базируется на использовании быстрых алгоритмов свертки и спектрального анализа. Параметры необходимых фильтров преимущественно определяют, пользуясь принципами оптимальной (винеровской) фильтрации, разработанной для среднеквадратического критерия качества фильтрации. Достижения теории фильтрации широко используют при обработке изображений. Так, согласующая фильтрация применяется в обработке изображений с позиций не просто повышения качества, а для выявления объектов на изображениях. Реальные системы формирования изображений не являются идеальными из-за аберрации, смазывания изображения во время экспозиции, низкого контраста, наличия атмосферных неоднородностей и т.п. Поэтому для этих систем в предположении их линейности и стационарности можно значительно улучшить качество изображений, применяя технику инверсной фильтрации.

Метод инверсной фильтрации никак не учитывает шумовых эффектов, поэтому не удивительно, что он дает плохие результаты при наличии шума. Методы винеровской фильтрации учитывают априорное значение статистических свойств шума и потому позволяют повысить качество возобновляемых изображений. При использовании метода пространственной реставрации изображений на основе регрессии шумовое поле моделируют некоторой реализацией двумерного случайного процесса с неизвестными средним и ковариационной функцией. Тогда применяют винеровское оценивание в предположении, что идеальное изображение также является реализацией двумерного случайного процесса с известными первым и

вторым моментами. Представляя результирующее изображение как свертку входного изображения с импульсной передаточной характеристикой или функцией размывания точки оптической системы, которая вносит искажение, для восстановления изображения используют также итерационный алгоритм Бугера-Ван-Циттера.

Обобщая сжатый обзор некоторых алгебраических методов восстановления изображений, отметим, что он является составной частью более широкой проблемы решения некорректных задач восстановления изображений, включая реконструкцию изображений по проекциям (реконструктивную томографию). Рядом с этими методами широко используются методы линейной фильтрации для улучшения изображений.

Основой большинства методов линейной фильтрации в пространственной области являются ортогональные преобразования. Существует три основных области применения двумерных ортогональных преобразований для обработки изображений. Во-первых, преобразования используют для выделения характеристик признаков изображения. Второй областью применения является кодирование изображений, когда ширина спектра уменьшается за счет отбрасывания или грубого квантования малых по величине коэффициентов преобразования. Третья область применения - это сокращения размерности при выполнении вычислений. К таким преобразованиям принадлежат преобразования Фурье, синусные, косинусные, волновые преобразования, а также преобразования Карунена-Лоева, Уолша, Хаара и Адамара. Однако и эти преобразования не обеспечивают обработки изображений в масштабе реального времени из-за своей вычислительной сложности.

Другой подход к обработке изображений с целью улучшения их визуального качества состоит в непосредственном использовании разных фильтров. Область их функционирования - в основном частотная и реже - пространственная. Для этого используют разные методы синтеза фильтров, как одномерных, так и двумерных, чем обеспечивают реализацию заданных частотных характеристик.

Проведенный анализ показывает, что использование фильтрации изображений с целью повышения их визуального качества с обеспечением высокого быстродействия является наиболее рациональным при реализации в пространственной области. Однако арсенал алгоритмических средств обработки при этом является недостаточным. Использование же обработки в частотной области хотя и достаточно развито, но требует значительных вычислительных затрат.

ДИСКРЕТНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ДВУМЕРНАЯ ОБРАБОТКА

Многие операции, выполняемые при обработке изображений, по своей природе являются линейными. К ним относятся следующие операторы

- 1) суперпозиции;
- 2) свертки;
- 3) унитарных преобразований;
- 4) дискретной линейной фильтрации.

Обобщенный линейный оператор

Рассмотрим массив $F(n_1, n_2)$ из $N_1 \times N_2$ элементов, представляющий исходное (входное) изображение. При воздействии на него обобщенным линейным оператором получается массив из $M_1 \times M_2$ элементов, описывающий преобразованное (выходное) изображение

$$P(m_1, m_2) = \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} F(n_1, n_2) O(n_1, n_2; m_1, m_2), \quad (1)$$

где ядро оператора $O(n_1, n_2; m_1, m_2)$ представляет собой набор весовых множителей, зависящих в общем случае от координат элементов как входного, так и выходного изображений.

При анализе линейных операций по обработке изображений удобно пользоваться векторными представлениями, описанными л. №7. Поэтому будем полагать, что входной массив $F(n_1, n_2)$ представлен или в виде матрицы F , или в виде вектора f , полученного разверткой матрицы F по столбцам. Аналогичным образом, выходной массив $P(m_1, m_2)$ может быть представлен либо матрицей P , либо в виде ее развертки по столбцам, вектором p . Для упрощения обозначений ниже будет принято, что матрицы, представляющие входное и выходное изображения, квадратные с размерами $N_1 = N_2 = N$ и $M_1 = M_2 = M$ соответственно. Допустим теперь, что символ T обозначает матрицу размера $M^2 \times N^2$, с помощью которой вектор исходного изображения f размера $N^2 \times 1$ линейно преобразуется в вектор $p = Tf$ выходного изображения размера $M^2 \times 1$. Матрицу T можно разделить на блоки – матрицы T_{mn} размера $M \times N$ (число которых также равно $M \times N$) – и представить ее в следующем виде:

$$O = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1N} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{M1} & T_{M2} & \dots & T_{MN} \end{bmatrix}.$$

Вектор выходного изображения можно выразить через матрицу входного изображения путем оператора упорядочения (л.7 1):

$$p = \sum_{n=1}^N TN_n Fv_n. \quad (2)$$

Предположим, что линейное преобразование разделимо, т.е. матрицу T можно представить в виде прямого произведения

$$T = T_C \otimes T_R, \quad (3)$$

где T_C и T_R - операторы преобразования столбцов и строк матрицы изображения F . В этом случае $T_{mn} = T_R(m, n)T_C$.

$$\text{Следовательно } P = T_C F \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N T_R(m, n) v_n u_m^T = T_C F T_R^T. \quad (4)$$

Матрицу выходного изображения P можно получить путем последовательной обработки матрицы F по строкам и столбцам.

При обработке изображений во многих случаях оказывается, что оператор линейного преобразования T имеет специфическую структуру, позволяющую упростить вычислительные операции. Ниже перечислены важные частные случаи, проиллюстрированные на рис.1, когда размеры входного и выходного изображений выбраны одинаковыми, т.е. $M=N$.

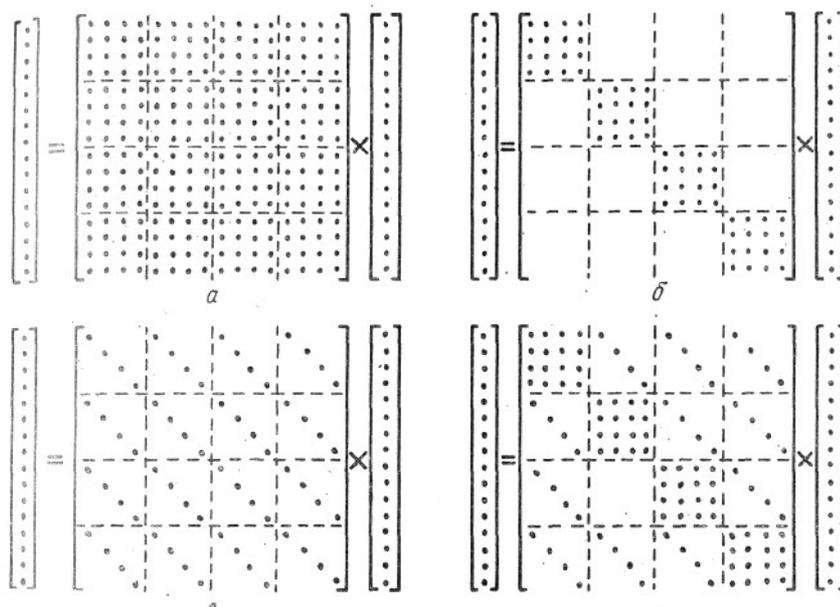


Рис 1. Структура матриц линейного оператора.

а) – общий случай; б) – обработка только по столбцам; в) – обработка только по строкам; г) – обработка только по строкам и столбцам.

а) При обработке матрицы F только по столбцам

$$T = \text{diag}[T_{C1}, T_{C2}, \dots, T_{CN}],$$

где T_{Cj} - матрица преобразования для j -го столбца.

б) При одинаковой обработке каждого столбца матрицы F

$$T = \text{diag}[T_C, T_C, \dots, T_C] = T_C \otimes I_N.$$

в) При обработке матрицы F только по строкам

$$T_{mn} = \text{diag}[T_{R1}(m, n), \dots, T_{RN}(m, n)],$$

где T_{Rj} - матрица преобразования для j -ой строки.

г) При одинаковой обработке каждой строки матрицы F

$$T_{mn} = \text{diag}[T_R(m, n), T_R(m, n), \dots, T_R(m, n)],$$

$$T = I_N \otimes T_R.$$

д) При одинаковой обработке столбцов и одинаковой обработке строк матрицы F

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_C \otimes \mathbf{I}_N + \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{T}_R.$$

Число арифметических операций, выполняемых в каждом из этих случаев, указано в табл. 1.

Из соотношения (4) видно, что если двумерное линейное преобразование имеет разделимую матрицу, то его можно выполнить путем последовательной одномерной обработки строк и столбцов массива отсчетов. Как следует из табл. 1, для таких преобразований удастся существенно сократить число необходимых вычислительных операций:

в общем случае при вычислении по формуле (1) требуется M^2N^2 операций, но если можно воспользоваться формулой (4), достаточно $MN^2 + M^2N$ операций.

Таблица 1. Число арифметических операций при линейном преобразовании

Случай	Число умножений и сложений
Общий	N^4
Обработка по столбцам	N^3
Обработка по строкам	N^3
Обработка по строкам и столбцам	$2N^3 - N^2$
Обработка при разделимой матрице	$2N^3$

Более того, в этом случае матрицу F можно хранить в запоминающем устройстве (ЗУ) с последовательным доступом, например на диске или на барабане, и считывать строка за строкой, т. е. отпадает необходимость хранения матрицы F в более дорогостоящем ЗУ с произвольным доступом.

Необходимо, однако, транспонировать результаты преобразований по столбцам с тем, чтобы выполнить построчные преобразования.

Двумерный дискретный оператор суперпозиции определяется, во-первых, как оператор дискретной линейной фильтрации, применяемый к конечному массиву отсчетов, и, во-вторых, как дискретизованный оператор аналоговой фильтрации. Обычно эти два определения не эквивалентны. Ниже будут применяться оба определения.

ОПЕРАТОР СУПЕРПОЗИЦИИ КОНЕЧНЫХ МАССИВОВ

Рассмотрим сначала дискретный оператор суперпозиции конечного массива отсчетов $F(n_1, n_2)$ (где $n_1, n_2 = 1, 2, \dots, N$) с конечным массивом $H(l_1, l_2; m_1, m_2)$ (где $l_1, l_2 = 1, 2, \dots, L$), играющим роль импульсного отклика. В общем случае импульсный отклик может изменяться в зависимости от координат (m_1, m_2) отсчета в выходном массиве Q . Операция суперпозиции в ограниченной области определяется соотношением

$$Q(m_1, m_2) = \sum_{n_1=1}^{m_1} \sum_{n_2=1}^{m_2} F(n_1, n_2) H(m_1 - n_1 + 1, m_2 - n_2 + 1; m_1, m_2), \quad (1)$$

где $m_1, m_2 = 1, 2, \dots, M$, а массивы H и F имеют нулевые значения вне областей изменения соответствующих индексов. Анализируя предельные значения индексов отсчетов импульсного отклика, можно убедиться, что $M = N + L - 1$ и, следовательно, выходной массив Q имеет большие размеры, чем исходный (рис. 1).

Если массивы F и Q представлены соответственно в виде вектора \mathbf{f} размера $N^2 \times 1$ и вектора \mathbf{q} размера $M^2 \times 1$, то преобразование (1) можно записать как $\mathbf{q} = \mathbf{D}\mathbf{f}$, где \mathbf{D} – матрица размера $M^2 \times N^2$, содержащая отсчеты импульсного отклика. Матрицу \mathbf{D} оператора суперпозиции удобно разделить на блоки $D_{m,n}$ размера $M \times N$.

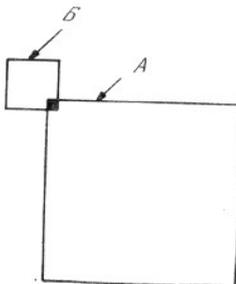


Рис. 1. Суперпозиция конечных массивов отсчетов импульсного отклика и исходного изображения.

A — массив из $N \times N$ отсчетов изображения; B — повернутый на 180° массив из $L \times L$ отсчетов импульсного отклика.

Проанализировав пределы суммирования в выражении (1), можно показать, что

произвольный ненулевой элемент матрицы \mathbf{D} имеет вид

$$D_{m_2, n_2}(m_1, n_1) = H(m_1 - n_1 + 1, m_2 - n_2 + 1; m_1, m_2), \quad (2)$$

где $1 \leq n_i \leq N$, $n_i \leq m_i \leq n_i + L - 1$. Отсюда следует, что матрица \mathbf{D} имеет регулярную структуру и заполнена довольно редко, причем ненулевые блоки, группирующиеся в виде полосы в средней части матрицы \mathbf{D} , содержат зоны нулевых элементов.

Если форма импульсного отклика инвариантна относительно сдвига (т. е. одинакова для всех точек выходного массива), то структура матрицы D не зависит в явной форме от координат (m_1, m_2) выходного отсчета. Тогда $D_{m_2, n_2} = D_{m_2+1, n_2+1}$.

Таким образом, все столбцы матрицы D образуются сдвигом первого столбца. В этом случае оператор суперпозиции называется *оператором свертки конечных массивов*. На рис. 2,а приведены полученные на ЦВМ распечатки матриц, фигурирующих в операции свертки конечных массивов, для случая, когда входной массив имеет размеры 2×2 ($N = 2$), выходной массив 4×4 ($M = 4$), а массив отсчетов импульсного отклика 3×3 ($L = 3$). Пары целых чисел (i, j) в матрице D обозначают (i, j) -й элемент матрицы $H(i, j)$.

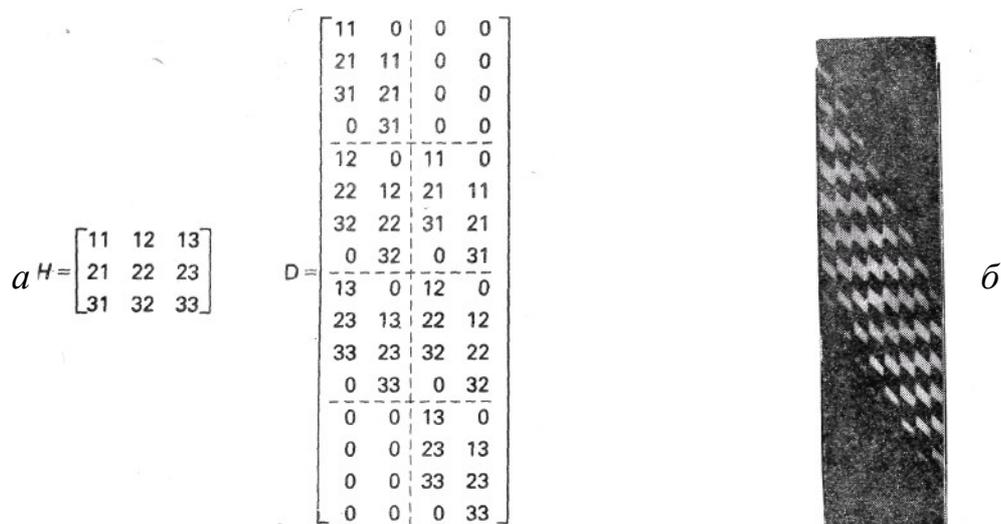


Рис. 2. Примеры матриц операторов свертки конечных массивов. *a* – общий случай, $M = 4$, $N = 2$, $L = 3$; *б* – импульсный отклик гауссовой формы, $M = 16$, $N = 8$, $L = 9$.

