Министерство науки и высшего образования Российской

Федерации

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.В. Сельвинский

Векторный и тензорный анализ

Учебно-методическое пособие

Благовещенск

Издательство АмГУ

2022

Рекомендовано учебно-методическим советом университета

Рецензент: Галаган Татьяна Алексеевна, кандидат технических наук, доцент кафедры информационных и управляющих систем ФГБОУ ВО «Амурский государственный университет»

Сельвинский, В.В.
Векторный и тензорный анализ: учебно-методическое пособие / В.В.Сельвинский.– Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2022.–142 с

Учебное пособие содержит теоретические сведения по общему курсу «Векторный и тензорный анализ». В качестве вспомогательного материала представлены основные понятия векторной алгебры и теории кратных интегралов. Рассмотрены элементы теории поля и основные теоремы векторного анализа, излагается общая теория тензоров в криволинейных координатах. Предлагаются варианты индивидуальных заданий с рекомендациями и примерами для их выполнения, а также упражнения для закрепления навыков работы с тензорами.

Пособие предназначено для студентов направления 03.03.02 – физика, может быть использовано для инженерно-технических специальностей вуза.

Введение

Дисциплина «Векторный и тензорный анализ» входит в модуль «Математика» является дисциплиной обязательной части учебного плана образовательной программы для студентов направления 03.03.02 – физика. Изучение материала дисциплины требует предварительной математической подготовки, достаточно ясного понимания векторной алгебры, теории определенного интеграла, кратных интегралов, дифференциального исчисления функций многих переменных. Основные понятия и выводы дисциплины имеют многочисленные приложения в механике, геометрии. Поэтому знание основ теории и умение применять их на практике имеет фундаментальное значение в подготовке молодого специалиста.

Математической основой курса являются такие дисциплины, как математический анализ, аналитическая геометрия и линейная алгебра. Освоение курса «Векторный и тензорный анализ» необходимо для изучения дисциплин модуля «Теоретическая физика».

1. Векторы

1.1. Прямоугольная декартова система координат. Полярная система координат. Сферические и цилиндрические координаты точки.

Ориентированная прямая – прямая, для которой определено положительное и отрицательное направления. Ось – ориентированная прямая, на которой указано начало отсчета и масштабная единица (рис.1).

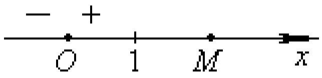


Рис. 1. Ось Ox.

Координатой произвольной точки M оси называют ее расстояние до начала отсчета, измеренное в масштабных единицах, взятое со знаком «+», если точка находится в положительном направлении относительно начала отсчета O, со знаком «-», – если в отрицательном.

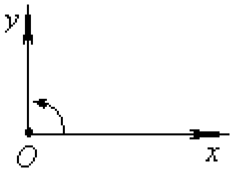


Рис. 2. Плоская прямоугольная система координат Oxy.

Прямоугольная декартова система координат на плоскости (в пространстве) – сочетание двух (трех) взаимно перпендикулярных осей с общим началом отсчета и одинаковой масштабной единицей (рис. 2,3).

Для ориентации системы координат ее оси нумеруют, явно или неявно. Систему координат на плоскости называют правой, если воображаемое совмещение первой оси со второй путем поворота вокруг общего начала отсчета на меньший угол будет происходить против часовой стрелки (здесь предполагается, что мы можем смотреть на плоскость только с одной стороны). Для правой системы координат в пространстве это же правило должно выполняться, если мы смотрим на плоскость первых двух осей с той стороны, куда направлена третья ось. В противном случае системы координат называются левыми. На практике чаще используют правые системы координат.

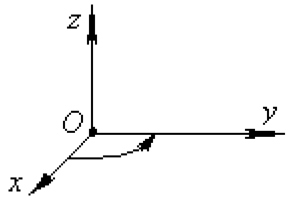


Рис. 3. Пространственная прямоугольная система координат $Oxyz$.

Проекцией точки M на ось называют основание M_x перпендикуляра (точку оси), опущенного из этой точки на ось (рис. 4). Координатами точки в прямоугольной декартовой системе координат называют совокупность координат ее проекций на все оси, записанную в порядке возрастания номеров соответствующих осей.

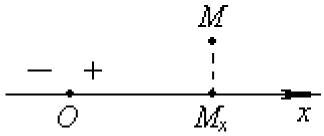


Рис. 4. Проекция точки M на ось Ox.

Координаты точки однозначно определяют ее положение на плоскости (в случае плоской системы координат) и в пространстве (в случае пространственной системы координат).

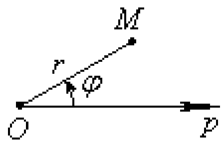


Рис. 5. Полярные координаты точки M.

Положение точки на плоскости можно также определить с помощью полярной системы координат. Ее атрибутами являются: полюс – произвольная фиксированная точка O плоскости; полярная ось – фиксированный луч Op, исходящий из полюса, с масштабной единицей; полярный угол φ, отсчитываемый от полярной оси против часовой стрелки до луча, исходящего из полюса и проходящего через определяемую точку M (рис. 5). Полярными координатами точки M называют полярный радиус $r > 0$ – ее расстояние до полюса – и полярный угол φ: $0 \leq \varphi < 2\pi$.

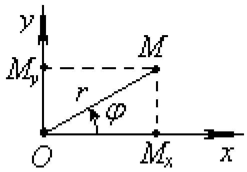


Рис. 6. Связь полярных и декартовых координат точки M.

Если совместить полярную ось Op с осью Ox прямоугольной системы координат, то нетрудно установить связь между полярными и декартовыми координатами произвольной точки M (рис. 6):

$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi.$$

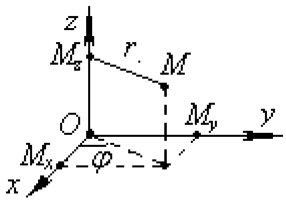


Рис. 7. Цилиндрические координаты точки M.

На основе полярной системы координат на плоскости строится цилиндрическая система координат в пространстве. Она получается добавлением оси Oz, перпендикулярной плоскости Oxy, так что направление отсчета угла φ против часовой стрелки будет видно, если смотреть навстречу оси Oz. В этом случае связь между декартовыми и цилиндрическими координатами также очевидна:

$$x = r \cdot \cos\varphi,\ \ y = r \cdot \sin\varphi,\ \ z = z.$$

Здесь координата r играет роль расстояния точки M до оси Oz (рис. 7).

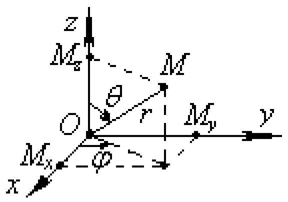


Рис. 8. Сферические координаты точки M.

Положение точки в пространстве можно также определить сферическими координатами r, φ, θ, где $r = OM$ - расстояние точки M до начала координат, φ: $0 \le \varphi \le 2\pi$ – такой же меридианный (полярный) угол; θ: $0 < \theta < \pi$ – угол, отсчитываемый от оси Oz до луча OM. Связь между декартовыми и сферическими координатами определяется формулами (рис. 8):

$$x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi,\ \ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi,\ \ z = r \cdot \cos\theta.$$

1.2. Линейные операции над векторами. Действия над векторами, заданными в координатной форме. Скалярное, векторное, смешанное произведение векторов.

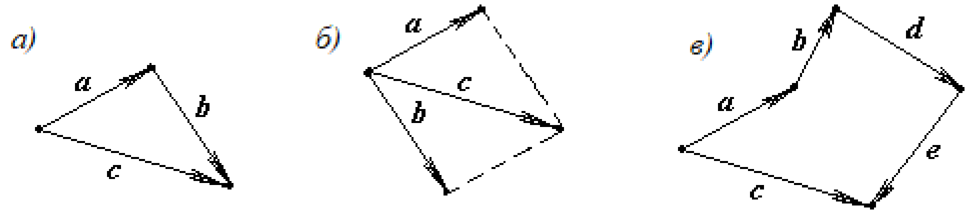
Геометрически вектор определяется как направленный отрезок, соединяющий две точки, одна из которых является началом, а вторая - концом вектора. Длина отрезка, выраженная в соответствующих масштабных единицах, называется величиной, или модулем, вектора.

<u>Направление вектора</u> − совокупность всех параллельных ему одинаково ориентированных прямых, перемещение вдоль которых от отрицательного направления к положительному соответствует перемещению от начала вектора к его концу.

Вектор, модуль которого равен одной масштабной единице, называется единичным вектором данного направления. Нулевой вектор не имеет направления.

Обозначаются векторы, как правило: $\boldsymbol{AB}$ или $\overrightarrow{AB}$, где A – начало, B – конец вектора; $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}, \ldots$ или $\vec{a},\ \vec{b}, \ldots$ – малыми буквами латинского алфавита, на рисунке изображаются стрелочками соответствующей длины и направления.

Два вектора $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ равны, если они имеют одинаковую величину и направление, обозначается $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. Таким образом, параллельный перенос не изменяет вектора, так как в этом случае сохраняются его величина и направ-



$c = a + b$ $\qquad$ $c = a + b$ $\qquad$ $c = a + b + d + e$

Рис. 9. Сложение векторов: а) правило треугольника; б) правило параллелограмма; в) правило многоугольника.

ление.

Суммой двух векторов $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ называют вектор $\boldsymbol{c}$, который является замыкающей стороной треугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ как на сторонах (рис. 9*а*); при этом конец одного вектора совмещен с началом другого (путем параллельного переноса), начало вектора $\boldsymbol{c}$ совпадает с началом первого, а конец – с концом второго. Обозначается $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Если векторы $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ изобразить с общим началом, то на них можно построить параллелограмм со сторонами $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ и диагональю $\boldsymbol{c}$ (рис. 9*б*).

При сложении нескольких векторов они располагаются также последовательно один за другим, образуя ломаную, в которой начало следующего вектора совпадает с концом предыдущего, а суммарный вектор замыкает эту ломаную так, что его начало совпадает с началом первого вектора, а конец – с концом последнего (рис. 9*в*).

При умножении вектора $\boldsymbol{a}$ на число $\alpha > 0$ получается вектор $\boldsymbol{c} = \alpha \cdot \boldsymbol{a}$, величина которого изменяется в α раз, а направление сохраняется. Если $\alpha < 0$, то направление меняется на противоположное.

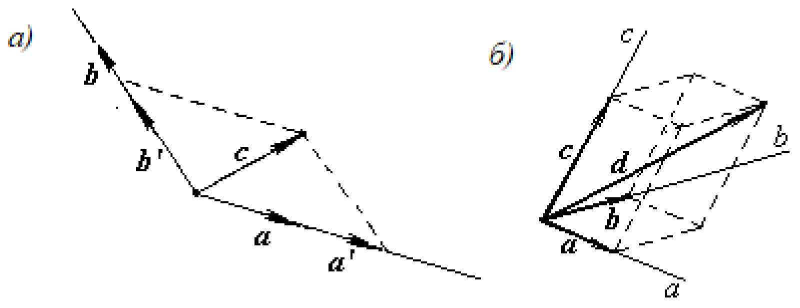
Линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называется вектор $\boldsymbol{c}$, который составляется из этих векторов посредством операций сложения и умножения векторов на число, то есть: $\boldsymbol{c} = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{a}_n$.

Система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называется линейно независимой, если равенство нулю линейной комбинации этих векторов возможно исключительно при нулевом наборе коэффициентов $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0, \ldots,\ \alpha_n = 0$. В противном случае система векторов называется линейно зависимой. В этом случае обязательно хотя бы один из векторов системы выражается в виде линейной комбинации через остальные векторы. Действительно, пусть $\alpha_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{a}_n = 0$ и, например, $\alpha_1 \neq 0$. Тогда делим все на $\alpha_1 \neq 0$, обозначим $\alpha_2 / \alpha_1 = -\beta_1, \ldots, \alpha_n / \alpha_1 = -\beta_n$ и получим:

$$\boldsymbol{a}_1 = \beta_2 \cdot \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \beta_n \cdot \boldsymbol{a}_n.$$

Если векторы $\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ линейно независимы, то такое представление вектора $\boldsymbol{a}_1$ называется его разложением по направлениям векторов $\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$.

Параллельные векторы называют также коллинеарными. Очевидно, любые два коллинеарных вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ линейно зависимы, так как один вектор выражается через другой подбором соответствующего числового коэффициента α: $\boldsymbol{b} = \alpha \cdot \boldsymbol{a}$.



$\boldsymbol{c} = \alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}$ $\qquad$ $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$

Рис. 10. Разложение вектора по заданным направлениям:
а) на плоскости; б) в пространстве.

Векторы, которые с помощью параллельного переноса можно расположить в одной плоскости, называют компланарными. Можно показать, что любые три компланарных вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ линейно зависимы. Для этого разложим один из векторов по направлениям двух других (считаем все векторы непараллельными, иначе они уже линейно зависимы). Сначала представим по правилу параллелограмма, например, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}'$; затем $\boldsymbol{a}' = \alpha \cdot \boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}' = \beta \cdot \boldsymbol{b}$, окончательно $\boldsymbol{c} = \alpha \cdot \boldsymbol{a} + \beta \cdot \boldsymbol{b}$ (рис. 10*а*). Отсюда следует линейная зависимость векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

В дальнейшем будем часто использовать разложение вектора по трем некомпланарным направлениям в пространстве. Для этого нужно представить его диагональю параллелепипеда, построенного по трем заданным направлениям (рис. 10*б*). В частности, отсюда следует, что в трехмерном пространстве любые четыре вектора линейно зависимы.

Вообще, максимальная система линейно независимых векторов образует базис этого пространства, количество векторов этой системы называют размерностью пространства. Представление произвольного вектора в виде линейной комбинации базисных векторов называют разложением вектора по данному базису.

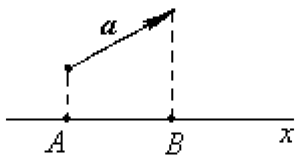


Рис. 11. Проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на ось x.

Проекцией a_x вектора $\boldsymbol{a}$ на ось Ox называется разность координат конца и начала вектора относительно этой оси, $a_x = x_B - x_A$ (рис. 11). Очевидно, проекция c_x суммы векторов $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ равна сумме проекций этих векторов (рис. 12), $c_x = a_x + b_x$, а проекция d_x произведения вектора $\boldsymbol{a}$ на число α, $\boldsymbol{d} = \alpha \cdot \boldsymbol{a}$, равна произведению числа на проекцию этого вектора $d_x = \alpha \cdot a_x$.

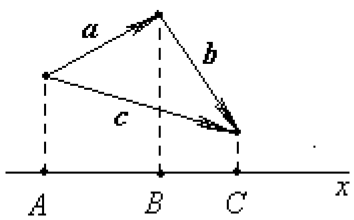


Рис. 12. Проекция суммы векторов на ось x.

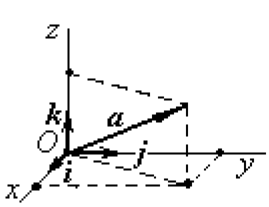


Рис. 13. Представление вектора $\boldsymbol{a}$ в координатной форме

Ортами декартовой прямоугольной системы координат $Oxyz$ называются единичные векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ направлений осей. Любой вектор $\boldsymbol{a}$ можно представить в координатной форме: $\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}$, где a_x, a_y, a_z - проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на оси $Oxyz$ (рис. 13).

Модуль и направляющие косинусы вектора (косинусы углов, составляемые вектором с координатными осями) определяются формулами:

$$|\,\boldsymbol{a}\,| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}; \quad Cos\,\alpha = \frac{a_x}{a};\; Cos\,\beta = \frac{a_y}{a};\; Cos\,\gamma = \frac{a_z}{a}.$$

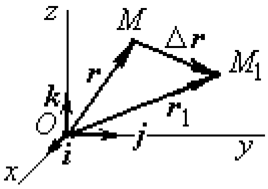


Рис. 14. Радиус-вектор и вектор перемещения точки M.

Радиус-вектором точки M в системе координат $Oxyz$ называется вектор $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$, начало которого совпадает с началом координат, а конец – с точкой M. Радиус-вектор точки однозначно связан с ее координатами x, y, z (рис. 14):

$$\boldsymbol{r} = x \cdot \boldsymbol{i} + y \cdot \boldsymbol{j} + z \cdot \boldsymbol{k}.$$

Вектором перемещения точки из положения M в положение M_1 называется вектор $\overrightarrow{MM_1} = \Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}$. Расстояние между точками $M(x, y, z)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ определяется по формуле

$$MM_1 = |\,\Delta\boldsymbol{r}\,| = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}\,.$$

<u>Скалярным произведением</u> векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ называется произведение модулей этих векторов на косинус угла между ними (обозначается $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ или $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$): $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a \cdot b \cdot Cos\,\alpha$. Из определения следует, что $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a \cdot b_a = a_b \cdot b$, где b_a, a_b - проекции одного из векторов на направление другого.

Механический смысл скалярного произведения состоит в следующем: если $\boldsymbol{F}$ - постоянная сила, $\Delta\boldsymbol{r} = \overrightarrow{MM_1}$ - вектор перемещения ее точки приложения из положения M в положение M_1, то

$$\Delta A = \boldsymbol{F} \cdot \Delta\boldsymbol{r} = F \cdot MM_1 \cdot \cos\alpha$$

есть работа силы $\boldsymbol{F}$ на перемещении $\Delta\boldsymbol{r} = \overrightarrow{MM_1}$.

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ - коммутативность;

2. если $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\neq 0$, то $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ - условие перпендикулярности;

3. $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ - дистрибутивность.

Первые два свойства очевидны. Третье свойство следует из цепочки равенств:

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=a\cdot(b+c)_a=a\cdot(b_a+c_a)=a\cdot b_a+a\cdot c_a=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}.$$

Если представить векторы $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ в координатной форме,

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k},$$

то учитывая, что

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,$$

получим представление скалярного произведения в координатной форме:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

В этом случае условие перпендикулярности векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ приобретает вид:

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

Пример. Определить угол между векторами

$$\boldsymbol{a}=-3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k} \text{ и } \boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}.$$

Решение. Из определения скалярного произведения следует:

$Cos\,\alpha=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{a\cdot b}$. Вычисляем: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=(-3)\cdot 1+1\cdot(-2)+2\cdot 5=5$;

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{(-3)^2+1^2+2^2}=\sqrt{14};$$

$$b=\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}=\sqrt{1^2+(-2)^2+5^2}=\sqrt{30}.$$

Окончательно получаем $Cos\,\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{30}}=0{,}244;\ \alpha\approx 76^0$.

Векторным произведением векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c}$, равный численно площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ как на сторонах, направленный перпендикулярно плоскости векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ в ту сторону, откуда поворот вектора $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$ на меньший угол осуществляется против

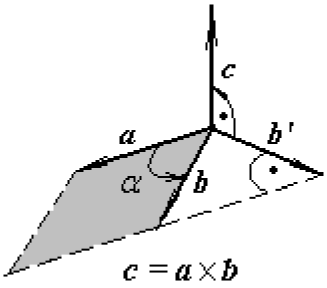


Рис. 15. Векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$.

часовой стрелки; обозначается $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ или $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ (рис. 15). Таким образом, векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ образуют правую тройку векторов, а модуль вектора $\boldsymbol{c}$ равен: $c = a \cdot b \cdot sin\,\alpha$.

