Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОУВПО «АмГУ»
Факультет математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой МАиМ
Т.В. Труфанова
21 мая 2007г.

Прикладной функциональный анализ

Учебно – методический
комплекс дисциплины

Составитель: С.А.Подопригора

Благовещенск
2007

ББК
К

Печатается по решению редакционно-издательского совета факультета математики и информатики Амурского государственного университета

Подопригора С.А.

Прикладной функциональный анализ**.** Учебно – методический комплекс дисциплины для студентов очной формы обучения специальности 010501 «Прикладная математика и информатика». – Благовещенск: Амурский гос. ун–т, 2007. − 63 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

1.1. Целью преподавания курса “Прикладной функциональный анализ” является ознакомление студентов с основными понятиями, результатами и методами функционального анализа и его приложениями к решению операторных уравнений в нормированных и гильбертовых пространствах, а также с применением функционального анализа в выпуклом анализе, в теории оптимизации, в различных видах математического программирования, в исследовании операций и вычислительной математике и многих других прикладных математических дисциплинах.

1.2. Задача изучения прикладного функционального анализа состоит в овладении студентами основными понятиями, положениями, результатами и методами современного функционального анализа, с основными методами решения операторных уравнений, со спектральной теорией линейных операторов в нормированных и гильбертовых пространствах, с основами теории монотонных операторов и решением операторных уравнений с монотонными операторами, с элементами теории оптимизации и выпуклого анализа.

1.3. Для успешного изучения курса “Прикладной функциональный анализ” необходимо хорошее усвоение курсов: “Математический анализ”, “Геометрия и алгебра”, “Уравнения математической физики”, “Численные методы”, “Методы оптимизации”, “Теория игр и исследование операций”.

2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Федеральный компонент

Федеральный компонент состоит в том, что авторская программа курса “Прикладной функциональный анализ” соответствует требованиям ГОС ВПО по реализации специальной квалификационной характеристики в области прикладной математики.

2.2. Наименование тем, их содержание, объем в часах лекционных занятий

Семестр 8

1. Предмет курса и краткие исторические сведения. -1 час.

2. Определение метрического пространства (МП) и его топология. Предел последовательности в МП и его основные свойства. Фундаментальные последовательности и полнота МП. Диаметр подмножества. Ограниченное подмножество. Борнология МП. Расстояние между подмножествами. Окрестности. Открытые и замкнутые подмножества МП и их характеристические свойства. Ассоциированная метрическая топология. Подпространство МП и его индуцированная метрика и топология. Полнота подпространства. Примеры МП. Неравенства Гёльдера и Минковского. Пространства l_p и $C_p[a,b]$, $p \geq 1$. - 3 час.

3. Определение топологического пространства и подпространства. Индуцированная топология подпространства. Окрестности. Предел последовательности в ТП и его свойства. Отделимое (Хаусдорфово) ТП, единственность предела в отделимом пространстве. Направленность в ТП и ее предел. Точки прикосновения и предельные точки подмножества ТП. Предельные точки (частичные пределы) последовательности. Внутренность и внешность, замыкание и граница подмножества, их основные свойства. Сепарабельность МП и ТП. Аксиомы счетности ТП. - 4 час.

4. Непрерывные отображения ТП и МП, их основные свойства. Равномерно непрерывные отображения МП. Гомеоморфизм. Топологически эквивалентные метрики. - 2 час.

5. Теорема о стягивающихся шарах в МП. Пополнение МП. Полнота подпространств - 1 час.

6. Множества 1-ой и 2-ой категории Бэра. Теоремы Бэра для МП. - 1 час.

7. Принцип сжимающихся отображений в полных МП и его модификация. Теорема о неподвижной точке. Приложения принципа сжимающих отображений для численных уравнений, линейных систем уравнений в пространстве R^n, для обыкновенного дифференциального уравнения и систем обыкновенных дифференциальных уравнений, для интегральных уравнений. - 4 час.

8. Теория меры Жордана и Лебега, измеримых функций и интеграла Римана-Стилтьеса, Лебега-Стилтьеса в R^n. Пространства L_p, $p \geq 1$. Гильбертово пространство L_2. - 6 час.

9. Определение нормированного и банахова пространства (НП, БП). Примеры. Подпространство и факторпространство НП. Предгильбертовы и гильбертовы пространства (ПГП, ГП). Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Норма в ПГП. Ортогональность элементов. Теорема Пифагора, равенство параллелограмма и поляризационное равенство. - 2 час.

10. Ортогональное дополнение. Теорема об ортогональном разложении ГП. Оператор проектирования. - 6 час.
11. Ряды Фурье в ГП. Ортонормированные системы и базисы в ГП, их полнота и замкнутость. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Основная теорема о сходимости ряда Фурье в ГП. Примеры ортонормированных систем. - 2 час.

Семестр 9

1. Выпуклые и абсолютно выпуклые множества в векторных пространствах ВП, их основные свойства. Выпуклые и абсолютно выпуклые оболочки. Ядро множества. Выпуклые тела. Уравновешенные (закругленные) и поглощающиеся (радиальные) множества. Выпуклые функции и преднормы на ВП, их свойства. Определение локально выпуклого топологического векторного пространства (ЛВП). Функционал Минковского и его свойства. - 2 час.
2. Линейные функционалы (л.ф.) на ВП. Геометрический смысл л.ф.. Гиперплоскость и ее связь с л.ф. - 1 час.
3. Теорема Хана-Банаха о продолжении л.ф. Теоремы об отделимости выпуклых множеств в ВП. - 2 час.
4. Ограниченные л.ф. в нормированных пространствах. Эквивалентность ограниченности л.ф. их непрерывности. Норма л.ф. и ее геометрический смысл. Теорема Хана-Банаха в нормированном пространстве. - 1 час.
5. Сопряженное пространство к НП, его полнота. Представление ограниченных л.ф. в конкретных НП. Примеры сопряженных пространств. Второе сопряженное пространство к НП. Рефлексивность банаховых пространств. - 2 час.
6. Представление ограниченного л.ф. в ГП, его норма. Самосопряженность ГП.-2 час
7. Слабая топология и слабая сходимость в ЛВП и НП. Примеры. - 2 час.
8. Понятие обобщенной функции. Пространства основных и обобщенных функций. Основные свойства обобщенных функций. - 2 час.
9. Ограниченные линейные отображения НП. Эквивалентность ограниченности линейного отображения их непрерывности. Норма линейно отображения (оператора) и ее свойства. Нормированное пространство ограниченных линейных отображений НП и его полнота. Операторные топологии в ВП ограниченных линейных отображений (операторов): топология ограниченной сходимости и сильная операторная топология (топология поточной сходимости). Банахова алгебра линейных ограниченных операторов. С*-алгебра линейных ограниченных операторов в ГП. - 2 час.

10. Сопряженный оператор и его норма в НП и ГП. Эрмитовы операторы в ГП.-1 час.
11. Категорные теоремы об открытом отображении и замкнутом графике. Теорема Банаха-Штейнхауса. Теорема С. Банаха об обратном операторе. - 2 час.
12. Основы спектральной теории линейных операторов (л.о.) в НП. Резольвентное множество и резольвента л.о. Спектр л.о. Части спектра – точечная, непрерывная, остаточная. Примеры. Теорема об обращаемости л.о. $(I - T)$. - 1 час.
13. Компактные подмножества МП и их простейшие свойства. Вполне ограниченные множества в МП, их свойства. Основная теорема о компактности МП. Компактные и относительно компактные подмножества МП, их основные свойства. Критерий относительной компактности в конкретных МП. Теорема Арчела (критерий относительной компактности в пространстве непрерывных функций $C[a,b]$). - 2 час.
14. Вполне непрерывные (компактные) операторы НП и их основные свойства. Полная непрерывность интегральных операторов Фредгольма. - 1 час.
15. Теоремы Рисса и Фредгольма для вполне непрерывных линейных операторов в НП. Свойства спектра вполне непрерывного оператора в НП. - 1 час.
16. Спектральные свойства вполне непрерывных операторов в гильбертовых пространствах. Представление решений линейных операторных уравнений в ГП с вполне непрерывными эрмитовыми оператора0ми. - 1 час.
17. Представление решений интегральных уравнений Фредгольма. Теорем Мерсера.-1 час.
18. Монотонные и коэрцитивные операторы в НП и их основные свойства. Существование решений операторных уравнений с монотонными операторами. Метод Галеркина для операторных уравнений с монотонными операторами. 1 час.
19. Частично упорядоченные линейные и нормированные пространства. Теоремы о положительных л.ф. Теоремы отделимости принцип Куна-Таккера. Основные результаты спектральной теории положительных линейных операторов в частично упорядоченных НП и ее приложения. - 2 час.

2.3. Семинарские занятия, их содержание и объем в часах.

Семестр 8

1. Метрические пространства (МП). Метрические и топологические свойства МП. - 2 час.

2. Топологические пространства (ТП). Внутренность, внешность, замыкание и граница подмножеств ТП - 2 час.
3. Непрерывные отображения ТП и МП, их свойства.- 4 час.
4. Принцип сжимающихся отображений в полных МП. Приближенное решений операторных уравнений с сжимающимися операторами. - 2 час.
5. Теория меры Жордана и интеграла Римана-Стилтьеса. Функции с ограниченным изменением и их свойства. - 4 час.
6. Теория меры Лебега, измеримых функций и интеграла Лебега-Стилтьеса. - 4 час.
7. Ряды Фурье в пространстве $L_2[a,b]$. - 4 час.
8. Геометрия гильбертовых пространств. - 4 час.

Семестр 9

1. Выпуклые и абсолютно выпуклые подмножества векторного пространства, их основные свойства. Функционал Минковского и его свойства. Преднормы и задание локально выпуклой топологии. - 2 час.
2. Линейные функционалы и их геометрический смысл. Гиперплоскости. Отделимость выпуклых множеств. - 2 час.
3. Ограниченные линейные функционалы в НП и их норма. Геометрический смысл нормы л.ф. - 2 час.
4. Сопряженные пространства к НП. Представления ограниченных л.ф. в конкретных НП. Примеры сопряженных пространств. - 2 час.
5. Слабая топология и слабая сходимость в НП и их сопряженных. - 2 час.
6. Простейшие свойства обобщенных функций. - 2 час.
7. Ограниченные линейные отображения НП. Норма линейного оператора (л.о.) и ее свойства. Операторные топологии в векторном пространстве л.о. Банаховы алгебры и С*-алгебры л.о. - 2 час.
8. Спектральная теория вполне непрерывных (компактных) л.о. в НП. - 2 час.
9. Теоремы Рисса и Фредгольма для вполне непрерывных л.о. в НП. - 2 час.
10. Представление решений линейных операторных уравнений в ГП с вполне непрерывными эрмитовыми операторами. Представление решений интегральных уравнений Фредгольма. - 4 час.
11. Решение уравнений с монотонными операторами. - 2 час.
12. Решение простейших оптимизационных задач. Применения теоремы Куна-Таккера. - 2 час.
13. Спектральные свойства линейных положительных операторов в частично упорядоченных НП и их приложений - 2 час.

2.4 Самостоятельная работа студентов – 69 час.

8 семестр (38 час.)

1. Теорема о непрерывных отображениях топологических пространств. Гомеоморфизмы. Пример биективного непрерывного отображения, не являющегося гомеоморфизмом – 28 час.
2. Равномерно непрерывные отображения метрических пространств – 4 час.
3. Компакты и их свойства – 6 час.

9 семестр (31 час.)

4. Функции с ограниченными изменениями и их свойства – 12 час.
5. Измеримые пространства – 3 час.
6. Интеграл Лебега-Стильеса. Теорема Ф.Рисса о представлении непрерывного линейного функционала -8 час.
7. Норма сопряженного оператора -2 час.
8. Альтернативы Фредгольма – 4 час.
9. Ядерные операторы и ядерные пространства – 2 час.

2.5 Темы промежуточного контроля курса не предусматриваются.

2.6 Вопросы к зачету за 8 семестр

9. Метрические пространства (МП). Метрические и топологические свойства МП.
10. Топологические пространства (ТП). Внутренность, внешность, замыкание и граница подмножеств ТП
11. Непрерывные отображения ТП и МП, их свойства.
12. Принцип сжимающихся отображений в полных МП. Приближенное решений операторных уравнений с сжимающимися операторами.
13. Теория меры Жордана и интеграла Римана-Стилтьеса. Функции с ограниченным изменением и их свойства.
14. Теория меры Лебега, измеримых функций и интеграла Лебега-Стилтьеса. - 4 час.
15. Ряды Фурье в пространстве $\boxed{L_2[a,b]}$.
16. Геометрия гильбертовых пространств.

2.7 Вопросы к экзамену за 9 семестр

14. Выпуклые и абсолютно выпуклые подмножества векторного пространства, их основные свойства. Функционал Минковского и его свойства. Преднормы и задание локально выпуклой топологии.
15. Линейные функционалы и их геометрический смысл. Гиперплоскости. Отделимость выпуклых множеств.
16. Ограниченные линейные функционалы в НП и их норма. Геометрический смысл нормы л.ф.
17. Сопряженные пространства к НП. Представления ограниченных л.ф. в конкретных НП. Примеры сопряженных пространств.
18. Слабая топология и слабая сходимость в НП и их сопряженных.
19. Простейшие свойства обобщенных функций.

20. Ограниченные линейные отображения НП. Норма линейного оператора (л.о.) и ее свойства. Операторные топологии в векторном пространстве л.о. Банаховы алгебры и С*-алгебры л.о.
21. Спектральная теория вполне непрерывных (компактных) л.о. в НП.
22. Теоремы Рисса и Фредгольма для вполне непрерывных л.о. в НП.
23. Представление решений линейных операторных уравнений в ГП с вполне непрерывными эрмитовыми операторами. Представление решений интегральных уравнений Фредгольма.
24. Решение уравнений с монотонными операторами.
25. Решение простейших оптимизационных задач. Применения теоремы Куна-Таккера.

13 Спектральные свойства линейных положительных операторов в частично упорядоченных НП и их приложений

3 МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЧТЕНИЯ ЛЕКЦИЙ И ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

ТЕМА 1. НОРМИРОВАННЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. СХОДИМОСТЬ

Основные понятия: векторное пространство, норма, нормированное векторное пространство, сходимость последовательностей по норме, сходимость в пространствах.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача № 1.

а) Задает ли норму в пространстве R функция $\varphi(x) = |arctgx|$?

б) Показать, что $\varphi(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ в пространстве R^n не является нормой при $0 < p < 1$ и $n \geq 2$.