Структура матрицы D лучше видна на примере матрицы большего размера, показанной на рис. 2, б. В рассматриваемой матрице $M=16$, $N=8$, $L=9$, а импульсный отклик симметричен и имеет гауссову форму. Заметим, что в данном примере размеры матрицы D равны 256×64 .

Если импульсный отклик является инвариантным относительно сдвига и разделимым, т. е. $H = h_C h_R^T$, где h_C и h_R – вектор-столбцы, описывающие соответственно характер изменения импульсного отклика по столбцам и строкам, то

$D = D_C \otimes D_R$. Матрицы D_R и D_C имеют размеры $M \times N$ и структуру вида

$$\mathbf{D}_R = \begin{bmatrix} h_R(1) & 0 & \dots & 0 \\ h_R(2) & h_R(1) & & \vdots \\ h_R(3) & h_R(2) & & 0 \\ \vdots & & & h_R(1) \\ h_R(L) & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & h_R(L) \end{bmatrix} \quad (9.1.9)$$

Операция двумерной свертки в этом случае сводится к последовательному вычислению одномерных сверток по строкам и столбцам.

$$\text{Таким образом, } Q = D_C F D_R^T \quad (3).$$

Для получения конечной свертки или суперпозиции в общем случае необходимо выполнить $N^2 L^2$ арифметических операций, причем в это число не входят умножения на нулевые элементы матрицы D . Если же оператор является разделимым, т. е, удовлетворяет равенству (3), то достаточно выполнить $NL(M + N)$ операций.

ДИСКРЕТИЗОВАННЫЙ ОПЕРАТОР СУПЕРПОЗИЦИИ

При цифровой обработке изображений во многих случаях требуется перевести в дискретную форму интегральный оператор суперпозиции, связывающий непрерывные изображения на входе и выходе линейной системы. Такие явления, как смазывание изображения, вызванное несовершенством оптической системы, апертурные искажения или искажения при наблюдении через турбулентную атмосферу, можно описать с помощью следующего интегрального уравнения:

$$\tilde{G}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\alpha, \beta) \tilde{J}(x, y; \alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (4)$$

Следует с осторожностью применять оператор суперпозиции конечных массивов для моделирования непрерывных процессов.

ДВУМЕРНЫЕ УНИТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Существуют три основные области применения двумерных, унитарных преобразований для обработки изображений. Во-первых, преобразования используются для выделения характерных признаков изображения. Так, например, постоянная составляющая спектра Фурье пропорциональна средней яркости изображения, а высокочастотные составляющие характеризуют величину и ориентацию его контуров. Другой областью применения преобразований является кодирование изображений, когда ширина спектра уменьшается за счет отбрасывания или грубого квантования малых по величине коэффициентов преобразования. Третья область приложений – это сокращение размерности при выполнении вычислений. Иначе говоря, в процессе обработки (например, фильтрации) малые коэффициенты преобразования можно отбросить без заметного ухудшения качества обработки. В последующих главах эти применения будут описаны более детально. В этой главе рассмотрены свойства преобразований, наиболее часто встречающихся при обработке изображений.

ОПЕРАТОРЫ УНИТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Унитарные преобразования являются частным случаем линейных преобразований, когда линейный оператор точно *обратим*, а его ядро удовлетворяет условиям *ортогональности*. В результате прямого унитарного преобразования матрицы изображения $F(n_1, n_2)$ размера $N_1 \times N_2$ образуется матрица преобразованного изображения того же размера, элементы которой по определению равны

$$\mathfrak{J}(m_1, m_2) = \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} F(n_1, n_2) A(n_1, n_2; m_1, m_2), \quad (1)$$

где $A(n_1, n_2; m_1, m_2)$ – ядро прямого преобразования. Исходное изображение можно получить с помощью обратного преобразования, описываемого соотношением

$$F(n_1, n_2) = \sum_{m_1=1}^{N_1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \mathfrak{J}(m_1, m_2) B(n_1, n_2; m_1, m_2), \quad (2)$$

где $B(n_1, n_2; m_1, m_2)$ – ядро обратного преобразования.

Преобразование является унитарным, если выполняются следующие условия *ортогональности*:

$$\begin{aligned} \sum_{m_1} \sum_{m_2} A(n_1, n_2; m_1, m_2) A^*(j_1, j_2; m_1, m_2) &= \delta(n_1 - j_1, n_2 - j_2), \\ \sum_{m_1} \sum_{m_2} B(n_1, n_2; m_1, m_2) B^*(j_1, j_2; m_1, m_2) &= \delta(n_1 - j_1, n_2 - j_2), \\ \sum_{n_1} \sum_{n_2} A(n_1, n_2; m_1, m_2) A^*(n_1, n_2; k_1, k_2) &= \delta(m_1 - k_1, m_2 - k_2), \\ \sum_{n_1} \sum_{n_2} B(n_1, n_2; m_1, m_2) B^*(n_1, n_2; k_1, k_2) &= \delta(m_1 - k_1, m_2 - k_2), \end{aligned} \quad (3)$$

Преобразование называют *разделимым*, если оба его ядра можно представить в следующей форме

$$\begin{aligned} A(n_1, n_2; m_1, m_2) &= A_C(n_1, m_1)A_R(n_2, m_2), \\ B(n_1, n_2; m_1, m_2) &= B_C(n_1, m_1)B_R(n_2, m_2), \end{aligned} \quad (4)$$

где через A_C (или B_C) и A_R (или B_R) обозначены соответственно одномерные операторы преобразования столбцов и строк.

Результат воздействия оператора разделимого двумерного унитарного преобразования можно находить в два этапа. Сначала выполняется одномерное преобразование по всем столбцам матрицы изображения, причем образуется матрица с элементами $D(m_1, n_2) = \sum_{n_1=1}^{N_1} F(n_1, n_2)A_C(n_1, m_1)$.

Затем выполняется второе одномерное преобразование по всем строкам полученной матрицы, в результате которого образуется массив чисел вида

$$\mathfrak{J}(m_1, m_2) = \sum_{n_1=1}^{N_1} P(m_1, n_2)A_R(n_2, m_2).$$

Унитарные преобразования удобно записывать с помощью векторных обозначений.

Возможны различные интерпретации унитарных преобразований. Преобразование изображения можно рассматривать как разложение исходного изображения в *обобщенный двумерный спектр*. Каждая спектральная составляющая характеризует вклад соответствующей спектральной (базисной) функции в энергию исходного изображения. При такой трактовке понятие частоты можно обобщить так, чтобы оно было применимо не только к синусам и косинусам, но и к другим функциям, на которых основываются преобразования. Подобный обобщенный спектральный анализ полезен для изучения тех конкретных разложений, которые в наибольшей мере подходят для данного класса изображений. Наглядное представление о преобразованиях изображений можно получить и по-другому, рассматривая преобразование как поворот многомерной системы координат. Одним из главных свойств унитарного преобразования является *сохранение метрики*. Например, евклидово расстояние между двумя изображениями равно евклидову расстоянию между их образами. Третья возможность интерпретации преобразований заключается в том, что равенство (2) можно рассматривать как способ составления изображения из набора двумерных функций $B(n_1, n_2; m_1, m_2)$, каждая из которых соответствует определенной точке (m_1, m_2) плоскости обобщенных частот. В подобной интерпретации ядро $B(n_1, n_2; m_1, m_2)$ называют двумерной базисной функцией, а коэффициент $\mathfrak{J}(m_1, m_2)$ указывает «вес» этой базисной функции, необходимый для получения рассматриваемого изображения.

Для упрощения анализа свойств двумерных унитарных преобразований ниже в этой главе будет принято, что все массивы являются квадратными и имеют размер $N \times N$. Массив отсчетов исходного изображения будет обозначен через $F(j, k)$, где $j, k = 0, 1, \dots, N-1$, а массив коэффициентов преобразования – через $\mathfrak{J}(u, v)$, где $u, v = 0, 1, \dots, N-1$. С

учетом этого прямое унитарное преобразование записывается в следующем виде:

$$\mathcal{F}(u, v) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j, k) A(j, k; u, v), \quad (5a)$$

а обратное преобразование — как

$$F(j, k) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \mathcal{F}(u, v) B(j, k; u, v). \quad (5b)$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Дискретное двумерное преобразование Фурье матрицы отсчетов изображения определяется в виде ряда

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j, k) \exp\left\{-\frac{2\pi i}{N}(uj + vk)\right\}, \quad (6a)$$

где i – мнимая единица, а дискретное обратное преобразование имеет вид

$$F(j, k) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \Phi(u, v) \exp\left\{\frac{2\pi i}{N}(uj + vk)\right\}. \quad (6b)$$

По аналогии с терминологией непрерывного преобразования Фурье переменные u, v называют пространственными частотами. Следует отметить, что не все исследователи пользуются определением (6); одни предпочитают помещать все масштабные постоянные в выражение для обратного преобразования, а другие изменяют знаки в ядрах на противоположные.

Поскольку ядра преобразования *симметричны* и *разделимы*, двумерное преобразование можно выполнить в виде последовательных одномерных преобразований по строкам и столбцам матрицы изображения. Базисными функциями преобразования являются экспоненты с комплексными показателями, которые можно разложить на синусную и косинусную составляющие.

Таким образом,

$$\begin{aligned} A(j, k; u, v) &= \exp\left\{-\frac{2\pi i}{N}(uj + vk)\right\} = \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{N}(uj + vk)\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{N}(uj + vk)\right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} B(j, k; u, v) &= \exp\left\{\frac{2\pi i}{N}(uj + vk)\right\} = \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{N}(uj + vk)\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{N}(uj + vk)\right). \end{aligned}$$

На рис. 1 приведены графики синусных и косинусных составляющих одномерных базисных функций преобразования Фурье для $N=16$. Видно, что для низких частот эти функции являются грубыми аппроксимациями непрерывных синусоид. С повышением частоты сходство базисных функций с синусоидами теряется. Для наивысшей частоты базисная

функция представляет собой меандр. Можно заметить также избыточность наборов синусных и косинусных составляющих.

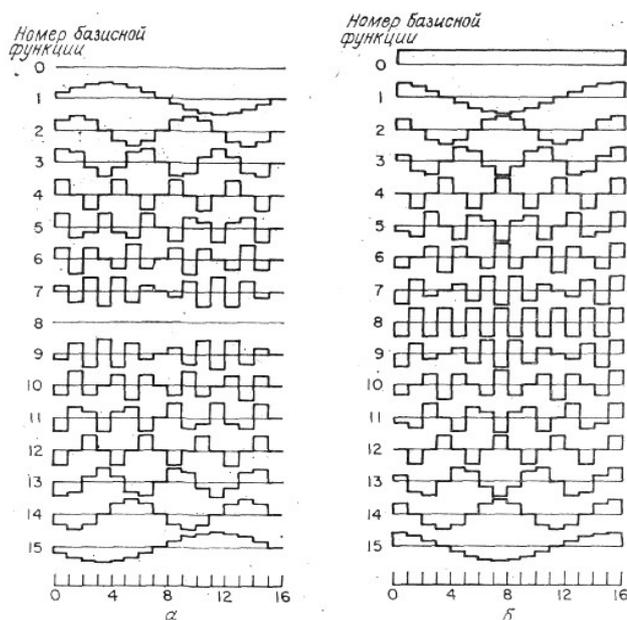


Рис.1. Базисные функции преобразования Фурье.

Спектр изображения имеет много интересных структурных особенностей.

Спектральная составляющая в начале координат частотной плоскости $\Phi(0,0) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j,k)$ равна увеличенному в N раз среднему (по исходной плоскости) значению яркости изображения.

Двумерный спектр Фурье изображения является по существу представлением двумерного поля в виде ряда Фурье. Для того чтобы такое представление было справедливым, исходное изображение также должно обладать периодической структурой, т. е. (как показано на рис. 2,б) иметь рисунок, повторяющийся по вертикали и горизонтали. Таким образом, правый край изображения примыкает к левому, а верхний край – к нижнему.

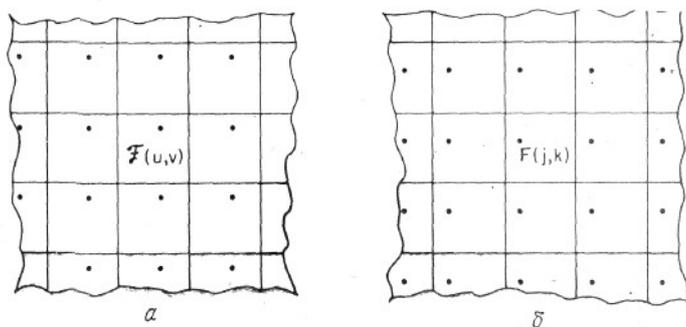


Рис. 2. Периодическое продолжение изображения и спектра Фурье.
а – спектр; б – исходное изображение.

Из-за разрывов значений яркости в этих местах в спектре изображения возникают дополнительные составляющие, лежащие на координатных осях частотной плоскости. Эти составляющие не связаны со значениями яркости внутренних точек изображения, но они необходимы для воспроизведения его резких границ.

Если массив отсчетов изображения описывает поле яркости, то числа $F(j, k)$ будут действительными и положительными. Однако спектр Фурье этого изображения в общем случае имеет комплексные значения. Поскольку спектр содержит $2N^2$ компонент, представляющих действительную и мнимую части или фазу и модуль спектральных составляющих для каждой частоты, может показаться, что преобразование Фурье увеличивает размерность изображения. Это, однако, не так, поскольку $\Phi(u, v)$ обладает симметрией относительно комплексного сопряжения.

Хотя преобразование Фурье имеет много полезных для анализа свойств, у него есть и два существенных недостатка:

во-первых, все вычисления приходится производить не с действительными, а с комплексными числами и,

во-вторых, ряды сходятся медленно. Последнее замечание, весьма существенное для задач кодирования изображений.

КОСИНУСНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Известно, что ряд Фурье для любой непрерывной действительной и симметричной (четной) функции содержит только действительные коэффициенты, соответствующие косинусным членам ряда. В соответствующей интерпретации этот результат можно распространить и на дискретное преобразование Фурье изображений. Существуют два способа получения симметричных изображений.

Согласно первому из них, к изображению вплотную пристраивают его зеркальные отражения. По второму методу оригинал и отражения пристраивают, налагая крайние элементы. Таким образом, из первоначального массива, содержащего $N \times N$ элементов, в первом случае (называемом четным косинусным преобразованием) получается массив из $2N \times 2N$ элементов, а во втором случае (называемом нечетным косинусным преобразованием) – массив из $(2N-1) \times (2N-1)$ элементов.

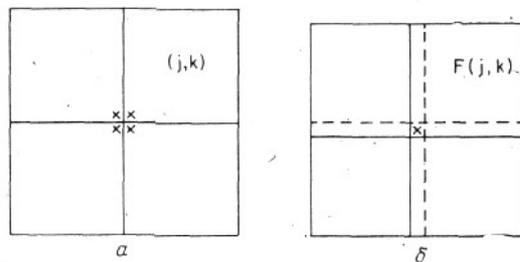


Рис. 3. Построение симметричного изображения, предназначенного для косинусного преобразования.

a – отражение относительно края: b – отражение относительно крайних элементов.

Четное симметричное косинусное преобразование

Допустим, что симметричный массив образован путем зеркального отражения исходного массива относительно его краев согласно соотношению

$$F_s(j,k) = \begin{cases} F(j,k) & j \geq 0, k \geq 0, \\ F(-1-j,k) & j < 0, k \geq 0, \\ F(j,-1-k) & j \geq 0, k < 0, \\ F(-1-j,-1-k) & j < 0, k < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Построенный таким образом массив $F_s(j, k)$ симметричен относительно точки $j = -1/2, k = -1/2$.