Если считать вектор $\boldsymbol{a}$ фиксированным, то векторное произведение $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ можно рассматривать как преобразование вектора $\boldsymbol{b}$ в вектор $\boldsymbol{c}$, при котором:

а) вектор $\boldsymbol{b}$ проецируется на плоскость, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{a}$, в вектор $\boldsymbol{b}'$, равный по модулю $b' = b \cdot sin\,\alpha$;

б) в этой плоскости вектор $\boldsymbol{b}'$ поворачивается на 90^0 против часовой стрелки, если смотреть навстречу вектору $\boldsymbol{a}$, и совмещается по направлению с вектором $\boldsymbol{c}$;

в) модуль вектора $\boldsymbol{b}'$ изменяется в a раз, уравниваясь с модулем вектора $\boldsymbol{c}$, $c = a \cdot b'$.

Векторное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ - антисимметричность;

2. если $|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \neq 0$, то $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ - условие коллинеарности;

3. $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_2$ - дистрибутивность.

Первые два свойства очевидны. Третье свойство следует из того, что операции а), б), в) преобразуют параллелограмм векторов $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$ в параллелограмм векторов $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2)$ с сохранением правила сложения векторов.

Если представить векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ в координатной форме, $\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}$, то учитывая, что

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0,\ \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j},$$

получим представление векторного произведения в координатной форме:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}) \times (b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}) =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \cdot \boldsymbol{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \cdot \boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \cdot \boldsymbol{k}.$$

Последнее выражение можно рассматривать как формальный определитель

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

разложенный по первой строке.

Пример. Найти площадь S треугольника ABC с вершинами в точках $A(1;2;-1)$, $B(-5;8;0)$, $C(1;4;-3)$.

Решение. Определим векторы: $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=-6\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$. Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$, которая совпадает с модулем векторного произведения

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -6 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-14\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k};$$

$$S=\frac{1}{2}|\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,|=\frac{1}{2}\sqrt{(-14)^2+(-12)^2+(-12)^2}=11.$$

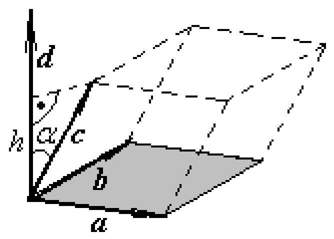


Рис. 16. Смешанное произведение векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

Смешанным произведением векторов $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ называется скалярное произведение одного из векторов на векторное произведение двух других векторов, например, $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$. Геометрический смысл смешанного произведения состоит в том, что оно численно равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ как на сторонах, если их расположить с общим началом (рис. 16),

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\pm V.$$

Действительно, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=S$ - площадь основания, $c\cdot\cos\alpha=\pm h$ - высота, поэтому

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot c\cdot\cos\alpha=\pm S\cdot h=\pm V.$$

Знак + (плюс) в последних выражениях выбирается, если векторы $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ образуют правую тройку векторов (соответствует тому, что угол α - острый), знак – (минус) выбирается, если $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ - левая тройка (соответствует тому, что угол α - тупой).

Смешанное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b})$;

2. если $|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot |\boldsymbol{c}| \neq 0$, то $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ - компланарные векторы.

Справедливость этих свойств следует непосредственно из определения и геометрического смысла смешанного произведения. В связи со свойством 1 смешанное произведение также обозначают $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$ или $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

Если представить векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ в координатной форме,

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{c} = c_x\boldsymbol{i} + c_y\boldsymbol{j} + c_z\boldsymbol{k},$$

то

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = a_x(b_y c_z - b_z c_y) - a_y(b_x c_z - b_z c_x) + a_z(b_x c_y - b_y c_x),$$

или

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

- представление смешанного произведения в координатной форме. В частности, условие компланарности векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ приобретает вид:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

<u>Пример</u>. Найти объем V тетраэдра $ABCD$ с вершинами в точках $A(1; 2; -1)$, $B(-5; 8; 0)$, $C(1; 4; -3)$, $D(6; 0; 4)$.

<u>Решение</u>. Определим векторы:

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB} = -6\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC} = 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{AD} = 5\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}.$$

Объем тетраэдра $ABCD$ равен шестой части объема параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, который совпадает с модулем смешанного произведения

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}-6 & 6 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ 5 & -2 & 5\end{vmatrix}=-60-60-10+24=-106.$$

Отсюда

$$V=\frac{1}{6}|-106|=\frac{53}{3}.$$

2. Векторные функции в $\boldsymbol{R}^3$

2.1. Векторная функция одного скалярного аргумента. Кривая.

Векторной функцией $\boldsymbol{r}(t)$ скалярного аргумента t в пространстве R^3 называют вектор

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k},$$

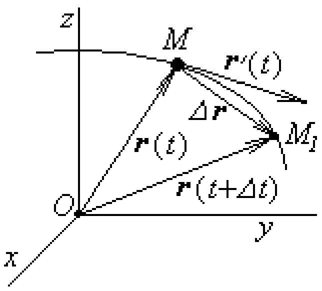


Рис. 17. Векторная функция $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$

где $x(t), y(t), z(t)$ - скалярные функции, имеющие общую область определения $t\in[\alpha,\beta]$; $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ - единичные орты координатных осей $Oxyz$. Таким образом, задание векторной функции $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ эквивалентно заданию трех скалярных функций

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t).$$

Векторная функция $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ непрерывна, если непрерывны функции $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$. Геометрически непрерывная векторная функция $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ представляется пространственной кривой, которую описывает изображающая точка M, имеющая радиус-вектор $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ и координаты $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$, при изменении параметра t от α до β.

Пусть функции $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ дифференцируемы. Для изображающей точки вектор $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$ называют вектором ее перемещения при изменении параметра t на величину Δt. При $\Delta t\to 0$ $(M_1\to M)$ вектор $\Delta\boldsymbol{r}$ по направлению приближается к касательному к кривой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, так что:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{r}'(t)=x'(t)\boldsymbol{i}+y'(t)\boldsymbol{j}+z'(t)\boldsymbol{k}$$

- производная векторной функции – касательный вектор к кривой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Вектор

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'(t)dt = dx(t) \cdot \boldsymbol{i} + dy(t) \cdot \boldsymbol{j} + dz(t) \cdot \boldsymbol{k}$$

также является касательным.

Если кривая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ не имеет самопересечений, самоналожений и $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$ при $t \in [\alpha, \beta]$, то ее называют гладкой ориентированной кривой. Кусочно-гладкой ориентированной кривой называют непрерывную кривую без самопересечений и самоналожений, составленную из конечного числа гладких кривых с согласованной ориентацией (одинаковое направление движения изображающей точки при возрастании параметра вдоль всей кривой). Кривая называется замкнутой, если ее конечная точка совпадает с начальной (для простой кривой $\boldsymbol{r}(\alpha) = \boldsymbol{r}(\beta)$).

2.2. Векторная функция двух скалярных аргументов. Поверхности.

Пусть задана векторная функция

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big) \in C^1(D_0), \;\; (u, v) \in D_0 \subset R^2;$$

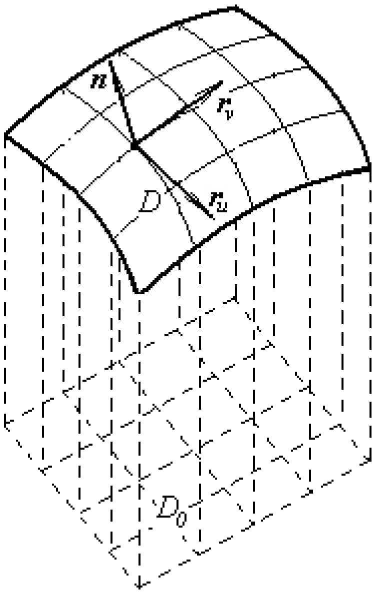


Рис. 18. Векторная функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$

ранг матрицы Якоби

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)}$$

максимален и равен 2. Функцию $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ можно рассматривать как отображение плоской области $D_0 \subset R^2$ на поверхность D в R^3. Функцию $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ также называют параметризацией поверхности D. В каждой точке поверхности D определены две координатные линии $u = const$, $v = const$, и касательные к ним векторы

$$\boldsymbol{r}_u = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = (x_u, y_u, z_u), \;\; \boldsymbol{r}_v = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = (x_v, y_v, z_v),$$

при этом $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$ в силу невырожденности матрицы Якоби.

Определение. Вектор

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(r) = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}$$

будем называть нормалью к поверхности D, отвечающей параметризации $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$.

Отметим справедливость формального представления векторного произведения

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = A \cdot \boldsymbol{i} + B \cdot \boldsymbol{j} + C \cdot \boldsymbol{k}, \quad |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ - единичные орты координатных осей;

$$A = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \ B = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \ C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}.$$

Отсюда нормальный вектор $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ определяется своими направляющими косинусами:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Также будем иметь ввиду, что если φ - угол между векторами $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, то

$$|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|^2 = |\boldsymbol{r}_u|^2 |\boldsymbol{r}_v|^2 \sin^2\varphi = \boldsymbol{r}_u{}^2 \boldsymbol{r}_v{}^2 (1 - \cos^2\varphi) = \boldsymbol{r}_u{}^2 \boldsymbol{r}_v{}^2 - (\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v)^2 = EG - F^2,$$

где

$$E = \boldsymbol{r}_u{}^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \ G = \boldsymbol{r}_v{}^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \ F = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

- так называемые коэффициенты Гаусса. В этих обозначениях

$$|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Для любых двух параметризаций поверхности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(u, v)$ всегда $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\rho})$ или $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\rho})$. Учитывая непрерывность функции

$$f(u, v) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\rho}),$$

имеем $f(u,v) = const$ во всех точках поверхности, и, значит, функция равна либо +1, либо –1. Поэтому говорят, что нормаль к поверхности, отвечающей некоторой параметризации, выделяет на ней ее сторону. Поверхность с выделенной стороной называют двусторонней поверхностью.

<u>Определение.</u> Выделение одной из сторон поверхности D с помощью параметризации называется ориентацией поверхности D.

2.3. Векторная функция трех скалярных аргументов.

Пусть задана векторная функция

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v,w) = \big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big) \in C^1(V_0),$$
$$(u,v,w) \in V_0 \subset R^3$$

с невырожденным якобианом,

$$det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right) \neq 0.$$

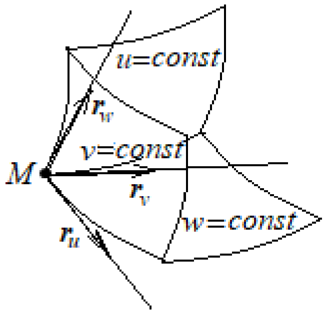


Рис. 19. Локальный базис криволинейной системы координат

Функцию $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v,w)$ можно рассматривать как отображение области $V_0 \subset R^3$ в область $V \subset R^3$. В каждой точке области V определены три координатные поверхности $u = const,\ v = const,\ w = const$ и три координатные линии с касательными векторами

$$\boldsymbol{r}_u = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = (x_u, y_u, z_u),\ \ \boldsymbol{r}_v = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (x_v, y_v, z_v),$$

$$\boldsymbol{r}_w = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} = (x_w, y_w, z_w),$$

при этом $\left(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_w\right) \neq 0$ в силу невырожденности матрицы Якоби. Поэтому векторы $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_w$ можно рассматривать как локальный базис некоторой криволинейной системы координат в пространстве R^3.

Вопросы

1. Какая система координат называется прямоугольной декартовой?
2. Как определяется полярная система координат?
3. Как определяется цилиндрическая система координат?
4. Как определяется сферическая система координат?
5. Что называют направлением вектора?
6. Что называют линейной комбинацией векторов?
7. Какая совокупность векторов называется линейно независимой? Примеры.
8. Как определяется скалярное произведение векторов?
9. В чем заключается условие перпендикулярности векторов?
10. Как определяется векторное произведение векторов?
11. В чем заключается условие коллинеарности векторов?
12. Как определяется смешанное произведение векторов?
13. Какой геометрический смысл имеет смешанное произведение векторов?
14. Как определяется векторная функция одного скалярного аргумента? Что является ее геометрическим образом?
15. Как определяется векторная функция двух скалярных аргументов? Что является ее геометрическим образом?
16. Как определяется векторная функция трех скалярных аргументов? Как образуется локальный базис в R^3?

3. Кратные интегралы

3.1. Двойной интеграл.

Пусть: $D \subset R^2$ − замкнутая ограниченная область, $f(x, y) \geq 0$ − непрерывная функция в D. Разобьем D на элементарные площадки ΔS_i $\left(i = 1,\ 2, \dots, n\right)$, в каждой площадке выберем точку $P_i(x_i, y_i)$ и составим выражение (рис. 20)

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \ , \tag{1}$$

которое называется интегральной суммой для функции $f(x, y)$ в области D для n разбиений. Если $n \to \infty$, $max\ \Delta S_i \to 0$, то

$$V_n \to V = \iint_D f(x, y)dS = \iint_D f(x, y)dxdy\,;$$

этот предел называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D. Можно доказать, что предел V существует и не зависит ни от способа разбиения, ни от положения точек разметки $P_i(x_i, y_i)$.

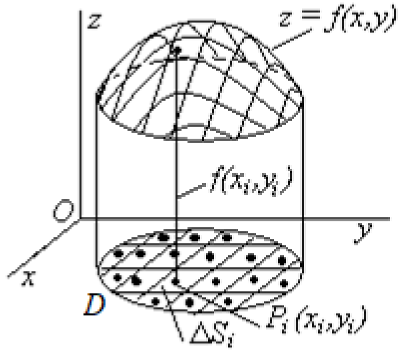


Рис. 20. Схема разметки области интегрирования.

Геометрический смысл двойного интеграла при $f(x, y) \geq 0$ – объем цилиндрического тела, нижним основанием которого является область D, а верхним – поверхность графика функции $z = f(x, y)$. Если $f(x, y) \leq 0$, то все слагаемые интегральной суммы (1) будут отрицательными, и к соответствующему объему цилиндрического тела добавится знак минус. Для произвольной функции $f(x, y)$ двойной интеграл будет равен алгебраической сумме объемов цилиндрических тел, соответствующих множествам отрицательных и положительных значений функции.

Таким образом, двойной интеграл есть предел интегральной суммы:

$$\iint_D f(x, y)dS = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\ \Delta S_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Двойной интеграл обладает следующими основными свойствами:

1. $\iint_D [f_1(x,y) + f_2(x,y)]dS = \iint_D f_1(x,y)dS + \iint_D f_2(x,y)dS$

- аддитивность на множестве непрерывных функций (точнее, на множестве кусочно непрерывных функций).

2. $\iint_D \alpha \cdot f(x,y)dS = \alpha \iint_D f(x,y)dS\,,\ \ \alpha = const\ \ -$ однородность.

3. $D = D_1 \cup D_2,\ D_1 \cap D_2 = \emptyset\ \Rightarrow \iint_D f(x,y)dS =$

$$= \iint_{D_1} f(x,y)dS + \iint_{D_2} f(x,y)dS$$

- аддитивность для конечного числа подмножеств области D.

3.2. Двукратный интеграл.

Пусть область $D \subset R^2$ такая, что любая прямая, проходящая через внутреннюю точку M параллельно оси Oy пересекает ее границу только в двух точках. Такая область называется правильной в направлении оси Oy. Аналогично определяется область, правильная в направлении оси Ox. Область, правильную в направлении обеих осей будем называть просто правильной.

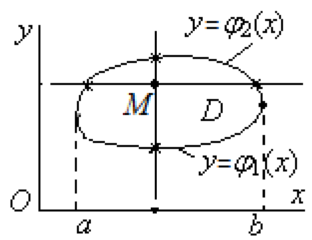


Рис. 21. Правильная область

Пусть область D ограничена линиями:

$$y = \varphi_1(x),\ y = \varphi_2(x),\ x = a,\ x = b\ \left(\varphi_1(x) \le \varphi_2(x),\ a < b\right);$$

$f(x,y) -$ непрерывная функция в области D. Составим выражение:

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx,$$

которое называется двукратным, или повторным, интегралом от функции $f(x, y)$ по области D. Вычисление двукратного интеграла сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов:

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \quad (x = const) \text{ и } I_D = \int_a^b \Phi(x)dx.$$

Пример. Вычислить

$$I_D = \int_1^2 \left(\int_x^{2x} xydy \right) dx.$$

Решение.

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} xydy = x \frac{y^2}{2} \bigg|_x^{2x} = \frac{x}{2}(4x^2 - x^2) = \frac{3}{2}x^3;$$

$$I_D = \int_1^2 \Phi(x)dx = \int_1^2 \frac{3}{2}x^3 dx = \frac{3}{2}\frac{x^4}{4}\bigg|_1^2 = \frac{3}{8}(16 - 1) = \frac{45}{8}.$$

Ответ: 45/8.

Двукратный интеграл обладает следующими основными свойствами:

1. Если правильную область D разбить на правильные части D_1, D_2,…, D_n, то двукратный интеграл можно представить в виде суммы:

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2} + \ldots + I_{D_n}.$$

2. Если m, M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x, y)$ в области D, то

$$mS \le I_D \le MS,$$

где S – площадь D.

Действительно,

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \le M[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]..$$

Отсюда

$$\int_a^b \Phi(x)dx \le M \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]dx = MS.$$

Аналогично доказывается оценка слева.

3. (Теорема о среднем). Если $f(x,y)$ – непрерывна в замкнутой области D, то найдется точка $P(x_0,y_0) \in D$, такая что $I_D = f(x_0,y_0) \cdot S$, где S – площадь D.

Действительно, $mS \leq I_D \leq MS$, откуда следует

$$m \leq \frac{I_D}{S} \leq M.$$

Непрерывная функция $f(x,y)$ принимает в замкнутой области D все значения из интервала $(m,\ M)$, поэтому найдется точка $P(x_0,y_0) \in D$, такая что

$$f(x_0,y_0) = \frac{I_D}{S},$$

откуда следует утверждение теоремы.

3.3. Вычисление двойного интеграла.

Теорема. Двойной интеграл от непрерывной функции $f(x,y)$ по правильной области D равен двукратному интегралу, т.е.

$$\iint_D f(x,y)dS = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Замечание 1. Если $f(x,y) \geq 0$, то величина

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

представляет собой площадь сечения, перпендикулярного оси Ox, для рассматриваемого цилиндрического тела (рис. 22);

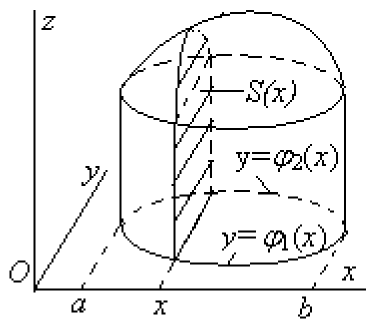


Рис. 22. Метод сечений.

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

- его объем, то есть двукратный интеграл выражает вычисление объема тела методом сечений.

Замечание 2. Если D − неправильная область, то двойной интеграл можно вычислить с помощью двукратного, предварительно разбив ее на несколько правильных (рис. 23).