Решение. а) Нет, не задает, ибо не выполняется вторая аксиома нормы. Действительно, если взять $x = \sqrt{3}$, $\lambda = \frac{1}{3}$, то $\|\lambda x\| = arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$, а $|\lambda|\|x\| = \frac{1}{3}arctg\sqrt{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{9}$. Поэтому $\|\lambda x\| \neq |\lambda|\|x\|$.

б) Не является, т.к. не выполняется третья аксиома нормы. Действительно, возьмем вектор $x = \left(\frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right) \in R^n$ и вектор $y = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right) \in R^n$. Тогда $\|x\|_p = \|y\|_p = \frac{1}{2}$ для любого $0 < p < 1$ и $\|x\|_p + \|y\|_p = 1$. Однако $\|x + y\|_p = \left\|\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right)\right\|_p = \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p} - 1}$.

Поскольку $p \in (0,1)$, то $\frac{1}{p} - 1 > 0$ и $2^{\frac{1}{p} - 1} > 1$. Следовательно, $\|x + y\|_p > \|x\|_p + \|y\|_p$.

Задача № 2. Найти предел последовательности $x_n = \frac{nt}{n + t}$ в пространстве $C[0,2]$, если он существует.

Решение: Необходимым условием сходимости последовательности в пространстве $C[a,b]$ является существование предела x_n при каждом фиксированном $t \in [a,b]$. Заданная последовательность при заданном t сходится к функции $a(t)=t$. Данная функция непрерывна.

Проверим, сходится ли последовательность x_n к $a(t)$ по норме пространства $C[a,b]$, т.е. равномерно. Вычислим $\|x_n - a\|$. По определению нормы:

$$\|x_n - a\|_{C[0,2]} = \max_{0 \le t \le 2}\left|\frac{nt}{n + t} - t\right| = \max_{0 \le t \le 2}\left|\frac{t^2}{n + t}\right|.$$

Вычислим максимум функции $\frac{t^2}{n + t}$ на отрезке [0,2]. Для этого вычислим точки, подозрительные на экстремум с помощью производной.

$$\left(\frac{t^2}{n+t}\right)' = \frac{t^2+2nt}{(n+t)^2};\ t^2+2nt=0,\ t_1=0,\ t_2=-2n.$$

Таким образом, точками, подозрительными на экстремум, являются точки t_1,t_2. Поскольку $t_2 \notin [0,2]$, поэтому остается лишь точка t_1. Вычислим также значение функции на концах отрезка:

$$\left.\frac{t^2}{n+t}\right|_{t=0}=0,\ \left.\frac{t^2}{n+t}\right|_{t=2}=\frac{4}{n+2}.\ \text{Значит,}\ \max_{t\in[0,2]}\left|\frac{nt}{n+t}-t\right|=\frac{4}{n+2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Это означает, что последовательность $x_n(t)$ в пространстве $C[0,2]$ сходится к функции $a(t)=t$.

<u>Задача № 3.</u> Найти предел последовательности $x_n(t)=t^n-t^{2n}$ в пространстве $C[0,1]$, если он существует.

<u>Решение.</u> Последовательность $x_n(t)$ для каждого фиксированного t при $n\longrightarrow\infty$ стремится к $a(t)=0$. Покажем, что $x_n(t)$ к нулю равномерно не сходится. Вычислим $\|x_n-a\|=\max\limits_{t\in[0,1]}\left|t^n-t^{2n}\right|$.

Так как $\left(t^n-t^{2n}\right)'=nt^{n-1}-2nt^{2n-1}=nt^{n-1}(1-2t^n)$, то $nt^{n-1}(1-2t^n)=0$,

если $t_1=0;\ t_2=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$.

Точкой, подозрительной на экстремум, является и точка $t_3=1$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что максимум достигается в точке

$t=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$. Поэтому $\max\limits_{t}\left|t^n-t^{2n}\right|=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

Значит, последовательность $x_n(t)=t^n-t^{2n}$ в пространстве $C[0,1]$ не сходится.

Задача № 4. Выяснить, сходится ли последовательность $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, 0, \ldots\right)$ в пространстве l_3.

Решение. Необходимым условием сходимости последовательности в пространстве $l_p, p \geq 1$ является наличие покоординатного предела. Выпишем несколько членов последовательности: $x_n: x_1 = \left(1, \frac{1}{2}, 0, \ldots\right), x_2 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, 0, \ldots\right)$. Очевидно, что $x_n(1) \to 1$ при $n \to \infty$, $x_n(2) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{2}$ и т.д. Поэтому последовательность x_n покоординатно сходится к точке $a = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k+1}}, \ldots\right)$.

Заметим, что $a \in l_3$, т.к. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left|\frac{1}{2^k}\right|^3 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-3k} < \infty$.

Покажем, что последовательность x_n сходится к a по норме пространства l_3:

$$\|x_n - a\| = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_n(k) - a(k)|^3\right)^{1/3} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\frac{1}{2^k}\right|^3\right)^{1/3} = \frac{\left(2^{-3}\right)^{n+1}}{1 - 1/2^3} = \frac{8}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+3} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Задача № 5. Выяснить, сходится ли последовательность $x_n = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, \ldots)$ в прастранстве l_1.

Решение. Очевидно, что $a = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ является покоординатным пределом последовательности, но $a \notin l_1$, т.к. ряд, составленный из единиц, не является сходящимся. Следовательно, последовательность x_n не имеет предела.

Задача № 6. Доказать, что последовательность $x_n(t) = n^2te^{-nt}$ $(n \in N)$ сходится поточечно к функции $a(t) \equiv 0$ для всех $t \in [0,1]$, но не сходится в пространстве $CL_1[0,1]$.

Решение. Последовательность $x_n(t)$ при каждом фиксированном $t \in [0,1]$ стремится к нулю, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0, |a| > 1$.

Вычислим $\|x_n - a\|_{CL_1[a,b]} = \int\limits_0^1 |x_n(t) - a(t)|dt = \int\limits_0^1 n^2te^{-nt}dt = [nt = z] =$

$= \int\limits_0^n ze^{-z}dz = 1 - ne^{-n} - e^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Значит, последовательность $x_n(t)$ не сходится в пространстве $CL_1[0,1]$.

ТЕМА 2. ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ НОРМИРОВАННОГО ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Основные понятия: нормированное векторное пространство, сходимость последовательностей по норме, открытое, замкнутое, ограниченное, выпуклое множество в нормированном пространстве, точка прикосновения, предельная, изолированная, внутренняя, внешняя и граничная точки множества, топология нормированного векторного пространства.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

Задача № 1. Является ли множество $M = \{x \in C[0,1]: x(0) = 0\}$ открытым, замкнутым, в пространствах $C[0,1], CL[0,1]$. Найти его замыкание, внутренние и граничные точки в каждом из указанных пространств.

Решение. Докажем, что множество M не является открытым в пространстве $C[0,1]$. Рассмотрим точку $x_0 \in M$, т.е. $x_0 \in C[0,1]$ и $x(0)=0$. Для каждого $r > 0$ существует функция $x(t) = x_0(t) + \alpha$, $|\alpha| < r$ такая, что

$x(0)=x_0(0)+\alpha=\alpha\neq 0$, как только $\alpha\neq 0$. Функция *x(t)* принадлежит шару $B(x_0,r)$, но не принадлежит множеству *M*. Таким образом, у множества *M* нет внутренних точек и *M* не является открытым.

Проверим, является ли множество *M* замкнутым в *C*[*a,b*]. Напомним, что $M=\overline{M}$, если из того, что $x_n\in M$ и $x_n\to x_0$ следует, что $x_0\in M$. Другими словами, *M* замкнуто, если для каждой последовательности непрерывных функций таких, что $x_n(0)=0$ и для которых существует непрерывная на отрезке [0,1] функция $x_0(t)$ такая, что $\max\limits_{0\le t\le 1}|x_n(t)-x_0(t)|\to 0$ при $n\to\infty$, функция $x_0(t)$ удовлетворяет условию $x_0(t)=0$. Учитывая, что сходимость в пространстве *C*[0,1] равномерная, то из того, что $\max\limits_{t}|x_n(t)-x_0(t)|\to 0$ при $n\to\infty$ следует $|x_n(t)-x_0(t)|\to 0$ при $n\to\infty$ для всех $t\in[0,1]$. Следовательно, $x_0(0)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n(0)=0$. Итак, в пространстве *C*[a,b] множество *M* замкнуто и каждая его точка для множества *M* является граничной.

Каждый открытый шар радиуса *r* в пространстве *CL*[*a,b*] содержит открытый шар радиуса $\dfrac{r}{b-a}$ пространства *C*[a,b] с центром в той же точке, т.е. $B_L(x_0,r)\supset B_C\left(x_0,\dfrac{r}{b-a}\right)$. Действительно, пусть $y(t)\in B_C\left(x_0,\dfrac{r}{b-a}\right)$, т.е. $\max\limits_{t}|y(t)-x_0(t)|<\dfrac{r}{b-a}$, тогда $\int\limits_a^b|y(t)-x_0(t)|dt\le \max\limits_{t}|y(t)-x_0(t)|\cdot(b-a)\le$ $\dfrac{r}{b-a}\cdot(b-a)=r$, т.е. $y(t)\in B_L[x_0,r]$. Значит, если множество открыто в пространстве *CL*[0,1], то оно открыто в *C*[0,1]. А так как множество *M* не является открытым в *C*[*a,b*], то оно не является открытым и в *CL*[*a,b*].

Докажем, что оно не является замкнутым в *CL*[*a,b*], точнее, $\overline{M}=CL[0,1]$. Действительно, для каждой функции $x_0(t)\in CL[0,1]\setminus M$ существует последовательность $x_n \in M$ такая, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$, где

$$x_n(t) = \begin{cases} ntx_0(0),\ t \in \left[0, \frac{1}{n}\right]; \\ x_0(t), \quad t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right], \end{cases} \quad \text{и } x_n(0) = 0,$$

$$\|x_n - x_0\|_{CL[0,1]} = \int_0^1 |x_n(t) - x_0(t)|dt \le \int_0^{1/n} (|x_0| + |x_n|)dt \le \frac{2}{n}\max_{t\in[0,1]}|x(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

однако $x_0(0) \ne 0$, что и означает незамкнутость множества.

<u>Задача № 2.</u> Выяснить, является ли множество $M = \left\{x \in l_3 : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < 1\right\}$ открытым, замкнутым, ограниченным в пространстве l_3.

<u>Решение.</u> Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 0, \ldots\right)$, принадлежащую множеству *M*, которая сходится в l_3 к элементу $x = (1, 0, \ldots)$, который множеству *M* не принадлежит. Значит, *M* не является замкнутым.

Докажем, что *M* не является также открытым, т.е. существует такая точка $x_0 \in M$, что $\forall\, r > 0$ существует точка $x \in B(x_0, r) \setminus M$. Пусть $x_0 = (0, 0, \ldots)$.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{k}}\right|^3$ сходится, обозначим его сумму через a^3 и рассмотрим последовательность $x_n = \left(\frac{r}{2a\sqrt{1}}, \frac{r}{2a\sqrt{2}}, \ldots, \frac{r}{2a\sqrt{n}}, 0, \ldots\right)$, $x_n \in B(x_0, r)$, т.к.

$$\|x_n - x_0\| = \frac{r}{2a} \cdot \left(\sum \left|\frac{1}{\sqrt{k}}\right|^3\right)^{1/3} = \frac{r}{2} < r.$$

Но $x_n \notin M$, так как $\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k)|^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{r^2}{4a^2 k} = \frac{r^2}{4a^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Ряд $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ расходится, т.е. $\forall c>0 \quad \exists n\in N$, что $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>c$. Если в качестве c взять $\frac{4a^2}{r^2}$, то получим, что $\exists n\in N$, что $\sum_{k=1}^{\infty}|x_n(k)|^2\geq 1$, т.е. $x_n\notin M$. Значит, M не является открытым. Множество M является ограниченным, так как оно содержится в шаре $B(x_0,1)$, где $x_0=(0,0,\dots)$. Действительно, из условия $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2<1$ следует, что $\forall k\, |x_k|<1$, но тогда $|x_k|^3<|x_k|^2<1$ и

$$\|x_n-x_0\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^3\right)^{1/3}<\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{1/3}<1.$$

<u>Задача № 3.</u> Доказать, что $L=\left\{x\in L[0,1]:\int_0^1 x(t)dt\right\}$ является подпространством пространства $CL[0,1]$.

<u>Решение.</u> Подпространством называется замкнутое линейное многообразие. Пусть $x,y\in L$ и $\alpha,\beta\in R$, тогда $\alpha x+\beta y\in L$, т.к.

$$\int_0^1(\alpha x+\beta y)(t)dt=\alpha\int_0^1 x(t)dt+\beta\int_0^1 y(t)dt.$$

Покажем, что множество L замкнуто. Пусть $x_n\in L$ и $x_n\underset{n\to\infty}{\to}x_0$, тогда $x_0\in L$. Действительно, если $\int_0^1|x_n(t)-x_0(t)|dt\to 0$, то

$$\int_0^1|x_n(t)-x_0(t)|dt\geq\left|\int_0^1 x_n(t)dt-\int_0^1 x_0(t)dt\right|\Rightarrow\int_0^1 x_0(t)dt=0, \text{т.к.} \int_0^1 x_n(t)dt=0.$$

Значит, L – подпространство в $CL[0,1]$.

<u>Задача № 4.</u> Доказать, что множество $L_{n0}=\{x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)\in l_2: x_n=0\ \forall n>n_0, n_0\in N-fix\}$ нигде не плотно в l_2.

<u>Решение.</u> По определению множество A является нигде не плотным в нормированном векторном пространстве, если оно не плотно ни в одном

шаре, т.е. если в каждом шаре $B \subset l_2$ содержится другой шар B_1, не имеющий с A ни одной общей точки.

Пусть B – произвольный шар в l_2. Возможны два варианта:

1) $B \cap L_{n_o} = \varnothing$;

2) $z\left(z_1, z_2, \ldots, z_{n_o}, 0\ldots\right) \in B \cap L_{n_o}$.

Во втором случае рассмотрим шар $B_1\left(z, \varepsilon\right) \subset B$ и точку $y(z_1, \ldots, z_{n_o}, \varepsilon/2, 0, \ldots)$. Тогда для $\forall x \in L_{n_o}$ имеем: $\|x - y\| \geq \varepsilon/2$, т.е. $B_2(y, \varepsilon/2) \subset E \setminus L_{n_o}$, кроме того $B_2(y, \varepsilon/2) \subset B_1(z, \varepsilon) \subset B$. Таким образом, в шаре B всегда найдется шар B_2, не содержащий точек множества L_{n_o}, т.е. L_{n_o} нигде не плотно.

Задача № 5. Доказать, что множество A последовательностей из l_2, содержащих лишь конечное число членов, отличных от нуля, плотно в l_2.