Вычислив преобразование Фурье для случая, когда начало координат находится в центре симметрии, получим

$$\Phi_s(u,v) = \frac{1}{2N} \sum_{j=-N}^{N-1} \sum_{k=-N}^{N-1} F_s(j,k) \exp\left\{-\frac{2\pi i}{2N} \left[u \left(j + \frac{1}{2} \right) + v \left(k + \frac{1}{2} \right) \right]\right\} \quad (2)$$

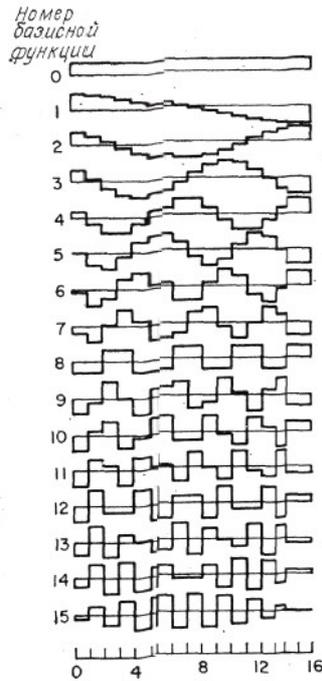


Рис. 4. Базисные функции косинусного преобразования.

С другой стороны, спектральные составляющие вида (2) можно найти, вычисляя преобразование Фурье массива $F(j,k)$ по $2N$ точкам:

$$\Phi_s(u, v) = \frac{2}{N} \operatorname{Re} \left\{ \exp \left[\frac{i\pi u}{2N} \right] \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F_s(j, k) \exp \left\{ -\frac{2\pi i}{2N} [(uj + vk)] \right\} \right\} \quad (3)$$

Прямое четное косинусное преобразование по определению равно сумме (2), умноженной на нормирующий множитель, т.е.

$$\Phi(u, v) = \frac{2}{N} C(u)C(v) \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F_s(j, k) \cos \left[\frac{\pi}{N} u \left(j + \frac{1}{2} \right) \right] \cos \left[\frac{\pi}{N} v \left(k + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (4)$$

а обратное преобразование определяется соотношением

$$F(j, k) = \frac{2}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} C(u)C(v) \Phi_s(u, v) \cos \left[\frac{\pi}{N} u \left(j + \frac{1}{2} \right) \right] \cos \left[\frac{\pi}{N} v \left(k + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (5)$$

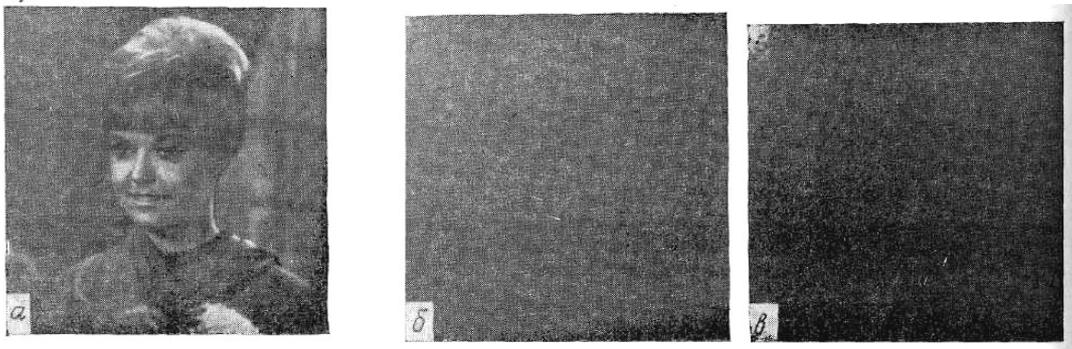


Рис. 5. Косинусное преобразование изображения «Портрет».

a – исходное изображение; *б* – косинусный спектр в логарифмическом масштабе по оси амплитуд; *в* – спектр с ограниченными наибольшими гармониками.

где $C(0)=(2)^{-1/2}$, а $C(w) = 1$ при $w = 1, 2, \dots, N-1$. Оказалось, что базисные функции четного косинусного преобразования принадлежат к классу дискретных полиномов Чебышева.

На рис. 4 приведены графики базисных функции четного симметричного косинусного преобразования при $N = 16$. Образцы спектра, получаемого при четном симметричном косинусном преобразовании, приведены на рис. 5. Начало координат расположено в верхнем левом углу каждого снимка, что согласуется с принятым в теории матриц порядком. Следует отметить, что здесь, как и в случае преобразования Фурье, основная часть энергии изображения концентрируется в области низких пространственных частот.

При нечетном косинусном преобразовании строение симметричного массива определяется по другим соотношениям. Формулы для преобразования также отличаются.

СИСУСНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Быстрое синусное преобразование, предложенное Джейном в качестве аппроксимации преобразования Карунена-Лозва для марковского процесса, в одномерном случае определяется с помощью базисных функций вида

$$A(u, j) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\left[\frac{\pi (j+1)(u+1)}{N+1}\right], \text{ где } u, j = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Двумерное синусное преобразование определяется соотношением

$$\Phi(j, k) = \frac{2}{N+1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j, k) \sin\left[\frac{(j+1)(u+1)\pi}{N+1}\right] \sin\left[\frac{(k+1)(v+1)\pi}{N+1}\right], \text{ а обратное}$$

преобразование имеет тот же вид.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АДАМАРА

Преобразование Адамара основано на квадратной матрице Адамара, элементы которой равны +1 или -1, а строки и столбцы образуют ортогональные векторы. Нормированная матрица Адамара N -го порядка удовлетворяет соотношению

$$H_N H_N^T = I_N. \quad (6)$$

Среди ортонормальных матриц Адамара наименьшей является матрица второго порядка вида

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Если матрица Адамара порядка N (где $N > 2$) существует, то N делится на 4 без остатка. Пока не удалось определить, существуют ли матрицы Адамара для произвольных N , удовлетворяющих этому условию, однако почти для всех допустимых N , доходящих до 200, найдены правила построения соответствующих матриц. Наиболее просто удается построить такие матрицы при $N = 2^n$, где n — целое.

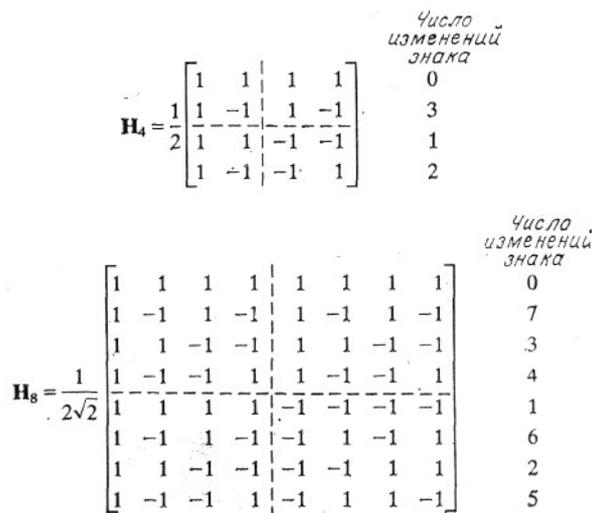


Рис. 6. Неупорядоченные матрицы Адамара четвертого и восьмого порядка.

Если H_N —матрица Адамара N -го порядка, то матрица

$$H_{2N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{bmatrix}$$

также является матрицей Адамара, но порядка $2N$ (матрица H_{2N} имеет блочную структуру). На рис. 6 приведены матрицы Адамара четвертого и восьмого порядка, построенные по предложенной схеме.

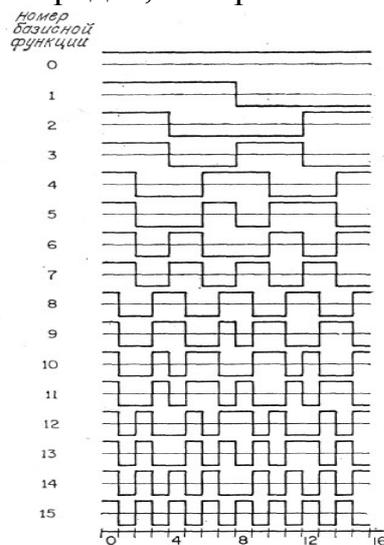


Рис. 7. Базисные функции преобразования Адамара при $N = 16$.

Хармут предложил частотную интерпретацию матриц Адамара, имеющих блочную структуру. Число изменений знака вдоль каждой строки матрицы Адамара, деленное на два, называется *секвентой* строки. Можно построить матрицу Адамара порядка $N = 2^n$, в которой число изменений знака в строках принимает значения от 0 до $N-1$. Унитарные матрицы с такими характеристиками называются матрицами с секвентным свойством.

Строки матрицы Адамара блочной структуры, можно рассматривать как последовательность отсчетов прямоугольных периодических колебаний

(сигналов), период которых кратен $1/N$. Подобные непрерывные функции, называемые функциями Уолша¹⁾, связаны с импульсными функциями Радемахера. Следовательно, матрица Адамара описывает преобразование, связанное с разложением функций по семейству прямо угольных базисных функций, а не по синусам и косинусам, характерным для преобразования Фурье.

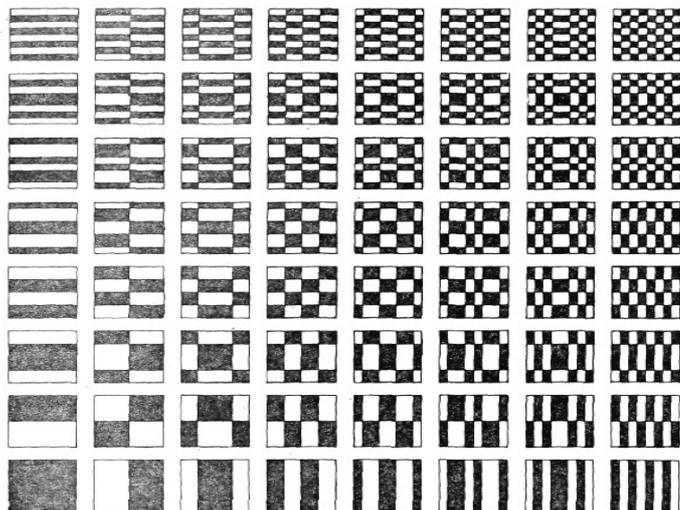


Рис. 8. Базисные изображения преобразования Адамара при $N=8$. Черный цвет соответствует значению +1, белый — значению -1.

Для симметричных матриц Адамара порядка $N=2^n$ двумерное преобразование Адамара можно представить в виде ряда

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j, k) (-1)^{p(j, k, u, v)}, \quad \text{где} \quad p(j, k, u, v) = \sum_{i=0}^{n-1} (u_i j_i + v_i k_i) \quad (8)$$

Переменные u_i, v_i, j_i, k_i равны цифрам в двоичном представлении чисел u, v, j и k соответственно. Так, например, если $u = 13$, то $u_3 = 1, u_2 = 1, u_1 = 0$ и $u_0 = 1$.

Графики базисных функций преобразования Адамара с упорядоченной матрицей для $N=16$ представлены на рис. 7. Базисные изображения, образованные с помощью матричного произведения базисных векторов преобразования Адамара размера 8×1 , приведены на рис. 8.

¹⁾ Преобразование Адамара, определяемое с помощью блочных матриц вида, известно также под названием преобразования Уолша. Следует, однако, отметить, что существуют матрицы Адамара (например, матрица 12-го порядка), строки которых не состоят из отсчетов функций Уолша.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХААРА

Преобразование Хаара основывается на ортогональной матрице Хаара. Ниже приведены примеры ортонормальных матриц Хаара четвертого и восьмого порядка:

$$H_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

$$H_8 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Матрицы Хаара более высокого порядка строятся по тем же правилам, что и матрицы H_4 и H_8 . На рис. 6 приведены графики базисных функций преобразования Хаара при $N = 16$. Базисные изображения того же преобразования для матрицы отсчетов, содержащей 8×8 элементов, представлены на рис. 9.

Преобразование Хаара можно рассматривать как процесс дискретизации исходного сигнала, при котором с переходом к следующей строке вдвое уменьшается шаг дискретизации.

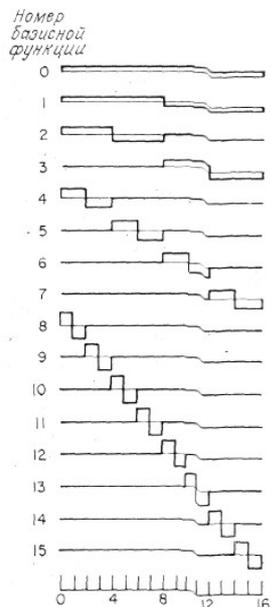


Рис. 9. Базисные функции преобразования Хаара при $N=16$.

В задачах обработки изображений хааровский спектр описывает распределение энергии компонент соответствующих разностям яркостей соседних элементов, разностям средних значений яркостей соседних пар элементов и вообще разностям средних значений яркостей соседних групп из 2^m элементов.

На рис.10 приведен пример преобразования Хаара для конкретного изображения. На снимке с логарифмическим масштабом отчетливо заметна

концентрация энергии, особенно в областях с высокими секвентами. Отметим, что в спектре Хаара наблюдается концентрация энергии также в областях с низкими секвентами.

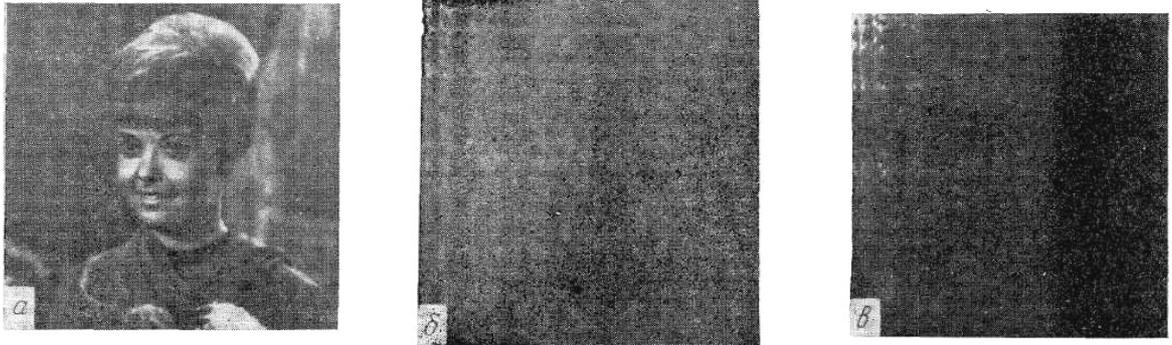


Рис.10. Применение преобразования Хаара для изображения «Портрет».

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КАРУНЕНА–ЛОЭВА

Метод преобразования непрерывных сигналов в набор некоррелированных коэффициентов разработан Каруненом и Лоэвом. Хотеллинг первым предложил метод преобразования дискретных сигналов в набор некоррелированных коэффициентов. Однако в большинстве работ по цифровой обработке сигналов и дискретное, и непрерывное преобразования называют преобразованием Карунена–Лоэва или разложением по собственным векторам.

В общем случае преобразование Карунена–Лоэва описывается соотношением

$$\Phi(u, v) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j, k) A(j, k; u, v), \quad (9)$$

ядро $A(j, k; u, v)$ которого удовлетворяет уравнению

$$\lambda(u, v) A(j, k; u, v) = \sum_{j'=0}^{N-1} \sum_{k'=0}^{N-1} K_F(j, k; j', k') A(j', k'; u, v), \quad (10)$$

где $K_F(j, k; j', k')$ – ковариационная функция дискретизованного изображения, а $\lambda(u, v)$ при фиксированных u и v постоянна. Функции $A(j, k; u, v)$ являются собственными функциями ковариационной функции, а $\lambda(u, v)$ – ее собственные значения. Как правило, выразить собственные функции в явной форме не удается.