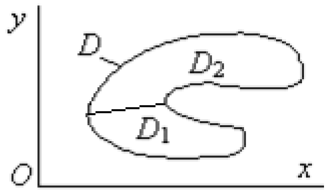


Рис. 23. Разбиение неправильной области D на правильные D_1, D_2.

$$\iint_D f(x,y)dS = \iint_{D_1} f(x,y)dS + \iint_{D_2} f(x,y)dS.$$

Замечание 3. Наряду с указанными также используются следующие обозначения двойного интеграла

$$I_D = \iint_D f(x,y)dS = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\, dx =$$

$$= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

3.4. Замена переменных в двойном интеграле.

Пусть $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, где u, v − новые переменные, φ, ψ − непрерывно дифференцируемые функции и выражают взаимную однозначность переменных u, v и x, y, то есть каждой точке плоскости u, v из области определения D' функций φ, ψ соответствует одна и только одна точка плоскости x, y из области определения D функции $f(x,y)$.

Разобьем область D' на элементы $\Delta S_i'$ с разметкой Q_i. При этом элемент типа $A_1A_2A_3A_4$ области D' отображается в элемент $B_1B_2B_3B_4$ области D (рис. 24).

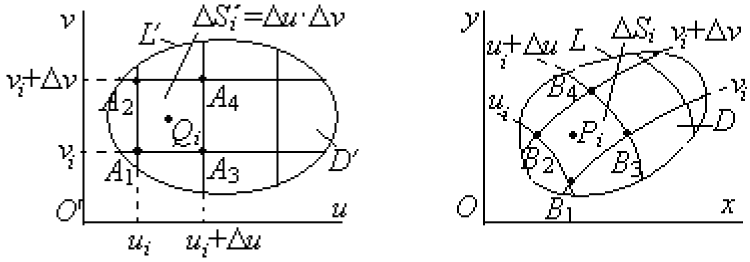


Рис. 24. Замена переменных в двойном интеграле.

По определению

$$\iint_D f(x,y)dS = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta S_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i\,, \quad F(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big).$$

Вычислим ΔS_i:

$$B_1\colon\ x_{1i} = \varphi(u_i, v_i),\ \ y_{1i} = \psi(u_i, v_i);$$

$$B_2\colon\ x_{2i} = \varphi(u_i, v_i + \Delta v) \approx \varphi(u_i, v_i) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v,$$

$$y_{2i} = \psi(u_i, v_i + \Delta v) \approx \psi(u_i, v_i) + \frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v;$$

$$B_3\colon\ x_{3i} = \varphi(u_i + \Delta u, v_i) \approx \varphi(u_i, v_i) + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u,$$

$$y_{3i} = \psi(u_i + \Delta u, v_i) \approx \psi(u_i, v_i) + \frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u;$$

$$\overrightarrow{B_1B_2} = (x_{2i} - x_{1i},\ y_{2i} - y_{1i}) \approx \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \psi}{\partial v}\right)\Delta v,$$

$$\overrightarrow{B_1B_3} = (x_{3i} - x_{1i},\ y_{3i} - y_{1i}) \approx \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial u}\right)\Delta u;$$

$$\Delta S_i = \left|\overrightarrow{B_1B_2} \times \overrightarrow{B_1B_3}\right| = \left| det \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} & 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial u} & 0 \end{pmatrix} \right| \Delta u \Delta v = \left| det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial u} \end{pmatrix} \right| \Delta u \Delta v.$$

Обозначим

$$I = det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial u} \end{pmatrix}$$

– определитель 2–ого порядка – якобиан. Тогда с точностью до величин более высокого порядка малости

$$\Delta S_i \approx |I| \cdot \Delta S_i',$$

что означает в окрестности точки P_i

$$\lim_{\Delta S_i' \to 0} \frac{\Delta S_i}{\Delta S_i'} = |I|_{P_i}$$

при любых i =1, 2,…, n. Отсюда следует

$$\iint_D f(x,y)dS = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta S_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta S_i' \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\frac{\Delta S_i}{\Delta S_i'}\Delta S_i' =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta S_i' \to 0}} \sum_{i=1}^{n} F(u_i,v_i)\frac{\Delta S_i}{\Delta S_i'}\Delta S_i' = \iint_{D'} F(u,v)|I|dudv,$$

то есть

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} F(u,v)|I|dudv$$

- формула замены переменных в двойном интеграле.

3.5. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Формулы перехода от декартовых координат к полярным:

$$x = \rho\cos\varphi, \;\; y = \rho\sin\varphi.$$

Якобиан

$$I = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Для формирования двойного интеграла в полярных координатах необходимо предварительно установить границы $(\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2)$ полярного сектора, содержащего область интегрирования (если полюс является внутренней точкой области интегрирования, то $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 2\pi$). Область интегрирования должна быть правильной, так что любой промежуточный полярный луч $\varphi : \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ пересекал ее границу не более двух раз (рис. 25). Эти условия позволяют выделить ближний к полюсу участок границы $\rho = \rho_1(\varphi)$ и дальний – $\rho = \rho_2(\varphi)$. Тогда двойной интеграл приобретает вид:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D\prime} F(\rho, \varphi)\rho d\rho d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} F(\rho, \varphi)\rho d\rho.$$

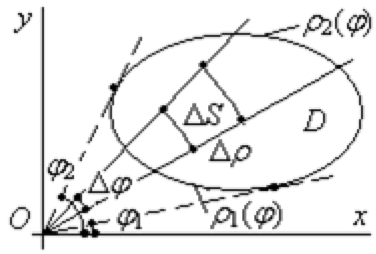


Рис. 25. Область интегрирования в полярных координатах.

3.6. Вычисление площадей и объемов с помощью двойных интегралов.

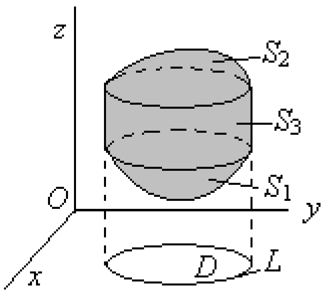


Рис. 26. Правильная трехмерная область

Определение. Правильной трехмерной областью V в направлении оси z называют ограниченную область, для которой любая прямая, параллельная z и проходящая через внутреннюю точку области, пересекает границу области ровно в двух точках.

Это означает, что поверхность S, ограничивающую правильную область V, можно разделить на три части (рис. 26):

$$S_1 = \{(x, y, z): (x, y) \in D,\ z = f_1(x, y)\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z): (x, y) \in D,\ z = f_2(x, y)\},$$

$$S_3 = \left\{(x, y, z): (x, y) \in L,\ f_1(x, y) \le z \le f_2(x, y)\right\}.$$

Здесь D – проекция области V на плоскость Oxy, L – граница D; часть S_3 поверхности может отсутствовать.

Объем правильной области определяется по формуле:

$$V = \iint_D [f_2(x, y) - f_1(x, y)]dxdy.$$

Если V не является правильной, ее всегда можно разбить на конечное число правильных областей и находить объем как сумму объемов ее частей.

Если в выражении

$$\iint_D f(x,y)ds$$

положить $f(x,y) \equiv 1$, то объем соответствующей фигуры будет численно равен площади ее основания D, то есть

$$S_D = \iint_D ds = \iint_D dxdy.$$

3.7. Вычисление площади поверхности

Пусть функция $f(x,y)$ определена в области $D \subset R^2$ и дифференцируема в ней; $z = f(x,y)$ − уравнение гладкой поверхности Π в R^3. Разобьем область D на элементы Δs_i $(i = 1,2,\dots,n)$ и соответственно поверхность Π на элементы $\Delta\sigma_i$ (рис. 27).

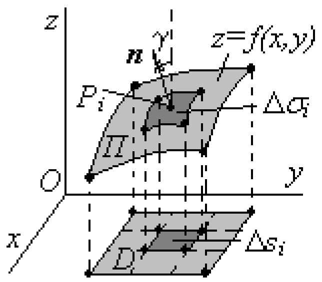


Рис. 27. Вычисление площади поверхности.

При малых Δs_i можно считать, что $\Delta\sigma_i$ совпадает с участком касательной плоскости в точке $P_i \in \Delta\sigma_i$, так что Δs_i − проекция $\Delta\sigma_i$ на плоскость Oxy,

$$\Delta s_{\mathrm{i}} = \Delta\sigma_i \cos\gamma_i,$$

где γ_i − угол между нормалью $\boldsymbol{n}_i$ в точке P_i и осью Oz. Заметим

$$\boldsymbol{n}_i = \left(-f'_x, -f'_y, 1\right)\Big|_{P_i}, \ \boldsymbol{z}_0 = (0,0,1),$$

где $\boldsymbol{z}_0$ − единичный орт оси Oz. Тогда

$$\cos\gamma_i = \frac{\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{z}_0}{|\boldsymbol{n}_i| \cdot |\boldsymbol{z}_0|} = \frac{1}{\sqrt{(f_x')^2 + \left(f_y'\right)^2 + 1}}\Bigg|_{P_i}.$$

Отсюда

$$\Delta\sigma_i = \frac{\Delta s_{\text{i}}}{\cos\gamma_i} = \sqrt{(f_x')^2 + \left(f_y'\right)^2 + 1}\Big|_{P_i} \cdot \Delta s_{\text{i}},$$

значит, площадь всей поверхности определяется следующим образом

$$\sigma = \lim_{\substack{k\to\infty \\ \Delta s_{\text{i}}\to 0}} \sum_{i=1}^{k} \Delta\sigma_i = \lim_{\substack{k\to\infty \\ \Delta s_{\text{i}}\to 0}} \sum_{i=1}^{k} \sqrt{(f_x')^2 + \left(f_y'\right)^2 + 1}\,\Bigg|_{P_i} \cdot \Delta s_{\text{i}},$$

или

$$\sigma = \iint_D \sqrt{(f_x')^2 + \left(f_y'\right)^2 + 1}\ ds$$

- формула вычисления площади поверхности $z = f(x, y)$ в области D.

3.8. Тройной интеграл.

Определение. Пусть задана трехмерная область $V \subset R^3$, ограниченная поверхностью S; в каждой точке области определена функция $f(x, y, z)$. Разобьем область V на элементарные объемы ΔV_i $(i = 1,2, \dots, n)$, выполним разметку точками $(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i\,.$$

Предел этой суммы при $n \to \infty$, $max\,\Delta V_i \to 0$ называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области V и обозначается

$$\iiint_V f(x, y, z)dV = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta V_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i. \tag{2}$$

Если функция $f(x, y, z)$ представляет собой, например, плотность вещества в данной точке, то тройной интеграл (2) будет массой вещества, содержащегося в объеме V.

3.9. Трехкратный интеграл.

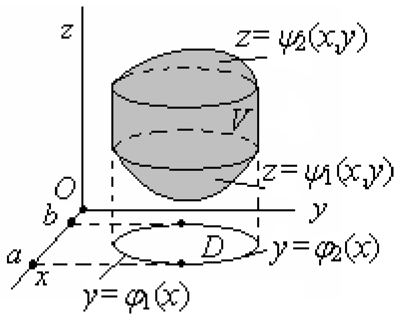


Рис. 28. К вычислению трехкратного интеграла.

Пусть $V \subset R^3$ – множество, на котором задана непрерывная функция $f(x, y, z)$, – правильная область (рис. 28), то есть:

1. любая прямая, параллельная оси z и проходящая через внутреннюю точку области V пересекает ее границу в двух точках;

2. V проецируется на плоскость Oxy в правильную двумерную область D.

Тогда на поверхности объема можно выделить «нижний» участок, $z = \psi_1(x, y)$, и «верхний» участок, $z = \psi_2(x, y)$; возможно наличие цилиндрических участков поверхности с образующей, параллельной оси Oz. В свою очередь, у границы области D можно выделить участок «слева», $y = \varphi_1(x)$, и участок «справа», $y = \varphi_2(x)$ при $x \in [a, b]$; возможно наличие прямолинейных участков границы, параллельных оси Oy.

Трехкратный интеграл от функции $f(x, y, z)$ по области V определяется следующим образом:

$$I_V = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

Вычисление трехкратного интеграла сводится к последовательному вычислению трех определенных интегралов Римана:

$$\Psi(x, y) = \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz, \;\; x = const, y = const;$$

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \Psi(x,y)dy\,,\ x = const;\quad I_V = \int_a^b \Phi(x)dx.$$

Свойства трехкратного интеграла

1. Если область V разбита на правильные области $\Delta V_1,\ \Delta V_2, \dots\ \Delta V_n$, то

$$I_V = I_{\Delta V_1} + I_{\Delta V_2} + \ldots + I_{\Delta V_n}.$$

2. Если m, M − минимальное и максимальное значения функции $f(x,y,z)$ в области V, то

$$mV \le I_V \le MV,$$

где − V объем данной области.

Доказательство. Действительно,

$$\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \le \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} M\cdot dz = M\big[\psi_2(x,y) - \psi_1(x,y)\big],$$

тогда

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \le$$

$$\le M\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \big[\psi_2(x,y) - \psi_1(x,y)\big]dy = M\cdot V.$$

Отсюда $I_V \le MV$. Аналогично доказывается $I_V \ge mV$.

3. Теорема о среднем. Если $f(x,y,z)$ − непрерывная в области V функция, то найдется точка $P(x_0,y_0,z_0) \in V$, такая что

$$I_V = f(x_0,y_0,z_0)\cdot V.$$

Доказательство. Аналогично доказательству соответствующей теоремы для двукратного интеграла.

3.10. Теорема о вычислении тройного интеграла.

Если $V \subset R^3$ − правильная область, $f(x,y,z)$ − заданная в области V функция, то

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

то есть тройной интеграл равен трехкратному.

3.11. Замена переменных в тройном интеграле

Общий случай. По аналогии с двойным интегралом можно показать, что если между точками $(x, y, z) \in V$ и $(u, v, w) \in V'$ установлено взаимно однозначное соответствие, так что функции

$$x = x(u, v, w),\ y = y(u, v, w),\ z = z(u, v, w)$$

являются непрерывно дифференцируемыми, то для тройного интеграла от заданной функции $f(x, y, z)$ по области V имеет место формула замены переменных

$$\iiint_V f(x, y, z) dxdydz = \iiint_{V\prime} F(u, v, w)|I| dudvdw,$$

где $F(u, v, w) = f\big(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\big)$,

$$I = det\begin{pmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{pmatrix}$$

– якобиан преобразования координат, определитель 3–го порядка.

3.12. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.

Формулы перехода от декартовых координат к цилиндрическим:

$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \sin\varphi,\ \ z = z;$$

якобиан

$$I = det\begin{pmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_z \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_z \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_z \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho.$$

Область интегрирования V должна быть правильной в направлении оси z, что позволяет выделить нижнюю $z = z_1(\rho, \varphi)$ и верхнюю $z = z_2(\rho, \varphi)$ части поверхности области V. Относительно переменных ρ, φ проекция D области V на полярную плоскость Oxy должна удовлетворять требованиям к области интегрирования в полярных координатах (см. п. 2.5), так что:

$$\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2,\ \ \rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi).$$

Тогда формула вычисления тройного интеграла в полярных координатах приобретает вид:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} F(\rho,\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} F(\rho,\varphi,z)dz\,.$$

3.13. Тройной интеграл в сферических координатах.

Формулы перехода от декартовых координат к сферическим r, θ, φ:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\cos\theta\,;$$

якобиан

$$I = det\begin{pmatrix} x'_r & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\theta & z'_\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Область интегрирования V должна быть такой, что координаты всех ее точек подчиняются условиям:

$$\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2,\ \theta_1(\varphi) \le \theta \le\ \theta_2(\varphi),\ \ r_1(\theta,\varphi) \le r \le\ r_2(\theta,\varphi),$$

где φ_1, φ_2, $\theta_1(\varphi)$, $\theta_2(\varphi)$, $r_1(\theta,\varphi)$, $r_2(\theta,\varphi)$ - определяемые значения и функции. Тогда формула вычисления тройного интеграла в сферических координатах приобретает вид:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} F(r,\theta,\varphi) r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin\theta\, d\theta \int_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} F(r,\theta,\varphi) r^2 dr\,.$$

4. Интегралы общего вида

4.1. Криволинейный интеграл 1-го рода.

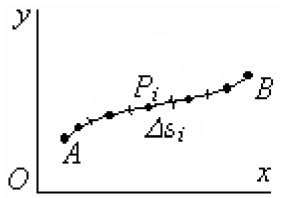


Рис. 29. К определению криволинейного интеграла.

Определение. Пусть в каждой точке плоской кривой L=AB задана непрерывная функция $f(x,y)$. Разобьем кривую AB на элементарные участки Δs_i $\left(i = 1,\ 2, \ldots, n\right)$ и выберем на каждом участке точку $P_i(x_i, y_i) \in L$ (рис. 29). Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i.$$

Если функция $f(x,y)$ ограничена в некоторой области, содержащей кривую L, то при $n \to \infty$, $max\ \Delta s_i \to 0$ эта сумма имеет предел

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ max\ \Delta s_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i = \int_L f(x,y)ds,$$

который называется криволинейным интегралом 1–го рода от функции $f(x,y)$ вдоль кривой L.

Свойства. 1. Если $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, то

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{L_1} f(x,y)ds + \int_{L_2} f(x,y)ds.$$

2. Если функции $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ ограничены и непрерывны в некоторой области, содержащей кривую L, то

$$\int_L \big(\alpha \cdot f_1(x,y) + \beta \cdot f_2(x,y)\big)ds = \alpha \cdot \int_L f_1(x,y)ds + \beta \cdot \int_L f_2(x,y)ds$$

для любых чисел α, β.

Вычисление. Если кривая L задана параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ a \le t \le b,$$

где $\varphi(t),\ \psi(t)$ − непрерывно дифференцируемые на $[a, b]$ функции, то криволинейный интеграл вычисляется через определенный следующим образом:

$$\int_L f(x, y)ds = \int_a^b f\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2}dt.$$

Это следует из того, что с точностью до величин более высокого порядка малости длина элементарной дуги Δs_i приближенно равна

$$\Delta s_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2} \cdot \Delta t_i,$$

где $\Delta x_i,\ \Delta y_i$ − проекции элемента Δs_i на координатные оси. Осталось использовать зависимости $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ a \le t \le b$ и выполнить предельный переход $n \to \infty,\ max\, \Delta s_i \to 0$.

Замечание. Случай плоской кривой легко распространяется на случай пространственной кривой

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \theta(t),\ a \le t \le b$$

с основной функцией $f(x, y, z)$, а именно

$$\int_L f(x, y, z)ds = \int_a^b f\big(\varphi(t), \psi(t), \theta(t)\big)\sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2 + \big(\theta'(t)\big)^2}dt.$$

4.2. Криволинейный интеграл второго рода.

Пусть точка M движется под действием силы $\boldsymbol{F}$ из положения B в положение C по некоторой кривой $L = BC$ в плоскости Oxy (рис. 30). Разобьем BC на элементарные участки $\Delta \boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_{k+1} - \boldsymbol{r}_k\ \big(k = 1,\ 2, \dots, n\big)$ и составим выражение

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k \cdot \Delta \boldsymbol{r}_k = \sum_{k=1}^{n} [X_k(x_k, y_k)\Delta x_k + Y_k(x_k, y_k)\Delta y_k].$$

Здесь

$$\boldsymbol{F} = X(x, y)\boldsymbol{i} + Y(x, y)\boldsymbol{j},\ \Delta \boldsymbol{r}_k = \Delta x_k \boldsymbol{i} + \Delta y_k \boldsymbol{j}\ ;$$

$X(x,y)$, $Y(x,y)$ − непрерывные функции, проекции силы $\boldsymbol{F}$; $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ − единичные орты координатных осей.