Решение. Пусть $x \in l_2$, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \sum\limits_{i=N}^{\infty} |x_i|^2 < \varepsilon^2$. Обозначим через $z(x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots)$. Очевидно, $z \in A$ и $\|z - x\|_{l_2} < \varepsilon$. Значит, x является точкой прикосновения для множества A, следовательно A всюду плотно в l_2.

ТЕМА 3. БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Основные понятия: нормированное векторное пространство, последовательность Коши (фундаментальная последовательность), полнота пространства, эквивалентные нормы, ряды в банаховых пространствах, критерий банаховости.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача №1. Доказать, что в пространстве $C^l[a, b]$ нормы

$$\|x\|_1 = \max_{t \in [a,b]} |x'(t)| + \int_a^b |x(t)|\, dt,$$

$$\|x\|_2 = \max_{t\in[a,b]}|x(t)| + \max_{t\in[a,b]}|x'(t)|$$

эквивалентны.

<u>Решение.</u> Две нормы являются эквивалентными, если они подчинены друг другу. Норма $\|\cdot\|_1$ подчинена $\|\cdot\|_2$, если существует положительная константа α, такая, что

$$\|x\|_1 \le \alpha\ \|x\|_2 \quad \forall\ x \in C^1[a,b].$$

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\,dt + \max_t |x'(t)| \le \max_t |x(t)|\cdot(b-a) + \max_t |x'(t)| \le$$

$$\le \max\{b-a,1\}\cdot\left(\max_t|x(t)| + \max_t|x'(t)|\right) = \alpha\cdot\|x\|_2.$$

С другой стороны, используя формулу Ньютона-Лейбница для непрерывно-дифференцируемых функций

$$x(t) = x(a) + \int_a^t x'(\tau)\,d\tau,$$

получим неравенство $|x(a)| \le |x(t)| + \int_a^b |x'(\tau)|\,d\tau$. Проинтегрируем обе части

по t: $(b-a)|x(a)| \le \int_a^b |x(t)|\,dt + (b-a)\int_a^b |x'(t)|\,dt$ или

$$|x(a)| \le \frac{1}{b-a}\int_a^b |x(t)|\,dt + \int_a^b |x'(t)|\,dt.$$

Таким образом,

$$\|x\|_2 = \max_t|x(t)| + \max_t|x'(t)| \le |x(a)| + \int_a^b |x'(t)|\,dt + \max_t|x'(t)| \le$$

$$\le \frac{1}{b-a}\int_a^b |x(t)|\,dt + 2\int_a^b |x'(t)|\,dt + \max_t|x'(t)| \le \frac{1}{b-a}\int_a^b |x(t)|\,dt +$$

$$+\left(2(b-a)+1\right)\cdot\max_t|x'(t)| \le$$

$$\le \max\left\{\frac{1}{b-a}, 2(b-a)+1\right\}\cdot\left(\int_a^b |x(t)|\,dt + \max_t|x'(t)|\right) = \beta\cdot\|x\|_1.$$

<u>Задача № 2.</u> Является ли пространство $C^l[0, 1]$ банаховым по норме

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)|\,dt + \max_t |x'(t)|.$$

Решение. Нормальное векторное пространство является банаховым, если любая последовательность Коши в нем сходится. По определению последовательность является последовательностью Коши, если $\|x_n - x_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$. Имеем,

$\|x_n - x_m\| = \int_0^1 |x_n(t) - x_m(t)|\,dt + \max_t \left|x_n'(t) - x_m'(t)\right| \to 0$ при $n, m \to \infty$. Значит,

$\int_0^1 |x_n(t) - x_m(t)|\,dt \to 0$ и $\max_t \left|x_n'(t) - x_m'(t)\right| \to 0$ при $n, m \to \infty$ одновременно.

В силу полноты пространства $L[0, 1]$ последовательность $x_n(t)$ сходится в среднем к функции $x_0(t)$, а последовательность непрерывных функций $x_n'(t)$ сходится равномерно к непрерывной функции $\varphi(t)$. Мы должны показать, что $x_0(t) \in C^1[0, 1]$ и $x_0'(t) = \varphi(t)$. Из сходимости в среднем следует, что существует подпоследовательность x_{n_k}, сходящаяся к $x_0(t)$ почти всюду.

Пусть для $t = t_0$ и $x_{n_k}(t_0) \to x_0(t_0)$ при $k \to \infty$, тогда $x_{n_k}(t) - x_{n_k}(t_0) = \int_{t_0}^{t} x_{n_k}'(\tau)\,d\tau$.

Перейдем к пределу при $k \to \infty$, получим

$$x_0(t) = x_0(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varphi_0(\tau)\,d\tau \text{ почти всюду.}$$

Учитывая, что $x_0(t)$ абсолютно непрерывная функция, имеем $x_0'(t) = \varphi(t)$.

Данная задача может быть решена и следующим образом. Известно, если в пространстве заданы две эквивалентные нормы, по одной из которых пространство банахово, то оно банахово и по второй норме. В задаче № 1 мы показали, что наша норма эквивалентна норме $\max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |x'(t)|$, по которой $C^l[0,\ 1]$ банахово. Значит $C^l[0,\ 1]$ банахово и по норме

$$\max_{t\in[a,b]}|x'(t)| + \int_0^1 |x(t)|\,dt.$$

<u>Задача №3.</u> Доказать, что пространство $M[a,\ b]$ - ограниченных на отрезке $[a,\ b]$ функций с нормой $\|x\| = \sup\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$ является банаховым.

<u>Решение:</u> Пусть x_n - последовательность Коши в пространстве $M[a,\ b]$. Это значит, что $x_n(t)$ - ограниченные на отрезке $[a,\ b]$ функции и

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon : \forall\ n,m > n_\varepsilon \quad \sup\limits_t |x_n(t) - x_m(t)| \le \varepsilon$. (*)

Зафиксируем t, получим числовую последовательность $x_n(t)$ такую, что $|x_n(t) - x_m(t)| \to 0$ при $n,\ m \to \infty$. Это означает, что $x_n(t)$ является числовай последовательностью Коши и сходится в силу полноты R. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x_0(t)$. Получили функцию $x_0(t)$, к которой последовательность $x_n(t)$ сходится точечно. Остается доказать, что $x_n(t) \in M[a,\ b]$ и $\sup\limits_t |x_n(t) - x_m(t)| \to 0$ при $n \to \infty$. Перейдем в равенстве (*) к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\sup_{a\le t\le b}|x_n(t) - x_m(t)| \le \varepsilon \quad \forall\ n \ge n_\varepsilon.$$

Функция $|x_n(t) - x_0(t)|$ ограничена, значит и $|x_0(t)|$ ограничена, так как $|x_0(t)| \le |x_n(t)| + |x_0(t) - x_n(t)|$. Таким образом, пространство $M[a,\ b]$ является банаховым.

<u>Задача № 4.</u> Является ли последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + \dfrac{1}{n^2}},\ t \in [-1,1] \setminus Q, \\ n\cos nt,\ t \in [-1,1] \cap Q, \end{cases}$$

последовательностью Коши в пространстве L_2 [-1, 1] ? Найти предел, если он существует.

Решение: По определению последовательность $x_n(t)$ является последовательностью Коши, если

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ n_\varepsilon : \forall\ n, m > n_\varepsilon \quad \left(\int_{-1}^{1} \left| x_n(t) - x_m(t) \right|^2 dt \right)^{1/2} < \varepsilon .$$

Поскольку интегралы Лебега от эквивалентных функций совпадают, заменим $x_n(t)$ на $y_n(t)$ такую, что $x_n(t) \sim y_n(t)$, где $y_n(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}}$. Имеем

$$\int_{-1}^{1} \left| x_n(t) - x_m(t) \right|^2 dt = \int_{-1}^{1} \left| y_n(t) - y_m(t) \right|^2 dt = \int_{-1}^{1} \left| \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{t^2 + \frac{1}{m^2}} \right|^2 dt \leq$$

$$\leq \int_{-1}^{1} \left| \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} - |t| \right|^2 dt \text{ при } m > n.$$

Рассмотрим последовательность $z_n = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} - |t|$, которая точечно сходится к нулю и ограничена : $|z_n|^2 \leq 1$. Воспользуемся теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, получим

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon : \quad \forall\ n > n_\varepsilon \qquad \int_{-1}^{1} \left| \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} - |t| \right|^2 dt < \varepsilon .$$

Это означает, что $\left\| \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} - |t| \right\| < \sqrt{\varepsilon} \quad \forall\ n > n_\varepsilon$, т.е. последовательность $y_n(t)$ и, следовательно $x_n(t)$ является последовательностью Коши и сходится к функции $|t| \in L_2$ [-1,1].

ТЕМА 4. ОТБРАЖЕНИЯ В НОРМИРОВАННЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Основные понятия: нормированное векторное пространство, отображение, непрерывное в точке отображение, непрерывное отображение, равномерно непрерывное отображение, отображение, удовлетворяющее условия Липшица, сжимающее отображение, неподвижная точка отображения, метод последовательных приближений, оценка скорости сходимости последовательных приближений.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача №1. Выяснить, является ли отображение

$$F: L_2[0,1] \to C[0,1] \qquad F(x) = \int_0^1 \frac{t^2 x(s)}{\sqrt[3]{s}} ds$$

непрерывным в точке $x_0(t) = 0$.

Решение: По определению, отображение $F: X \to Y$ непрерывно в точке x_0, если $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta(\varepsilon)$ такое, что $\forall\, x \in X$ такого, что $\|x - x_0\|_X < \delta \Rightarrow \|F(x) - F(x_0)\|_Y < \varepsilon$. Оценим

$$\|F(x) - F(x_0)\|_Y = \|F(x)\|_{C[0,1]} = \max_{0 \le t \le 1} \left| \int_0^1 \frac{t^2 x(s)}{\sqrt[3]{s}} ds \right| \le \max_{0 \le t \le 1} |t^2| \int_0^1 \frac{|x(s)|}{\sqrt[3]{s}} ds = \int_0^1 \frac{|x(s)|}{\sqrt[3]{s}} ds \le$$

(по неравенству Коши-Буняковского)

$$\le \left(\int_0^1 |x(s)|^2 ds \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{s}} \right)^2 ds \right)^{1/2} = \sqrt{3} \|x\|_{L_2[0,1]}.$$

Поэтому, если $\|x\|_{L_2[0,1]} < \delta$, то $\|F(x)\|_{C[0,1]} < \sqrt{3}\delta$ и для $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$ такое, что $\forall\, x \in L_2[0,1]$ такого, что $\|x\| < \delta$ выполняется $\|F(x)\| < \varepsilon$. Это означает, что отображение непрерывно в точке x_0.

Задача №2. Является ли отображение $F: L[0,1] \to L[0,1]$ непрерывным, если $F(x) = x^2(t)$.

Решение: Покажем, что данное отображение не является непрерывным в нуле, т.е. $\exists \varepsilon_0 > 0$, что $\forall \delta > 0 \quad \exists x \in L_2[0,1], \|x\| < \delta$, но $\|F(x)\| \geq \varepsilon_0$.

Пусть $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}$. Рассмотрим последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}(1-nt), t \in [0, 1/n[, \\ 0 \qquad\qquad\quad, t \in [1/n, 1], \end{cases}$$

которая сходится к нулю. Действительно, $\|x_n(t)\|_{L[0,1]} = \int_0^1 |x_n(t)| dt$

$$= \int_0^{1/n} \left|\sqrt{n}(1-nt)\right| dt = = \sqrt{n} \int_0^{1/n} |1-nt| dt =$$

$$\sqrt{n} \int_0^{1/n} (1-nt) dt = [1-nt = z] = \sqrt{n} \int_1^0 z \frac{dz}{-n} = -\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{z^2}{2}\bigg|_1^0 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Покажем, что $F(x_n)$ к нулю не стремится.

$$\|F(x_n)\|_{L[0,1]} = \int_0^1 |F(x_n)| dt = \int_0^1 x_n^2(t) dt = \int_0^{1/n} n(1-nt)^2 dt = n \int_1^0 z^2 \frac{dz}{-n} = \int_0^1 z^2 dz = \frac{1}{3};$$

Таким образом, F не является непрерывным.

Задача №3. Является ли отображение $F: C[0,1] \to C[0,1]$ непрерывным, равномерно непрерывным, удовлетворяющим условию Липшица, если

$$F(x) = \sqrt[3]{|x(t)|}.$$

Решение: Докажем, что отображение F является равномерно непрерывным, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon)$ такое, что $\forall x, y \in C[0,1]$ из условия $\|x - y\| = \max_t |x(t) - y(t)| < \delta$ следует, что

$$\|F(x) - F(y)\| = \max_t |F(x) - F(y)| = \max_t \left|\sqrt[3]{|x(t)|} - \sqrt[3]{|y(t)|}\right| < \varepsilon.$$

Сначала покажем, что для любых вещественных неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство:

$$\left|\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right| \le \sqrt[3]{|a-b|}$$

Пусть для определенности $a>b$, тогда $|a-b| = a-b$ и $\left|\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right| = \sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$. Значит, требуется доказать неравенство $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b} \le \sqrt[3]{a-b}$, которое эквивалентно $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^3 \le a-b$. Упростим его, получим неравенство $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} \ge 0$, которое справедливо.

Так как $\left|\sqrt[3]{|x(t)|}-\sqrt[3]{|y(t)|}\right| \le \sqrt[3]{\left||x(t)|-|y(t)|\right|} \le \sqrt[3]{|x(t)-y(t)|}$, то $\max\limits_t |F(x)-F(y)| \le \quad \le \sqrt[3]{\max\limits_t |x(t)-y(t)|} < \sqrt[3]{\delta}$. И если $\delta = \varepsilon^3$, то $\|F(x)-F(y)\| < \varepsilon \quad \forall\, x,y$ таких, что $\|x-y\| < \delta$.

Поскольку отображение равномерно непрерывно, то оно и непрерывно.

Докажем, что F не удовлетворяет условию Липшица, т.е. $\forall\, c>0$ существуют непрерывные функции $x(t), y(t)$ такие, что $\|F(x)-F(y)\| \ge c\|x-y\|$.

Пусть $x_n = \dfrac{1}{n}$, $\quad y_n = \dfrac{2}{n}$, тогда $\|x-y)\| = \dfrac{1}{n}$, а $\|F(x)-F(y)\| = \sqrt[3]{\dfrac{2}{n}} - \sqrt[3]{\dfrac{1}{n}} =$

$= \sqrt[3]{\dfrac{1}{n}}\left(\sqrt[3]{2}-1\right) = n\dfrac{1}{n}\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}}\left(\sqrt[3]{2}-1\right) = \dfrac{1}{n}n^{2/3}\left(\sqrt[3]{2}-1\right) = n^{2/3}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\|x-y\|$. Так как $n^{2/3}\left(\sqrt[3]{2}-1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, то существует такое n, что $n^{2/3}\left(\sqrt[3]{2}-1\right) > c$, что и требовалось доказать.