Если ковариационную функцию можно разделить, т. е.

$$K_F(j, k; j', k') = K_C(j', j') K_R(k', k')$$

то ядро разложения Карунена–Лоэва также разделимо:

$$A(j, k; u, v) = A_C(j, u) A_R(k, v)$$

Строки и столбцы матриц, описывающих эти ядра, удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\lambda_R(v)A_R(k,v) = \sum_{k'=0}^{N-1} K_R(k,k')A_R(k',v) \quad (11)$$

$$\lambda_C(u)A_C(j,u) = \sum_{j'=0}^{N-1} K_C(j,j')A_C(j',u)$$

В частном случае, когда ковариационная матрица описывает разделимый марковский процесс первого порядка, собственные функции удается записать в явной форме. Для одномерного марковского процесса с коэффициентом корреляции ρ собственные функции и собственные значения имеют вид:

$$A(j,u) = \left[\frac{2}{N + \lambda^2 u(u)} \right]^{1/2} \sin \left[w(u) \left(j - \frac{N-1}{2} \right) + \frac{(u+1)\pi}{2} \right] \quad (12)$$

и

$$\lambda(u) = \frac{(1 - \rho^2)}{1 - 2\rho \cos[w(u)] + \rho^2},$$

где $0 \leq j \leq N-1$, $u \leq N-1$, $w(u)$ — корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg}(Nw) = \frac{(1 - \rho^2) \sin(w)}{\cos(w) - 2\rho + \rho^2 \cos(w)}.$$

ДВУМЕРНЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАБОТКИ

Большинство алгоритмов обработки дискретных изображений являются линейными: элементы обработанного изображения образуются в виде линейной комбинации элементов исходного изображения. Широкое применение линейных операций объясняется тем, что выполнить их легче, чем нелинейные. Однако при обработке массивов большого размера часто не удастся выполнить даже линейные операции, если отсутствуют эффективные алгоритмы вычисления. Рассмотрим косвенные методы вычислений, опирающиеся на унитарные преобразования и позволяющие проводить обработку более эффективно, чем при использовании традиционных методов.

ОБРАБОТКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Двумерные линейные преобразования можно определить в виде ряда как

$$P(m_1, m_2) = \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} F(n_1, n_2) T(n_1, n_2; m_1, m_2) \quad (1)$$

или соотношение в векторной форме имеет вид

$$p = Tf. \quad (2)$$

Покажем, что подобные линейные преобразования часто можно выполнить более эффективно, если вместо непосредственных вычислений по формулам (1) или (2) воспользоваться косвенными методами с применением двумерных унитарных преобразований.

На рис. 1 приведена структурная схема косвенного метода вычислений, называемого *обобщенной линейной фильтрацией*. Массив $F(n_1, n_2)$, описывающий исходное изображение, подвергается здесь двумерному унитарному преобразованию, в результате которого получается массив коэффициентов преобразования $\mathcal{F}(u_1, u_2)$. Затем составляется линейная комбинация этих коэффициентов, описываемая в общем случае

$$\tilde{\mathcal{F}}(w_1, w_2) = \sum_{u_1=1}^{N_1} \sum_{u_2=1}^{N_2} \mathcal{F}(u_1, u_2) \mathcal{T}(u_1, u_2; w_1, w_2),$$

где $\mathcal{T}(u_1, u_2; w_1, w_2)$ – ядро линейного фильтрующего преобразования. В заключение проводится обратное унитарное преобразование, чтобы получить обработанное изображение $P(m_1, m_2)$.

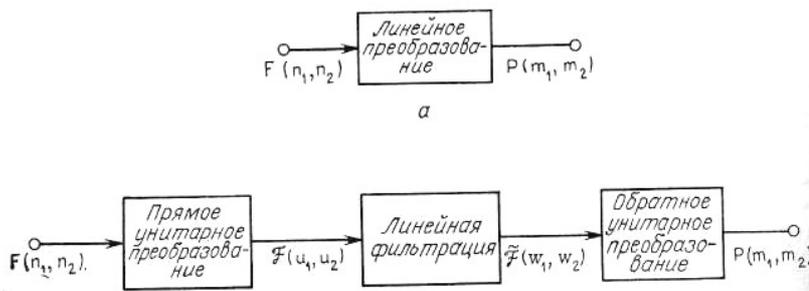


Рис. 1. Структура алгоритмов непосредственной обработки: (а) и обобщенной линейной фильтрации (б).

Такой метод вычисления будет эффективнее, чем непосредственное вычисление по формуле (1), если существуют быстрые алгоритмы унитарного преобразования, а ядро $\mathfrak{Z}(u_1, u_2; w_1, w_2)$ содержит большое количество нулевых элементов.

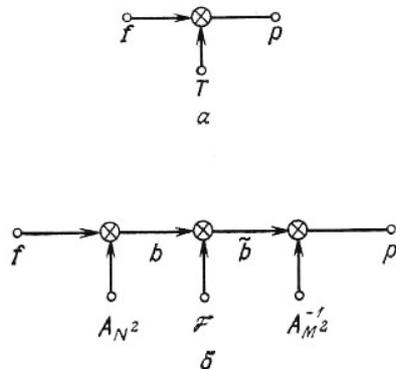


Рис. 2. Структура алгоритмов непосредственной обработки (а) и обобщенной линейной фильтрации (б) при векторном представлении изображений.

При обобщенной линейной фильтрации общее число арифметических действий равно:

Прямое преобразование: N^4 – при непосредственном вычислении;
 $2N^2 \log_2 N$ – при использовании быстрого преобразования.

Линейная фильтрация: $k_g M^2 N^2$ умножений.

Обратное преобразование: M^4 – при непосредственном вычислении;
 $2M^2 \log_2 M$ – при использовании быстрого преобразования.

Здесь $k_g (0 \leq k_g \leq 1)$ – коэффициент заполнения матрицы \mathfrak{Z} ненулевыми элементами. Если $k_g = 1$ и производится непосредственное вычисление унитарного преобразования, то очевидно, что обобщенная линейная фильтрация оказывается не столь эффективной, как непосредственная обработка. Однако, если применяются быстрые алгоритмы, подобные быстрому преобразованию Фурье (БПФ), обобщенная линейная фильтрация будет эффективнее, чем непосредственная обработка, если коэффициент заполнения матрицы \mathfrak{Z} удовлетворяет неравенству

$$k_g < k_d - (2/M^2) \log_2 N - (2/N^2) \log_2 M. \quad (3)$$

Во многих случаях матрица \mathfrak{Z} бывает разрежена и неравенство выполняется. Вообще говоря, унитарные преобразования часто приводят к декорреляции элементов матрицы \mathbf{T} и матрица \mathfrak{Z} оказывается разреженной. Кроме того, матрицу \mathfrak{Z} часто удается разредить без внесения больших погрешностей, если заменить нулями ее малые по величине элементы.

СВЕРТКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БПФ

Для оператора свертки конечных массивов или дискретизованного оператора свертки эквивалентный выходной вектор можно найти, выбирая определенные элементы расширенного выходного вектора циклической свертки \mathbf{k}_E или соответствующей ему матрицы \mathbf{K}_E .

Эффективная процедура вычисления свертки, состоящая из следующих этапов:

1. Записать матрицу импульсного отклика в левом верхнем углу нулевой матрицы J -го порядка, причем $J \geq M$ для случая свертки конечных массивов и $J \geq N$ для дискретизованной свертки. Выполнить двумерное преобразование Фурье расширенной матрицы импульсного отклика $\mathcal{H}_E = \mathbf{A}_J \mathbf{H}_E \mathbf{A}_J$. (4)

2. Записать матрицу исходного изображения в верхнем левом углу нулевой матрицы J -го порядка и выполнить двумерное преобразование Фурье расширенной матрицы исходного изображения $\mathcal{F}_E = \mathbf{A}_J \mathbf{F}_E \mathbf{A}_J$. (5)

3. Выполнить скалярное умножение $\mathcal{H}_E(m, n) = J \mathcal{H}_E(m, n) \mathcal{F}_E(m, n)$, (6)
где $1 \leq m \leq J$ и $1 \leq n \leq J$.

4. Произвести обратное преобразование Фурье $\mathbf{K}_E = (\mathbf{A}_J)^{-1} \mathbf{K}_E (\mathbf{A}_J)^{-1}$. (7)

5. После выбора нужных элементов сформировать искомую выходную матрицу

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{S1}_J^{(M)}] \mathbf{K}_E [\mathbf{S1}_J^{(M)}]^T \quad (8a)$$

или $\mathbf{G} = [\mathbf{S2}_J^{(M)}] \mathbf{K}_E [\mathbf{S2}_J^{(M)}]^T$. (8б)

Важно, чтобы порядок J расширенных матриц \mathcal{H}_E и \mathcal{F}_E удовлетворял соответствующим неравенствам. При $J = N$ на левом и верхнем краях выходной матрицы будут находиться полосы ошибочных элементов, имеющие ширину в $L-1$ отсчет (рис. 3, а, б).

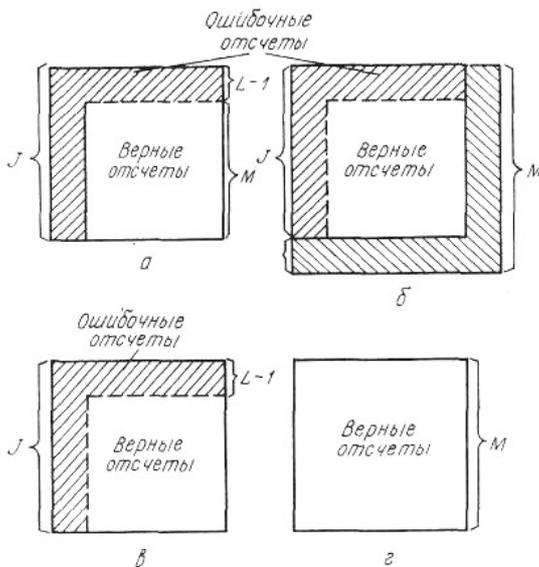


Рис. 3. Циклические ошибки. (Нижняя и правая стороны матрицы \mathbf{F} отсечены.)
а — фильтрация типа В; $J = N$, $M = N - L + 1$.
б — фильтрация типа D; $J = N$, $M = N + L - 1$.
в — фильтрация типа В; $J = M$, $M = N - L + 1$.
г — фильтрация типа D; $J = M$, $M = N + L - 1$.

Они образуются в результате так называемой циклической ошибки, при $J = M$, необходимо отсечь правый и нижний края исходной матрицы.

Однако в результате получится, что элементы выходного массива, расположенные сверху и по левому краю, будут ошибочными.

При обработке сигналов во многих случаях оказывается, что на различные входные массивы воздействуют операторы с одним и тем же импульсным откликом и, следовательно, первый этап алгоритма (вычисление \mathcal{H}_E) достаточно выполнить только один раз.

При использовании алгоритма БПФ для случаев прямого и обратного преобразований требуется выполнить примерно по $2J^2 \log_2 J$ арифметических операций. Скалярное умножение проводится за J^2 операций, т. е. всего требуется $J^2(1 + 4 \log_2 J)$ операций. Если входная матрица содержит $N \times N$ элементов, выходная $M \times M$, а матрица импульсного отклика $L \times L$ элементов, то для вычисления конечной свертки требуется $N^2 L^2$ операций, а для дискретизованной свертки $M^2 L^2$ операций. Если размер L матрицы импульсного отклика достаточно велик по сравнению с размером N исходной матрицы, то свертка с преобразованием оказывается эффективнее прямой свертки, причем число операций может уменьшиться раз в десять или более. На рис. 4 приведен график зависимости L от N для случая,

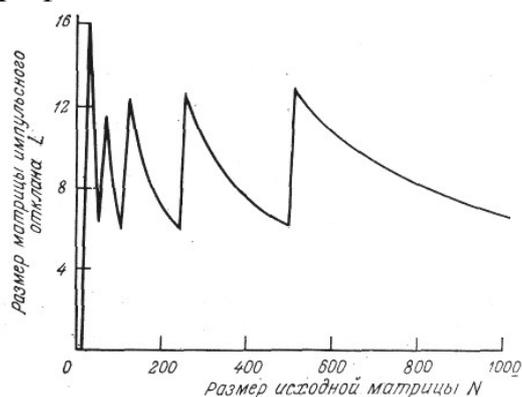


Рис. 4. Сравнение эффективности двух методов получения конечной свертки: прямого и с преобразованием Фурье.

когда оба метода вычисления свертки конечных массивов (прямой и с преобразованием Фурье) имеют одинаковую эффективность. Зубчатость графика объясняется тем, что с ростом N параметр J изменяется скачкообразно, принимая значения 64, 128, 256 и т.д.

Для вычисления свертки с преобразованием Фурье требуется меньшее число операций, чем в случае ее прямого вычисления, если длина импульсного отклика достаточно велика. Однако если обрабатываемое изображение также имеет большие размеры, то относительная эффективность метода с использованием преобразования Фурье понижается. Кроме того, при вычислении преобразования Фурье больших матриц возникают трудности, связанные с обеспечением точности расчетов. Проблемы удается разрешить, прибегая к блочной фильтрации изображения, когда большую матрицу подразделяют на ряд перекрывающихся блоков, обрабатываемых поочередно.

На рис. 5, а показано, как из левого верхнего угла большой матрицы извлекается блок, содержащий $N_B \times N_B$ элементов. После свертки его с импульсным откликом, состоящим из $L \times L$ элементов, получается блок размера $M_B \times M_B$ элементов, который помещают в левый верхний угол выходной матрицы (рис. 5, а).

Далее из обрабатываемой матрицы извлекают следующий блок размера $N_B \times N_B$ элементов и из него получают второй блок обработанного изображения размера $M_B \times M_B$, примыкающий к первому. Как показано на рис. 5, б, второй блок исходного изображения должен перекрываться с первым блоком в полосе шириной $L-1$ элемент. Тогда обработанные блоки будут стыковаться без зазора. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будут обработаны все блоки, прилегающие к верхней строке матрицы.

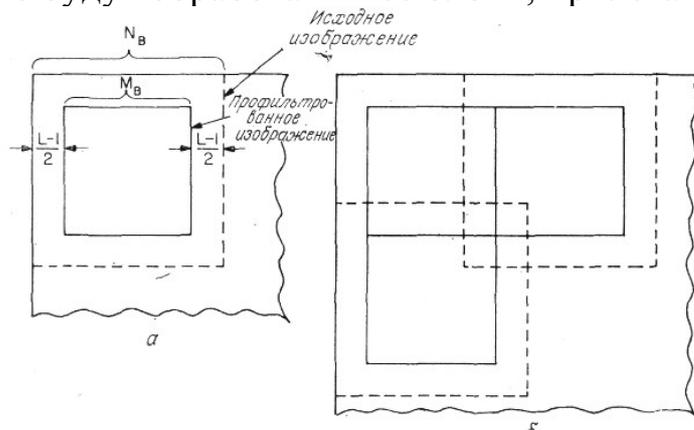


Рис. 5. Размещение блоков при блочной фильтрации изображения: а – первый блок; б – вторые блоки в строке и столбце блоков.

Если в этой строке блоков последний блок окажется неполным, в него следует добавить нулевые элементы. Далее извлекают блок, находящийся в начале второй строки и перекрывающийся с блоками первой строки в полосе шириной $L-1$ элемент. Процесс продолжается до тех пор, пока не будут определены все элементы обработанного изображения. Для получения свертки с помощью преобразования Фурье требуется $O_F = N^2 + 2N^2 \log_2 N$ операций. При блочной обработке, когда размер блоков равен $N_B \times N_B$, необходимо $\theta_B = R^2 [N_B^2 + 2N_B^2 \log_2 N_B]$ операций, где число блоков R – округленное в большую сторону значение дроби $N/[N_B + L - 1]$. Хант определил, как оптимальный размер блока зависит от величины матриц исходного изображения и импульсного отклика.