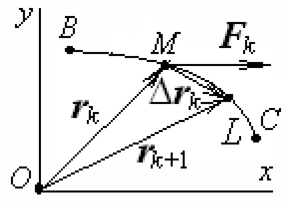


Рис. 30. Перемещение точки M вдоль кривой BC.

Работой силы $\boldsymbol{F}$ на перемещении точки M из положения B в положение C по кривой L называют предел

$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta r_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} [X_k(x_k, y_k)\Delta x_k + Y_k(x_k, y_k)\Delta y_k]$$

и обозначают

$$A = \int_{BC} X(x,y)dx + Y(x,y)dy.$$

В математике эту величину называют криволинейным интегралом 2−ого рода от векторной функции $\boldsymbol{F}(x,y) = X(x,y)\boldsymbol{i} + Y(x,y)\boldsymbol{j}$ по кривой BC.

Для пространственной кривой BC

$$A = \int_{BC} X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz.$$

Свойства.

1. $\int_{BC} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = -\int_{CB} X(x,y)dx + Y(x,y)dy$;

2. Если $BC = BK \cup KC$, то

$$\int_{BC} X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$
$$= \int_{BK} X(x,y)dx + Y(x,y)dy + \int_{KC} X(x,y)dx + Y(x,y)dy.$$

Замечания. 1. Если кривая L − замкнутая, то есть начало и конец совпадают, то интеграл имеет специальное обозначение

$$A = \oint_L X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$

– криволинейный интеграл по замкнутому контуру L.

2. Вектор $\boldsymbol{F} = X(x,y)\boldsymbol{i} + Y(x,y)\boldsymbol{j}$ может быть вектором любой природы;

$$A = \oint_L \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dr}$$

– краткая форма записи криволинейного интеграла от вектора $\boldsymbol{F}$ по кривой L. Последний интеграл также называют циркуляцией вектора $\boldsymbol{F}$ по замкнутому контуру L.

4.3. Вычисление криволинейного интеграла второго рода

Если кривая $L = BC$ задана параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ a \le t \le b,$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – непрерывно дифференцируемые на $[a,b]$ функции, то криволинейный интеграл вычисляется через определенный следующим образом:

$$A = \oint_{BC} X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$

$$= \int_a^b \Big(X\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\varphi\,'(t) + Y\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\psi\,'(t) \Big)\, dt.$$

Это следует из представления

$$\Delta x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\Delta t_i,\ \ \Delta y_i = \frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\Delta t_i.$$

Осталось использовать зависимости $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ a \le t \le b,$ и выполнить предельный переход $n \to \infty,\ max\, \Delta t_i \to 0.$

<u>Пример</u>. Вычислить

$$\int_L ydx - xdy$$

вдоль дуги эллипса $L = \big\{x = a\cos t\,,\ y = b\sin t\,,\ 0 \le t \le \pi/2\big\}.$

<u>Решение</u>. Используем формулу перехода к определенному интегралу

$$\int_L ydx - xdy = \begin{pmatrix} x = a\cos t\,,\ y = b\sin t \\ dx = -a\sin t\,dt,\ y = b\cos t\,dt \end{pmatrix} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-ab\sin^2 t + -ab\cos^2 t)dt = -\frac{\pi}{2}ab.$$

4.4. Вычисление площади с помощью криволинейного интеграла

Пусть D − правильная область в направлении оси Oy. В общем случае ее граница L может состоять из участков типа (рис. 31):

$$AB = \{(x,y): y = f_1(x)\},\ \ MN = \{(x,y): y = f_2(x)\},$$

$$BN = \{(x,y): x = b,\ f_1(b) \le\ y \le f_2(b)\},$$

$$AM = \{(x,y): x = a,\ \ f_1(a) \le\ y \le f_2(a)\}.$$

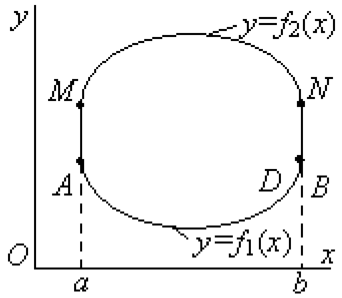


Рис. 31. К вычислению площади плоской фигуры.

Участки типа AM, BN могут вырождаться в точку, то есть отсутствовать.

Площадь всей фигуры:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx.$$

Заметим,

$$\int_a^b f_2(x)dx = \int_{MN} ydx = -\int_{NM} ydx\,,\ \int_a^b f_1(x)dx = \int_{AB} ydx\,,$$

$$\int_{AM} ydx = \int_{NB} ydx = 0.$$

Отсюда следует

$$S = -\int_{AB} ydx - \int_{BN} ydx - \int_{NM} ydx - \int_{MA} ydx = -\oint_L ydx.$$

Здесь L − граница области D, причем при обходе границы область D должна располагаться слева от направления обхода. Меняя смысл переменных x, y, но сохраняя при этом систему координат, аналогично можно получить эквивалентную формулу

$$S = \oint_L x dy.$$

Очевидно, также будет справедлива следующая формула

$$S = \frac{1}{2}\oint_L (x dy - y dx).$$

4.5. Формула Грина

Пусть D − правильная область (рис. 32); $X(x,y)$, $Y(x,y)$ − непрерывно дифференцируемые функции, заданные в области D; $L = AMBN$ – граница области D, участки которой могут быть описаны следующим образом:

$$AMB = \{(x,y): y = f_1(x)\},\ ANB = \{(x,y): y = f_2(x)\},$$
$$MAN = \{(x,y): x = \varphi_1(y)\},\ MBN = \{(x,y): x = \varphi_2(y)\}.$$

Рассмотрим

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dxdy = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial X}{\partial y} dy\right) dx = \int_a^b \left(X(x,y)|_{f_1(x)}^{f_2(x)}\right) dx =$$
$$= \int_a^b X(x, f_2(x)) dx - \int_a^b X(x, f_1(x)) dx = \int_{ANB} X(x,y) dx - \int_{AMB} X(x,y) dx =$$
$$= -\int_{BNA} X(x,y) dx - \int_{AMB} X(x,y) dx = -\oint_L X(x,y) dx. \quad (1)$$

Здесь обход границы L совершается против часовой стрелки (при обходе область остается слева).

Аналогично,

$$\iint_D \frac{\partial Y}{\partial x} dxdy = \int_m^n \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} \frac{\partial Y}{\partial x} dx\right) dy = \cdots =$$
$$= \int_{MBN} Y(x,y) dy + \int_{NAM} Y(x,y) dy = \oint_L Y(x,y) dy. \quad (2)$$

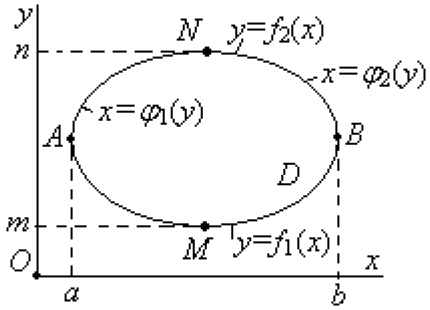


Рис. 32. К выводу формулы Грина.

Здесь также обход границы L совершается против часовой стрелки.

Вычитая (1) из (2), получаем

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L X(x,y)dx + Y(x,y)dy.$$

Это и есть формула Грина. Она устанавливает связь между двойным интегралом по некоторой области D и криволинейным интегралом вдоль замкнутой кривой L, ограничивающей эту область.

4.6. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Пусть $X(x,y)$, $Y(x,y)$ − непрерывно дифференцируемые функции, заданные в области D. Рассмотрим множество кривых, соединяющих точки $P, Q \in D$ и целиком содержащиеся в D (рис. 33). Вообще говоря, значение криволинейного интеграла

$$\int_{PQ} X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$

зависит от того, по какой кривой, соединяющей точки P, Q, он вычисляется. Важным является случай независимости этого интеграла от пути интегрирования.

Заметим, что для любых двух различных кривых PNQ, PMQ имеет место очевидное заключение: если

$$\int_{PMQ} Xdx + Ydy = \int_{PNQ} Xdx + Ydy,$$

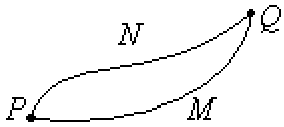


Рис. 33. Возможные пути интегрирования.

то

$$\int_{PNQMP} Xdx + Ydy = 0,$$

то есть независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования в области D эквивалентна тому, что криволинейный интеграл равен нулю по любому замкнутому контуру в области D.

Теорема. Пусть $X(x,y)$, $Y(x,y)$ – непрерывно дифференцируемые функции в области D. Тогда для того, чтобы криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру L в области D был равен нулю,

$$\int_{L} Xdx + Ydy = 0, \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы в каждой внутренней точке области D выполнялось равенство

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}. \tag{4}$$

Доказательство. 1. Достаточность следует из формулы Грина

$$\oint_{L} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

2. Докажем необходимость. Обозначим

$$f(x,y) = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Предположим, что в некоторой точке $P_0(x_0,y_0)$ функция $f(x_0,y_0) > 0$. В силу непрерывности функции $f(x,y)$ найдется достаточно малая окрестность D' точки $P_0(x_0,y_0)$, целиком содержащаяся в области D и в каждой точке которой $f(x,y) > 0$. Отсюда следует

$$\iint_{D'} f(x,y)dxdy > 0,$$

или

$$\iint_{D'} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy > 0,$$

а значит

$$\oint_{L'} X(x,y)dx + Y(x,y)dy > 0$$

(L' − граница окрестности D'). Мы указали замкнутый контур L', для которого нарушается условие (3). Противоречие. Необходимость доказана.

Замечание. Равенство

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$$

является условием полного дифференциала для выражения

$$X(x,y)dx + Y(x,y)dy = du.$$

Здесь $u(x,y)$ − некоторая функция, такая что

$$X = \frac{\partial u}{\partial x},\ \ Y = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Если рассмотреть вектор

$$\boldsymbol{F} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} = \boldsymbol{grad}\, u,$$

то $u(x,y)$ называют потенциалом или потенциальной функцией вектора $\boldsymbol{F}$. Для любого пути $L = PQ = \{x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \alpha \le t \le \beta\}$ имеем

$$\oint_L Xdx + Ydy = \int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) dt = \int_\alpha^\beta du(x,y)$$

$$= u\big(\varphi(\beta), \psi(\beta)\big) - u\big(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)\big),$$

то есть

$$\oint_{PQ} Xdx + Ydy = u(Q) - u(P).$$

Таким образом, для потенциального вектора $\boldsymbol{F} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j}$ криволинейный интеграл равен разности значений потенциальной функции в конечной и начальной точках пути интегрирования.

4.7. Поверхностные интегралы 1-го рода

Пусть σ − гладкая поверхность в области $V \subset R^3$, определяемая уравнением $z = f(x, y)$; $h = h(x, y, z)$ - функция, заданная на поверхности σ. Разобьем поверхность на элементарные участки $\Delta\sigma_i$ $(i = 1, 2, \dots, m)$. Выберем на каждом участке точку $P_i(x_i, y_i, z_i)$. Рассмотрим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{m} h(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i \ . \tag{1}$$

Определение. Поверхностным интегралом 1–го рода от функции $h(x, y, z)$ по поверхности σ называется предел интегральной суммы (1) при измельчении разбиения поверхности σ и обозначается

$$\iint_{\sigma} h(x, y, z)d\sigma = \lim_{\substack{m\to\infty \\ \Delta\sigma_i\to 0}} \sum_{i=1}^{m} h(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i.$$

Поверхностный интеграл 1–го рода сводится к двойному с помощью рассуждений, использованных при получении формулы площади поверхности:

$$\iint_{\sigma} h(x, y, z)d\sigma = \iint_{D_{xy}} h\big(x, y, f(x, y)\big)\sqrt{(f_x')^2 + \left(f_y'\right)^2 + 1}\ dxdy,$$

где D_{xy} – проекция поверхности σ на плоскость Oxy. Очевидно, этот интеграл обладает свойством линейности по отношению к подынтегральной функции, а также свойством аддитивности по отношению к поверхности σ, т.е. если поверхность σ разбивается на две части σ_1 и σ_2 , то

$$\iint_{\sigma} h(x, y, z)d\sigma = \iint_{\sigma_1} h(x, y, z)d\sigma + \iint_{\sigma_2} h(x, y, z)d\sigma.$$

4.8. Поверхностные интегралы 2-ого рода.

Выделим на поверхности $\sigma : z = f(x, y)$ две стороны: σ_+ - которая обращена в ту часть пространства, где $z \geq f(x, y)$, и σ_- - обращена туда, где $z \leq f(x, y)$.

<u>Определение</u>. Поверхностным интегралом 2–го рода от функции $h(x, y, z)$ по поверхности σ называется интеграл

$$\iint_{\sigma} h(x, y, z) dx \wedge dy = \pm \iint_{D_{xy}} h\big(x, y, f(x, y)\big)\ dxdy\,;$$

знак «+» перед интегралом выбирается, если интеграл вычисляется по стороне σ_+, знак «–» - если по стороне σ_-. Знак «$\wedge$» в выражении поверхностного интеграла указывает на его отличие от двойного интеграла и может опускаться, если это не приводит к недоразумению.

Очевидно, этот интеграл обладает теми же свойствами что и поверхностный интеграл 1–го рода. Если рассмотреть нормальный вектор $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha\,, \cos\beta\,, \cos\gamma)$ на стороне σ_+ поверхности σ:

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{(f'_x)^2 + \left(f'_y\right)^2 + 1}}\,,$$

то нетрудно установить связь между поверхностными интегралами 1–го и 2–го рода:

$$\iint_{\sigma} h(x, y, z) \cos\gamma\, d\sigma = \iint_{\sigma_+} h(x, y, z) dx \wedge dy.$$

Если уравнение поверхности σ переписать в виде $x = g(y, z)$; D_{yz} – проекция поверхности σ на плоскость Oyz;

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(g'_y\right)^2 + (g'_z)^2 + 1}}\,,$$

то можно сформировать интеграл

$$\iint_{\sigma_+} h(x, y, z) dy \wedge dz = \iint_{\sigma} h(x, y, z) \cos\alpha\, d\sigma = \iint_{D_{yz}} h(g(y, z), y, z)\ dydz.$$

Аналогично,

$$\iint_{\sigma_+} h(x,y,z)dz{\wedge}dx = \iint_{\sigma} h(x,y,z)\cos\beta\, d\sigma = \iint_{D_{zx}} h(x,q(x,z),z)\ \ dxdz.$$

Таким образом, можно определить поверхностные интегралы общего вида:

$$\iint_{\sigma_+} X(x,y,z)dy{\wedge}dz + Y(x,y,z)dz{\wedge}dx + Z(x,y,z)dx{\wedge}dy =$$

$$= \iint_{\sigma} [X(x,y,z)\cos\alpha + Y(x,y,z)\cos\beta + Z(x,y,z)\cos\gamma] d\sigma,$$

где $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$ - функции, заданные на поверхности σ. Если ввести вектор $\boldsymbol{F} = (X,\ Y,\ Z)$, то последнее равенство можно записать в виде

$$\iint_{\sigma} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \iint_{\sigma_+} X\, dy{\wedge}dz + Y\, dz{\wedge}dx + Z\, dx{\wedge}dy.$$

4.9. Формула Стокса

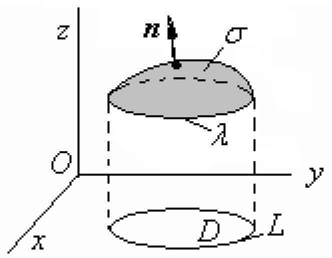


Рис. 33. К выводу формулы Стокса

Пусть σ − поверхность с краем, которая описывается уравнением $z = f(x,y)$ в области D (рис. 33); λ − граница поверхности σ; которая соответствует границе L области D; $\cos\gamma > 0$.

Тогда вектор единичной нормали имеет вид:

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha\,, \cos\beta\,, \cos\gamma),$$

где

$$\cos\alpha = -\frac{f'_x}{\sqrt{(f'_x)^2 + \left(f'_y\right)^2 + 1}},\ \ \cos\beta = -\frac{f'_y}{\sqrt{(f'_x)^2 + \left(f'_y\right)^2 + 1}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{(f_x')^2 + \left(f_y'\right)^2 + 1}}.$$

Пусть $\sigma \subset V$, где $V-$ трехмерная область, в которой задана непрерывно дифференцируемая функция $X(x,y,z)$. Рассмотрим криволинейный интеграл

$$\oint_\lambda X(x,y,z)dx = \oint_L X\big(x,y,f(x,y)\big)dx =$$

(используем формулу Грина с функциями $\tilde{X}(x,y) = X\big(x,y,f(x,y)\big)$, $\tilde{Y}(x,y) = 0$)

$$= -\iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy = -\iint_D \frac{\partial X}{\partial y}dxdy - \iint_D \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}dxdy =$$

$$= -\iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial y}\cos\gamma\, d\sigma - \iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\cos\gamma\, d\sigma =$$

$$= -\iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial y}\cos\gamma\, d\sigma + \iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial z}\cos\beta\, d\sigma.$$

Таким образом,

$$\oint_\lambda X(x,y,z)dx = -\iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial y}\cos\gamma\, d\sigma + \iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial z}\cos\beta\, d\sigma.$$

Аналогично,

$$\oint_\lambda Y(x,y,z)dx = -\iint_\sigma \frac{\partial Y}{\partial z}\cos\alpha\, d\sigma + \iint_\sigma \frac{\partial Y}{\partial x}\cos\gamma\, d\sigma,$$

$$\oint_\lambda Z(x,y,z)dx = -\iint_\sigma \frac{\partial Z}{\partial x}\cos\beta\, d\sigma + \iint_\sigma \frac{\partial Z}{\partial y}\cos\alpha\, d\sigma.$$

Складывая эти три равенства, получаем

$$\oint_\lambda Xdx + Ydy + Zdz$$

$$= \iint_\sigma \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\sigma$$

– формула Стокса. Она устанавливает связь между контурным и поверхностным интегралами.

В более удобной для запоминания форме:

$$\oint_{\lambda} Xdx + Ydy + Zdz = \iint_{\sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} d\sigma,$$

где подынтегральная функция в поверхностном интеграле записана в виде формального определителя 3-его порядка.

Замечание. Для плоской поверхности σ формула Стокса дает формулу Грина (если плоскость σ совмещена с плоскостью Oxy).

4.10. Формула Остроградского

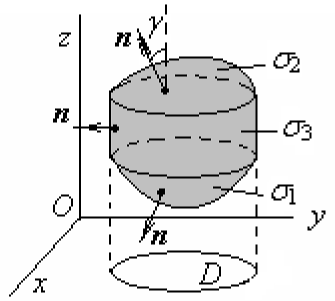


Рис. 34. К выводу формулы Остроградского.

Пусть V – трехмерная правильная область, проекция которой на плоскость Oxy есть D – правильная двумерная область; $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3$ – замкнутая поверхность, ограничивающая объем V, причем

$$\sigma_1 = \{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ z = f_1(x, y)\},$$

– нижняя часть поверхности σ,

$$\sigma_2 = \{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ z = f_2(x, y)\},$$

– верхняя часть поверхности σ, σ_3 – цилиндрическая часть поверхности.