Задача №4. Является ли отображение $F: l_2 \to l_2$ сжимающим. Найти x_3, где $x_n = F(x_{n-1})$ $x_0 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$ и оценить расстояние от x_3 до неподвижной точки, если $F(x) = \left(0, \frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{2}x_n, \ldots\right) + (1,1,1,0,\ldots)$.

Решение: По определению отображение $F: l_2 \to l_2$ называется сжимающим, если существует постоянная $0 \le \alpha < 1$ такая, что $\forall x, y \in l_2$ выполнено $\|F(x) - F(y)\| \le \alpha \|x - y\|$.

Вычислим

$$\|F(x) - F(y)\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^2 |x_k - y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\|x - y\|.$$

Следовательно, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ и отображение F является сжимающим. Найдем последовательные приближения x_1, x_2, x_3.

$$x_1 = F(x_0) = \left(0, \frac{1}{2}\cdot 1, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-1}, \ldots\right) + (1,1,1,0,0,\ldots)$$

$$= \left(1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2(n-1)}, \ldots\right)$$

$$x_2 = F(x_1) = \left(0, \frac{1}{2}\cdot 1, \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}, \ldots, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2(n-1)}, \ldots\right) + (1,1,1,0,0,\ldots)$$

$$= \left(1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{5}{8}, \ldots, \frac{1}{4(n-2)}, \ldots\right)$$

$$x_3 = F(x_2) = \left(0, \frac{1}{2}\cdot 1, \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{4}, \ldots, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4(n-2)}, \ldots\right) + (1,1,1,0,0,\ldots)$$

$$= \left(1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{7}{8}, \frac{5}{16}, \frac{1}{24}, \ldots, \frac{1}{8n(n-3)}, \ldots\right)$$

Оценим расстояние от x_3 до неподвижной точки *a* отображения *F*:

$$\|x_3 - a\| \le \frac{\alpha^3}{1-\alpha}\cdot\|x_0 - x_1\| = \frac{\left(1/2\right)^3}{1-1/2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(1)} - x_k^{(0)}\right|^2\right)^{1/2} = \frac{1}{8}\cdot 2*$$

$$*\left(|1-1|^2 + \left|\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{5}{4}-\frac{1}{3}\right|^2 + \left|\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right|^2 + \ldots + \left|\frac{1}{2(k-1)}-\frac{1}{k}\right|^2 + \ldots\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(1 + \left(\frac{11}{12}\right)^2 + \sum_{k=4}^{\infty}\left(\frac{k-2}{2k(k-1)}\right)^2\right)^{1/2}.$$

<u>Задача №5.</u> Показать, что отображение $F\colon L_2[0,1]\to L_2[0,1]$ является сжимающим, где $F(x) = \frac{1}{4}x\left(\sqrt[4]{t}\right) + t$. Вычислить x_3, если $x_0(t) = 0$.

<u>Решение:</u> Вычислим $\|F(x) - F(y)\|_{L_2[0,1]} =$

$$\left(\int_0^1\left|\frac{1}{4}x\left(\sqrt[4]{t}\right) + t - \frac{1}{4}y\left(\sqrt[4]{t}\right) - t\right|^2 dt\right)^{1/2}$$

$$\le \left(\frac{1}{4}\int_0^1 |x(z) - y(z)|^2\cdot 4z^3 dz\right) = \frac{1}{4}\sqrt{4}\left(\int_0^1 |x(z) - y(z)|^2\cdot\max_{z\in[0,1]}\left|z^3\right|dz\right)^{1/2}$$

$$\le \frac{\sqrt{4}}{4}\cdot\left(\int_0^1 |x(z) - y(z)|^2 dz\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\|x - y\|_{L_2[0,1]}$$

Значит, $\alpha = \frac{1}{2}$, $x_{n'}(t) = F(x_0) = t$;

$$x_2(t) = F(x_1) = \frac{1}{4}x_1(\sqrt[4]{t}) + t = \frac{1}{4}\sqrt[4]{t} + t;$$

$$x_3(t) = F(x_2) = \frac{1}{4}x_2(\sqrt[4]{t}) + t = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\sqrt[4]{\sqrt[4]{t}} + \sqrt[4]{t}\right) + t = \frac{1}{16}t^{1/16} + \frac{1}{4}t^{1/4} + t.$$

<u>Задача №6.</u> Найти с точностью до 0.01 приближенное решение уравнения

$$g(x) = x^2 - 100x + 10 = 0.$$

Решение: Приведем уравнение *g(x)=0* к уравнению вида *x=F(x)* и найдем точку x_0 и радиус *r* такие, что $B[x_0, r] = [a, b] = [x_0 - r, x_0 + r]$ инвариантен относительно *F* и в этом шаре отображение *F* - сжимающее.

Привести уравнение к виду *x=F(x)* можно следующим способом. Выражаем *x*:

$$x = 0.01(x^2 + 10) \Rightarrow F(x) = 0.01(x^2 + 10).$$

В качестве константы Липшица для дифференцируемой функции *F(x)* на отрезке *[a,b]* можно взять $\alpha = \max\limits_{a \le x \le b} |F'(x)|$.

В нашем случае $F'(x) = 0.02x = \dfrac{x}{50}$. Условие $|F'(x)| < 1$ выполнено, если $|x| < 50$. Выберем точку x_0 в центре этого промежутка, т.е. $x_0 = 0$. Число *r*, радиус шара, выберем из двух условий

$$\begin{cases} \|x_0 - f(x_0)\| \le r(1 - \alpha(r)), \\ \alpha(r) < 1, \end{cases}$$

где $\alpha(r) = \max\limits_{-r \le t \le r} |f'(t)| = \dfrac{r}{50}$, тогда $x_1 = f(x_0) = \dfrac{1}{10}$.

Наши условия примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{10} \le r\left(1 - \dfrac{r}{50}\right), \\ \dfrac{r}{50} < 1, \end{cases}$$

Выберем одно из решений этой системы. Пусть *r*=1. Тогда отрезок [-1,1] инвариантен относительно отображения *F*, на нем *F* сжимающее и $\alpha = \dfrac{1}{50}$.

Оценим расстояние $\|x_n - a\| \le \dfrac{\alpha^n}{1 - \alpha}\|x_1 - x_0\| \le \left(\dfrac{1}{50}\right)^n \cdot \dfrac{50}{49} \cdot \dfrac{1}{10} \le \dfrac{1}{100}$.

Следовательно, $x_1 = \dfrac{1}{10}$ является приближенным решением уравнения с точностью до $\dfrac{1}{490}$.

Задача №7. При каких $\lambda \neq 0$ к интегральному уравнению Фредгольма второго рода $x(t) - \lambda \int\limits_0^1 ts^2 x(s)ds + t$ применим принцип сжимающих отображений в $C[0,1]$ пространстве и в пространстве $L_2[0,1]$? При $\lambda = \frac{1}{2}$ найти решение с точностью до 0.01 и сравнить его с точным решением.

Решение: Обозначим через $F(x) = \lambda \int\limits_0^1 ts^2 x(s)ds + t$. Тогда наше уравнение запишется в виде *x=F(x),* то есть искомое решение есть неподвижная точка отображения *F*. Поскольку оба пространства $C[0,1]$ и $L_2[0,1]$ являются полными, то для того, чтобы применить принцип сжимающих отображений нужно показать, что *F* - сжимающее отображение пространства в себя.

Рассмотрим пространства $C[0,1]$.

Обозначим через $Z(t) = \lambda \int\limits_0^1 ts^2 x(s)ds, \quad Y(t) = t$, тогда *F(x)=Z(t)+Y(t)* и для проверки непрерывности *F* достаточно проверить, что *Z(t)* непрерывна.

$Z(t) = \lambda t \int\limits_0^1 s^2 x(s)ds = \lambda Ct$, где $C = \int\limits_0^1 s^2 x(s)ds$ - некоторая постоянная, так как определенный интеграл сходится. Значит, $Z(t) = \lambda Ct$ - непрерывный функционал. Таким образом *F* - отображение $C[0,1]$ в себя.

Проверим, является ли отображение *F* сжимающим, то есть $\exists \alpha \quad 0 \leq \alpha < 1$ такое, что $\forall x, y \in C[0,1] \ \max\limits_{0 \leq t < 1} |F(x) - F(y)| \leq \alpha \max\limits_{0 \leq t < 1} |x(t) - y(t)|$. Оценим $\max\limits_{0 \leq t < 1} |F(x) - F(y)| =$

$$= \max_{0 \leq t < 1} \left| \int\limits_0^1 \lambda ts^2 \big(x(s) - y(s) \big) ds \right| \leq |\lambda| \int\limits_0^1 |s|^2 \max_{0 \leq t < 1} |x(t) - y(t)| ds \leq |\lambda| \cdot \frac{1}{3} \cdot \|x - y\|.$$

Обозначим через $\alpha = \frac{|\lambda|}{3}$. Следовательно, отображение *F* является сжимающим, если ($|\lambda| < 2$, то есть $-3 \leq \lambda \leq 3$. При этих значениях λ к интегральному уравнению Фредгольма можно применить теорему Банаха, согласно которой уравнение имеет единственное решение.

Оценим количество приближений из формулы

$$\|x_n - a\| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_0 - x_1\|;$$

Имеем $\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\max\limits_{0\le t<1}|x_0(t) - x_1(t)| < 0.01$

В нашем случае $\alpha = \frac{1}{6}$, пусть $x_0(t) = 0$, тогда $x_1(t) = F(x_0) = t$;

$\|x_1 - x_0\| = \max\limits_{0\le t<1}|t - 0| = 1$. Значит $\left(\frac{1}{6}\right)^n \cdot \frac{6}{3} < 0.01$. Откуда получаем неравенство на $n: 6^{-n} < \frac{3}{400}$, таким образом по крайней мере x_4 является решением данного уравнения с точностью 0.01.

Найдем x_2, x_3, x_4.

$$x_2(t) = F(x_1) = \frac{1}{2}\int_0^1 ts^2 x_1(s)ds + t = \frac{1}{2}t\int_0^1 s^2 s ds + t = \frac{1}{2}t\cdot\frac{1}{4} + t = \frac{1}{8}t + t;$$

$$x_3(t) = F(x_2) = \frac{1}{2}t\int_0^1 s^2\left(\frac{1}{8}s + s\right)ds + t = \frac{1}{2}t\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + t = \frac{1}{2}t\cdot\frac{9}{32} + t = \frac{9}{64}t + t;$$

$$x_4(t) = F(x_3) = \frac{1}{2}t\int_0^1 s^2\left(\frac{9}{64}s + s\right)ds + t = \frac{1}{2}t\left(\frac{9}{64}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + t = \frac{73}{128}t + t;$$

Итак, приближенное решение данного уравнения имеет вид

$$x_4(t) = \frac{73}{128}t + t;.$$

Найдем точное решение данного уравнения, так как это уравнения с вырожденным ядром. Обозначим через $C = \int_0^1 s^2 x(s)ds$.

Тогда $x(t) = \int_0^1 ts^2 x(s)ds + t$, поэтому $C = \int_0^1 s^2\left(\frac{1}{2}Cs + s\right)ds$

$$C\left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow C = \frac{2}{7};$$

Значит, точное решение имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} t + t = \frac{2}{14} t + t .$$

Сравним его с приближенным $x_4(t)$:

$$\max_{0 \le t \le 1} \left| \frac{73}{512} t + t - \frac{2}{14} t - t \right| = \max_{0 \le t \le 1} \left| \left(\frac{73}{512} - \frac{2}{14} \right) t \right| = \left| \frac{73}{512} - \frac{2}{14} \right| < \frac{1}{100};$$

Проведем аналогичные расчеты для пространства $L_2[0,1]$. Обозначим через $K(t,s) = \lambda ts^2$. Тогда

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(t,s)|^2 dsdt = |\lambda|^2 \int_0^1 \int_0^1 t^2 s^4 dsdt = |\lambda|^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = |\lambda|^2 \cdot \frac{1}{15} < +\infty .$$

Таким образом *F(x)* отображает $L_2[0,1]$ в себя и является сжимающим, если $|\lambda| \cdot \frac{1}{\sqrt{15}} < 1 \Rightarrow |\lambda| < \sqrt{15}$ к данному уравнению можно применить принцип сжимающих отображений. В этом случае понадобится число итераций, определяемое соотношением

$$\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{15}} \right)^n}{1 - \frac{1}{2\sqrt{15}}} \cdot \left(\int_0^1 |x_1(t) - x_0(t)|^2 dt \right)^{1/2} < 0.01$$

т.е. $\frac{1}{\left(2\sqrt{15}\right)^n} \cdot \frac{2\sqrt{15}}{2\sqrt{15} - 1} \cdot \left(\int_0^1 t^2 dt \right)^{1/2} = \frac{1}{\left(2\sqrt{15}\right)^{n-1} \cdot \left(2\sqrt{15} - 1\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} < 0.01$

Откуда *n=3*.

<u>Задача №8.</u> Доказать, что последовательность цепных дробей $2, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \ldots$ сходится. Найти ее предел.

Решение: Используем принцип сжимающих отображений в *R* и определим $x_1 = 2, x_2 = 2 + \frac{1}{x_1}, \ldots, x_n = 2 + \frac{1}{x_{n-1}} \quad (n \ge 2)$. Заметим, что

$x_n \le \dfrac{5}{2}\quad \forall\, n \ge 1$, а так как $x_n = 2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{x_{n-2}}},\quad (n \ge 3)$, то $x_n \le \dfrac{5}{2}\ \forall\, n \ge 1$. Кроме того $x_n \ge 2$.

Рассмотрим отображение $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$ отрезка $\left[2, \dfrac{5}{2}\right]$ на себя. Оно является сжимающим, так как $\left|f(x) - f(y)\right| = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right| \le \dfrac{1}{4}|x - y|$, поэтому имеет единственную неподвижную точку $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \dfrac{1}{x_{n-1}}\right)$. Решая уравнение $x^* = 2 + \dfrac{1}{x^*}$, имеем $x^* = 1 + \sqrt{2}$.

Таким образом последовательность цепных дробей сходится, ее предел $1 + \sqrt{2}$.

ТЕМА 5. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Основные понятия: скалярное произведение, пространство со скалярным произведением, полнота пространства со скалярным произведением. ортонормированные системы, процесс ортогонализации Грамма-Шмидта, разложение гильбертова пространства в прямую сумму, аппроксимация в гильбертовом пространстве.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача № 1. Для функции e^t найти многочлены степени $n = 0,1,2$ такие, что $\left\|e^t - l_n(t)\right\|$ минимальна в пространстве $L_2[-1,1]$.