**6. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ**

Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет математики и информатики

Н.П. Семичевская, Л.А. Соловцова

ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ В СРЕДЕ MATLAB
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ IMAGE PROCESSING TOOLBOX

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Благовещенск 2005

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	*3)
Лабораторная работа №1 Представление изображений в среде MATLAB. Типы изображений.	5)
Лабораторная работа №2 Битовая карта изображения. Функции PIXVAL и MEAN2.	9)
Лабораторная работа №3 Работа с контрастностью изображения (IMADJUST, HISTEQ)	13)
Лабораторная работа №4 Построение гистограммы распределения яркостей элементов изображения.	17)
Лабораторная работа №5 Дискретная линейная двумерная обработка. Двумерное дискретное преобразование Фурье.	21)
Лабораторная работа №6 Двумерные унитарные преобразования. Преобразование Адамара (Уолша). Преобразование Хаара.	26)
<i>ПРИЛОЖЕНИЕ 1</i> Исходные образцы изображений для обработки	30)
<i>ПРИЛОЖЕНИЕ 2</i> Титульный лист отчета по лабораторной работе	31)
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	32)

*Страницы указаны как в методическом пособии)

Методическое пособие предназначено для студентов специальности 230201 по дисциплине «Цифровая обработка изображений» для выполнения лабораторного практикума. Пособие содержит 6 лабораторных работ с кратким изложением теоретического материала, примерами программ, пояснениями и иллюстрациями, в конце каждой лабораторной работы приведены задания, которые необходимо выполнить.

Требования к отчету по оформлению лабораторных работ

1. Для выполнения лабораторных работ студенту выдается тестовое изображение из 12-ти предложенных (смотреть приложение 1).
2. Титульный лист к отчету по лабораторной работе оформляется в соответствии со стандартом (смотреть приложение 2)
3. В отчете следует отразить этапы выполнения лабораторной работы, указать основные методы, алгоритмы или функции, которые использовались при выполнении работы. Листинг программы сохранять в **.m** файле.

Результаты полученные в процессе работы представлять как исходное изображение и результирующее изображение (изображение обработанное).

ВВЕДЕНИЕ

Интегрированные среды для моделирования и исполнения программ цифровой обработки изображений и сигналов содержат мощные средства для инженерно-научных расчетов и визуализации данных. Большинство современных пакетов поддерживает визуальное программирование на основе блок-схем. Это позволяет создавать программы специалистам, не владеющим техникой программирования. К таким пакетам относится Image Processing Toolbox системы MATLAB, разработанный фирмой MathWorks. Этот пакет владеет мощными средствами для обработки изображений. Они имеют открытую архитектуру и позволяют организовывать взаимодействие с аппаратурой цифровой обработки сигналов, а также подключать стандартные драйвера.

Система MATLAB и пакет прикладных программ Image Processing Toolbox (IPT) является хорошим инструментом разработки, исследования и моделирования методов и алгоритмов обработки изображений. При решении задач обработки изображений пакет IPT позволяет идти двумя путями. Первый из них состоит в самостоятельной программной реализации методов и алгоритмов. Другой путь позволяет моделировать решение задачи с помощью готовых функций, которые реализуют наиболее известные методы и алгоритмы обработки изображений. И тот, и другой способ оправдан. Но все же для исследователей и разработчиков методов и алгоритмов обработки изображений предпочтительным является второй путь.

Это объясняется гибкостью таких программ, возможностью изменения всех параметров, что очень актуально при исследовании, разработке, определении параметром регуляризации и т.д. Прежде чем использовать для решения каких-либо задач обработки изображений стандартные функции пакета IPТ, разработчик должен в совершенстве их исследовать. Для этого он должен точно знать, какой метод и с какими параметрами реализует та или иная функция.

В том и другом подходе к решению задачи обработки видеоданных объектом исследования является изображение. Для этого рассмотрим коротко особенности представления изображений в IPТ.

Тема. Представление изображений в среде MATLAB. Типы изображений

Цель. Научиться считывать изображения из файлов, просматривать их в среде MATLAB преобразовывать их типы, менять размеры смотрового окна.

Краткие теоретические сведения

Типы изображений

Изображения бывают *векторными* и *растровыми*. Векторным называется изображение, описанное в виде набора графических примитивов. Растровые же изображения представляют собой двумерный массив, элементы которого (пикселы) содержат информацию о цвете. В цифровой обработке используются растровые изображения. Они в свою очередь делятся на типы - *бинарные, полутоновые, палитровые, полноцветные*.

Элементы *бинарного* изображения могут принимать только два значения - 0 или 1. Природа происхождения таких изображений может быть самой разнообразной. Но в большинстве случаев, они получаются в результате обработки полутоновых, палитровых или полноцветных изображений методами бинаризации с фиксированным или адаптивным порогом. Бинарные изображения имеют то преимущество, что они очень удобны при передаче данных.

Полутоновое изображение состоит из элементов, которые могут принимать одно из значений интенсивности какого-либо одного цвета. Это один из наиболее распространенных типов изображений, который применяется при различного рода исследованиях. В большинстве случаев используется глубина цвета 8 бит на элемент изображения.

В *палитровых* изображениях значение пикселов является ссылкой на ячейку карты цветов (палитру). Палитра представляет собой двумерный массив, в столбцах которого расположены интенсивности цветовых составляющих одного цвета.

В отличие от палитровых, элементы *полноцветных* изображений непосредственно хранят информацию о яркостях цветовых составляющих.

Выбор типа изображения зависит от решаемой задачи, от того, насколько полно и без потерь нужна информация может быть представлена с заданной глубиной цвета. Также следует учесть, что использование полноцветных изображений требует больших вычислительных затрат.

Пример

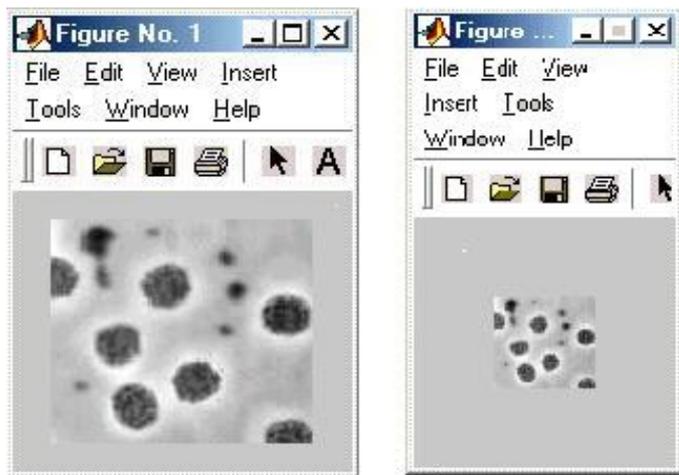
```
I=imread('micro9.jpg'); %чтение рисунка в матрицу I
imshow(I); %вывод рисунка в графическом окне, описанного матрицей I
pause; %пауза
```

```

W=gcf; %запоминание графического окна в качестве объекта W
trueSize(W,[100,50]); %изменение размера окна до размера 100x50
pause;
trueSize; %возвращение размера окна к реальному размеру W
h=gcf; %запоминание графического окна в качестве объекта h
pause; %пауза
close(h); %закрытие окна
A=imread('isberg.jpg'); %чтение цветного рисунка в матрицу A
fprintf('\n вывод A\n'); %вывод текста в командную строку
imshow(A); %вывод рисунка, описанного матрицей A
pause; %пауза
[m,n] = size(A);
figure('Units','pixels','Position',[100 100 n m])%вывод рисунка, описанного
матрицей A
image(A);
set(gca,'Position',[0 0 1 1])
fprintf('\n вывод B\n');
B=im2double(A); %преобразует входной рисунок в рисунок со знач-ми
%класса double
imshow(B); %вывод рисунка
pause; %пауза
fprintf('\n вывод C\n');
figure('Units','pixels','Position',[100 100 n m])
C=im2uint8(A); %преобразует входной рисунок в рисунок со знач-ми класса
uint8
imshow(C);
I=imread('isberg.jpg'); %чтение рисунка в матрицу I
imshow(I);
pause;
[X,map]=rgb2ind(I, 8); %преобразует цветной рисунок в индексированное
изобр-ие
Y=ind2gray(X,map); %преобразует входной рисунок в рисунок в 8-ми
градациях серого
imshow(Y);
pause;
Z = im2bw(I, 0.4); %преобразует входной рисунок в двоичное изображение
figure('Name','im2bw(I,0.4)');
imshow(Z);

```

pause;



а)

б)

Рис. 1 Вид изображений в окне MATLAB: а) вывод считанного изображения из файла micro9.jpg; б) изменение размера окна до размера 100x50 (TRUESIZE).



а)

б)

Рис.2 Преобразование исходного цветного изображения в рисунок с 8 уровнями серого.



в)

Рис.3 Двоичное изображение.

Задание к лабораторной работе №1

1. Используя функции IMAGE, IMAGESC, IMREAD, IMWRITE, IMSHOW, TRUESIZE считать и воспроизвести изображение в рабочем окне MATLAB.
2. Используя функции перевести исходное изображение в классы double, uint8.
3. Преобразовать исходное изображение в двоичное.
4. Используя функцию IMFINFO получить информацию о файле с исходным изображением.

Лабораторная работа №2

(2 часа)

Тема. Битовая карта изображения. Функции PIXVAL и MEAN2.

Цель. По исходному изображению получить его битовую карту. Построить окно 50*50 пикселей на изображении и получить информацию о распределении яркости в построенном окне. Сделать окно скользящим.

Краткие теоретические сведения

Цифровые изображения (поля) принято представлять в виде матриц (двумерных прямоугольных массивов чисел) с неотрицательными элементами (для полутоновых, палитровых и полноцветных изображений значения элементов заключены в диапазоне [0 255]). Каждый элемент матрицы отвечает одному элементу изображения - пикселю. Матрицу значений яркостей изображения называют битовой картой изображения. В зависимости от типа изображения они по-разному представляются в разных форматах. Этот момент будет очень важным при создании программ в среде IPT. Наиболее удобно зависимость способов представления элементов изображения (диапазон их значений) от типа и формата представить в виде таблицы.

Тип изображения	double	uint8
Бинарное	0 и 1	0 и 1
Полутоновое	[0, 1]	[0, 255]
Палитровое	[1, размер палитры], где 1 - первая строка палитры	[0, 255], где 0 - первая строка палитры.*
Полноцветное	[0, 1]	[0, 255]

***Примечание.** При программной реализации лучше избегать использования такой индексации строк. MATLAB корректно воспринимает индексацию с первой, а не нулевой строки.

В дальнейшем, при рассмотрении методов обработки изображений, будем считать, что изображение представляется матрицей чисел $M \times N$ (размер матрицы), где значение каждого элемента отвечает определенному уровню квантования его энергетической характеристики (яркости) – это и есть битовая карта изображения. Это так называемая *пиксельная система координат*. Она применяется в большинстве функций пакета IPT.

Существует также *пространственная система координат*, где изображение представляется непрерывным числовым полем квадратов с единичной величиной. Количество квадратов совпадает с числом пикселей. Значение интенсивности элемента в центре квадрата совпадает со значением соответствующего пикселя в пиксельной системе координат. При решении практических задач, связанных с измерениями реальных геометрических размеров объектов на изображении, удобно использовать пространственную систему координат, так как она позволяет учитывать разрешение (количество пикселей на метр) системы.

Пример: Неподвижное окно на исходном изображении

```
imfinfo('micro9.jpg')
[I,x]=imread('micro9.jpg'); %чтение рисунка в матрицу I
for j=1:50,
    for k=1:50,
        for l=1:3
            I2(j,k,l)=I(j,k,l);
        end
    end
end
imshow(I2);%вывод окна 50*50 в графическом окне
pause;
[m,n,t] = size(I);
figure('Units','pixels','Position',[100 100 n m]);
%регулирование значений интенсивности изображения в окне
I3=imadjust(I2,[0.4 0.6],[,]);
imshow(I3);%вывод окна 50*50 с измененной интенсивностью в графическом
окне
pause;
[m,n,t] = size(I);
figure('Units','pixels','Position',[100 100 n m]);
for j=1:50,
    for k=1:50,
        for l=1:3
            I(j,k,l)=I3(j,k,l);
        end
    end
end
end
```

```

imshow(I);
pause;
%Вывод битовой карты окна t+10*t+10
t=15;
for j=t:t+10,
    for k=t:t+10,
        for l=1:3
            I4(j,k,l)=I(j,k,l);
        end
    end
end
end
I4(:,:,1)
imshow(I4);

```

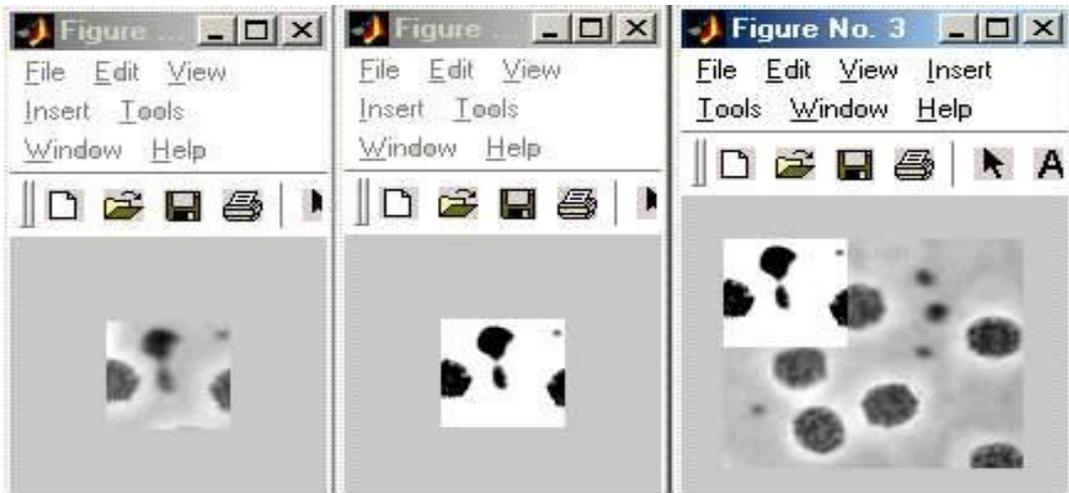


Рис.1 а) окно 50*50; б) окно 50*50 с измененной интенсивностью; в) исходное изображение с наложением окна 50*50 с измененной интенсивностью.

Задание к лабораторной работе №2

1. Используя функцию `IMFINFO` получить информацию о файле с исходным изображением.
2. Получить битовую карту исходного изображения
3. На исходном изображении получить окно 50*50 пикселей. Для того чтобы окно было видимым на изображении изменить его интенсивность с помощью функции `IMADJUST`.
4. Получить битовую карту окна 50*50.
5. Используя функцию `PIXVAL` получить информацию о значении яркости в конкретном пикселе исходного изображения.
6. Используя функцию `MEAN2` вычислить среднее значение элементов матрицы исходного изображения и окна 50*50.

7. Написать программу передвижения окна 50*50 по исходному изображению.

Лабораторная работа №3

(2 часа)

Тема. Работа с контрастностью изображения (IMADJUST, HISTEQ)

Цель. Изменение контраста (увеличить/уменьшить) всего изображения и в окне заданного размера.

Краткие теоретические сведения

Технология повышения контрастности изображений

Пакет Image Processing Toolbox содержит несколько классических функций улучшения изображений. Эти функции являются очень эффективными при повышении контраста: IMADJUST, HISTEQ. Приведем их сравнительный анализ при использовании для улучшения полутоновых изображений.

Считывание изображений.

Считаем полутоновое изображение: micro9.jpg . Также считаем индексное RGB-изображение: isberg.jpg.

```
M=imread('micro9.jpg');
figure('Name','Исходник');
imshow(M);
I = imread('isberg.jpg');
figure('Name','Исходник');
imshow(I);
[X map]=rgb2ind(I,16);
J = ind2rgb(X,map);
figure('Name','Индексированное RGB');
imshow(J);
```

Улучшение полутоновых изображений.

Проведем сравнительный анализ эффективности использования следующих функций к улучшению изображений:

IMADJUST - увеличение контраста изображений путем изменения диапазона интенсивностей исходного изображения.

HISTEQ - выполнение операции эквализации (выравнивания) гистограммы. В этом подходе увеличение контрастности изображения происходит путем преобразования гистограммы распределения значений интенсивностей элементов исходного изображения. Существуют также другие подходы к видоизменению гистограмм.