Рассмотрим интеграл

$$\iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z}(x, y, z)\, dxdydz = \iint_D \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial Z}{\partial z}(x, y, z) dz \right) dxdy =$$

$$= \iint_D Z\big(x, y, f_2(x, y)\big) dxdy - \iint_D Z\big(x, y, f_1(x, y)\big) dxdy.$$

Заметим

$$\iint_D Z\big(x,y,f_2(x,y)\big)dxdy = \iint_{\sigma_2} Z(x,y,z)\cos\gamma\, d\sigma,$$

$$\iint_D Z\big(x,y,f_1(x,y)\big)dxdy = \iint_{\sigma_1} Z(x,y,z)\cos\gamma\, d\sigma.$$

Учитывая, что

$$\iint_{\sigma_3} Z(x,y,z)\cos\gamma\, d\sigma = 0,$$

так как на участке σ_3 выполняется $\cos\gamma = 0$ в силу $\boldsymbol{n} \perp Oz$, получаем

$$\iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z}(x,y,z)\, dxdydz = \oiint_\sigma Z(x,y,z)\cos\gamma\, d\sigma.$$

Аналогично

$$\iiint_V \frac{\partial X}{\partial x}\, dxdydz = \oiint_\sigma X\cos\alpha\, d\sigma\,, \quad \iiint_V \frac{\partial Y}{\partial y}\, dxdydz = \oiint_\sigma Y\cos\beta\, d\sigma.$$

Складывая последние три равенства, получаем

$$\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dxdydz = \oiint_\sigma (X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)d\sigma$$

− формула Остроградского. Она устанавливает связь между объемным и поверхностным интегралами.

5. Элементы теории поля

5.1. Скалярное поле.

Если в каждой точке области $U \subset R^3$ определена скалярная функция $u = u(x,y,z)$, то говорят, что в области U задано скалярное поле u. Градиентом скалярного поля $u = u(x,y,z)$ называют вектор

$$\boldsymbol{grad}\, u(x,y,z) = \big(u'_x,\, u'_y,\, u'_z\big).$$

Точки области U, в которых все частные производные u'_x, u'_y, u'_z одновременно обращаются в нуль или хотя бы одна из них не существует, называют особыми. Уравнение $u(x,y,z) = C$ определяет семейство поверхностей, называемых поверхностями уровня. Поверхности уровня обладают следующими свойствами:

1. В точках одной и той же поверхности уровня функция поля $u(x, y, z)$ принимает одинаковые значения (следует из определения).

2. Через каждую неособую точку скалярного поля $u = u(x, y, z)$ проходит единственная поверхность уровня (следует из однозначности функции поля).

3. В каждой неособой точке скалярного поля $u = u(x, y, z)$ градиент функции поля $\boldsymbol{grad}\, u(x, y, z)$ ортогонален поверхности уровня, проходящей через эту точку (как нормальный вектор касательной плоскости).

5.2. Векторное поле.

Векторным полем называют часть пространства $V \subset R^3$, в каждой точке которого определен вектор

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = X(x, y, z)\boldsymbol{i} + Y(x, y, z)\boldsymbol{j} + Z(x, y, z)\boldsymbol{k},$$

где $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ - непрерывно дифференцируемые функции. Векторной линией называют линию, в каждой точке которой вектор поля $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ является касательным. Предполагая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ в качестве уравнения векторной линии, из условия коллинеарности векторов $d\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ получаем дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{X(x, y, z)} = \frac{dy}{Y(x, y, z)} = \frac{dz}{Z(x, y, z)},$$

которые определяют семейство векторных линий. Решение таких уравнений рассматривается в курсе дифференциальных уравнений.

5.3. Ориентированная поверхность

Простой поверхностью σ в пространстве R^3 будем называть множество точек

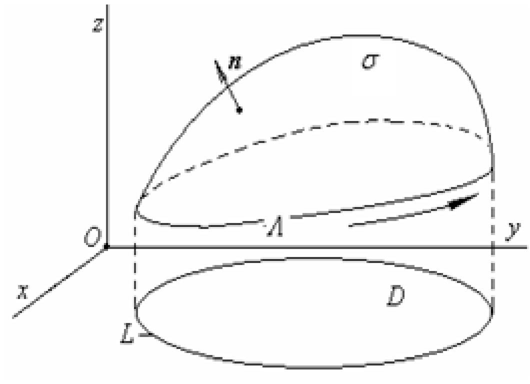


Рис. 35. Ориентированная поверхность.

(x, y, z), которое можно описать некоторой непрерывной функцией

$$z = f(x, y),\ (x, y) \in D \subset R^2;$$

при этом граница Λ поверхности σ является образом границы L области D и представляет собой кусочно-гладкую кривую. Поверхность σ называется гладкой, если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в каждой внутренней точке области D. Говорят, что на поверхности σ выделена сторона, если на ней выбран нормальный вектор

$$\boldsymbol{n} = \frac{\left(-f'_x, -f'_y,\ 1\right)}{\sqrt{(f'_x)^2 + \left(f'_y\right)^2 + 1}}$$

или $\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}$. Ориентация простой поверхности σ согласована с ориентацией границы Λ (рис. 35), если при обходе границы в соответствии с ее ориентацией по выделенной стороне поверхности сама поверхность остается все время слева.

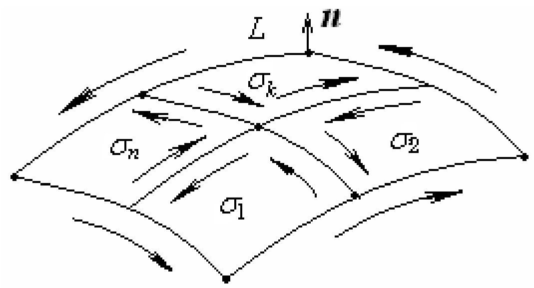


Рис. 36. Ориентированная кусочно-гладкая поверхность.

Кусочно-гладкой ориентированной поверхностью называется непрерывная поверхность, составленная из конечного числа простых поверхностей с согласованной ориентацией границ, причем общие участки границ любой пары соседних кусков имеют противоположную ориентацию (рис. 36). Поверхность называется замкнутой, если она ограничивает некоторый конечный объем. В этом случае определена внешняя (внутренняя) сторона поверхности с внешней (внутренней) нормалью.

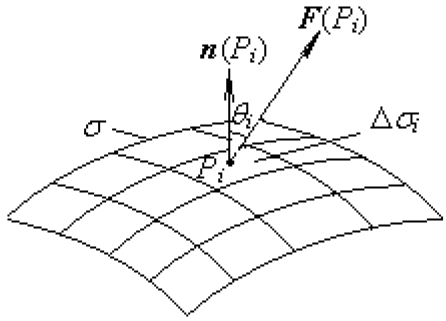


Рис. 37. К вычислению потока векторного поля.

5.4. Поток векторного поля через ориентированную поверхность.

Пусть

$$\boldsymbol{F} = X(x,y,z)\boldsymbol{i} + Y(x,y,z)\boldsymbol{j} + Z(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

– вектор, заданный на поверхности σ. Разобьем поверхность на элементарные участки $\Delta\sigma_i$**.** Выберем на каждом участке точку $P_i(x_i, y_i, z_i)$ и единичный нормальный вектор $\boldsymbol{n}(P_i)$.

Если $\boldsymbol{F}(P_i)$ – скорость жидкости, протекающей через поверхность σ в точке P_i , то $\boldsymbol{F}(P_i)\boldsymbol{n}(P_i)\Delta\sigma_i$ – объем жидкости, протекающей через участок $\Delta\sigma_i$ в единицу времени (рис. 37). Поэтому интеграл

$$\iint_\sigma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \lim_{\substack{m\to\infty \\ \Delta\sigma_i\to 0}} \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{F}(P_i)\boldsymbol{n}(P_i)\Delta\sigma_i$$

называют потоком вектора $\boldsymbol{F}$ через поверхность σ.

5.5. Дивергенция векторного поля

Рассмотрим фиксированную точку $P(x, y, z)$, окруженную замкнутой поверхностью σ. Дивергенцией, или расходимостью, векторного поля $\boldsymbol{F}$ в точке $P(x, y, z)$ называется величина

$$div\, \boldsymbol{F}(x, y, z) = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oiint_{\sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma,$$

где V – объем, ограниченный поверхностью σ, $\boldsymbol{n}$ – внешняя нормаль к поверхности σ.

В соответствии с формулой Остроградского, а также по теореме о среднем имеем

$$\oiint_{\sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \iiint_{V} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dxdydz = \left. \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right|_{(\xi, \eta, \zeta)} \cdot V,$$

где (ξ, η, ζ) - некоторая точка объема V. Учитывая, что $(\xi, \eta, \zeta) \underset{V \to 0}{\longrightarrow} (x, y, z)$, а также непрерывность частных производных, получаем

$$div\, \boldsymbol{F}(x, y, z) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Используя понятие дивергенции, формулу Остроградского можно записать в виде:

$$\oiint_{\sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \iiint_{V} div\, \boldsymbol{F}\, dV$$

5.6. Циркуляция и ротор векторного поля

Циркуляцией векторного поля $\boldsymbol{F}$ вдоль замкнутого контура λ называется криволинейный интеграл

$$\oint_{\lambda} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dr} = \oint_{\lambda} Xdx + Ydy + Zdz,$$

где λ - кусочно-гладкая ориентированная замкнутая кривая.

Ротором векторного поля $\boldsymbol{F}$ в точке $P(x, y, z)$ называется вектор

$$\boldsymbol{rotF}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\boldsymbol{k},$$

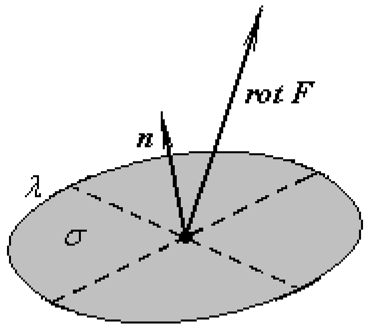


Рис. 38. Ротор векторного поля.

где для более легкого запоминания операции используется форма определителя 3-го порядка (рис. 38).

Используя понятия ротора и циркуляции, формулу Стокса можно записать в векторном виде:

$$\oint_{\lambda} \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{dr} = \iint_{\sigma} \boldsymbol{rot\, F}\cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \boldsymbol{rot\, F}\cdot \boldsymbol{n}|_{(\xi,\eta,\zeta)}\cdot \sigma,$$

где (ξ,η,ζ) - некоторая точка гладкой поверхности σ. Учитывая, что $(\xi,\eta,\zeta) \underset{\sigma\to 0}{\longrightarrow} (x,y,z)$, а также непрерывность частных производных, получаем

$$rot_n\boldsymbol{F}(x,y,z) = \lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\sigma}\oint_{\lambda}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{dr}.$$

Таким образом, ротор векторного поля в данной точке выражается через циркуляцию поля вдоль кривой, окружающей эту точку. В связи с этим ротор часто называют вихрем.

5.7. Потенциальное векторное поле

Если $\boldsymbol{rot\, F}(x,y,z) \equiv 0$, $(x,y,z) \in V \subset R^3$, то векторное поле $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ называют безвихревым. В этом случае

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial z},\quad \frac{\partial X}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial x},\quad \frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y},$$

что является условием существования полного дифференциала

$$du(x,y,z)=X(x,y,z)dx+Y(x,y,z)dy+Z(x,y,z)dz;$$

при этом

$$\frac{\partial u}{\partial x}=X(x,y,z),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Y(x,y,z),\quad \frac{\partial u}{\partial z}=Z(x,y,z).$$

Для определения функции $u(x,y,z)$ используем независимость криволинейного интеграла

$$\int_L X(x,y,z)dx+Y(x,y,z)dy+Z(x,y,z)dz$$

от пути интегрирования. В качестве наиболее простого пути L выберем ломаную *ABCD* (рис.39), состоящую из прямолинейных звеньев, параллельных координатным осям и соединяющую некоторую точку $A(x_0,y_0,z_0)\in V$ с произвольной точкой $D(x,y,z)\in V$ (промежуточные точки $B(x,y_0,z_0)$ и $C(x,y,z_0)$):

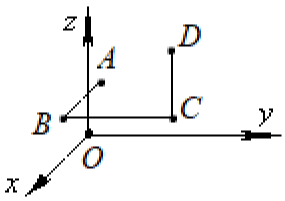


Рис. 29. Путь интегрирования L=*ABCD* для функции $u(x,y,z)$.

$$u(x,y,z)=u(x_0,y_0,z_0)+\int_L du(x,y,z)=$$

$$=u(x_0,y_0,z_0)+\int_L X(x,y,z)dx+Y(x,y,z)dy+Z(x,y,z)dz=$$

$$=u(x_0,y_0,z_0)+\int_{x_0}^{x} X(t,y_0,z_0)dt+\int_{y_0}^{y} Y(x,t,z_0)dt+\int\limits_{z_0}^{z} Z(x,y,t)dt.$$

Функцию $u(x,y,z)$ называют потенциалом векторного поля $\boldsymbol{F}(x,y,z)$, а само поле – потенциальным. Таким образом, безвихревое поле является потенциальным.

5.8. Оператор Гамильтона

Определение. Оператором Гамильтона (оператором «набла») называют выражение

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

– формальный вектор, компонентами которого являются операторы частных производных по координатам. Действие оператора Гамильтона ассоциируется с векторными операциями и выражается следующим образом:

а) если $u = u(x, y, z)$ − скалярная функция, то

$$\nabla u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \boldsymbol{grad}\, u;$$

б) если

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x, y, z) = X(x, y, z)\boldsymbol{i} + Y(x, y, z)\boldsymbol{j} + Z(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

− векторная функция, то

$$\nabla \boldsymbol{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = div\boldsymbol{F},\ \ \nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \boldsymbol{rotF}.$$

С помощью оператора Гамильтона достаточно просто выражаются некоторые важные тождества, например:

а) $\boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{grad}\, u \equiv 0$; б) $div\,\boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{F} \equiv 0$.

Действительно, в случае а) имеем

$$\nabla \times (\nabla u) = (\nabla \times \nabla)u \equiv 0$$

как векторное произведение одинаковых векторов; в случае б)

$$\nabla(\nabla \times \boldsymbol{F}) \equiv 0$$

как смешанное произведение компланарных векторов. Конечно, правомерность такого представления оператора «набла» проверяется непосредственным вычислением.

Замечание. Имеет место обозначение

$$div(\boldsymbol{grad}\, u) = \nabla(\nabla u) = \nabla^2 u = \Delta u,$$

где Δ − оператор Лапласа, известный в теории упругости, в уравнениях математической физики:

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

и

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

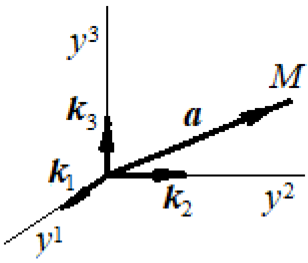
6. Элементы тензорного анализа

6.1. Криволинейная система координат. Ковариантные и контравариантные координаты вектора.

Пусть имеется прямоугольная система координат в $\boldsymbol{R}^3$. Обозначим $\boldsymbol{k}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ – единичные орты в направлении координатных прямых y^α (рис.1). Орты $\boldsymbol{k}_\alpha$ образуют базис, причем

$$\boldsymbol{k}_\alpha \cdot \boldsymbol{k}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \tag{1}$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера.



Радиус-вектор $\boldsymbol{a}$ любой точки $M \in \boldsymbol{R}^3$ имеет вид:

$$\boldsymbol{a} = a^1\boldsymbol{k}_1 + a^2\boldsymbol{k}_2 + a^3\boldsymbol{k}_3, \tag{2}$$

где $a^\alpha = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{k}_\alpha$ – прямоугольные координаты. Если оси координат y^α не являются взаимно ортогональными, то вектор $\boldsymbol{a}$ можно задать двумя способами: представить в виде (2) числами a^α или с помощью проекций $\boldsymbol{a}$ на оси косоугольной системы.

Пусть векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ (вообще говоря, различной длины) направлены по y^1, y^2, y^3. Тогда

$$\boldsymbol{a} = a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 + a^3\boldsymbol{e}_3. \tag{3}$$

Числа a^α называются контравариантными координатами вектора $\boldsymbol{a}$. Рассмотрим скалярные произведения $a_\alpha = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_\alpha$. Они представляют собой ортогональные проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на оси y^α (с коэффициентами $H_\alpha = |\boldsymbol{e}_\alpha|$) и называются ковариантными координатами вектора $\boldsymbol{a}$.

Далее будем использовать для краткости общепринятую условную запись суммирования:

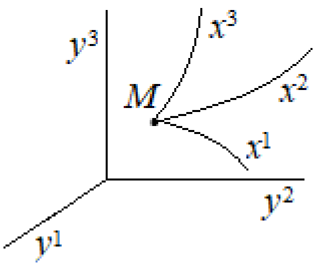
$$a_\alpha y^\alpha = a_1 y^1 + a_2 y^2 + a_3 y^3 \equiv a_\beta y^\beta \ \ (\alpha, \beta \text{ – немой индекс}),$$

то есть, если в выражении встречается произведение сомножителей или многоиндексный объект, имеющие в своей записи одинаковые верхний и нижний индексы, то подразумевается суммирование по всем возможным значениям этих индексов (при этом знак суммы опускается).

Таким образом,

$$\boldsymbol{a} = a^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha,\ a_\alpha = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_\alpha. \tag{4}$$

Рассмотрим криволинейную систему координат x^α $(\alpha = 1, 2, 3)$ и зададим радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки M в виде



$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x^\alpha), \tag{5}$$

или

$$y^\beta = y^\beta(x^\alpha) \ \ (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \tag{6}$$

Предполагается, что функция $\boldsymbol{r}(x^\alpha)$ дифференцируема по x^α. Векторы

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^\alpha} \ \ (\alpha = 1, 2, 3)$$

являются касательными к линиям x^α. Значит, в каждой точке M пространства $\boldsymbol{R}^3$ тройку векторов

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^\alpha} \ \ (\alpha = 1, 2, 3)$$

можно принять за векторы базиса, если они не компланарны:

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^1}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^2}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^3}\right) = \frac{D(y^1, y^2, y^3)}{D(x^1, x^2, x^3)} = J \neq 0. \tag{7}$$

По теореме о неявных функциях существует обратное отображение:

$$x^\alpha = x^\alpha\left(y^\beta\right), \tag{8}$$

так что матрицы

$$\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}\right) \ \text{ и } \ \left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha}\right)$$

взаимно обратные и

$$det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}\right) = 1/J \neq 0.$$

Введем обозначения

$$\boldsymbol{e}_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^\alpha}\,. \tag{9}$$

Тогда векторы $\boldsymbol{e}_\alpha$ образуют базис, связанный с криволинейной системой координат, – он называется локальным. Если $\boldsymbol{k}_\alpha$ – тройка единичных векторов, то

$$\boldsymbol{e}_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha}\boldsymbol{k}_\beta,\;\; \boldsymbol{k}_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\alpha}\boldsymbol{e}_\beta. \tag{10}$$

Таким образом, в каждой точке вектор $\boldsymbol{a}(x^1, x^2, x^3)$ может быть представлен в локальном базисе $\boldsymbol{e}_\alpha$

$$\boldsymbol{a} = a^\alpha \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^\alpha} = a^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha, \tag{11}$$

где a^α– контравариантные компоненты.