Решение: Рассмотрим многочлены 1, t, t^2. Они образуют линейно независимую систему. Применим к ним в пространстве $L_2[-1,1]$ процесс ортогонализации Грамма-Шмидта и построим ортонормированную систему полиномов Лежандра $p_o(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$.

$$l_o = 1; \quad p_o = \frac{l_o}{\|l_o\|} = \frac{1}{\left(\int\limits_{-1}^{1} 1^2\,dt\right)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$l_1 = t - \alpha_{10} l_0, \quad \alpha_{10} = \frac{(l_1, t)}{(l_0, l_0)} = \frac{\int\limits_{-1}^{1} t \cdot 1 \cdot dt}{\int\limits_{-1}^{1} 1dt} = 0; \quad p_1(t) = \frac{l_1}{\|l_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}t;$$

$$l_2 = t^2 - \alpha_{20} l_0 - \alpha_{21} l_1; \quad \alpha_{20} = \frac{(t^2, 1)}{(1,1)} = \frac{1}{3}; \quad \alpha_{21} = \frac{(t^2, t)}{(t,t)} = 0;$$

$$l_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}; \quad p_2(t) = \frac{\sqrt{5} \cdot 3}{2\sqrt{2}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right).$$

По теореме о разложении в ряд Фурье отрезок ряда Фурье обладает экстремальным свойством. Значит, $\|e^t - l_0(t)\|$ будет минимальна, если $l_0(t)$ является проекцией элемента e^t на подпространство, порожденное элементом $p_o(t)$. По теореме о разложении в ряд Фурье элемента $x(t)$ имеем

$$\Pr_{L(l_1,\dots,l_n)} x = \sum_{k=1}^{n} c_k l_k.$$

Поэтому $l_o(t) = (e^t, p_o) \cdot p_o = \left(\int\limits_{-1}^{1} e^t \cdot 1dt\right) \cdot 1 = \dfrac{e^2 - 1}{2e}$.

Аналогично определяется $l_1(t)$ и $l_2(t)$:

$$l_1(t) = (e^t, p_o) p_o + (e^t, p_1) p1 = \frac{e^2 - 1}{2e} + \frac{3}{e} t;$$

$$l_2(t) = (e^t, p_o) p_o + (e^t, p_1) p1 + (e^t, p_2) p_2 = -2l + \frac{17}{e} + \frac{15}{4} \cdot \frac{e^2 - 7}{e} \cdot t^2 + \frac{3}{e} t;$$

Задача № 2. В гильбертовом пространстве бесконечных числовых последовательностей l_2 найти проекцию вектора $x_o\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\dots\right)$ на подпространство $L = \left\{\alpha\, x + \beta\, y,\ \ \alpha,\beta \in R,\ \ \ x = \left(\frac{1}{7},\frac{1}{7^2},\dots\right),\ \ \ y = \left(\frac{1}{8},\frac{1}{8^2},\dots\right)\right\}$,

Решение: Обозначим через z проекцию вектора x на подпространство L, тогда $z = \alpha\, x + \beta\, y$ и $x_o - z \perp L$, т.е. $(x_o - z, x) = 0$ и $(x_o - z, y) = 0$.

Из условия ортогональности для определения коэффициентов α и β получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}\alpha\,(x,x) + \beta\,(y,x) = (x_o,x)\\ \alpha\,(x,y) + \beta\,(y,y) = (x_o,y)\end{cases}$$

Рассчитаем коэффициенты системы.

$$(x,x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{7^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{49^k} = \frac{1}{48};$$

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{7^k}\cdot\frac{1}{8^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{56^k} = \frac{1}{55};$$

$$(y,y) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k y_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{8^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{64^k} = \frac{1}{63};$$

$$(x_o,x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_{ok} x_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{7^k}\cdot\frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{14^k} = \frac{1}{13};$$

$$(x_o,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_{ok} y_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{8^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{16^k} = \frac{1}{15};$$

Система примет вид

$$\begin{cases}\frac{1}{48}\alpha + \frac{1}{55}\beta = \frac{1}{3}\\ \frac{1}{55}\alpha + \frac{1}{63}\beta = \frac{1}{15}\end{cases},$$

Решая систему по правилу Крамера, получим

$$P_L x_o = -\frac{1056}{13}x - \frac{1155}{13}y;$$

Задача № 3. Найти ортогональное дополнение в пространстве бесконечных числовых последовательностей l_2 к подпространству $L_n = \left\{ x \in l_2: \quad x(x_1, \ldots, x_n, \ldots), \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$. Вычислить расстояние от $x_o = (1,0,\ldots)$ до L_n.

Решение: Ортогональное дополнение к подпространству L_n представляет собой одномерное подпространство, натянутое на вектор $a_n = \left(\underbrace{1,\ldots,1}_{n},0,\ldots \right)$.

Действительно, пусть $x \in L_n, y \in L_n^{\perp}$, тогда $y = \alpha a_n$ и $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i = \alpha \sum_{i=1}^{\infty} x_i a_n = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i = \alpha \cdot 0 = 0$. Расстояние от точки x_0 до подпространства вычисляется по формуле $\rho(x_0, L) = \frac{(x_0, a)}{\|a\|}$. Значит, $\rho(x_0, L) = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Задача № 4. Доказать, что если

$$M_m = \left\{ y = (y_1, \ldots, y_m, 0, \ldots): \sum_{i=1}^{m} y_i = 0 \right\},$$

$$N_m = \left\{ z = (z_1, \ldots, z_n, \ldots) \in l_2: \quad z_n = 0 \quad \forall n > 1 \right\},$$

то при $\forall n \quad l_2 = M_m \oplus N_m$. Будет ли N_m ортогональным дополнением к M_m?

Решение: Пусть $x \in l_2, y \in M_m, z \in N_m$ и имеет место формула $l_2 = M_m \oplus N_m$, тогда $\forall n \in N \ x_n = y_n + z_n$. Из этой системы следует, что $\forall n > 1 \quad x_n = y_n$. Выразим y_1 и z_1 через x. Воспользуемся соотношениями

$y_1 + \ldots + y_m = 0, \quad x_1 = y_1 + z_1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -y_2 - \ldots - y_m = -x_2 - \ldots - x_m,$ тогда $z_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$.

Таким образом, $l_2 = M_m \oplus N_m$. N_m не является ортогональным дополнением подпространства M_m ни при каком $m > 1$, т.к. при $y = (1,-1,0,\ldots) \in M_m$, $z = (1,0,\ldots) \in N_m$, $m = 2,3,\ldots$ $(y,z) = 1 \neq 0$.

ТЕМА 6. КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Основные понятия: открытое покрытие множества, сходящиеся последовательности, ε-сеть множества, относительно компактные множества, теорема Хаусдорфа, теорема Арцела-Асколи, критерий относительной компактности в пространствах l_p, $L_p[a,b]$ ($p \geq 1$).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

Задача № 1. Выяснить, является ли относительно компактным в пространстве $C[0,1]$ множество функций

$$M = \left\{ x \in C[0,1]: |x(0)| \leq 1, \ |x''(t)| \leq 4 \quad \forall\, t \in [0,1] \right\}.$$

Решение. Множество M в пространстве $C[0,1]$ относительно компактно, если оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Данное множество не является равномерно ограниченным, так как $\exists\, x_n(t) = nt \in C[0,1]$, что $\forall\, c > 0 \quad \|x_n(t)\|_{C[0,1]} = n$ и поскольку $n \in N$, то норму $x_n(t)$ можно сделать больше любой наперед заданной константы *c*.

Задача № 2. Будет ли относительно компактным в $C[0,1]$ множество функций

$$M = \left\{ x \in C[0,1]: \ x(t) = \sin nt, \ n \in N \right\}?$$

<u>Решение.</u> По определению множество M является равностепенно непрерывным, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon)$ такое, что $\forall\, t_1, t_2 \colon |t_1 - t_2| < \delta$ вытекает, что $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon\ \ \forall\, x(t) \in M$. Покажем, что наше множество не является равностепенно непрерывным, т.е. $\exists\, \varepsilon_0 = 1$ такое, что какое бы $\delta_n = \dfrac{2}{n}$ мы не взяли, найдутся точки $\exists\, t_1 = 0,\ t_2 = \dfrac{\pi}{2n}$, что хотя $|t_1 - t_2| < \delta_n$, но $|x(t_1) - x(t_2)| \geq \varepsilon_0$.

Действительно, $|t_1 - t_2| = \dfrac{\pi}{2n} < \dfrac{2}{n}$ и $|x(t_1) - x(t_2)| = \left|\sin\dfrac{\pi}{2n}\cdot n\right| = 1 = \varepsilon_0$; значит, M не относительно компактное.

<u>Задача № 3.</u> Выяснить, является ли относительно компактное множество M в пространстве $C[0,1]$, где $M = \left\{ x \in C[0,1] \colon |x(t)| \leq 1,\ |x''(t)| \leq 4 \right\}$.

<u>Решение.</u> Используя теорему Арцела, покажем, что M равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно.

1) M равномерно ограниченно, если $\exists\, c > 0$ такое, что $\|x\| \leq c$ $\forall\, x \in M$.

Пусть $c = 1$, тогда $\|x\| = \max\limits_t |x(t)| \leq 1\ \ \forall\, x \in M$.

2) M равностепенно непрерывно, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$\forall\, t_1, t_2 \in [0,1]$ и $|t_1 - t_2| < \delta$ вытекает, что $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ для всех

$x(t) \in M$.

Для доказательства равномерной непрерывности покажем, что ограничена первая производная функция $x(t)$. Воспользуемся равенством:

$$x'(t) = \int_0^t x''(\tau)d\tau + x'(0)\text{; тогда } |x'(t)| \le \int_0^t |x''(\tau)|d\tau + |x'(0)| \le 4 + |x'(0)|.$$

Покажем, что $x'(0)$ ограничена. Имеем

$$x(t) - x(0) = \int_0^t x'(\tau)d\tau = \int_0^t (x'(\tau) - x'(0) + x'(0))d\tau = \int_0^t (x'(\tau) - x'(0))d\tau +$$

$$+\int_0^t x'(0)d\tau = \int_0^t\int_0^\tau x''(s)ds + tx'(0).$$

Тогда $tx'(0) = x(t) - x(0) - \int_0^t\int_0^\tau x''(s)ds$ и поэтому $\forall\, t \in [0,1]$

$$|tx'(0)| = |x(t)| - |x(0)| - \int_0^t\int_0^\tau |x''(s)|ds \le 1 + 1 + 4 = 6.$$

А это означает, что $|x'(0)| \le 6$. Следовательно, $|x'(t)| \le 4 + 6 = 10.$

Пусть $\forall\, t_1, t_2 \in [0,1]$ такие, что $|t_1 - t_2| < \delta$, тогда

$$|x(t_1) - x(t_2)| \le |x'(\tau)||t_1 - t_2| \le 10\delta < \varepsilon.$$

В этом случае $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \frac{\varepsilon}{10}$, что $\forall\, t_1, t_2$ $|t_1 - t_2| < \delta$ вытекает, что $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$. А это означает равностепенную непрерывность множества *M*.

Таким образом, *M* – относительно компактно.

Задача № 4. Выяснить, является ли множество *M* относительно компактным в $C[0,2]$, где $M = \{x \in C[0,1]\colon |x(t)| \le 1, \forall\, t \in [0,1]\}$.

Решение. Функции вида $x_n(t) = \sin 2n\pi t, n = 1,2,...$ принадлежат множеству *M*, но последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ не содержит последовательности Коши, так как при $k>n$

$$\|x_n - x_k\| = \max_{0\le t\le 1}|x_n(t) - x_k(t)| \ge \left|x_n\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) - x_k\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right| = 1.$$

По определению, множество *M* не относительно компактно.

Задача № 5. Выяснить, будет ли множество M компактным в $C[0,1]$, если $M = \left\{ x(t) \in C[0,1]:\ x(0) = 0,\ x(1) = 1, |x(t)| \leq 1 \quad \forall\ t \in [0,1] \right\}$.

Решение. Рассмотрим отображение $f : C[0,1] \to R$, где $f(x) = \int_0^1 x^2(t)dt$. Заметим, что $f(x) \geq 0$ для $\forall\ x(t) \in C[0,1]$. Данное отображение является равномерно непрерывным. Поэтому, если M компактно, то по теореме Вейерштраса $\exists\, x_0 \in M$, что $f(x_0) = \min\limits_{x \in M} f(x)$. Пусть $x_n(t) = t^n, t \in [0,1], n \in N, x_n(t) \in M$ и $f(x_n) = \int_0^1 t^{2n}dt = \dfrac{1}{2n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Следовательно $f(x_0) = 0$. Поэтому $x_n(t) \to x_0(t)$ такой, что $\int_0^1 x_0^2(t)\,dt = 0$, но тогда $x_0(t) \equiv 0$. Однако $x_0(t) \equiv 0$ не принадлежит множеству M. А это означает, что M не компактно.

4 УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО КУРСУ.

4.1 Задания типового расчета

Задание №1. Можно ли в пространстве дважды непрерывно-дифференцируемых функций $C^2[a,b]$ на отрезке *[a,b]* принять за норму величину:

1.1. $|x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{c[a,b]}$;

1.2. $\|x''\|_{c[a,b]} + \|x\|_{CL_2[a,b]}$;

1.3. $|x(a)| + |x(b)| + \|x''\|_{c[a,b]}$;

1.4. $|x(a)| + \|x'\|_{c[a,b]} + \|x''\|_{CL[a,b]}$;

Можно ли в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций $C^1[a,b]$ на отрезке *[a,b]* принять за норму величину:

1.5. $\max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

1.6. $|x(b) - x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

1.7. $|x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

1.8. $\int\limits_a^b |x(t)|dt + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

Найти условия, при которых функция $\varphi(x)$ в пространстве l_2 определяет норму

1.9. $\varphi(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i^2\right)^{1/2}, \quad a_{i \geq 0}$;

1.10 $\varphi(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i x_i^2\right)^{1/2}, \quad a_{i \geq 0}, \quad m$ – фиксировано;

Определить, задает ли пара $(X, \|x\|)$ нормированное векторное пространство:

1.11. $X = \{x(t) \in C[a,b] | x(a) = 0\}, \quad \|x\| = \int\limits_a^b |x(t)|dt$;

1.12. $X = \{x(t) \in C^1[a,b] | x(a) = x(b)\}, \quad \|x\| = \int\limits_a^{(a+b)/2} |x(t)|dt + \int\limits_{(a+b)/2}^b |x'(t)|dt$;

1.13. $X = \{x(t) \in C^1[a,b] | x'(a) = 0\}, \quad \|x\| = \int\limits_a^b |x'(t)|dt + |x(a)|$;

1.14. $X = \{x(t) \in C^1[a,b] | x'(t) \leq 0\}, \quad \|x\| = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}$;

1.15. $X=\left\{x(t)\in C^2[a,b]\right\}$, $\|x\|=\max\limits_{t\in[a,b]}|x''(t)|+\left(\int\limits_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$.