ADAPTHISTEQ - выполнение контрастно-ограниченного адаптивного выравнивания гистограммы. Здесь методика повышения контрастности

изображений базируется на анализе и эквализации гистограмм локальных окрестностей изображения.

Проведем краткий анализ эффективности обработки изображений с помощью функций `IMADJUST`, `HISTEQ`. В основе этих функций лежат разные методы: в `IMADJUST` - преобразование диапазона яркостей элементов изображения, в `HISTEQ` - эквализация гистограммы. Каждый из этих методов (функций) нацелен на устранение некоторого недостатка, поэтому может быть применен для эффективной обработки такого класса изображений, на которых есть такой тип искажений.

Пример.

```
M=imread('micro9.jpg');
figure('Name','Исходник');
imshow(M);
% HISTEQ
J = histeq(M(:,:,1));
figure('Name','255');
imshow(J);
J = histeq(M(:,:,1),10);
figure('Name','10');
imshow(J);
J = histeq(M(:,:,1),4);
figure('Name','4');
imshow(J);
%IMADJUST
J = imadjust(M,[0. 1],[,]);
figure('Name','imadjust(I,[0. 1])');
imshow(J);
J = imadjust(M,[0.1 0.5],[,]);
figure('Name','imadjust(I,[0.1 0.5])');
imshow(J);
J = imadjust(M,[0.5 0.7],[,]);
figure('Name','imadjust(I,[0.5 0.7])');
imshow(J);
%Работа с индексированным изображением
I = imread('isberg.jpg');
figure('Name','Исходник');
imshow(I);
[X map]=rgb2ind(I,16);
J = ind2rgb(X,map);
figure('Name','ind2rgb(X,map)');
imshow(J);
% HISTEQ
JJ = histeq(J(:,:,1), 28);
%figure('Name','28');
```

```

    %imshow(JJ);
    % IMADJUST
    JI = imadjust(J,[0.3 0.7],[,]);
    %figure('Name','imadjust(I,[0.3 0.7])');
    %imshow(JI);

```

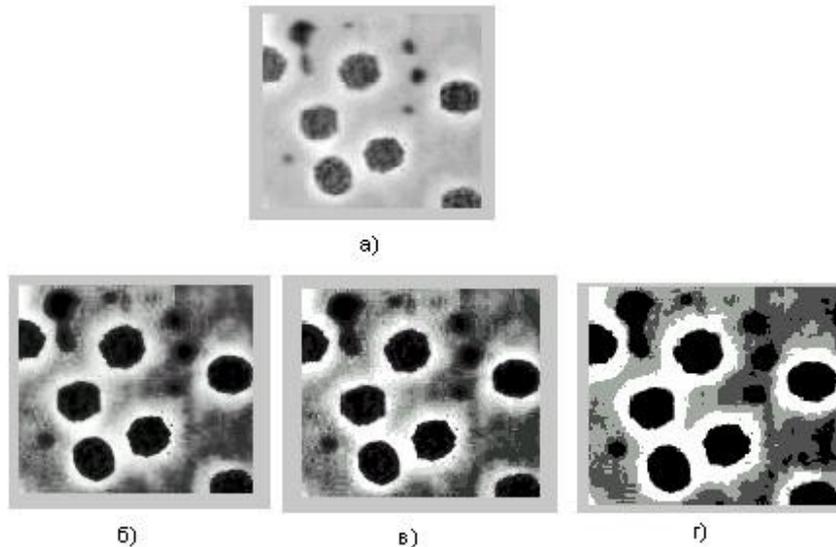


Рис.1 Регулирование контрастности исходного изображения а) с использованием гистограммных преобразований HISTEQ: б) 256 уровней яркости; в) 10 уровней яркости; г) 4 уровня яркости.

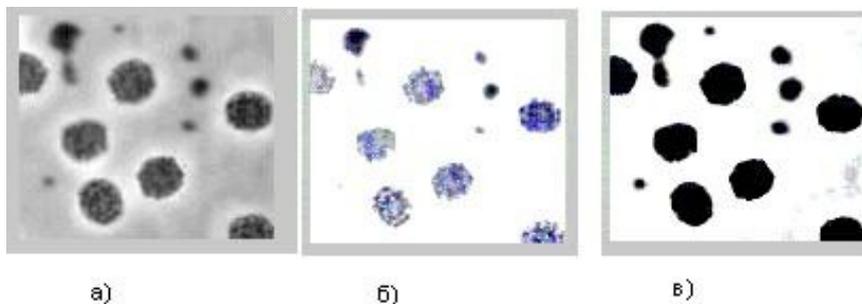


Рис.2 Регулирование контрастности исходного изображения а) путем изменения диапазона интенсивностей исходного изображения: б) в диапазоне [0.1 0.5]; в) в диапазоне [0.5 0.7].

Задание к лабораторной работе №3

1. Используя функции IMADJUST, HISTEQ изменить контрастность тестового изображения при различных параметрах функций. Исходное и полученные изображения выводить в рабочих окнах MATLAB.
2. Используя функции IMADJUST, HISTEQ увеличить контрастность в движущемся окне 50*50 (наложить окно на исходное изображение).

3. Получить двухградационное изображение, используя функцию HISTEQ.

Тема. Построение гистограммы распределения яркостей элементов изображения.

Цель. Построение общей гистограммы исходного изображения и локальной гистограммы для движущегося по изображению окна. Определение границ диапазона яркостей.

Краткие теоретические сведения

Гистограмма этот термин впервые был использован Пирсоном в 1895 г. Гистограмма является графическим представлением распределения частот выбранных переменных, на котором для каждого интервала (класса) рисуется столбец, высота которого пропорциональна частоте класса.

Для построения общей гистограммы полутонового изображения используется, как правило, 256 уровней яркости (интенсивности) изображения (ширина интервалов гистограммы равна 1), а высота каждого столбца – это количество пикселей изображения соответствующей яркости (интенсивности).

Можно рассчитывать максимально допустимый уровень яркости и минимальный уровень яркости для заданного изображения, и тогда диапазон уровней яркости может быть взят меньшим, чем 256 уровней.

В качестве примера рассмотрим гистограммы изображений `micro9.jpg` и `micro2.jpg`. Гистограмма изображения `micro2.jpg` занимает только центральную часть возможного диапазона яркостей на рис.2.

```
I=imread('micro9.jpg');
figure('Name','micro9.jpg");
    imshow(I);
    figure;
    imhist(I(:, :, 1));
J=imread('micro2.jpg');
figure('Name',"micro2.jpg");
    imshow(J);
    figure;
imhist(J(:, :, 1));
```

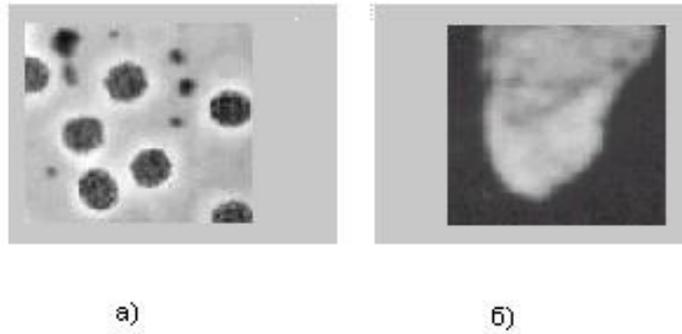


Рис.1 Исходные изображения а) micro9.jpg; б) micro2.jpg.

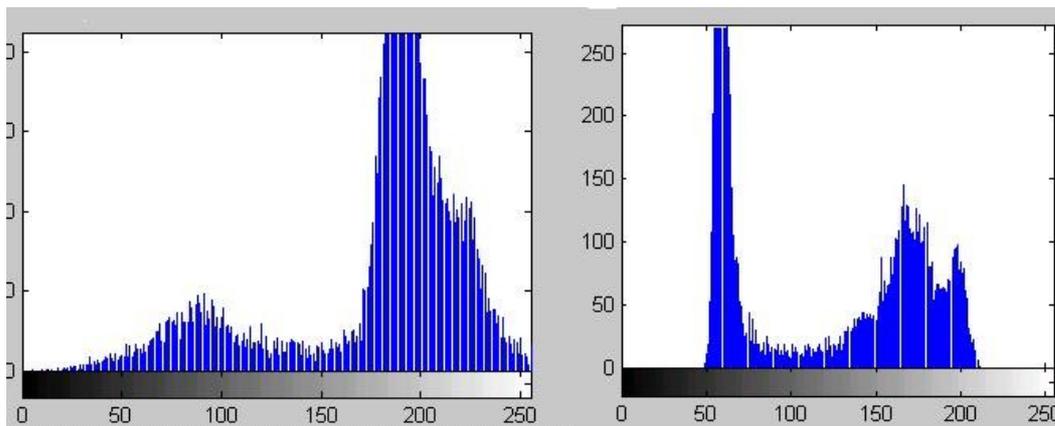


Рис.2 Гистограммы изображений micro9.jpg и micro2.jpg.

Один из критериев выбора того или иного метода обработки может базироваться на анализе гистограммы распределения значений яркостей элементов изображения.

С целью повышения контраста изображений, на которых мелкие детали на темных участках видимы плохо, и сами изображения характеризуются низким контрастом, используют методы видоизменения гистограммы. Суть этих методов состоит в преобразовании яркостей исходного изображения таким образом, чтобы гистограмма распределения яркостей приобрела желательную форму. Оптимальным с точки зрения зрительного восприятия человеком является изображение, элементы которого имеют равномерное распределение яркостей. Получают улучшенные изображения путем выравнивания гистограммы, то есть стремятся достичь равномерности распределения яркостей обработанного изображения. У. Фрэй исследовал метод видоизменения гистограмм, который обеспечивал экспоненциальную или гиперболическую форму распределения яркостей улучшенного изображения. Д. Кетчам усовершенствовал этот метод, применив скользящую "локальную" гистограмму, полученную для некоторого участка изображения.

Это преобразование эффективно для улучшения визуального качества низко контрастных деталей. Существует также ряд известных методов

видоизменения гистограммы, которые приводят к получению изображений с заранее заданным распределением.

Описанные методы преобразования гистограммы могут быть глобальными, то есть использовать информацию обо всем изображении, и скользящими, когда для преобразования используются локальные области изображения. Рассмотренные выше подходы служат основой широкого класса гистограммных методов преобразования изображений.

Основным этапом при создании методов гистограммных преобразований является корректное построение гистограммы распределения яркостей элементов изображения. Для этого в большинстве случаев используется встроенная функция `IMHIST`.

Пример

```
I=imread('micro9.jpg');
figure('Name','Исходник');
imshow(I);
[m n t]=size(I);
figure;
imhist(I(:, :, 1));
J=imread('micro2.jpg');
figure('Name','Исходник');
imshow(J);
[k l]=size(J);
figure;
imhist(J(:, :, 1));
%Построение общей гистограммы исходного изображения micro9.jpg
for s = 1:256
    H(s) = 0;
end
for i = 1:m
    for j = 1:n
        H(I(i,j,1)) = H(I(i,j,1)) + 1;
    end
end
%grid on
figure;
for s = 1:256
    line([s s], [0 H(s)])
end
axis([0 255 0 350])
pause;
```

Для растяжения динамического диапазона можно использовать функцию `IMADJUST`. Если гистограмма изображения характеризуется

неравномерностью распределения, то для выравнивания гистограммы можно применить функцию HISTEQ.

Задание к лабораторной работе №4

1. Построить общую гистограмму исходного изображения, используя функцию IMHIST.
2. Для окна 50*50 построить гистограмму программным методом (написать программный код) и с помощью стандартной функции IMHIST, сравнить полученные гистограммы.
3. Определить диапазон яркостей исходного изображения.

Лабораторная работа №5

(2 часа)

Тема. Дискретная линейная двумерная обработка. Двумерное дискретное преобразование Фурье.

Цель. Используя стандартную функцию FFT2 получить преобразованное изображение. Написать программу для двумерного преобразования Фурье, сравнить действия стандартного фильтра и своего.

Краткие теоретические сведения

Основой большинства методов линейной фильтрации в пространственной области являются ортогональные преобразования. Существует три основных области применения двумерных ортогональных преобразований для обработки изображений. Во-первых, преобразования используют для выделения характеристик признаков изображения. Второй областью применения является кодирование изображений, когда ширина спектра уменьшается за счет отбрасывания или грубого квантования малых по величине коэффициентов преобразования. Третья область применения - это сокращения размерности при выполнении вычислений. К таким преобразованиям принадлежат преобразования Фурье, синусные, косинусные, волновые преобразования, а также преобразования Карунена-Лоева, Уолша, Хаара и Адамара. Однако и эти преобразования не обеспечивают обработки изображений в масштабе реального времени из-за своей вычислительной сложности.

Синтаксис команд для выполнения двумерного преобразования Фурье:

$$Y = \text{fft2}(X)$$

$$Y = \text{fft2}(X, m, n)$$

Функция $Y=fft2(X)$ вычисляет двумерное ДПФ, возвращая результат в матрице комплексных чисел Y , имеющей тот же размер, что и матрица X ; X может быть вектором, в этом случае возвращается вектор Y , имеющий такую же ориентацию, что и вектор X .

Функция $FFT2(X, m, n)$ вычисляет двумерное преобразование Фурье матрицы $m \times n$, при необходимости дополняя нулями или усекая исходную матрицу X . Возвращается матрица Y размера $m \times n$. Массив Y имеет формат представления данных `double`.

Двумерное преобразование Фурье вычисляется выполнением двух одномерных преобразований $FFT(FFT(x).')$; сначала вычисляется ДПФ каждого столбца, а затем каждой строки результата [6].

Пример1

```
I1=imread('micro9.jpg');
[M,N,t]=size(I1);
I2=double(I1)+1;
for j=1:M
    for k=1:N
        I3(j,k)=I2(j,k,1);
    end
end
J=fft2(I3);
J1=real(J);
J2=imag(J);
J3=abs(J);
a=-2*pi*i/sqrt(M*N);
for j=1:N
    for k=1:N
        Ac(j,k)=exp(a*j*k);
    end
end
for j=1:M
    for k=1:M
        Ar(j,k)=exp(a*j*k);
    end
end
P=Ar*I3*Ac/sqrt(M*N);
P1=real(P);
P2=imag(P);
P3=abs(P);
figure('Name','Исходное изображение');
imshow(I1);
figure('Name','Преобразованное (1) - вещ часть');
imshow(J1);
figure('Name','Преобразованное (1) - мним часть');
```

```

imshow(J2);
% figure('Name','Преобразованное (1) - модуль');
% imshow(J3);
figure('Name','Преобразованное (2) - вещ часть');
imshow(P1);
% figure('Name','Преобразованное (2) - мним часть');
% imshow(P2);
% figure('Name','Преобразованное (2) - модуль');
% imshow(P3);

```

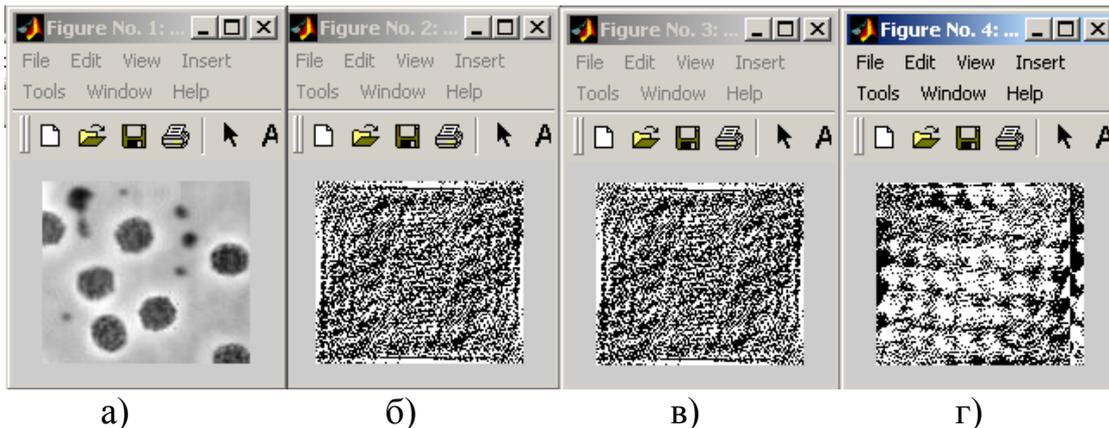


Рис. 1. Преобразование Фурье исходного изображения а): б) преобразование Фурье функцией FFT2; в) действительная часть преобразования Фурье; г) мнимая часть преобразования Фурье.