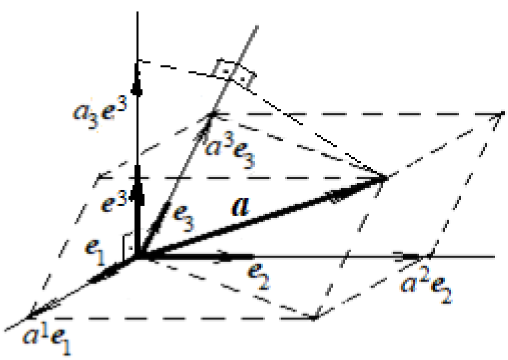
Ковариантные компоненты вектора $\boldsymbol{a}$ даются формулами:

$$a_\beta = \boldsymbol{a}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^\beta} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_\beta = a^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta. \tag{12}$$

Это следует из (4). Введем матрицу

$$\boldsymbol{g}_* = (g_{\alpha\beta}) = (\boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta). \tag{13}$$

Она является симметричной и носит название фундаментальной матрицы. Ее определитель



$$g = det(g_{\alpha\beta}) \neq 0.$$

Поэтому существует обратная матрица $(g^{\alpha\beta})$:

$$g_{\alpha\gamma}\cdot g^{\gamma\beta}$$

где $\delta_\alpha^{\ \beta}$ – символ Кронекера (единичная матрица). При этом

$$g_1 = det\left(g^{\alpha\beta}\right) = \frac{1}{g}, \tag{15}$$

$$a_\beta = \boldsymbol{a} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^\beta} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_\beta = a^\alpha g_{\alpha\beta}. \tag{16}$$

Умножая обе части последнего равенства на $g^{\beta\gamma}$, получаем

$$a^\gamma = a_\beta g^{\beta\gamma}. \tag{17}$$

(16) и (17) определяют связь между ковариантными и контравариантными компонентами вектора $\boldsymbol{a}$.

Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ можно записать в виде:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a^\alpha b^\beta g_{\alpha\beta} = a^\alpha b_\alpha = g^{\beta\alpha} a_\beta b_\alpha = a_\beta b^\beta. \tag{18}$$

Возьмем тройку векторов $\boldsymbol{e}^\beta$, образованных по правилу

$$\boldsymbol{e}^\beta = g^{\beta\alpha} \boldsymbol{e}_\alpha. \tag{19}$$

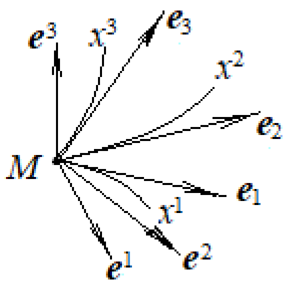
Отсюда

$$\boldsymbol{e}^\beta \cdot \boldsymbol{e}_\gamma = g^{\beta\alpha} \boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\gamma = g^{\beta\alpha} g_{\alpha\gamma} = \delta^\beta_{\ \gamma}, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{e}^\beta \cdot \boldsymbol{e}^\gamma = g^{\beta\alpha} \boldsymbol{e}_\alpha \cdot g^{\gamma\omega} \boldsymbol{e}_\omega = \delta^\beta_{\ \omega} g^{\gamma\omega} = g^{\beta\gamma}.$$

Например, $\boldsymbol{e}^1 \perp \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, но $\boldsymbol{e}^1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 1$. Формулы (20) называют соотношениями взаимности. Ясно, что векторы $\boldsymbol{e}^\beta$ не компланарны. Действительно, смешанное произведение

$$(\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3) = (\nabla x^1, \nabla x^2, \nabla x^3) = \frac{1}{J} \neq 0. \tag{21}$$



Здесь

$$\nabla x^\alpha = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^1}, \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^2}, \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^3}\right).$$

Систему векторов $\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3$ называют базисом, взаимным (или сопряженным) с базисом $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

Справедлива формула

$$\boldsymbol{e}_\alpha = g_{\alpha\beta} \boldsymbol{e}^\beta. \tag{22}$$

Для любого вектора $\boldsymbol{a}$ из (17) и (19) получаем

$$\boldsymbol{a} = a^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha = a_\beta g^{\beta\alpha} \boldsymbol{e}_\alpha = a_\beta \boldsymbol{e}^\beta. \tag{23}$$

Умножая скалярно (23) на $\boldsymbol{e}^{\gamma}$, получим

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}^{\gamma} = a_{\beta} \boldsymbol{e}^{\beta} \cdot \boldsymbol{e}^{\gamma} = a_{\beta} g^{\beta\gamma} = a^{\gamma}. \tag{24}$$

Поэтому любой вектор $\boldsymbol{a}$ может быть разложен как по базису $\boldsymbol{e}_{\alpha}$ (в этом случае компоненты являются контравариантными), так и по базису $\boldsymbol{e}^{\alpha}$ с ковариантными компонентами. При этом

$$a_{\alpha} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_{\alpha}, \;\; a^{\alpha} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}^{\alpha}. \tag{25}$$

Соотношения (16), (17) показывают, что с помощью матриц $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ можно опускать и поднимать индексы у компонент вектора – операция жонглирования индексами.

Для прямоугольной системы

$$\boldsymbol{e}_{\alpha} = \boldsymbol{e}^{\alpha} = \boldsymbol{k}_{\alpha}, \qquad g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha}^{\;\beta}. \tag{26}$$

Модули векторов базисов:

$$|\boldsymbol{e}_{\alpha}| = \sqrt{\boldsymbol{e}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{e}_{\alpha}} = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}, \;\; |\boldsymbol{e}^{\alpha}| = \sqrt{g^{\alpha\alpha}}. \tag{27}$$

Пусть имеются две точки пространства M и M' с координатами x^{α} и $x^{\alpha} + dx^{\alpha}$ соответственно. Тогда малый вектор $\overleftarrow{MM'} = d\boldsymbol{r}$ – вектор элементарного перемещения, $ds = |d\boldsymbol{r}|$ – его длина.

Имеем

$$d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{\alpha}} dx^{\alpha} = \boldsymbol{e}_{\alpha} dx^{\alpha}$$

- разложение по ковариантному базису, dx^{α} – контравариантные компоненты вектора $d\boldsymbol{r}$. Ясно, что

$$d\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{r}_1 + \; d\boldsymbol{r}_2 + d\boldsymbol{r}_3, \tag{30}$$

где $\mathrm{dr}_{\alpha} = \mathrm{e}_{\alpha} \mathrm{dx}^{\alpha}$– векторы элементарных перемещений вдоль координатных линий x^{α}. Далее

$$ds^2 = d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$$

- основная квадратичная форма. Можно представить

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}^{\beta} \delta x_{\beta},$$

где δx_β называют ковариантными компонентами вектора dr; они, вообще говоря, не являются дифференциалами некоторой системы координат x_β:

$$ds^2 = d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = g^{\alpha\beta}\delta x_\alpha \delta x_\beta. \tag{33}$$

Установим связь между различными компонентами вектора $d\boldsymbol{r}$. Имеем

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_\alpha dx^\alpha = \boldsymbol{e}^\beta \delta x_\beta,\ \ \boldsymbol{e}^\beta = g^{\beta\alpha}\boldsymbol{e}_\alpha.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{e}_\alpha\left(dx^\alpha - \delta x_\beta g^{\beta\alpha}\right) = 0.$$

В силу независимости $\boldsymbol{e}_\alpha$ получаем

$$dx^\alpha = \delta x_\beta g^{\beta\alpha}.$$

Обратные зависимости:

$$\delta x_\beta = g_{\alpha\beta} dx^\alpha.$$

Отсюда следует, что ковариантные компоненты δx_β нельзя рассматривать как полные дифференциалы соответствующих функций $x_\beta = x_\beta(x^\alpha)$, поскольку условия интегрируемости

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} \tag{36}$$

не выполняются в общем случае. Значит, для произвольной криволинейной системы координат невозможно определить ковариантные координаты x_β как однозначные функции от x^α.

Система x^α называется ортогональной, если в каждой точке пространства координатные линии взаимно ортогональны, т.е.

$$g_{\alpha\beta} = \boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta = 0,\ \ \alpha \neq \beta\,. \tag{37}$$

В такой системе координат

$$g^{\alpha\beta} = \boldsymbol{e}^\alpha \cdot \boldsymbol{e}^\beta = 0,\ \ \alpha \neq \beta\,,\ \ g^{\alpha\alpha} = \frac{1}{g_{\alpha\alpha}}, \tag{38}$$

и координатные поверхности также ортогональны. Тогда выполняется

$$\boldsymbol{e}_\alpha = g_{\alpha\alpha}\boldsymbol{e}^\alpha,\ \ \boldsymbol{e}^\alpha = g^{\alpha\alpha}\boldsymbol{e}_\alpha, \tag{39}$$

(здесь нет суммирования), т.е. соответствующие элементы разных базисов параллельны друг другу и их модули взаимно обратные,

$$|\boldsymbol{e}_\alpha| = \frac{1}{|\boldsymbol{e}^\alpha|}. \tag{40}$$

Координаты точек M пространства, координатные линии, векторные базисы и связанные с ними величины зависят от выбора системы координат. Посмотрим, как преобразуются эти величины при переходе к другой системе координат. Для этого возьмем две системы координат – K и $\widehat{K}$. Пусть в системе K координатами являются x^α, а в $\widehat{K}$ – ξ^σ $(\alpha, \sigma = 1, 2, 3)$ и переход задается системой функций

$$\xi^\sigma = \xi^\sigma(x^1, x^2, x^3), \tag{41}$$

причем

$$\left|\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\alpha}\right| = J \neq 0. \tag{42}$$

Тогда существует обратное преобразование

$$x^\alpha = x^\alpha\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right), \tag{43}$$

и справедливо соотношение

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \cdot \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}, \quad \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\tau} = \delta^{\sigma}{}_{\tau}\ . \tag{44}$$

Посмотрим, как преобразуются базисы $\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}^\alpha$ системы K и $\hat{\boldsymbol{e}}_\sigma, \hat{\boldsymbol{e}}^\sigma$ системы $\widehat{K}$. По определению

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\sigma = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^\sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\sigma} = \boldsymbol{e}_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\sigma}, \qquad \widehat{\boldsymbol{e}}^\tau = \nabla \xi^\tau = \frac{\partial \xi^\tau}{\partial x^\beta}\nabla x^\beta = \frac{\partial \xi^\tau}{\partial x^\beta}\boldsymbol{e}^\beta. \tag{45}$$

Обратные зависимости:

$$\boldsymbol{e}_\alpha = \hat{\boldsymbol{e}}_\sigma \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\alpha}, \quad \boldsymbol{e}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\tau}\,\widehat{\boldsymbol{e}}^\tau. \tag{46}$$

Формулы (45), (46) называют ковариантным и контравариантным законами преобразования базисов.

Отсюда для коэффициентов основной квадратичной формы:

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = \hat{\boldsymbol{e}}_\alpha \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\beta = \boldsymbol{e}_\sigma \cdot \boldsymbol{e}_\tau \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial x^\tau}{\partial \xi^{\beta}} = g_{\sigma\tau}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial x^\tau}{\partial \xi^{\beta}}, \tag{47}$$

$$\widehat{g}^{\alpha\beta} = g^{\sigma\tau}\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial x^{\tau}}. \tag{48}$$

Обратные зависимости имеют вид:

$$g_{\alpha\beta} = \hat{g}_{\sigma\tau}\frac{\partial\xi^{\sigma}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\xi^{\tau}}{\partial x^{\beta}}, \qquad g^{\alpha\beta} = \hat{g}^{\sigma\tau}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial\xi^{\sigma}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial\xi^{\tau}}. \tag{49}$$

Для определителей получим:

$$\hat{g} = g\cdot J^{-2},\ \hat{g}_1 = g_1\cdot J^{2},\ J = \left|\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}}\right|. \tag{50}$$

Закон преобразования компонент элементарного перемещения $d\boldsymbol{r}$:

$$d\boldsymbol{r} = dx^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha} = d\xi^{\tau}\hat{\boldsymbol{e}}_{\tau},\ d\boldsymbol{r} = \delta x_{\beta}\boldsymbol{e}^{\beta} = \delta\xi_{\sigma}\,\widehat{\boldsymbol{e}}^{\sigma}.$$

Отсюда

$$\left(d\xi^{\sigma} - dx^{\alpha}\frac{\partial\xi^{\sigma}}{\partial x^{\alpha}}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_{\sigma} = 0,\ \left(\delta\xi_{\sigma} - \delta x_{\beta}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial\xi^{\sigma}}\right)\widehat{\boldsymbol{e}}^{\sigma} = 0.$$

и в силу независимости систем $\hat{\boldsymbol{e}}_{\sigma}, \hat{\boldsymbol{e}}^{\sigma}$:

$$d\xi^{\sigma} = dx^{\alpha}\frac{\partial\xi^{\sigma}}{\partial x^{\alpha}},\ \delta\xi_{\sigma} = \delta x_{\beta}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial\xi^{\sigma}}. \tag{51}$$

Для обратных зависимостей:

$$dx^{\alpha} = d\xi^{\sigma}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial\xi^{\sigma}},\ \delta x_{\beta} = \delta\xi_{\sigma}\frac{\partial\xi^{\sigma}}{\partial x^{\beta}}. \tag{52}$$

Значит, ковариантные компоненты вектора $d\boldsymbol{r}$ преобразуются по ковариантному закону, контравариантные – по контравариантному.

Вопросы по теоретическому материалу

1. Как образуется базис в пространстве $\boldsymbol{R}^n$?
2. Что представляют собой символы Кронекера $\delta_{\alpha\beta}$, $\delta^{\alpha\beta}$, $\delta_{\alpha}^{\ \beta}$, $\delta^{\alpha}_{\ \beta}$?
3. Как образуются контравариантные координаты (компоненты) вектора?
4. Как образуются ковариантные координаты (компоненты) вектора?
5. В чем состоит правило краткой записи суммирования?
6. Какую систему координат называют криволинейной?
7. Как формируется базис криволинейной системы координат?
8. Как формируется фундаментальная матрица $\left(g_{\alpha\beta}\right)$ криволинейной системы координат?

9. Как связаны ковариантные и контравариантные компоненты вектора?

10. Как образуется взаимный (или сопряженный) базис?

11. В чем заключается операция жонглирования индексами?

12. Как выражается вектор $d\boldsymbol{r}$ элементарного перемещения в основном $\boldsymbol{e}_\alpha$ и сопряженном $\boldsymbol{e}^\beta$ базисах?

13. Какой вид приобретает фундаментальная матрица $(g_{\alpha\beta})$ в ортогональной системе координат?

14. Как преобразуются базисные векторы $\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}^\alpha$ при переходе к другой системе координат? Как формулируются ковариантный и контрвариантный законы преобразования базисов?

15. Как преобразуются коэффициенты основной квадратичной формы при переходе к другой системе координат?

16. Как преобразуются компоненты вектора $d\boldsymbol{r}$ элементарного перемещения при переходе к другой системе координат?

6.2. Тензоры и алгебраические операции над ними

Скаляром называется величина, не зависящая от выбора системы координат и задаваемая в фиксированной координатной системе одним числом. Пусть в системе координат *K* скаляр определен числом $f = f(x^\alpha)$, а в системе $\widehat{K}$ - числом $\hat{f} = \hat{f}\left(\xi^\sigma\right)$, причем $x^\alpha = x^\alpha\left(\xi^\sigma\right)$ тогда, согласно определению, $f(x^\alpha) = f\left(x^\alpha\left(\xi^\sigma\right)\right) = \hat{f}\left(\xi^\sigma\right)$. Скалярами могут быть величины различной природы. Например, расстояние между точками пространства есть геометрический скаляр, а давление, плотность, температура и концентрация – физические скаляры.

Далее в качестве объектов будем рассматривать элементы координатных базисов $\boldsymbol{e}_\alpha$ и $\boldsymbol{e}^\beta$ системы *K*, для которых выполняются следующие операции:

1) умножение на скаляр для любых $\boldsymbol{e}_\alpha$ и $\boldsymbol{e}^\beta$, т.е. для некоторого скаляра q и объекта $\boldsymbol{e}_\alpha$ символ $q\boldsymbol{e}_\alpha$ означает вектор, направленный при $q > 0$ в туже сторону, что и $\boldsymbol{e}_\alpha$ (в противоположную, если $q < 0$) и имеющий модуль $|q||\boldsymbol{e}_\alpha|$;

2) сложение определено для любой пары объектов $\boldsymbol{e}_\alpha + \boldsymbol{e}_\beta$, $\boldsymbol{e}^\alpha + \boldsymbol{e}^\beta$, $\boldsymbol{e}_\alpha + \boldsymbol{e}^\beta$ и т.д. Операция сложения коммутативна и подчиняется дистрибутивному закону

$$q(\boldsymbol{e}_\alpha + \boldsymbol{e}_\beta) = q(\boldsymbol{e}_\beta + \boldsymbol{e}_\alpha) = q\boldsymbol{e}_\alpha + q\boldsymbol{e}_\beta = q\boldsymbol{e}_\beta + q\boldsymbol{e}_\alpha;$$

3) для любой пары объектов определено скалярное умножение

$$\boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta = g_{\alpha\beta},\ \boldsymbol{e}^\alpha \cdot \boldsymbol{e}^\beta = g^{\alpha\beta},\ \boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}^\beta = \delta_\alpha^\beta,\ \ \boldsymbol{e}^\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta = \delta^\alpha_\beta.$$

Операция коммутативна и

$$q(\boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta) = (q\boldsymbol{e}_\alpha) \cdot \boldsymbol{e}_\beta = \boldsymbol{e}_\alpha \cdot (q\boldsymbol{e}_\beta)$$

для любого скаляра q;

4) для произвольных двух объектов определено векторное произведение, являющееся вектором, который можно разложить по одному из координатных базисов системы K,

$$\boldsymbol{e}_\alpha \times \boldsymbol{e}_\beta = e_{\alpha\beta\gamma}\, \boldsymbol{e}^\gamma,\ \ \boldsymbol{e}^\alpha \times \boldsymbol{e}^\beta = e^{\alpha\beta\sigma}\boldsymbol{e}_\sigma,\ \boldsymbol{e}_\alpha \times \boldsymbol{e}^\beta = e_{\alpha\ \tau}^{\ \beta}\, \boldsymbol{e}^\tau = e_\alpha^{\ \beta\sigma}\boldsymbol{e}_\sigma.$$

Операция не коммутативна, $\boldsymbol{e}_\alpha \times \boldsymbol{e}_\beta \neq \boldsymbol{e}_\beta \times \boldsymbol{e}_\alpha$, однако, скалярный множитель можно отнести к любому сомножителю;

5) индефинитное умножение. В результате применения этой операции к двум или нескольким объектам получается новый, более сложный объект, называемый полиадой, именно

$$\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta,\ \ \boldsymbol{e}^\alpha\boldsymbol{e}^\beta,\ \boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}^\beta,\ \ \boldsymbol{e}^\alpha\boldsymbol{e}_\beta,\ \boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta\ \boldsymbol{e}^\gamma,\ \boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}^\beta\boldsymbol{e}_\gamma\boldsymbol{e}^\sigma$$

и т.п. Полиада, полученная перемножением двух объектов, называется диадой, трех элементов – триадой и т.д. Операция не коммутативна, $\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta \neq \boldsymbol{e}_\beta\boldsymbol{e}_\alpha$. Две полиады считаются равными тогда и только тогда, когда они получены перемножением одних и тех же объектов в одной и той же последовательности. Количество объектов в полиаде, совпадающее с числом индексов, называется ее рангом. Разные полиады одинакового ранга и определенной структуры, например, $\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}^\beta\boldsymbol{e}^\gamma$ $(\alpha,\ \beta,\ \gamma = 1,\ 2,\ 3)$ считаются линейно независимыми. Полиаду можно умножать на скалярный множитель и относить его к любому сомножителю.