Задание №2. Найти предел последовательности x_n в нормированном векторном пространстве $C[a,b]$, если он существует.

2.1. $a=0,\quad b=1,\quad x_n(t)=t^n-t^{n-1}$;

2.2. $a=0,\quad b=1,\quad x_n(t)=\dfrac{t^{n+1}}{n+1}-\dfrac{t^{n+2}}{n+2}$;

2.3. $a=0,\quad b=2,\quad x_n(t)=\sqrt{t^2+\dfrac{1}{n^2}}$;

2.4. $a=1,\quad b=2,\quad x_n(t)=n\left(\sqrt{t+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{t}\right)$;

2.5. $a=0,\quad b=1,\quad x_n(t)=\dfrac{nt}{1+n+t}$;

2.6. $a=0,\quad b=1,\quad x_n(t)=\dfrac{2nt}{1+n^2t^2}$;

2.7. $a=0,\quad b=2,\quad x_n(t)=\sqrt[n]{1+t^n}$;

2.8. $a=0,\quad b=1,\quad x_n(t)=\dfrac{nt}{1+n^2t}$;

2.9. $a=0,\quad b=\dfrac{1}{2},\quad x_n(t)=2^n t^n(1-2t)$;

2.10. $a=1/2,\quad b=3/2,\quad x_n(t)=\dfrac{t^n}{1+t^n}$;

2.11. $a=-5\pi,\quad b=-4\pi,\quad x_n(t)=\dfrac{4\cos^{n/3}t}{5+\cos^n t}$;

2.12. $a=0,\quad b=3,\quad x_n(t)=\dfrac{3^n t^n-t^{2n}}{3^{2n}}$;

2.13. $a=0,\quad b=1,\quad x_n(t)=\dfrac{nt}{\sqrt{n^2+1}}$;

2.14. $a=0,\quad b=1,\quad x_n(t)=\sin\dfrac{t}{n}$;

2.15. $a=0,\ b=1,\quad x_n(t)=\sin t-\sin\frac{t}{n}$.

Задание №3. Найти предел последовательности x_n в нормированном пространстве l_p, если он существует.

3.1. $x_n=\left(\underbrace{\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^n,\dots,\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^n}_{n},0,\dots\right),\qquad p=\frac{5}{2};$

3.2. $x_n=\left(\underbrace{\frac{1}{n^2},\dots,\frac{1}{n^2}}_{n},0,\dots\right),\qquad p=\frac{3}{2};$

3.3. $x_n=\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n},0,\dots\right),\qquad p=1;$

3.4. $x_n=\left(\underbrace{\frac{\sin(n)}{n},\dots,\frac{\sin(n)}{n}}_{n},0,\dots\right),\qquad p=1;$

3.5. $x_n=\left(1,\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\dots,\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\,0,\dots\right),\qquad p=4;$

3.6. $x_n=\left(\underbrace{\sin\frac{\pi n}{12},\dots,\sin\frac{\pi n}{12}}_{n},0,\dots\right),\qquad p=\frac{5}{4};$

3.7. $x_n=\left(1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\dots,\sqrt[n]{n}\,0,\dots\right),\qquad p=\frac{14}{5};$

3.8. $x_n=\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}},0,\dots\right),\qquad p=\frac{6}{5};$

3.9. $x_n=\left(\frac{n}{1+n},\frac{n}{1+2n},\dots,\frac{n}{1+kn},\dots\dots\right),\qquad p=3;$

3.10. $x_n=\left(\frac{n^2}{1+n^2},\frac{n^2}{1+2n^2},\dots,\frac{n^2}{1+kn^2},\dots\dots\right),\qquad p=\frac{3}{2};$

3.11. $x_n = \left(\underbrace{0,\dots,0}_{n-1},\frac{1}{n^{\sigma}},\frac{1}{(n+1)^{\sigma}},\dots\right), \delta > 1, p = 1;$

3.12. $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n},0,\dots,0}_{n},1,0,\dots\right), p = 2;$

3.13. $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n^2},\dots,\frac{1}{n^2}}_{n^2},0,\dots\right), p = 4;$

3.14. $x_n = \left(1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},0,\dots\right), \quad p = 5;$

3.15. $x_n = \left(1,\frac{1}{\sqrt{2}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}},0,\dots\right), \quad p = l_2.$

Задание №4. Определите, является ли данное множество замкнутым, открытым в пространстве $C[a,b], CL[a,b]$. Найдите его замыкание, внутренние и граничные точки в каждом указанном пространстве.

4.1. $M = \{x(t) | \ x(a)x(b) = 0\};$

4.2. $M = \{x(t) | \ x(a) = x(b)\};$

4.3. $M = \{x(t) \| x(t)| < 1, \forall \ t \in [a,b] \};$

4.4. $M = \{x(t) | \ x(a) > 0\};$

4.5. $M = \{x(t) \in C^1[a,b] | \ x(a) = 0\};$

4.6. $M = \left\{x(t) \middle| \int\limits_a^b |x(t)| \, dt < 1\right\};$

4.7. $M = \left\{x(t) \middle| \int\limits_a^b x(t) \, dt = 0\right\};$

4.8. $M = \left\{x(t) \middle| \max\limits_{a \le t \le b} |x(t)| < 1\right\};$

4.9. $M = \{x(t) | \ x(a) < 0\};$

4.10. $M = \{x(t) \in C^1[a,b] | \ x'(t) < 0\};$

4.11. $M = \left\{ x(t) \in C^1[a,b] \middle| \; x'(a) = 0 \right\}$;

4.12. $M = \left\{ x(t) \in C^1[a,b] \middle| \; x'(a) > 0 \right\}$;

4.13. $M = \left\{ x(t) \middle| \; x(t) = const \right\}$.

Задание 5. Для данного множества М выяснить,является ли множество $B = M \cap l_p$ открытым, замкнутым, ограниченным в l_p.

5.1. $M = \left\{ x : x_k \le \dfrac{1}{k}, k = 1,2... \right\}, \quad p = 1$;

5.2. $M = \left\{ x : 0 < x_k < 1, k = 1,2... \right\}, \quad p = \infty$;

5.3. $M = \left\{ x : x_k > 0, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2$;

5.4. $M = \left\{ x : \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k < 1, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2$;

5.5. $M = \left\{ x : x_1 = ... = x_n = 0, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2$;

5.6. $M = \left\{ x : x_k \le \dfrac{1}{k}, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2$;

5.7. $M = \left\{ x : \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left| x_k \right|^2 < 1, k = 1,2\ldots \right\}, \quad p = 1$;

5.8. $M = \left\{ x : 0 < x_k < 1, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2$;

5.9. $M = \left\{ x : \left| x_k \right| \le \dfrac{1}{\sqrt[3]{k^2}}, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2$;

5.10. $M = \left\{ x : x_k > 0, k = 1,2... \right\}, \quad p = 4$;

5.11. $M = \left\{ x : \left| x_k \right| < \dfrac{1}{k}, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2$;

5.12. $M = \left\{ x : \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left| x_k \right| < 1, k = 1,2\ldots \right\}, \quad p = 2$;

5.13. $M = \left\{ x : 0 \le x_k \le \dfrac{1}{k}, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2$

5.14. $M = \left\{ x : 0 \le x_k < 1, k = 1,2... \right\}, \quad p = \infty$.

Задание №6. Определите, являются ли две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентными в нормированном пространстве $C^2[a,b]$ два раза непрерывно-дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций.

6.1. $\|x\|_{C^2[a,b]}$ и $\|x\| = |x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a,b]}$;

6.2. $\|x\|_{C^2[a,b]}$ и $\|x\| = |x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]} + \|x''\|_{C[a,b]}$;

6.3. $\|x\|_{C^2[a,b]}$ и $\|x\| = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2} + \|x''\|_{C[a,b]}$;

6.4. $\|x\|_1 = |x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a,b]}$ и

$\|x\|_2 = |x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]} + \|x''\|_{C[a,b]}$;

6.5. $\|x\|_1 = |x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a,b]}$ и

$$\|x\|_2 = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2} + \|x''\|_{C[a,b]};$$

6.6. $\|x\|_1 = |x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]} + \|x''\|_{C[a,b]}$ и

$$\|x\|_2 = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2} + \|x''\|_{C[a,b]};$$

Определите, являются ли две нормы эквивалентными в нормированном пространстве $C^1[a,b]$ непрерывно-дифференцируемых на отрезке [a,b] функций.

6.7. $\|x\|_{C^1[a,b]}$ и $\|x\| = |x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]}$;

6.8. $\|x\|_{C^1[a,b]}$ и $\|x\| = \int\limits_a^b |x(t)| dt + \|x'\|_{C[a,b]}$;

6.9. $\|x\|_1 = |x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]}$ и $\|x\|_2 = \int\limits_a^b |x(t)| dt + \|x'\|_{C[a,b]}$.

6.10. Доказать, что в $C[a,b]$ $\|x\|_{L[a,b]}$ эквивалентна норме

$\|x\| = \left(\int\limits_a^b v(t)\, x^2(t)\, dt\right)^{1/2}$, где $v(t) \geq \alpha > 0$ и $v(t) \in C[a,b]$.

Доказать по определению эквивалентность норм в пространстве R^n

6.11. $\|x\|_k$ и $\|x\| = \max\limits_{1\le k\le n}\left(\alpha_k |x_k|\right)$;

6.12. . $\|x\|_C$ и $\sum$ $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{i}|x_k|^2\right)^{1/2}$;

6.13. $\|x\|_D$ и $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k |x_k|$;

6.14. $\|x\|_k$ и $\|x\| = \max\limits_{1\le k\le n}\left|\sum\limits_{i=1}^{k} x_i\right|$;

Задание №7. Является ли последовательность x_n последовательностью Коши в пространстве E. Найти ее предел, если он существует.

7.1. $x_n(t) = \begin{cases} e^{-t/n}, & t \notin Q, \\ 0, & t \in Q. \end{cases}$, $E = L_2[0,1]$;

7.2. $x_n(t) = \begin{cases} \sin nt, & t \in Q \cap [-1,2], \\ \sqrt{t^2 + \dfrac{1}{n^3}}, & t \in [-1,2] \setminus Q. \end{cases}$, $E = L_1[-1,2]$;

7.3. $x_n(t) = \begin{cases} ne^{nt}, & t \in K, \\ \dfrac{t^3}{n}, & t \in [0,1] \setminus K. \end{cases}$, $E = L_{3/2}[0,1]$;

7.4. $x_n(t) = \begin{cases} nt, & t \in [-2,0] \cap Q, \\ ne^{nt}, & t \in [-2,0] \setminus Q. \end{cases}$, $E = L_4[-2,0]$;

7.5. $x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + \dfrac{1}{n^4}}, & t[-1,1] \setminus K, \\ \cos(n+t), & t \in [-1,1] \cap K. \end{cases}$, $E = L_2[-1,1]$;

7.6. $x_n(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{t}{3}\right)^n, & t \in [0,3] \setminus Q, \\ \sin \pi nt, & t \in [0,3] \cap Q. \end{cases}$, $E = L_5[0,3]$;

7.7. $x_n(t) = \begin{cases} (n+t)^{-1}, & t \in [0,1] \setminus K, \\ \exp\left(n^2 t\right), & t \in [0,1] \cap K. \end{cases}$, $E = L_{9/5}[0,1]$;

7.8. $x_n(t)=\begin{cases}\sin\dfrac{t}{n}, & t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\setminus Q,\\ \cos\dfrac{t}{n}, & t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\cap Q.\end{cases}$, $E=L_2\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$;

7.9. $x_n(t)=\begin{cases}\dfrac{\cos nt}{n}, & t\in[0,1]\setminus K,\\ \exp\left(\pi t^n\right), & t\in[0,1]\cap K.\end{cases}$, $E=L_{5/3}[0,1]$;

7.10. $x_n(t)=\begin{cases}(0.5t)^n, & t\in[0,2]\setminus K,\\ ne^{nt}, & t\in[0,2]\cap K.\end{cases}$, $E=L_{4/3}[0,2]$;

7.11. $x_n(t)=\begin{cases}(\sin t)^n, & t\in[0,1]\setminus Q,\\ (n+t)^{-1}, & t\in[0,1]\cap Q.\end{cases}$, $E=L_{9/2}[0,1]$;

7.12. $x_n(t)=\begin{cases}ne^{nt}, & t\in K,\\ \dfrac{t^2}{n}, & t\in[0,1]\setminus K.\end{cases}$, $E=L_2[0,1]$;

7.13. $x_n(t)=\begin{cases}\sqrt{t^2+1/n}, & t\in[-1,1]\setminus K,\\ \sin(n+t), & t\in K.\end{cases}$, $E=L_2[-1,1]$;

7.14. $x_n(t)=\begin{cases}\sqrt{t^2+1/n}, & t\in[-1,2]\setminus Q,\\ \sin n^2t, & t\in[-1,2]\cap Q.\end{cases}$, $E=L_1[-1,2]$.

Задание №8. Выяснить, является ли заданное пространство полным по указанной норме.