Сформируем двумерный сигнал, являющийся суммой двух пространственных волн. Выведем его на экран в виде полутонового изображения (рис. 2, а) и трехмерной поверхности (рис.2, в). Затем вычислим спектр сигнала и выведем его на экран (рис. 2, д). Так как спектр симметричен, 4 отчетливых пика на рис. 2, д соответствуют двум частотам волн, из которых сформировано исходное изображение.

Удалим из спектра пики, соответствующие одной из частот (рис. 2, е). Восстановим с помощью обратного преобразования Фурье из отредактированного спектра двумерный сигнал. Результат восстановления выводится на экран в виде полутонового изображения (рис. 2, б) и трехмерной поверхности (рис. 2, г).

Пример 2

```

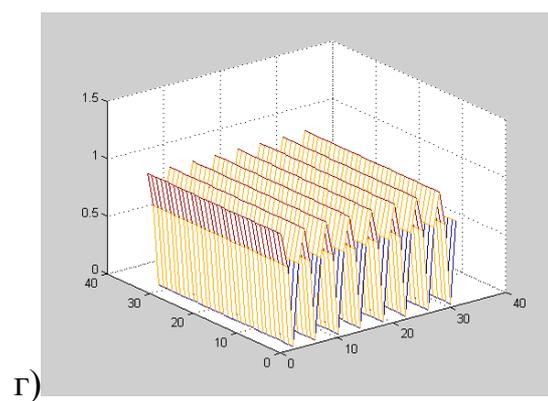
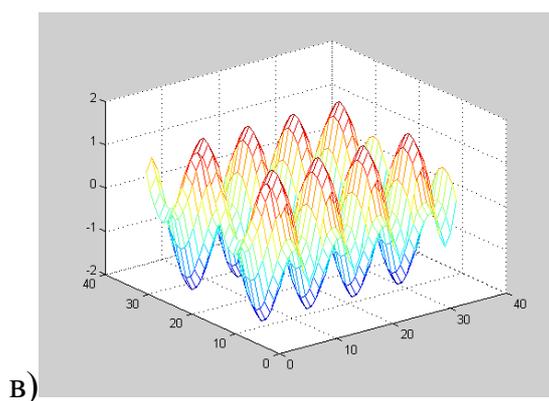
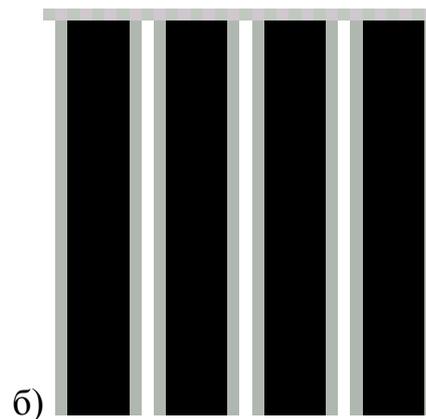
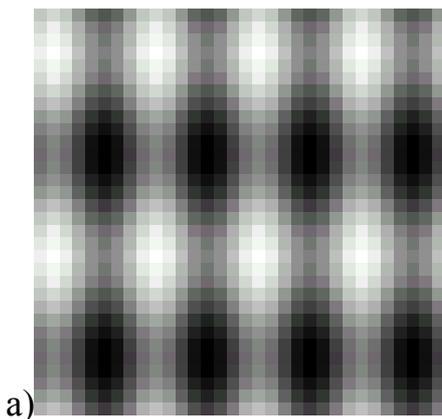
% Пример демонстрирует двумерное
% прямое и обратное преобразования Фурье
% Формирование исходного изображения,
[x, y]=meshgrid(1:32);
I=sin(2*pi*x/8)+sin(2*pi*y/16);
% Вывод исходного изображения на экран.

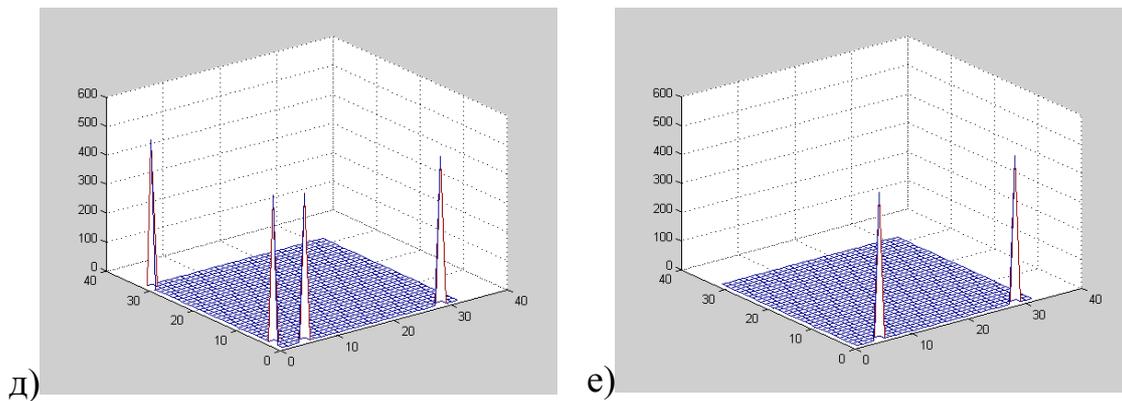
```

```

imshow(mat2gray(I));
% Вывод исходного изображения в виде 3D-поверхности.
figure, mesh(x,y, I);
% Прямое преобразование Фурье.
h=fft2(I);
% Вывод на экран спектра исходного изображения.
figure, mesh(x,y, abs(h));
% Обнуление части спектра.
h(1:32,1:2)=0;
% Вывод на экран получившегося спектра.
figure, mesh(x,y, abs(h));
% Обратное преобразование Фурье.
I=ifft2(abs(h));
% Вывод на экран результирующего изображения.
figure, imshow(mat2gray(I));
% Вывод на экран результирующего изображения в виде 3D-поверхности.
figure, mesh(x, y, abs(I));

```





Задание к лабораторной работе №5

1. Для исходного изображения получить преобразованное изображение, используя функцию FFT2.
2. Написать программный код для преобразования Фурье и преобразовать исходное изображение, сравнить полученные преобразованные изображения.
3. Получить смещение спектра в центр картинке.
4. Вывести исходное изображение в виде 3D поверхности, удалить пики из спектра. Вывести исходное и полученное изображения.

Лабораторная работа №6

(2 часа)

Тема. Двумерные унитарные преобразования. Преобразование Адамара (Уолша). Преобразование Хаара.

Цель. Получить преобразования Адамара и Хаара для исходного изображения.

Краткие теоретические сведения

Унитарные преобразования являются частным случаем линейных преобразований, когда линейный оператор точно обратим, а его ядро удовлетворяет условиям ортогональности. В результате прямого унитарного преобразования матрицы изображения $F(n_1, n_2)$ размера $N_1 \times N_2$ образуется матрица преобразованного изображения того же размера, элементы которой равны

$$G(m_1, m_2) = \sum \sum F(n_1, n_2) A(n_1, n_2; m_1, m_2), \quad (1)$$

где $A(n_1, n_2; m_1, m_2)$ – ядро прямого преобразования.

Преобразование Адамара основано на квадратной матрице Адамара, элементы которой равны $+1$ или -1 , а строки или столбцы образуют ортогональные векторы. Нормированная матрица Адамара N -го порядка удовлетворяет соотношению

$$H_N H_N^T = I_N \quad (2)$$

Среди ортонормальных матриц Адамара наименьшей является матрица второго порядка

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Пока не удалось определить, существуют ли матрицы Адамара для произвольных N , но почти для всех допустимых N , доходящих до 200, найдены правила построения соответствующих матриц. Наиболее просто удается построить такие матрицы при $N=2^n$, где n -целое. Если H_N матрица Адамара N -го порядка, то матрица

$$H_{2N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{bmatrix}, \quad (3)$$

также является матрицей Адамара порядка $2N$.

Матрицы Адамара четвертого и восьмого порядка, полученные по формуле (3) имеют вид

$$H_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H_8 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Строки матрицы Адамара можно рассматривать как последовательность отсчетов прямоугольных периодических колебаний (сигналов), период которых кратен $1/N$. Подобные непрерывные функции, называемые функциями Уолша, связаны с импульсными функциями Радемахера. Следовательно, матрица Адамара описывает преобразование, связанное с разложением функций по семейству прямоугольных базисных функций, а не по синусам и косинусам, характерным для преобразования Фурье.

Преобразование Адамара, определяемое с помощью матриц вида (3) известно также под названием преобразования Уолша [1].

Преобразование Хаара основывается на ортогональной матрице Хаара. Рассмотрим матрицы четвертого и восьмого порядка

$$H_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

$$H_8 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Матрицы Хаара более высокого порядка строятся по тем же правилам, что и матрицы H_4 H_8 .

В задачах обработки изображений хааровский спектр описывает распределение энергии компонент, соответствующих разностям средних значений яркостей соседних элементов, разностям средних значений яркостей соседних пар элементов и вообще разностям средних значений яркостей соседних групп из 2^m элементов [1].

Быстрые алгоритмы вычислений

В общем случае, чтобы выполнить унитарное преобразование матрицы изображения, содержащей $N \times N$ спектральных коэффициентов, необходимо произвести N^4 арифметических операций. Для многих унитарных преобразований существуют эффективные алгоритмы вычислений, позволяющие ускорить выполнение преобразования [1].

Основной идеей этих быстрых вычислительных алгоритмов является разделение всей задачи на ряд этапов, причем результаты, полученные на предыдущих этапах, многократно используются на последующих этапах.

Рассмотрим процесс вычисления коэффициентов преобразования Адамара с неупорядоченной матрицей для последовательности из четырех элементов $f(j)$. При прямом способе вычисления находятся четыре величины по формулам

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0)+f(1)+f(2)+f(3), \\ f(1) &= f(0)-f(1)+f(2)-f(3), \\ f(2) &= f(0)+f(1)-f(2)-f(3), \\ f(3) &= f(0)-f(1)-f(2)+f(3). \end{aligned}$$

Для этого необходимо выполнить $N(N-1)=12$ арифметических операций.

Коэффициенты преобразования Адамара можно найти по-другому, разбив процесс вычисления на два этапа:

I-этап

$$a(0) = f(0)+f(2),$$

$$a(1) = f(0)-f(2),$$

$$a(2) = f(1)+f(3),$$

$$a(3) = f(1)-f(3),$$

II-этап

$$f(0) = a(0)+a(2),$$

$$f(1) = a(0)-a(2),$$

$$f(2) = a(1)+a(3),$$

$$f(3) = a(1)-a(3).$$

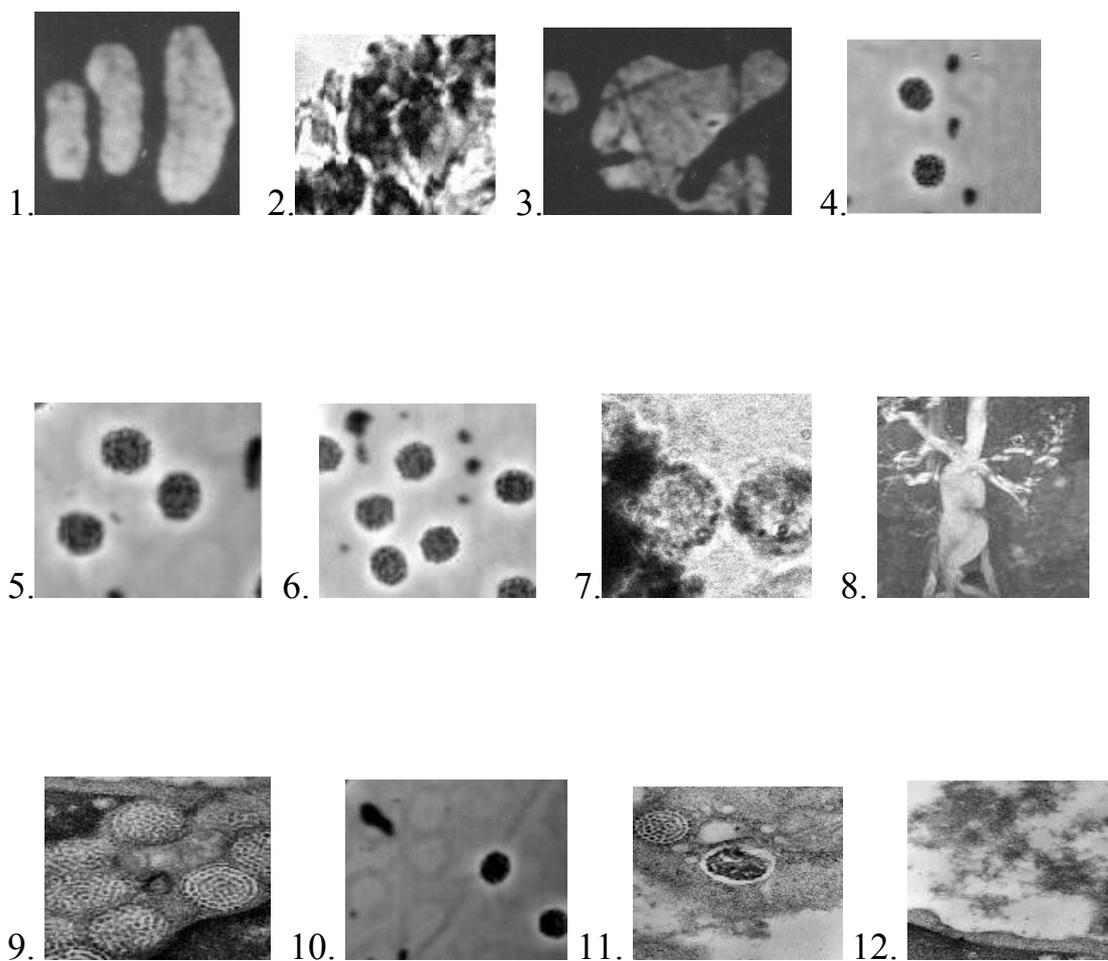
При этом для определения элементов матрицы A_4 требуется только $N \log_2 N = 8$ операций.

Принципы, описанные выше на примере преобразования Адамара, можно применить для быстрого вычисления многих других преобразований. Разработаны быстрые алгоритмы для преобразований Фурье, четного косинусного, синусного, Адамара, Хаара и наклонного. В общем случае для преобразования Карунена-Лозва быстрого алгоритма не найдено, однако известны приближенные алгоритмы преобразования Карунена –Лозва для марковских процессов.

Задание к лабораторной работе №6

1. Для исходного изображения получить преобразованное изображение преобразованием Адамара (быстрым).
2. Для исходного изображения получить преобразованное изображение преобразованием Хаара.

ОБРАЗЦЫ ИСХОДНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ ОБРАБОТКИ



ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Амурский государственный университет
(ГОУВПО «АмГУ»)

Факультет математики и информатики
Специальность 230201 – Информационные системы и технологии
Кафедра информационных и управляющих систем

Отчет

по лабораторной работе № ____

на тему: _____

по дисциплине: «Обработка изображений»

Исполнитель
студент(ка) группы ____

И.О.Ф.