Между полиадами первого ранга – элементами координатного базиса – имеются связи вида $\boldsymbol{e}^\alpha = g^{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_\beta$, $\boldsymbol{e}_\sigma = g_{\sigma\tau}\boldsymbol{e}^\tau$. Аналогичные связи есть и между полиадами разных типов, но одинакового ранга. Действительно,

$$\boldsymbol{e}^\alpha\boldsymbol{e}_\beta = g^{\alpha\sigma}\boldsymbol{e}_\sigma\boldsymbol{e}_\beta, \qquad \boldsymbol{e}^\alpha\boldsymbol{e}^\beta = g^{\alpha\sigma}\boldsymbol{e}_\sigma\boldsymbol{e}^\beta, \quad \boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta = \boldsymbol{e}^\sigma\boldsymbol{e}^\tau g_{\sigma\alpha}g_{\tau\beta}$$

и т.д. Сложение определено для полиад только равных рангов: при скалярном (векторном) умножении полиад скалярно (векторно) перемножаются соседние элементы этих полиад,

$$(\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta)\cdot(\boldsymbol{e}_\gamma\boldsymbol{e}_\sigma) = \boldsymbol{e}_\alpha(\boldsymbol{e}_\beta\cdot\boldsymbol{e}_\gamma)\boldsymbol{e}_\sigma = \boldsymbol{g}_{\beta\gamma}\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\sigma,\ (\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta)\times(\boldsymbol{e}_\gamma\boldsymbol{e}_\delta) =$$
$$= \boldsymbol{e}_\alpha(\boldsymbol{e}_\beta\times\boldsymbol{e}_\gamma)\boldsymbol{e}_\delta = e_{\beta\gamma\sigma}\boldsymbol{e}_\alpha\,\boldsymbol{e}^\sigma\boldsymbol{e}_\delta.$$

При индефинитном перемножении полиад получится новая полиада, ранг которой равен сумме рангов старых полиад, например,

$$(\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta)(\boldsymbol{e}_\gamma\boldsymbol{e}_\sigma) = \boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta\boldsymbol{e}_\gamma\boldsymbol{e}_\sigma$$

– полиада четвертого ранга.

Другой инвариантной величиной является вектор. Вектором называют объект, не зависящий от выбора системы координат и представимый в фиксированной системе x^α в виде линейной формы

$$\boldsymbol{a} = a^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha = a_\beta\boldsymbol{e}^\beta,$$

где a^α, a_β – контравариантные и ковариантные компоненты вектора. Примеры векторов: скорость, ускорение, сила, напряженность электрического поля. Для задания вектора в некоторой системе координат достаточно задать три его компоненты определенного типа. При переходе к другой системе координат $\widehat{K}$ компоненты вектора изменяются. Действительно, пусть $\hat{a}_\sigma$ и $\hat{a}^\tau$– компоненты вектора в новой системе координат ξ^σ. Тогда

$$\hat{a}_\sigma = \boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_\sigma = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_\gamma\frac{\partial x^\gamma}{\partial\xi^\sigma},\ \hat{a}^\tau = \boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}^\tau = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}^\gamma\frac{\partial\xi^\tau}{\partial x^\gamma},$$

или

$$\hat{a}_\sigma = a_\gamma\frac{\partial x^\gamma}{\partial\xi^\sigma},\ \hat{a}^\tau = a^\gamma\frac{\partial\xi^\tau}{\partial x^\gamma}. \tag{2}$$

Обратные зависимости имеют вид:

$$a_\gamma = \hat{a}_\sigma \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\gamma}, \; a^\gamma = \hat{a}^\tau \frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^\tau}\,. \tag{3}$$

Значит, ковариантные и контравариантные компоненты вектора преобразуются по одноименным законам. Это свойство вектора является характеристическим и полагается в основу другого его определения.

Вектором $\boldsymbol{a}$ называется объект, определенный в фиксированной системе координат тремя числами – компонентами a^α (или a_β), которые при переходе к новой системе координат в том же пространстве преобразуются по формулам (2).

Введем нормированный ковариантный и контравариантный базисы:

$$\boldsymbol{e}_\alpha^1 = (g_{\alpha\alpha})^{-1/2}\boldsymbol{e}_\alpha\,, \; \boldsymbol{e}_1^\alpha = (g^{\alpha\alpha})^{-1/2}\,\boldsymbol{e}^\alpha. \tag{4}$$

и рассмотрим разложение вектора по этим базисам

$$\boldsymbol{a} = a_*^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha^1 = a_\beta^* \boldsymbol{e}_1^\beta. \tag{5}$$

Величины a_*^α и a_β^* называются физическими компонентами соответственно первого и второго типа. Между ними имеется тесная связь. В самом деле,

$$\boldsymbol{a} = a^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha = a^\alpha \sqrt{g_{\alpha\alpha}}\,\boldsymbol{e}_\alpha^1 = a_\beta \boldsymbol{e}^\beta = a_\beta \sqrt{g^{\beta\beta}}\,\boldsymbol{e}_1^\beta.$$

Сравнивая последние соотношения с (5), найдем

$$a_*^\alpha = a^\alpha \sqrt{g_{\alpha\alpha}}, \; a_\beta^* = a_\beta \sqrt{g^{\beta\beta}}. \tag{6}$$

В ортогональной системе координат разного типа физические компоненты совпадают: $a_*^\alpha = a_\alpha^*$. Из компонент вектора можно образовать одну инвариантную величину, называемую модулем вектора и обозначаемую просто a (иногда $|\boldsymbol{a}|$). Для квадрата модуля

$$a^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = g^{\alpha\beta}a_\alpha a_\beta = g_{\sigma\tau}a^\sigma a^\tau = a^\omega a_\omega. \tag{7}$$

Ранее величины $|\boldsymbol{e}_\alpha|$, $\left|\boldsymbol{e}^\beta\right|$ были названы параметрами Ламэ, обозначим их соответственно H_α и H^β:

$$H_\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}, \; H^\beta = \sqrt{g^{\beta\beta}}. \tag{8}$$

Отсюда

$$a^2 = \sum_{\alpha,\beta} \frac{g^{\alpha\beta}}{H^\alpha H^\beta} a^*_\alpha a^*_\beta = \sum_{\sigma,\tau} \frac{g_{\sigma\tau}}{H_\sigma H_\tau} a^\sigma_* a^\tau_* = \sum_\omega \frac{1}{H_\omega H^\omega} a^\omega_* a^*_\omega. \qquad (9)$$

В частности, для ортогональной системы координат получим:

$$a^2 = \sum_\alpha (a^*_\alpha)^2 = \sum_\sigma (a^\sigma_*)^2 = a^\omega_* a^*_\omega. \qquad (10)$$

Тензором ранга *n* называется объект $\boldsymbol{T}$, не зависящий от выбора системы координат и представимый в фиксированной координатной системе в виде линейной формы полиад ранга *n* определенной структуры:

$$\boldsymbol{T} = T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\boldsymbol{e}_{\alpha_1}\boldsymbol{e}_{\alpha_2}\ldots\boldsymbol{e}_{\alpha_n} = T_{\alpha_1}{}^{\alpha_2\ldots\alpha_n}\boldsymbol{e}^{\alpha_1}\boldsymbol{e}_{\alpha_2}\ldots\boldsymbol{e}_{\alpha_n} =$$
$$= T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\boldsymbol{e}^{\alpha_1}\boldsymbol{e}^{\alpha_2}\ldots\boldsymbol{e}^{\alpha_n}. \qquad (11)$$

Коэффициенты называются компонентами тензора. Они бывают ковариантными, контравариантными и смешанными, в зависимости от того, имеет ли компонента только нижние индексы, или только верхние, или те и другие. Всего имеется 3^n компонент тензора ранга *n*.

Между компонентами тензора разного типа существуют связи. Действительно,

$$\boldsymbol{T} = T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\boldsymbol{e}_{\alpha_1}\boldsymbol{e}_{\alpha_2}\ldots\boldsymbol{e}_{\alpha_n} = T_{\beta_1}{}^{\alpha_2\ldots\alpha_n}\boldsymbol{e}^{\beta_1}\boldsymbol{e}_{\alpha_2}\ldots\boldsymbol{e}_{\alpha_n} =$$
$$= T_{\beta_1}{}^{\alpha_2\ldots\alpha_n} g^{\beta_1\alpha_1}\boldsymbol{e}_{\alpha_1}\boldsymbol{e}_{\alpha_2}\ldots\boldsymbol{e}_{\alpha_n},$$

откуда

$$T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = T_{\beta_1}{}^{\alpha_2\ldots\alpha_n} g^{\beta_1\alpha_1}. \qquad (12)$$

Точно также получаются соотношения

$$T_{\beta_1}{}^{\alpha_2\ldots\alpha_n} = g_{\beta_1\alpha_1} T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}. \qquad (13)$$

Формулы (12), (13) выражают операции опускания и поднятия индексов – жонглирование индексами. Для прямоугольной системы координат $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$ и из (12), (13)

$$T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = T_{\beta_1}{}^{\alpha_2\ldots\alpha_n}\delta^{\beta_1\alpha_1} = T_{\alpha_1}{}^{\alpha_2\ldots\alpha_n}, \quad T_{\beta_1}{}^{\alpha_2\ldots\alpha_n} =$$
$$= \delta_{\beta_1\alpha_1} T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = T^{\beta_1\alpha_2\ldots\alpha_n}, \qquad (14)$$

т.е. в этой системе положение индекса не существенно и поэтому нет различия типа компонент.

Итак, в фиксированной системе координат тензор ранга n определяется заданием его компонент конкретного типа. Конечно, эти компоненты зависят от выбора системы координат. Установим зависимости между компонентами тензора в системе координат $K(x^{\alpha})$ и $\hat{K}(\xi^{\sigma})$. Пусть в первой системе компоненты имеют вид $T_{\alpha_1}^{\ \alpha_2 \dots \alpha_n}$, а во второй – $\hat{T}_{\beta_1}^{\ \beta_2 \dots \beta_n}$. В силу инвариантности тензора и законов преобразования базисных векторов получим

$$\boldsymbol{T} = \hat{T}_{\beta_1}^{\ \beta_2 \dots \beta_n} \hat{\boldsymbol{e}}^{\beta_1} \hat{\boldsymbol{e}}_{\beta_2} \dots \hat{\boldsymbol{e}}_{\beta_n} = T_{\alpha_1}^{\ \alpha_2 \dots \alpha_n} \boldsymbol{e}^{\alpha_1} \boldsymbol{e}_{\alpha_2} \dots \boldsymbol{e}_{\alpha_n} =$$

$$= T_{\alpha_1}^{\ \alpha_2 \dots \alpha_n} \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \xi^{\beta_1}} \frac{\partial \xi^{\beta_2}}{\partial x^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial \xi^{\beta_n}}{\partial x^{\alpha_n}} \hat{\boldsymbol{e}}^{\beta_1} \hat{\boldsymbol{e}}_{\beta_2} \dots \hat{\boldsymbol{e}}_{\beta_n} . \qquad (15)$$

Отсюда

$$\hat{T}_{\beta_1}^{\ \beta_2 \dots \beta_n} = T_{\alpha_1}^{\ \alpha_2 \dots \alpha_n} \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \xi^{\beta_1}} \frac{\partial \xi^{\beta_2}}{\partial x^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial \xi^{\beta_n}}{\partial x^{\alpha_n}} . \qquad (16)$$

Обратные формулы

$$T_{\alpha_1}^{\ \alpha_2 \dots \alpha_n} = \hat{T}_{\beta_1}^{\ \beta_2 \dots \beta_n} \frac{\partial \xi^{\beta_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \frac{\partial x^{\alpha_2}}{\partial \xi^{\beta_2}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_n}}{\partial \xi^{\beta_n}} . \qquad (17)$$

Формулы (16), (17) показывают, что каждый ковариантный или контравариантный индекс компоненты тензора преобразуется по одноименному закону. Кроме того, компоненты тензора в новых переменных есть линейная комбинация всех компонент в старых переменных. Поэтому тензор будет нулевым, если все его компоненты равны нулю в одной из систем координат.

Другое определение тензора. Тензором ранга n называют объект, который в фиксированной системе координат определяется 3^n числами – компонентами, преобразующимися при переходе к другой системе координат в том же пространстве по формулам (16).

Формулы преобразования коэффициентов основной квадратичной формы

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = g_{\sigma\tau}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial x^\tau}{\partial \xi^\beta}$$

показывают их тензорную природу. Значит, совокупность девяти величин $g_{\alpha\beta}$ определяют тензор второго ранга

$$\boldsymbol{G} = g_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}^\alpha\boldsymbol{e}^\beta. \quad (18)$$

Он носит название метрического тензора.

Частные виды тензоров. При $n = 0,\ N = 1$ ($N = 3^n$ - число компонент) получим тензор нулевого ранга – инвариантный объект, определяемый в некоторой системе координат одним числом. Это есть скаляр. При $n = 1,\ N = 3$ получаем тензор 1-го ранга – инвариантный объект $\boldsymbol{T} = T^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha = T_\beta\boldsymbol{e}^\beta$, т.е. вектор. При $n = 2,\ N = 9$ имеем тензор 2-го ранга, для которого справедливы четыре различных представления:

$$\boldsymbol{T} = T^{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta = T_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}^\alpha\boldsymbol{e}^\beta = T^\alpha{}_\beta\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}^\beta = T_\alpha{}^\beta\boldsymbol{e}^\alpha\boldsymbol{e}_\beta. \quad (19)$$

При $n = 3,\ N = 27$ - тензор 3-го ранга и т.д. С ростом ранга быстро возрастает число компонент и число различных представлений тензора.

Введем аналогично векторам физические компоненты тензоров. Пусть $\left(\boldsymbol{e}^1_{\alpha_1}, \dots, \boldsymbol{e}^1_{\alpha_n}\right)$, $\left(\boldsymbol{e}^{\alpha_1}_1, \dots, \boldsymbol{e}^{\alpha_n}_1\right)$ - нормированные элементы координатных базисов системы K. Тогда

$$\boldsymbol{T} = \tilde{T}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}\boldsymbol{e}^1_{\alpha_1}\dots\boldsymbol{e}^1_{\alpha_n} = \tilde{T}_{\alpha_1}{}^{\alpha_2\dots\alpha_n}\boldsymbol{e}^{\alpha_1}_1\boldsymbol{e}^1_{\alpha_2}\dots\boldsymbol{e}^1_{\alpha_n} = \dots =$$
$$= \tilde{T}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}\boldsymbol{e}^{\alpha_1}_1\boldsymbol{e}^{\alpha_2}_1\dots\boldsymbol{e}^{\alpha_n}_1. \quad (20)$$

Поскольку $\boldsymbol{e}_\alpha = H_\alpha\boldsymbol{e}^1_\alpha$, $\boldsymbol{e}^\beta = H^\beta\boldsymbol{e}^\beta_1$, то из представления (15), (20) найдем связи физических компонент через обычные компоненты:

$$\tilde{T}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} = T^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}H_{\alpha_1}H_{\alpha_2}\dots H_{\alpha_n},\ \tilde{T}_{\alpha_1}{}^{\alpha_2\dots\alpha_n} = T_{\alpha_1}{}^{\alpha_2\dots\alpha_n}H^{\alpha_1}H_{\alpha_2}\dots H_{\alpha_n}, \dots,$$
$$\tilde{T}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} = T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}H^{\alpha_1}H^{\alpha_2}\dots H^{\alpha_n}. \quad (21)$$

Для ортогональной системы $\boldsymbol{e}^\alpha = \boldsymbol{e}_\alpha$, и все физические компоненты различных типов совпадают.

Операции с тензорами. Возьмем два тензора $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ одного и того же ранга n и сложим почленно формулы преобразования одинаковых компонент

$$\hat{P}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = P^{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}\frac{\partial\xi^{\alpha_1}}{\partial x^{\sigma_1}}\cdots\frac{\partial\xi^{\alpha_n}}{\partial x^{\sigma_n}}, \quad \hat{Q}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = Q^{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}\frac{\partial\xi^{\alpha_1}}{\partial x^{\sigma_1}}\cdots\frac{\partial\xi^{\alpha_n}}{\partial x^{\sigma_n}},$$

приходим к равенству

$$\hat{P}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} + \hat{Q}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = (P^{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n} + Q^{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n})\frac{\partial\xi^{\alpha_1}}{\partial x^{\sigma_1}}\cdots\frac{\partial\xi^{\alpha_n}}{\partial x^{\sigma_n}}.$$

Оно означает, что объект

$$T^{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n} = P^{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n} + Q^{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}$$

есть тензор ранга n. Данный тензор и называется суммой исходных тензоров, т.е.

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}.$$

Видно, что складывать можно только тензоры одинакового ранга, и операция сложения коммутативна.

Пусть имеются два тензора: $\boldsymbol{P}$ ранга p и $\boldsymbol{Q}$ ранга q, и их какие-либо компоненты

$$\hat{P}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} = P^{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_p}\frac{\partial\xi^{\alpha_1}}{\partial x^{\sigma_1}}\cdots\frac{\partial\xi^{\alpha_p}}{\partial x^{\sigma_p}}, \quad \hat{Q}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_q} = Q_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_q}\frac{\partial x^{\tau_1}}{\partial\xi^{\beta_1}}\cdots\frac{\partial x^{\tau_q}}{\partial\xi^{\beta_q}}.$$

Перемножив эти формулы, придем к равенству

$$\hat{P}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}\hat{Q}_{\beta_1\ldots\beta_q} = P^{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_p}Q_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_q}\frac{\partial\xi^{\alpha_1}}{\partial x^{\sigma_1}}\cdots\frac{\partial\xi^{\alpha_p}}{\partial x^{\sigma_p}}\frac{\partial x^{\tau_1}}{\partial\xi^{\beta_1}}\cdots\frac{\partial x^{\tau_q}}{\partial\xi^{\beta_q}},$$

из которого следует, что объект

$$T^{\sigma_1\ldots\sigma_p}{}_{\tau_1\ldots\tau_q} = P^{\sigma_1\ldots\sigma_p}Q_{\tau_1\ldots\tau_q}$$

есть тензор ранга $p+q$, называемый произведением исходных тензоров, и записывают в виде:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{PQ}.$$

Таким образом, умножение тензоров определено для двух тензоров произвольных рангов, и ранг произведения равен сумме рангов сомножителей. Произведение тензоров существенно зависит от порядка сомножителей и оно, вообще говоря не коммутативно: $\boldsymbol{PQ} \neq \boldsymbol{QP}$. В частности, если f - скаляр, то компонентами $\boldsymbol{T} = f\boldsymbol{P}$ будут $T^{\sigma_1 \dots \sigma_p} = fP^{\sigma_1 \dots \sigma_p}$. Если перемножаются два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то получится тензор 2-го ранга

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{ab},\ T^{\alpha\beta} = a^{\alpha} b^{\beta},$$

т.е. диада. Если перемножаются n векторов $\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{n}$, получим тензор ранга n,

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \dots \boldsymbol{a}_n,\ T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n},$$

т.е. полиаду.