8.1. Пространство $C^1[a,b]$ непрерывно-дифференцируемых на отрезке [*a*, *b*] функций с нормой $\|x\|=\max\limits_t|x(t)|+\max\limits_t|x'(t)|$;

8.2. Пространство $C^1[a,b]$ с нормой $\|x\|=\int\limits_a^b|x(t)|+\max\limits_t|x'(t)|$;

8.3. Пространство $C^1[0,1]$ с нормой $\|x\|=\max\limits_{0\le t\le 1/2}|x(t)|+\max\limits_t|x'(t)|$;

8.4. Пространство l_2 числовых последовательностей $x=(x_1,\ldots,x_n,\ldots,)$, для которых выполняются следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2 < +\infty \quad \text{с нормой} \quad \|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{1/2};$$

8.5. Пространство $C^1[a,b]$ с нормой $\|x\| = \max_t |x'(t)| + |x(a)|$;

8.6. Пространство $C^1[a,b]$ с нормой $\|x\| = \int_a^b |x'(t)|\,dt + |x(a)|$;

8.7. Пространство R^n столбцов $x = (x_k)_{k=1}^n$, $x_k \in R$ с нормой

$$\|x\| = \max_{1\le k\le n}(\alpha_k |x_k|),\ \alpha_k > 0,\ k = 1,2,\ldots,n;$$

8.8. Пространство R^n столбцов $x = (x_k)_{k=1}^n$, $x_k \in R$ с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k |x|_k^2\right)^{1/2},\ \alpha_k > 0,\ k = 1,2,\ldots,n;$$

8.9. Пространство $C[0,1]$ непрерывных функций с нормой

$$\|x\| = \max_{0\le t\le 3/4}|x(t)| + \int_{1/2}^{1}|x(t)|\,dt;$$

8.10. Пространство $C^1[0,1]$ с нормой $\|x\| = \max_{0\le t\le 1}|x(t)| + \max_{0\le t\le 1/2}|x'(t)|$;

8.11. Пространство R^n столбцов $x = (x_k)_{k=1}^n$, $x_k \in R$ с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}|x_k|^2\right)^{1/2};$$

8.12. Пространство R^n столбцов $x = (x_k)_{k=1}^n$, $x_k \in R$ с нормой

$$\|x\| = \max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}x_i\right|;$$

8.13. Пространство k непрерывных на R конечных функций (равных нулю за пределами некоторого промежутка, своего для каждой функции) с нормой

$$\|x\| = \max_t |x(t)|;$$

8.14. Пространство $m_\alpha = \{x(x_1,\ldots,x_n,\ldots\},\ \sup\alpha_i|x_i| < +\infty,\ \alpha_i > 0$ с нормой

$$\|x\| = \sup_i \alpha_i |x_i|.$$

Задание №9. Проверить, сходится ли ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ в нормированном пространстве E.

9.1. $x_k(t) = \dfrac{4^k t^k - t^{2k}}{4^{2k}}, \qquad E = C[0,1];$

9.2. $x_k(t) = \dfrac{t^k}{k} - \dfrac{t^{k+1}}{k+1}, \qquad E = C[0,1];$

9.3. $x_k(t) = \dfrac{1}{t^2 + n^2}, \qquad E = C[0,1];$

9.4. $x_k(t) = t^2 e^{-kt}, \qquad E = C[0,1];$

9.5. $x_k(t) = \dfrac{t}{1 + n^4 t^2}, \qquad E = C[0,1];$

9.6. $x_k(t) = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \left(k^2 + e^t\right)^{-1/3}, \qquad E = C[-10,10];$

9.7. $x_k(t) = \dfrac{1}{k+t}, \qquad E = L_{4/3}[1,2];$

9.8. $x_k(t) = \dfrac{\cos kt}{k^2}, \qquad E = L_1[-3\pi, 2\pi];$

9.9. $x_k(t) = \dfrac{\sin kt}{k^2}, \qquad E = L_1[-3\pi, 2\pi];$

9.10. $x_k(t) = \left(\underbrace{\dfrac{(-1)^k}{k}, \ldots, \dfrac{(-1)^k}{k}}_{k}, 0, \ldots\right), \qquad E = l_1;$

9.11. $x_k(t) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \ldots, \dfrac{1}{3^k}\right), \qquad E = l_{3/2};$

9.12. $x_k(t) = \left(\underbrace{\dfrac{k}{2^k}, \ldots, \dfrac{k}{2^k}}_{k}, 0, \ldots\right), \qquad E = m;$

9.13. $x_k(t) = \left(\underbrace{\dfrac{\sin k}{k}, \ldots, \dfrac{\sin k}{k}}_{k}, 0, \ldots\right), \qquad E = l_{5/3};$

9.14. $x_k(t) = \left(\underbrace{\frac{k^2}{3^k},\ldots,\frac{k^2}{3^k}}_{k},0,\ldots\right), \qquad E = m.$

Задание №10. Определите, при каких $\lambda \neq 0$ для следующих интегральных уравнений Фредгольма второго рода в пространстве $C[a,b]$, $L_2[a,b]$ можно применить метод сжимающих отображений. При $\lambda = \lambda_0$ найти приближенное решение методом последовательных приближений с точностью $\varepsilon = 0.001$, сравнить его с точным решением.

10.1. $a = 0$, $b = 1$ $\qquad x(t) = \lambda\int_0^1 ts^2x(s)\,ds + 1;$

10.2. $a = 0$, $b = 1$ $\qquad x(t) = \lambda\int_0^1 e^{t-s}x(s)\,ds + 1;$

10.3. $a = 0$, $b = 1$ $\qquad x(t) = \lambda\int_0^1 \cos\pi(t-s)\,x(s)\,ds + 1;$

10.4. $a = 0$, $b = 1$ $\qquad x(t) = \lambda\int_0^1 \sqrt[3]{ts}\,x(s)\,ds + t^2;$

10.5. $a = 0$, $b = 1$ $\qquad x(t) = \lambda\int_0^1 \left(t^2 - 1\right)sx(s)\,ds + t;$

10.6. $a = 0$, $b = 1$ $\qquad x(t) = \lambda\int_0^1 \frac{t}{1+s}x(s)\,ds - 5;$

10.7. $a = 0$, $b = 1$ $\qquad x(t) = \lambda\int_0^1 t^2s\,x(s)\,ds + t;$

10.8. $a = -1$, $b = 1$ $\qquad x(t) = \lambda\int_{-1}^1 \left(t^2 - 1\right)sx(s)\,ds + t;$

10.9. $a = -2$, $b = 1$ $\qquad x(t) = \lambda\int_{-2}^1 (1+s)(1-t)\,x(s)\,ds + t;$

10.10. $a = 0$, $b = 1$ $\qquad x(t) = \lambda\int_0^1 \sqrt{1-t}\,x(s)\,ds + 3;$

10.11. $a = -1$, $b = 1$ $\qquad x(t) = \lambda\int_{-1}^1 s^{-1/3}\,x(s)\,ds + t^2;$

10.12. $a = -2$, $b = 3$ $\qquad x(t) = \lambda\int_{-2}^3 ts^2\,x(s)\,ds + t^3;$

10.13. $a = 0,\ b = 1$ $\qquad x(t) = \lambda \int_0^1 \sin\frac{\pi s}{2}\cos\frac{\pi t}{2}\, x(s)\, ds + \cos\frac{\pi t}{2}$;

10.14. $a = -1,\ b = 1$ $\qquad x(t) = \lambda \int_{-1}^{1} t s\, x(s)\, ds + 2$;

10.15. $a = 0,\ b = 1$ $\qquad x(t) = \lambda \int_0^1 t^2 s^2\, x(s)\, ds + t^3$;

10.16. $a = 0,\ b = \pi/4$ $\qquad x(t) = \lambda \int_0^{\pi/4} t\, \mathrm{tg}\, s\, x(s)\, ds + 1$;

10.17. $a = 0,\ b = \pi/4$ $\qquad x(t) = \lambda \int_0^{\pi/2} \sin t \cos s\, x(s)\, ds + \sin t$;

10.18. $a = 0,\ b = \pi$ $\qquad x(t) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(t - 2s)\, x(s)\, ds + \cos(2t)$;

10.19. $a = -1,\ b = 1$ $\qquad x(t) = \lambda \int_{-1}^{1} \left(ts - t^2 s^2\right) x(s)\, ds + t^4 + t^2$;

10.20. $a = 0,\ b = \pi$ $\qquad \mathrm{x(t)} = 1\int_0^{p} \sin t \cos t\, x(s)\, ds + \sin t$;

Задание №11. Составьте и реализуйте на ЭВМ алгоритм решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода с задания №10 методом последовательных приближений, с учетом следующих этапов.

1) вычисление $\{ x_m(t_k),\ m = 1,2,\ldots,\ k = 1,2,\ldots,n \}$ по реккурентным соотношениям в равноотстоящих узлах $t_1, t_2, \ldots, t_n$;

2) вычисление интеграла по формуле Симпсона с шагом 0.05;

3) конечные результаты оформить в виде следующей таблицы:

t	приближенное решение	точное решение

4) напечатать величину погрешности приближения и номер последней итерации в пространствах $C[a,b]$, $L_2[a,b]$.

Задание №12. Вычислить приближенное решение следующих уравнений с точностью 0.01.

Указание: уравнение $g(x) = 0$ привести к виду $x = f(x)$ и найти точку x_0 и радиус r такие, что промежуток $[a, b]$, $a = x_0 - r$, $b = x_0 + r$ инвариантен относительно f и на этом промежутке отображение f - сжимающее.

12.1. $g(x) = 3x^2 - 18x + 11$;

12.2. $g(x) = 2x^2 + 16x - 9$;

12.3. $g(x) = 3x^2 - 10x - 14$;

12.4. $g(x) = 2x^2 + 8x - 3$;

12.5. $g(x) = 3x^2 - 100x + 5$;

12.6. $g(x) = x^2 - 5x + 4$;

12.7. $g(x) = 2x^2 + 8x + 5$;

12.8. $g(x) = 5x^2 - 18x + 4$;

12.9. $g(x) = 4x^2 + 12x - 1$;

12.10. $g(x) = x^3 + 5x^2 - 15x - 7$;

12.11. $g(x) = 3x^2 + 25x - 1$.

Задание №13. Определить, является ли отображение f нормированного пространства на себя сжимающим. Вычислить x_3 , где $x_k = f(x_{k-1})$, $x_0 = 0$, и оценить расстояние от x_3 до неподвижной точки.

13.1. $E = C[-1, 1]$ $\quad f(x)(t) = \frac{1}{3}\cos(x(t)) + e^t$;

13.2. $E = C[0, 1]$ $\quad f(x)(t) = e^{x(t)} + \sin t$;

13.3. $E = L_2[0, 1]$ $\quad f(x)(t) = \frac{1}{4}x\left(\sqrt[4]{t}\right) + t$;

13.4. $E = L_2[-1, 1]$ $\quad f(x)(t) = \frac{1}{3}t^{1/9}x\left(\sqrt[3]{t}\right) + \sin t$;

13.5. $E = C[0,1] \quad f(x)(t) = x(t) - \frac{1}{2}\sin t$;

13.6. $E = R^3 \quad f(x)(t) = \left(\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{8}x_3 + 1, \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + 2, -\frac{1}{4}x_3 - 3\right)$;

13.7. $E = l_2 \quad f(x)(t) = \left(0, \frac{1}{2}x(1) + \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}x(2) + \frac{1}{3}, \frac{1}{2^k}x(k) + \frac{1}{k+1}\right)$;

13.8. $E = L_2[0,1] \quad F(x) = \int_0^1 \frac{tx(s)}{\sqrt{s}}ds$;

13.9. $E = L_2[0,1] \quad F(x) = t^{-1/4}x(t)$;

13.10. $E = C[0,2] \quad F(x) = 2x\left(\frac{t}{2}\right)$;

13.11. $E = L_2[0,1] \quad F(x) = x\left(t^2\right)$;

13.12. $E = L_2[0,1] \quad F(x) = x\left(\sqrt{t}\right)$;

13.13. $E = L_2[-1,1] \quad F(x) = t^{1/3}x\left(\sqrt{t}\right) + \cos t$;

13.14. $E = L_2[0,1] \quad F(x) = \frac{1}{3}\sin x(t) + e^t$.

Задание №14. Выяснить, является ли отображение F: $X \to Y$ непрерывным, равномерно непрерывным, удовлетворяющим условию Липшица.

14.1. $F: C[0,1] \to C[0,1] \quad F(x) = x^3(t)$;

14.2. $F: C[0,1] \to C[0,1] \quad F(x) = \sqrt{|x(t)|}$;

14.3. $F: C[0,1] \to C[0,1] \quad F(x) = \frac{x(t)}{1 + x^2(t)}$

14.4. $F: C[-2,4] \to C[-2,4] \quad F(x) = x(t)\sin x(t)$;

14.5. $F: C[0,1] \to C[0,1] \quad F(x) = \sqrt[3]{|x(t)|}$;

14.6. $F: L[0,1] \to L[0,1] \quad F(x) = x^3(t)$;

14.7. $F: L[0,1] \to L[0,1] \quad F(x) = \int_0^1 e^t x(s)\,ds$;

14.8. $F: L \to L \quad F(x) = x(t^2)$;

14.9. $F: R \to R \quad F(x) = |x|^4$;

14.10. $F: R \to R \quad F(x) = \sqrt{|x|}$;

14.11. $F: C[0,1] \to R \quad F(x) = x(1)$;

14.12. $F: L_2[0,1] \to R \quad F(x) = x(1)$;

14.13. $F: L[0,1] \to C[0,1] \quad F(x) = x^2(t)$;

14.14. $F: L[0,1] \to C[0,1] \quad F(x) = \sqrt{|x(t)|}$.

Задание №15. Провести процесс ортогонализации векторов x_1, x_2, x_3 в гильбертовом пространстве $H_p[a,b]$, в котором скалярное произведения имеет вид:

$$(x,y) = \int_a^b x(t)\,y(t)\,p(t)\,dt.$$

15.1. $a=-1, b=1, p(t)=1;\quad x_1=t, x_2=2t-t^2, x_3=e^t$;

15.2. $a=-1, b=1, p(t)=e^t;\quad x_1=e^{-t}, x_2=t+t^2, x_3=t^2+1$;

15.3. $a=-2, b=2, p(t)=1;\quad x_1=\cos\pi t, x_2=\sin\pi t, x_3=t-8$;

15.4. $a=-\pi, b=\pi, p(t)=\cos t;\quad x_1=\cos^2 t, x_2=\sin t, x_3=1+t$;

15.5. $a=0, b=1, p(t)=1;\quad x_1=3t^2-2t, x_2=1, x_3=3t^2-1$;

15.6. $a=0, b=1, p(t)=t;\quad x_1=t+2, x_2=t-3, x_3=e^t+1$;

15.7. $a=-1, b=1, p(t)=1;\quad x_1=\cos\pi t, x_2=1, x_3=e^t+1$;

15.8. $a=-1, b=1, p(t)=t^2;\quad x_1=t, x_2=1-t^2, x_3=t^3$;

15.9. $a=-\pi, b=\pi, p(t)=t^2;\quad x_1=\cos t, x_2=\sin t, x_3=t$;

15.10. $a=0, b=1, p(t)=e^t;\quad x_1=\sin t, x_2=t, x_3=e^t+1$;

15.11. $a=-1, b=1, p(t)=t^2;\quad x_1=t+1, x_2=3t^2, x_3=t^3+1$;

15.12. $a=-1, b=1, p(t)=e^t;\quad x_1=t+1, x_2=2t-t^2, x_3=e^t-1$;

15.13. $a=-1, b=1, p(t)=t;\quad x_1=e^t, x_2=t+t^2, x_3=t^2+1$

15.14. $a=-2, b=2, p(t)=\cos\pi t$; $x_1=\cos^2\pi t, x_2=\sin\pi t, x_3=t-8$;

15.15. $a=-\pi, b=\pi, p(t)=t^2$; $x_1=\cos t, x_2=\sin t, x_3=1+t$;

15.16. $a=0, b=1, p(t)=e^t$; $x_1=3t^2-2t, x_2=1, x_3=3t^2-1$;

15.17. $a=0, b=1, p(t)=e^{-t}$; $x_1=t+2, x_2=t-3, x_3=e^t+1$;

15.18. $a=-1, b=1, p(t)=\cos^2\pi t$; $x_1=\cos\pi t, x_2=1, x_3=e^t+1$;

15.19. $a=0, b=1, p(t)=t^3$; $x_1=t, x_2=1-t^2, x_3=t^3$

15.20. $a=0, b=1, p(t)=e^t$; $x_1=1, x_2=t, x_3=t^2$;

15.21. $a=0, b=1, p(t)=e^{-t}$; $x_1=1, x_2=t, x_3=t^2$.