Проверил

Н.П. Семичевская

Благовещенск _____

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Прэрт У.** Цифровая обработка изображений – М.: Мир, 1982. – 790 с.
2. **Журавлев Ю.И., Гуревич И.Б.** Распознавание образов и распознавание изображений // Распознавание, классификация, прогноз. Математические методы и их применение. – Вып. 2. – М.: Наука. – 1989. – С. 5 – 72.
3. **Павлидис Т.** Алгоритмы машинной графики и обработки изображений. – М.: Радио и связь, 1986. – 400 с.
4. **Ярославский Л.П.** Введение в цифровую обработку изображений. – М.: Сов. радио, 1979. – 312 с.
5. **Ярославский Л.П.** Обработка изображений в медицинской интроскопии / Цифровая оптика в медицинской интроскопии. – М.:ИППИ РАН, 1992. – С. 4–17.
6. **Журавель И.М.** Краткий курс теории обработки изображений/ Консультационный центр MATLAB компании SoftLine, <http://matlab.exponenta.ru/imageprocess/index.php>

Наталья Петровна Семичевская
ст. преподаватель кафедры ИУС

Любовь Александровна Соловцова
ст. преподаватель кафедры ИУС

**Обработка изображений в среде MATLAB с использованием Image
Processing Toolbox.**

7. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа №1

«Двумерное преобразование Фурье. Свойства ПФ.»

В контрольной работе предлагается выписать свойство разделимости двумерного преобразования Фурье, рассказанное в лекции № 4 и сделать пояснения.

$$\Phi(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) \cdot \exp\{-i(\omega_x x + \omega_y y)\} dx dy \quad \text{двумерное}$$

преобразование Фурье.

Ядро двумерного преобразования Фурье разделимо, поэтому это преобразование выполняется в два этапа:

I) этап

$$\Phi_y(\omega_x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) \cdot \exp\{-i\omega_x x\} dx \quad (1^*)$$

II) этап

$$\Phi(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_y(\omega_x, y) \cdot \exp\{-i\omega_y y\} dy \quad (1^{**})$$

Контрольная работа №2

«Гистограмма двумерного массива. Определение среднего по гистограмме»

В контрольной работе необходимо построить гистограмму по исходному массиву и рассчитать среднее значение по гистограмме.

Вариант 1

Исходный массив уровней яркости изображения задан матрицей F 10×10 :

$$F = \begin{bmatrix} 120 & 120 & 120 & 11 & 32 & 233 & 12 & 99 & 102 & 111 \\ 120 & 120 & 120 & 15 & 180 & 67 & 58 & 199 & 30 & 246 \\ 120 & 120 & 120 & 111 & 111 & 111 & 77 & 12 & 120 & 121 \\ 0 & 255 & 105 & 111 & 111 & 111 & 207 & 5 & 92 & 66 \\ 76 & 53 & 28 & 111 & 111 & 111 & 33 & 66 & 77 & 50 \\ 0 & 32 & 133 & 111 & 111 & 111 & 65 & 78 & 38 & 89 \\ 60 & 15 & 168 & 63 & 39 & 38 & 73 & 12 & 220 & 49 \\ 0 & 180 & 102 & 123 & 167 & 70 & 2 & 20 & 175 & 56 \\ 8 & 40 & 58 & 0 & 80 & 3 & 9 & 69 & 90 & 90 \\ 0 & 37 & 26 & 35 & 4 & 78 & 63 & 30 & 90 & 90 \end{bmatrix}$$

Вариант 2

Исходный массив уровней яркости изображения задан матрицей F 10×10 :

$$F = \begin{bmatrix} 121 & 100 & 12 & 11 & 32 & 233 & 12 & 99 & 102 & 111 \\ 0 & 200 & 55 & 15 & 180 & 67 & 58 & 199 & 30 & 246 \\ 68 & 1 & 35 & 111 & 101 & 35 & 77 & 12 & 120 & 121 \\ 0 & 255 & 105 & 69 & 38 & 73 & 207 & 5 & 92 & 66 \\ 76 & 53 & 28 & 10 & 25 & 250 & 33 & 66 & 77 & 50 \\ 0 & 32 & 133 & 4 & 65 & 44 & 65 & 78 & 38 & 89 \\ 60 & 15 & 168 & 63 & 39 & 38 & 73 & 12 & 223 & 49 \\ 0 & 180 & 102 & 123 & 167 & 70 & 2 & 20 & 175 & 56 \\ 8 & 40 & 58 & 0 & 80 & 3 & 9 & 69 & 90 & 67 \\ 0 & 37 & 26 & 35 & 4 & 78 & 63 & 30 & 28 & 90 \end{bmatrix}$$

Вариант 3

Исходный массив уровней яркости изображения задан матрицей F 10×10 :

$$F = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 32 & 233 & 12 & 99 & 102 & 111 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 180 & 67 & 58 & 199 & 30 & 246 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 22 & 111 & 77 & 12 & 120 & 121 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 1 & 207 & 5 & 92 & 66 \\ 76 & 53 & 28 & 111 & 11 & 11 & 33 & 66 & 77 & 50 \\ 0 & 32 & 133 & 18 & 111 & 17 & 65 & 78 & 38 & 89 \\ 60 & 15 & 168 & 63 & 39 & 38 & 73 & 12 & 220 & 49 \\ 0 & 180 & 102 & 123 & 167 & 70 & 2 & 20 & 175 & 56 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & 8 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Использовать материалы лекции № 7.

Контрольная работа №3

«Дискретизованный оператор суперпозиции»

В контрольной работе предлагается преобразовать исходный массив, используя матрицу преобразования оператора суперпозиции.

Вариант 1

Исходный массив: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Массив отсчетов импульсного отклика: $H = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 11 & 12 & 13 \\ 11 & 12 & 13 \end{bmatrix}$.

Вариант 2

Исходный массив: $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Массив отсчетов импульсного отклика: $H = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 20 & 20 & 20 \\ 30 & 30 & 30 \end{bmatrix}$.

Вариант 3

Исходный массив: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Массив отсчетов импульсного отклика: $H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Преобразовать массивы в векторную форму, получить матрицу преобразования D и выполнить преобразование.

Использовать материалы лекций №12.

8. ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРОГРАММНЫХ ПРОДУКТОВ

Интегрированные среды для моделирования и исполнения программ цифровой обработки изображений и сигналов содержат мощные средства для инженерно–научных расчетов и визуализации данных. К таким пакетам относится Image Processing Toolbox системы **MATLAB 6.0**, разработанный фирмой MathWorks. Пакет обладает мощными средствами для обработки изображений.

Разработано методическое пособие «Обработка изображений в среде MATLAB с использованием Image Processing Toolbox» (авторы Семичевская Н.П., Соловцова Л.А.) для выполнения лабораторного практикума. Пособие содержит 6 лабораторных работ с кратким изложением теоретического материала, примерами программ, пояснениями и иллюстрациями, в конце каждой лабораторной работы приведены задания, которые необходимо выполнить.

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ МЕЖСЕССИОННОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ

1. Межсессионная аттестация студентов проводится дважды в семестр на 7 и 13 неделях 7-го семестра.
2. Аттестационная оценка выставляется по результатам работы в семестре: выполнения лабораторных работ по графику, выполнения контрольных работ и посещений лекционных занятий.
3. Организация аттестации студентов, проводится в соответствии с положением АмГУ о курсовых, экзаменах и зачетах.

10. КОМПЛЕКТЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры

“ ___ ” _____ 2007г.

Заведующий кафедрой

Утверждаю: _____

Кафедра ИУС

Факультет ТиЭФ

Курс IV

Дисциплина

“Цифровая обработка

многомерных сигналов”

Экзаменационный билет № 1

1. Области практического применения методов обработки изображений. Сейсмология.
2. Двумерное преобразование Фурье. Свойство разделимости ДПФ.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры

“ ___ ” _____ 2007г.

Заведующий кафедрой

Утверждаю: _____

Кафедра ИУС

Факультет ТиЭФ

Курс IV

Дисциплина

“Цифровая обработка

многомерных сигналов”

Экзаменационный билет № 2

1. Области практического применения методов обработки изображений. Дистанционное обнаружение.
2. Двумерные системы. Дифференциальные операторы двумерных систем.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
“___” _____ 2007г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ИУС
Факультет ТиЭФ
Курс IV
Дисциплина
“Цифровая обработка
многомерных сигналов”

Экзаменационный билет № 3

1. Области практического применения методов обработки изображений. Электрокардиография. Рентгенография.
2. Преобразование четное косинусное.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
“___” _____ 2007г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ИУС
Факультет ТиЭФ
Курс IV
Дисциплина
“Цифровая обработка
многомерных сигналов”

Экзаменационный билет № 4

1. Получение цифровых изображений, на примере рентгенографических систем.
2. Дискретное преобразование Фурье. Свойство делимости преобразования Фурье.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
“___” _____ 2007г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ИУС
Факультет ТиЭФ
Курс IV
Дисциплина
“Цифровая обработка
многомерных сигналов”

Экзаменационный билет № 5

1. Представление непрерывных изображений (детерминированное математическое описание). Системы воспроизведения цветных и бесцветных изображений.
2. Анализ линейных систем с помощью преобразования Фурье. (Теорема о свертке)

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
“___” _____ 2007г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ИУС
Факультет ТиЭФ
Курс IV
Дисциплина
“Цифровая обработка
многомерных сигналов”

Экзаменационный билет № 6

1. Кодирование графической информации. Аппаратные средства ввода изображений в память ЭВМ.
2. Двумерное преобразование Фурье. Свойство делимости ДПФ.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
“___” _____ 2007г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ИУС
Факультет ТиЭФ
Курс IV
Дисциплина
“Цифровая обработка
многомерных сигналов”

Экзаменационный билет № 7

1. Двумерные системы. Линейные операторы двумерных систем.
2. Дискретное преобразование Фурье. Свойство делимости преобразования Фурье.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
“___” _____ 2007г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ИУС
Факультет ТиЭФ
Курс IV
Дисциплина
“Цифровая обработка
многомерных сигналов”

Экзаменационный билет № 8

1. Двумерные системы. Дифференциальные операторы двумерных систем.
2. Алгебра матриц. Формулы для векторного представления изображений.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
“___” _____ 2007г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ИУС
Факультет ТиЭФ
Курс IV
Дисциплина
“Цифровая обработка
многомерных сигналов”

Экзаменационный билет № 9

1. Двумерное преобразование Фурье. Свойства преобразования Фурье.
2. Анализ линейных систем с помощью преобразования Фурье.
(Теорема о свертке)

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
“___” _____ 2007г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ИУС
Факультет ТиЭФ
Курс IV
Дисциплина
“Цифровая обработка
многомерных сигналов”

Экзаменационный билет № 10

1. Двумерное преобразование Фурье. Свойство делимости двумерного преобразования Фурье.
2. Дискретизация непрерывных изображений (процесс идеальной дискретизации). Спектр дискретизированного изображения.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
“___” _____ 2007г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ИУС
Факультет ТиЭФ
Курс IV
Дисциплина
“Цифровая обработка
многомерных сигналов”

Экзаменационный билет № 11

1. Анализ линейных систем с помощью преобразования Фурье.
(Теорема о свертке)

2. Двумерные системы. Функция импульсного отклика и получение
выходного изображения на выходе линейной двумерной системы.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
“___” _____ 2007г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ИУС
Факультет ТиЭФ
Курс IV
Дисциплина
“Цифровая обработка
многомерных сигналов”

Экзаменационный билет № 12

1. Дискретизация непрерывных изображений (процесс идеальной
дискретизации). Спектр дискретизированного изображения.

2. Дискретное преобразование Фурье. Свойство делимости
преобразование Фурье.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
“___” _____ 2007г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ИУС
Факультет ТиЭФ
Курс IV
Дисциплина
“Цифровая обработка
многомерных сигналов”

Экзаменационный билет № 13

1. Процесс восстановления непрерывных изображений из дискретизованных. Частотное условие для идеального восстановления изображения.
2. Двумерные системы. Функция импульсного отклика и получение выходного изображения на выходе линейной двумерной системы.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
“___” _____ 2007г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ИУС
Факультет ТиЭФ
Курс IV
Дисциплина
“Цифровая обработка
многомерных сигналов”

Экзаменационный билет № 14

1. Квантование изображений. Задача об оптимальном положении уровня квантования.
2. Дискретизация непрерывных изображений (процесс идеальной дискретизации). Спектр дискретизированного изображения.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
“___” _____ 2007г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____
многомерных сигналов”

Кафедра ИУС
Факультет ТиЭФ
Курс IV
Дисциплина
“Цифровая обработка

Экзаменационный билет № 15

1. Статистическое описание дискретных изображений. Построение двумерного распределения вероятностей (гистограммы второго порядка).
2. Квантование изображений. Задача об оптимальном положении уровня квантования.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
“___” _____ 2007г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____
многомерных сигналов”

Кафедра ИУС
Факультет ТиЭФ
Курс IV
Дисциплина
“Цифровая обработка

Экзаменационный билет № 16

1. Модели плотностей вероятности дискретных изображений. Гауссова плотность.
2. Анализ линейных систем с помощью преобразования Фурье.
(Теорема о свертке)

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
“___” _____ 2007г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ИУС
Факультет ТиЭФ
Курс IV
Дисциплина
“Цифровая обработка
многомерных сигналов”

Экзаменационный билет № 17

1. Обзор методов цифровой обработки изображений. Математическое описание дискретных изображений. Алгебра матриц. Формулы для векторного представления изображений.
2. Двумерное преобразование Фурье. Свойства преобразования Фурье.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
“___” _____ 2007г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ИУС
Факультет ТиЭФ
Курс IV
Дисциплина
“Цифровая обработка
многомерных сигналов”

Экзаменационный билет № 18

1. Дискретная линейная двумерная обработка. Обобщенный линейный оператор. Дискретный оператор суперпозиции.
2. Квантование изображений. Задача об оптимальном положении уровня квантования.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
“___” _____ 2007г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ИУС
Факультет ТиЭФ
Курс IV
Дисциплина
“Цифровая обработка
многомерных сигналов”

Экзаменационный билет № 19

1. Двумерные унитарные преобразования. Дискретное преобразование Фурье.
2. Преобразование четное косинусное.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
“___” _____ 2007г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ИУС
Факультет ТиЭФ
Курс IV
Дисциплина
“Цифровая обработка
многомерных сигналов”

Экзаменационный билет № 20

1. Преобразование косинусное.
2. Дискретное преобразование Фурье. Свойство делимости преобразования Фурье.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
“___” _____ 2007г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ИУС
Факультет ТиЭФ
Курс IV
Дисциплина
“Цифровая обработка
многомерных сигналов”

Экзаменационный билет № 21

1. Преобразование Адамара.
2. Анализ линейных систем с помощью преобразования Фурье.
(Теорема о свертке)

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
“___” _____ 2007г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ИУС
Факультет ТиЭФ
Курс IV
Дисциплина
“Цифровая обработка
многомерных сигналов”

Экзаменационный билет № 22

1. Преобразование Хаара.
2. Двумерное преобразование Фурье. Свойства преобразования Фурье.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
“___” _____ 2007г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ИУС
Факультет ТиЭФ
Курс IV
Дисциплина
“Цифровая обработка
многомерных сигналов”

Экзаменационный билет № 23

1. Двумерные системы. Функция импульсного отклика и получение выходного изображения на выходе линейной двумерной системы.
2. Анализ линейных систем с помощью преобразования Фурье.
(Теорема о свертке)

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
“___” _____ 2007г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ИУС
Факультет ТиЭФ
Курс IV
Дисциплина
“Цифровая обработка
многомерных сигналов”

Экзаменационный билет № 24

1. Преобразование Хаара.
2. Дискретная линейная фильтрация. Быстрое преобразование Фурье.

11. КАРТА КАДРОВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ

Лектор	к.т.н., доцент	Семичевская Н.П.
Руководитель лабораторных работ	к.т.н., доцент	Семичевская Н.П.

Наталья Петровна СЕМИЧЕВСКАЯ
доцент кафедры информационных управляющих систем АмГУ

Редактор О.К. Мамонтова

Учебно-методический комплекс дисциплины
ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА МНОГОМЕРНЫХ СИГНАЛОВ

Издательство АмГУ. Подписано к печати _____.____.07. Формат _____. Усл.
печ.л. _____, уч.-изд. л. _____. Тираж _____. Заказ ____.