Задание №16. В гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим подпространство L многочленов степени $n \le 4$. Для заданной непрерывно-дифференцируемой функции $x(t)$ найти элемент наилучшей аппроксимации ее многочленами $u^*(t)$ подпространства L по норме $L_2[0,1]$. Реализовать на ЭВМ алгоритм решениая этой задачи со следующими этапами:

1) вычисление элементов матрицы и правых частей системы по формуле Симпсона с шагом 0.05;
2) решение системы методом Гаусса;
3) проверка правильности алгоритма на примере функции $x(t)=t^2$.

16.1. $x(t)=3^t$;
16.2. $x(t)=\cos(\pi t)$;
16.3. $x(t)=e^t$;
16.4. $x(t)=\sin(\pi t)$;
16.5. $x(t)=\cos(2\pi t)$;
16.6. $x(t)=t\sqrt{t}$;
16.7. $x(t)=\sin(4\pi t)$;
16.8. $x(t)=\ln(1+t)$;
16.9. $x(t)=tg(t-0.5)$;
16.10. $x(t)=\left(1-2t^2\right)^3$;
16.11. $x(t)=\sin(2\pi t)$;
16.12. $x(t)=\ln\left(1+t^2\right)$;
16.13. $x(t)=2^{1+t}$;
16.14. $x(t)=t^5$.

Задание 17. В гильбертовом пространстве L_2 найти проекцию элемента x_0 на подпространство L.

17.1. $x_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{3^k}, \ldots\right)$, $L = \left\{\alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in R; x_k = \frac{1}{5^k}, y_k = \frac{1}{6^k}\right\}$;

17.2. $x_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots\right)$, $L = \{\alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in R; x = (1,1,0,\ldots), y = (1,0,0,\ldots)\}$;

17.3. $x_0 = (0,1,1,2,0,\ldots)$, $L = \left\{x : \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_k}{2^k} = 0 \quad x_2 = 0\right\}$;

17.4. $x_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{3^k}, \ldots\right)$,

$L = \{\alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in R; x = (1,0,1,0,\ldots), y = (1,1,1,0,\ldots)\}$;

17.5. $x_0 = \left(1, 0, \frac{1}{2}, 0, 1, 0, \ldots\right)$, $L = \left\{x : \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x_k}{k} = 0 \quad x_1 - x_3 = 0\right\}$;

17.6. $x_0 = (1,1,0,\ldots)$ $L = \left\{x : x_2 + x_3 = 0, x_2 - x_4 = 0, \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_{2k}}{k^2} = 0\right\}$;

17.7. $x_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^k}, \ldots\right)$, $L = \left\{x : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{2k+1}}{2^k} = 0 \quad x_1 - 2x_3 = 0\right\}$;

17.8. $x_0 = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5^2}, \ldots, \frac{1}{5^k}, \ldots\right)$,

$L = \left\{\alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in R; x = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^k} \ldots\right), y = (1,0,1,0,0,\ldots)\right\}$;

17.9. $x_0 = \left(1, 0, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0, \frac{1}{2^k}, 0, \ldots\right)$

$L = \left\{\alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in R; x = (0,1,1,0,\ldots), y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)\right\}$.

Найти $L^{\perp}$ к подпространству $L \subset L_2[-\pi, \pi]$

17.10. $L = L\{(e^{-\mathrm{int}}, n \in Z)\}$;

17.11. $L = L\{(e^{-\mathrm{int}}, n \geq 0)\}$;

17.12. $L = L\{(\sin nt, n \geq 1)\}$;

17.13. $L = L\{(\cos nt, n \geq 0)\}$.

Найти $L^{\perp}$ к подпространству $L \subset L_2[0,1]$

17.14. $L = L\left\{(e^{i2k\pi t}, k = \pm 2, \pm 3, \ldots)\right\}$;

17.15. $L = \left\{x(t) \in L_2[0,1], \int_0^1 x(t)dt = 0\right\}$.

Задание №18. Являются ли относительно компактными следующие множества в пространстве $C[0,1]$?

18.1. $M = \left\{t^n : n \in N\right\}$;

18.2. $M = \left\{\sin(nt) : n \in N\right\}$;

18.3. $M = \left\{\sin(n + t) : n \in N\right\}$;

18.4. $M = \left\{\cos(n + t) : n \in N\right\}$;

18.5. $M = \left\{\sin(\alpha\ t) : \alpha \in (0,1)\right\}$;

18.6. $M = \left\{arctg(\alpha\ t) : \alpha \in (0,1)\right\}$;

18.7. $M = \left\{e^{t-\alpha} : \alpha \geq 0\right\}$;

18.8. $M = \left\{a \sin(b + t) : |a| < 10, b > 0\right\}$;

18.9. $M = \left\{at^n : |a| \leq 1, b > 0\right\}$;

18.10. $M = \left\{|x(t)| < \sin(t)\right\}$;

18.11. $M = \left\{at^\alpha : 0 \leq a \leq 1, 0 < \alpha < 1\right\}$;

18.12. $M = \left\{at^\alpha : |a| \leq 1, 1 \leq \alpha \leq 10\right\}$;

18.13. $M = \left\{arctg(at + b) : |a| < 1, b > 1\right\}$;

18.14. $M = \left\{\dfrac{\sin(at)}{at} : 0 < a < \infty\right\}$;

18.15. $M = \left\{x(t) : |x(t)| \leq B\right\}$;

18.16. $M = \left\{x(t) : |x(t)| \leq B; |x(t_1) - x(t_2)| < L|t_1 - t_2|\right\}$;

18.17. $M = \left\{x(t) \in C^{(2)}[0,1] : |x(t)| \leq B_0, |x''(t)| \leq B_2\right\}$;

18.18. $M = \left\{x(t) \in C^{(2)}[0,1] : |x(t)| \leq 2, |x'(t)| \leq 3\right\}$;

18.19. $M = \left\{ x(t) \in C^{(2)}[0,1]: |x(t)| \le |x''(t)| \le 1 \right\};$

18.20. $M = \left\{ x(t) \in C^{(2)}[0,1]: |x(0)| \le 1, \left| x(t_1) - x(t_2) \right| \le |t_1 - t_2| \right\};$

18.21. $M = \left\{ x(t) \in C^{(2)}[0,1]: |x(0)| \le 1, |x''(t)| \le 4 \right\};$

18.22. $M = \left\{ x(t) \in C^{(2)}[0,1]: |x'(t)| \le 2 \right\}.$

Задание №2. Является ли множество M относительно компактным в пространстве l_p? В случае положительного ответа построить для множества конечную ε-сеть для ε=0,1.

19.1. $M = \left\{ x: |x_k| < \dfrac{1}{k}, k \in N \right\}, \quad p = 2;$

19.2. $M = \left\{ x: |x_k| < \dfrac{1}{\sqrt[3]{k^2}}, k \in N \right\}, \quad p = 1;$

19.3. $M = \left\{ x: |x_k| < \dfrac{1}{k^2}, k \in N \right\}, \quad p = 1;$

19.4. $M = \left\{ x: |x_k| < \dfrac{1}{\sqrt[5]{k^2}}, k \in N \right\}, \quad p = 1;$

19.5. $M = \left\{ x: |x_1| = 1, |x_{2k}| < \dfrac{1}{2^k}, |x_{2k+1}| < \dfrac{1}{3^{2k}}, \; k \in N \right\}, \quad p = 1;$

19.6. $M = \left\{ x: |x_k| < \dfrac{1}{2^{ak}}, k \in N, \dfrac{1}{2} < a < 1 \right\}, \quad p = 2;$

19.7. $M = \left\{ x: |x_k| = \dfrac{k}{1 + k^2}, k \in N \right\}, \quad p = 3;$

19.8. $M = \left\{ x: |x_k| = \dfrac{k}{1 + 2k^2}, k \in N \right\}, \quad p = 3;$

19.9. $M = \left\{ x: \sum\limits_{k=0}^{\infty} |x_k| \cdot 2^k < \infty, k \in N \right\}, \quad p = 2;$

19.10. $M = \left\{ x: x_k = \dfrac{\sin k}{k}, k \in N \right\}, \quad p = 2;$

19.11. $M = \left\{ x: x_k = \dfrac{k}{1 + 3k^2}, k \in N \right\}, \quad p = 2;$

19.12. $M = \left\{ x\colon x_k > 0, x_{k+1} < \dfrac{1}{2} x_k, k \in N \right\}, \quad p = 2;$

19.13. $M = \left\{ x\colon \dfrac{x_{2k+1}}{x_{2k}} \le \dfrac{1}{2^k}, k \in N, |x_1| < 1 \right\}, \quad p = 4;$

19.14. $M = \left\{ x\colon x_k = \dfrac{1}{2^k}, k \in N \right\}, \quad p = 2.$

4.2 Комплект экзаменационных билетов по дисциплине

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры <<______>>_____________200 г. Заведующий кафедрой Утверждаю: ___________________	Кафедра МАиМ Факультет МиИ Курс 5 Дисциплина Прикладной функциональный анализ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__1___

1. Метрические пространства (МП). Метрические и топологические свойства МП

2. Ограниченные линейные функционалы в НП и их норма. Геометрический смысл нормы л.ф.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>_____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ___________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 5
Дисциплина
Прикладной функциональный анализ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__2___

1. Топологические пространства (ТП). Внутренность, внешность, замыкание и граница подмножеств ТП
2. Сопряженные пространства к НП. Представления ограниченных л.ф. в конкретных НП. Примеры сопряженных пространств

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>_____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ___________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 5
Дисциплина
Прикладной функциональный анализ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__3___

1. Непрерывные отображения ТП и МП, их свойства.
2. Теорема Рисса о представлении функционала в гильбертовом пространстве.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>_____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ___________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 5
Дисциплина
Прикладной функциональный анализ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__4___

1. Принцип сжимающихся отображений в полных МП. Приближенное решений операторных уравнений с сжимающимися операторами
2. Слабая топология и слабая сходимость в НП и их сопряженных

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>_____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ___________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 5
Дисциплина
Прикладной функциональный анализ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__5___

1. Теория меры Жордана и интеграла Римана-Стилтьеса. Функции с ограниченным изменением и их свойства
2. Простейшие свойства обобщенных функций

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>_____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ___________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 5
Дисциплина
Прикладной функциональный анализ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__6___

1. Теория меры Лебега, измеримых функций и интеграла Лебега-Стилтьеса
2. Ограниченные линейные отображения НП. Норма линейного оператора (л.о.) и ее свойства. Операторные топологии в векторном пространстве л.о. Банаховы алгебры и С*-алгебры л.о.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>_____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ___________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 5
Дисциплина
Прикладной функциональный анализ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__7___

1. Ряды Фурье в пространстве $\boxed{L_2[a,b]}$
2. Спектральная теория вполне непрерывных (компактных) л.о. в НП

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>_____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ___________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 5
Дисциплина
Прикладной функциональный анализ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__8___

1. Геометрия гильбертовых пространств
2. Теоремы Рисса и Фредгольма для вполне непрерывных л.о. в НП.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>_____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ___________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 5
Дисциплина
Прикладной функциональный анализ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__9___

1. Выпуклые и абсолютно выпуклые подмножества векторного пространства, их основные свойства. Функционал Минковского и его свойства. Преднормы и задание локально выпуклой топологии
2. Представление решений линейных операторных уравнений в ГП с вполне непрерывными эрмитовыми операторами. Представление решений интегральных уравнений Фредгольма.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>_____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ___________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 5
Дисциплина
Прикладной функциональный анализ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__10___

1. Линейные функционалы и их геометрический смысл. Гиперплоскости. Отделимость выпуклых множеств
2. Решение уравнений с монотонными операторами

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>_____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ___________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 5
Дисциплина
Прикладной функциональный анализ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__11___

1. Теорема Бэра.
2. Решение простейших оптимизационных задач. Применения теоремы Куна-Таккера.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
<<______>>_____________200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: ___________________

Кафедра МАиМ
Факультет МиИ
Курс 5
Дисциплина
Прикладной функциональный анализ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №__12___

1. Лемма Банаха о почти ограниченности линейного оператора на банаховом пространстве.
2. Спектральные свойства линейных положительных операторов в частично упорядоченных НП и их приложений

4.3 Основная литература

1. Порошкин А.Г. Лекции по функциональному анализу / Издательство: Вузовская книга , 2004.- 432 с.
2. Рудин У.Функциональный анализ: Учебник для вузов (пер. с англ. Лина В.Я.) Изд. 2-е, испр., доп. / Издательство: Лань, 2005.- 448 с.
3. Садовничий В.А. Теория операторов: Учебник для вузов Изд. 3-е, стереотип. / Издательство: Высшая школа ,1999.- 368 с.

4. Справочник по интегральным уравнениям Издательство: Физматлит, 2003.- 608 с.
5. Треногин В.А.Функциональный анализ: Учебник для вузов Изд. 3-е, испр. / Издательство: Физматлит, 2002.- 488 с.
6. Федоров В.М. Курс функционального анализа: Учебник для вузов / Издательство: Лань, 2005.- 352 с.
7. Фомин С.В. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд.7-е / Издательство: Физматлит, 2004 г.

9.4 Дополнительная литература

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – Наука, 1979.
2. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984.
3. Балакришкинан А.В. Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1974.
4. Варга Р.С. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. – М.: Мир, 1974.
5. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
6. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967.
7. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965.

Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейной анализ. – М.: Мир, 1988.

5. НЕОБХОДИМОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Лекции и практические занятия проводятся в стандартной аудитории, оснащенной в соответствии с требованиями преподавания теоретических дисциплин.

6. КАРТА ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ КАДРАМИ ПРОФЕССОРСКО-ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОГО СОСТАВА

Лекционные и практические занятия по дисциплине "Прикладной функциональный анализ" для специальности 010501 – «Прикладная математика и информатика» проводит старший преподаватель кафедры МАиМ Подопригора Сергей Алексеевич.