Свертывание тензора. Пусть $\boldsymbol{T}$ - тензор ранга $n \geq 2$ и одна из его смешанных компонент преобразуется по формуле

$$\hat{T}_{\alpha_1}^{\ \alpha_2 \dots \alpha_n} = T_{\sigma_1}^{\ \sigma_2 \dots \sigma_n} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial \xi^{\alpha_1}} \frac{\partial \xi^{\alpha_2}}{\partial x^{\sigma_2}} \dots \frac{\partial \xi^{\alpha_n}}{\partial x^{\sigma_n}}, \tag{23}$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n = 1, 2, 3$. Возьмем теперь только те равенства, в которых индексы α_1 и α_2 одинаковы, и образуем их сумму:

$$\hat{T}_{\alpha_1}^{\ \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_n} = T_{\sigma_1}^{\ \sigma_2 \dots \sigma_n} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial \xi^{\alpha_1}} \frac{\partial \xi^{\alpha_1}}{\partial x^{\sigma_2}} \frac{\partial \xi^{\alpha_3}}{\partial x^{\sigma_3}} \dots \frac{\partial \xi^{\alpha_n}}{\partial x^{\sigma_n}} =$$

$$= T_{\sigma_1}^{\ \sigma_1 \sigma_3 \dots \sigma_n} \frac{\partial \xi^{\alpha_3}}{\partial x^{\sigma_3}} \dots \frac{\partial \xi^{\alpha_n}}{\partial x^{\sigma_n}}, \tag{24}$$

так как $(\partial x^{\sigma_1} / \partial \xi^{\alpha_1})(\partial \xi^{\alpha_1} / \partial x^{\sigma_2}) = \delta_{\sigma_2}^{\sigma_1}$. Получим закон преобразования тензора ранга $n - 2$, который называется сверткой тензора $\boldsymbol{T}$ по двум индексам. Таким образом, операция свертывания тензора $T_{\sigma_1}^{\ \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_n}$ по различного типа индексам σ_1, σ_2 состоит в сопоставлении исходному тензору тензора $T_{\sigma_1}^{\ \sigma_1 \sigma_3 \dots \sigma_n}$, ранг которого на две единицы ниже. Ясно, что можно образовывать несколько различных сверток, важно только, чтобы один из индексов был верхним, а другой нижним. Операция свертывания может быть повторена несколько раз, и тензору четвертого ранга можно сопоставить тензор нулевого ранга, называемый инвариантом исходного тензора. Заметим, что

$$T_{\sigma}^{\ \sigma \sigma_3 \dots \sigma_n} = T^{\tau}_{\ \omega}{}^{\sigma_3 \dots \sigma_n} g_{\tau\sigma} g^{\sigma\omega} = \delta_{\tau}^{\omega} = T^{\tau}_{\ \tau}{}^{\sigma_3 \dots \sigma_n}, \tag{25}$$

т.е. если в свертке поднимаем нижний индекс суммирования, то верхний индекс следует опустить.

Скалярное умножение тензоров. Скалярным произведением тензора $\boldsymbol{P}$ ранга p и тензора $\boldsymbol{Q}$ ранга q является результат последовательного выполнения двух операций: 1) умножения $\boldsymbol{P}$ на $\boldsymbol{Q}$; 2) свертывание произведения по последнему индексу первого сомножителя и по первому индексу второго. Другими словами, $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}$ и

$$T^{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}{}_{\beta_2\ldots\beta_q}=P^{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\sigma}Q_{\sigma\beta_2\ldots\beta_q},$$

причем $r_T=r_P+r_Q-2$, где через r_T,r_P,r_Q обозначены ранги тензоров. Ясно, что степени тензора второго ранга снова являются тензорами второго ранга: если $\boldsymbol{T}=T^{\alpha}{}_{\beta}\boldsymbol{e}_{\alpha}\boldsymbol{e}^{\beta}$, то

$$\boldsymbol{T}^2=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}=T^{\alpha}{}_{\sigma}T^{\sigma}{}_{\beta}\boldsymbol{e}_{\alpha}\boldsymbol{e}^{\beta},\ \boldsymbol{T}^3=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^2=T^{\alpha}{}_{\sigma}T^{\sigma}{}_{\tau}T^{\tau}{}_{\beta}\boldsymbol{e}_{\alpha}\boldsymbol{e}^{\beta},\ldots \tag{26}$$

Для полноты ряда (26) условно считают, что нулевая степень

$$\boldsymbol{T}^0=g_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}^{\alpha}\boldsymbol{e}^{\beta}=\boldsymbol{G} \tag{27}$$

совпадает с метрическим тензором.

Симметрия и антисимметрия тензоров. После перестановки у компонент каких-либо двух верхних или двух нижних индексов, вообще говоря, получается другой тензор. Если после такой перестановки тензор не изменяется, то он называется симметричным. Если каждые две компоненты с переставленными индексами отличаются только знаками, то тензор - антисимметричный по этим индексам. Так, если тензор третьего ранга $T^{\alpha\beta}{}_{\gamma}$ симметричен по α и β, то $T^{\alpha\beta}{}_{\gamma}=T^{\beta\alpha}{}_{\gamma}$. Если он антисимметричен, то $T^{\alpha\beta}{}_{\gamma}=-T^{\beta\alpha}{}_{\gamma}$. Компоненты антисимметричного тензора, в котором переставляемые индексы одинаковы, равны нулю: $T^{\alpha\alpha}{}_{\gamma}=-T^{\alpha\alpha}{}_{\gamma}=0$. Тензор симметричен или антисимметричен по какой-либо группе одинаково расположенных индексов, если он является таковым по каждой паре индексов этой группы. Пусть, например, тензор третьего ранга симметричен по верхним индексам, тогда $T_{\sigma\tau\gamma}=T^{\alpha\beta}{}_{\gamma}g_{\sigma\alpha}g_{\tau\beta}=T^{\beta\alpha}{}_{\gamma}g_{\sigma\alpha}g_{\tau\beta}=T_{\tau\sigma\gamma}$ - симметричен по нижним индексам.

Значит, при определении симметрии тензора по двум индексам существенны номера этих индексов и не важно, расположены они оба наверху или оба внизу. Свойство симметрии или антисимметрии является инвариантным, хотя компоненты тензора и зависят от выбора системы координат. В самом деле, например, для тензора третьего ранга, если $T^{\alpha\beta}{}_{\gamma} = T^{\beta\alpha}{}_{\gamma}$, то

$$\hat{T}^{\sigma\tau}{}_{\omega} = T^{\alpha\beta}{}_{\gamma} \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \xi^{\tau}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \xi^{\omega}} = T^{\beta\alpha}{}_{\gamma} \frac{\partial \xi^{\tau}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \xi^{\omega}} = \hat{T}^{\tau\sigma}{}_{\omega} .$$

Аналогично доказывается инвариантность свойства антисимметричного тензора.

Симметрирование и альтернирование. Из компонент $T_{\alpha\beta}$ тензора второго ранга образуем симметричный и антисимметричный, $T_{(\alpha\beta)}$ и $T_{[\alpha\beta]}$, тензоры

$$T_{(\alpha\beta)} = \left(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}\right)/2,\ \ T_{[\alpha\beta]} = \left(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}\right)/2.$$

Тензору третьего ранга $T_{\alpha\beta\gamma}$ аналогичным способом можно сопоставить тензоры:

$$T_{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{1}{3!}\left(T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta} + T_{\beta\alpha\gamma} + T_{\alpha\gamma\beta} + T_{\gamma\beta\alpha}\right),$$
$$T_{[\alpha\beta\gamma]} = \frac{1}{3!}\left(T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta} - T_{\beta\alpha\gamma} - T_{\alpha\gamma\beta} - T_{\gamma\beta\alpha}\right),$$

из которых первый является симметричным, а второй - антисимметричным по всем трем индексам. Легко видеть, что симметричный тензор определяется как среднее арифметическое тензоров, полученных из исходного путем всевозможных перестановок индексов; антисимметричный тензор есть среднее арифметическое тензоров, полученных всевозможными перестановками индексов у исходного тензора, причем в случае четной перестановки берется знак плюс, а в случае нечетной – минус.

Подобная операция применима к тензорам четвертого и более высоких рангов. Операция сопоставления данному тензору тензора того же ранга, симметричного по некоторой группе одинаково расположенных индексов - симметрирование, а операция сопоставления данному тензору тензора того же ранга, антисимметричного по какой-либо группе индексов - альтернирование.

Теорема 1 (свойства двойной свертки). Двойная свертка тензора произвольного ранга, симметричного по свертываемым индексам, с тензором произвольного ранга, антисимметричного по этим же индексам, равна нулю. Обратно: если равна нулю двойная свертка двух тензоров произвольных рангов и если один из тензоров есть произвольный тензор, симметричный (антисимметричный) по свертываемым индексам, то другой тензор антисимметричный (симметричный) по этим индексам.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{A}$ - тензоры ранга s и a соответственно, свертываются по двум первым индексам и

$$S^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_s} = S^{\alpha_2\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_s}, \tag{29}$$

$$A_{\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_a} = -A_{\beta_2\beta_1\beta_3\ldots\beta_a}. \tag{30}$$

Тогда двойная свертка симметричного тензора $\boldsymbol{S}$ и антисимметричного тензора $\boldsymbol{A}$ равна нулю. Действительно, в силу (29), (30)

$$S^{\beta_1\beta_2\alpha_3\ldots\alpha_s}A_{\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_a} = \frac{1}{2}\left(S^{\beta_1\beta_2\alpha_3\ldots\alpha_s}A_{\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_a} + S^{\beta_2\beta_1\alpha_3\ldots\alpha_s}A_{\beta_2\beta_1\beta_3\ldots\beta_a}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}S^{\beta_1\beta_2\alpha_3\ldots\alpha_s}\left(A_{\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_a} + A_{\beta_2\beta_1\beta_3\ldots\beta_a}\right) = 0. \tag{31}$$

Для доказательства обратного заметим, что из (31) для произвольного тензора $\boldsymbol{S}$ следуют равенства (30), выражающие антисимметричность тензора $\boldsymbol{A}$.

Пусть теперь $\boldsymbol{A}$ - произвольный антисимметричный тензор, и свертка $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{A}$ равны нулю. Тогда

$$S^{\beta_1\beta_2\alpha_3\ldots\alpha_s}A_{\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_a} = \frac{1}{2}\left(S^{\beta_1\beta_2\alpha_3\ldots\alpha_s}A_{\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_a} + S^{\beta_2\beta_1\alpha_3\ldots\alpha_s}A_{\beta_2\beta_1\beta_3\ldots\beta_a}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}A_{\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_a}\left(S^{\beta_1\beta_2\alpha_3\ldots\alpha_s} - S^{\beta_2\beta_1\alpha_3\ldots\alpha_s}\right) = 0,$$

и в силу произвольности тензора $\boldsymbol{A}$ получим симметричность тензора $\boldsymbol{S}$ по свертываемым индексам. Теорема доказана.

Эта теорема часто используется при различных преобразованиях тензорных выражений.

Теорема 2 (деление тензоров). Объект $\boldsymbol{T}$, задаваемый в системе координат x^α с помощью 3^n чисел – компонент $T^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$, является тензором ранга n, если при умножении его на произвольный тензор $\boldsymbol{S}$ ранга $m \le n$ и свертки по m индексам получается тензор ранга $n-m$:

$$P^{\alpha_{m+1}\dots\alpha_n} = T^{\alpha_1\dots\alpha_m\alpha_{m+1}\dots\alpha_n}S_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}. \qquad (32)$$

Доказательство. Запишем равенство (32) в системе $\widehat{K}(\xi^\sigma)$:

$$\hat{T}^{\beta_1\dots\beta_m\beta_{m+1}\dots\beta_n}\hat{S}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_m} = \hat{P}^{\beta_{m+1}\dots\beta_n} = P^{\alpha_{m+1}\dots\alpha_n}\frac{\partial\xi^{\beta_{m+1}}}{\partial x^{\alpha_{m+1}}}\cdots\frac{\partial\xi^{\beta_n}}{\partial x^{\alpha_n}} =$$

$$= T^{\alpha_1\dots\alpha_n}S_{\alpha_1\dots\alpha_m}\frac{\partial\xi^{\beta_{m+1}}}{\partial x^{\alpha_{m+1}}}\cdots\frac{\partial\xi^{\beta_n}}{\partial x^{\alpha_n}}$$

$$= T^{\alpha_1\dots\alpha_n}\hat{S}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_m}\frac{\partial\xi^{\beta_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial\xi^{\beta_m}}{\partial x^{\alpha_m}}\frac{\partial\xi^{\beta_{m+1}}}{\partial x^{\alpha_{m+1}}}\cdots\frac{\partial\xi^{\beta_n}}{\partial x^{\alpha_n}},$$

откуда

$$\left(\hat{T}^{\beta_1\dots\beta_n} - T^{\alpha_1\dots\alpha_n}\frac{\partial\xi^{\beta_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial\xi^{\beta_n}}{\partial x^{\alpha_n}}\right)\hat{S}_{\beta_1\dots\beta_m} = 0.$$

Так как $\boldsymbol{S}$ - произвольный тензор, то компоненты $\hat{S}_{\beta_1\dots\beta_m}$ - произвольные величины. Значит,

$$\hat{T}^{\beta_1\dots\beta_n} = T^{\alpha_1\dots\alpha_n}\frac{\partial\xi^{\beta_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial\xi^{\beta_n}}{\partial x^{\alpha_n}},$$

т.е. тензорный закон преобразования, и объект $\boldsymbol{T}$ суть тензор ранга n. Теорема доказана.

Данная теорема дает критерий, устанавливающий тензорный характер объектов. Для иллюстрации рассмотрим основную квадратичную форму $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$. В ней $dx^\alpha dx^\beta$ - произвольный тензор второго ранга, ибо сами дифференциалы могут быть произвольными; величина ds^2 - скаляр – тензор нулевого ранга. По теореме двух индексный объект $g_{\alpha\beta}$ есть тензор второго ранга, названный выше метрическим тензором.

Вопросы по теоретическому материалу.

1. Что называют скаляром? Приведите примеры скалярных и нескалярных величин.

2. Какие операции определены для элементов координатных базисов $\boldsymbol{e}_\alpha$ и $\boldsymbol{e}^\beta$? Какими свойствами обладают эти операции?

3. Как образуются полиады и какими характеристиками они обладают?

4. Как определяется вектор в тензорном анализе? Каковы его представления и характеристики?

5. Что представляют собой параметры Ламэ?

6. Как определяется тензор ранга n ? Каковы его основные характеристики? Примеры тензоров.

7. Какие алгебраические операции определяются для тензоров?

8. В чем заключается операция свертывания тензоров?

9. Как осуществляется скалярное умножение тензоров?

10. Какими свойствами обладают симметричные и антисимметричные тензоры?

11. В чем состоит операция симметрирования и альтернирования для тензоров второго и третьего рангов?

12. Каким свойством может обладать двойная свертка тензоров?

13. Как можно сформулировать критерий, устанавливающий тензорный характер объекта?

6.3. Метрический и дискриминантный тензоры

Метрический тензор тесно связан с метрикой пространства и имеет вид

$$\boldsymbol{G} = g_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}^\alpha\boldsymbol{e}^\beta. \tag{1}$$

Формула (1) дает представление с помощью ковариантных компонент $G_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$, совпадающих с коэффициентами основной квадратичной формы. Компоненты другого вида получаются путем поднятия индексов:

$$G^{\alpha}{}_{\beta} = g^{\alpha\sigma} g_{\sigma\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta},\ G_{\alpha}{}^{\beta} = g_{\alpha\sigma}\, g^{\sigma\beta} = \delta_{\alpha}{}^{\beta},\ G^{\alpha\beta} = G^{\alpha}{}_{\sigma} g^{\sigma\beta} =$$
$$= \delta^{\alpha}{}_{\sigma} g^{\sigma\beta} = g^{\alpha\beta},$$

т.е. смешанные компоненты представляют собой дельты Кронекера. Таким образом,

$$\boldsymbol{G} = g_{\alpha\beta} \boldsymbol{e}^{\alpha} \boldsymbol{e}^{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} \boldsymbol{e}_{\alpha} \boldsymbol{e}^{\beta} = \delta_{\alpha}{}^{\beta} \boldsymbol{e}^{\alpha} \boldsymbol{e}_{\beta} = g^{\alpha\beta} \boldsymbol{e}_{\alpha} \boldsymbol{e}_{\beta}\,, \qquad (2)$$

и метрический тензор симметричен. Далее, в любой другой системе координат

$$\hat{G}^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\sigma}{}_{\tau} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial \xi^{\beta}} = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \xi^{\beta}} = \delta^{\alpha}{}_{\beta},$$

и смешанные компоненты есть тоже дельты Кронекера.

Возьмем любой тензор $\boldsymbol{T}$, например 3-го ранга, и образуем скалярное произведение $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{T}$. Для контравариантных компонент тензора $\boldsymbol{S}$ имеем

$$S^{\alpha\beta\gamma} = \delta^{\alpha}{}_{\sigma} T^{\sigma\beta\gamma} = T^{\alpha\beta\gamma},\ \ \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}. \qquad (3)$$

Другими словами, при умножении метрический тензор играет роль единичного тензора, и любая степень $\boldsymbol{G}$ совпадает с самим $\boldsymbol{G}$.

Как уже отмечалось, векторные произведения базисных элементов можно разложить по векторам контравариантного или ковариантного базиса:

$$\boldsymbol{e}_{\alpha} \times \boldsymbol{e}_{\beta} = e_{\alpha\beta\gamma}\, \boldsymbol{e}^{\gamma},\ \ \boldsymbol{e}^{\alpha} \times \boldsymbol{e}^{\beta} = e^{\alpha\beta\sigma} \boldsymbol{e}_{\sigma},\ \boldsymbol{e}_{\alpha} \times \boldsymbol{e}^{\beta} = e_{\alpha}{}^{\beta\sigma} \boldsymbol{e}_{\sigma}. \qquad (4)$$

Рассмотрим первую из формул (4) и умножим ее скалярно на $\boldsymbol{e}_{\gamma}$:

$$\left(\boldsymbol{e}_{\alpha}, \boldsymbol{e}_{\beta}, \boldsymbol{e}_{\gamma}\right) = e_{\alpha\beta\sigma} \delta^{\sigma}{}_{\gamma} = e_{\alpha\beta\gamma}. \qquad (5)$$

Найдем закон преобразования величин $e_{\alpha\beta\gamma}$ при переходе к новой системе координат. Имеем

$$\hat{e}_{\sigma\tau\omega} = (\hat{\boldsymbol{e}}_{\sigma}, \hat{\boldsymbol{e}}_{\tau}, \hat{\boldsymbol{e}}_{\omega}) = \left(\boldsymbol{e}_{\alpha} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\sigma}}, \boldsymbol{e}_{\beta} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{\tau}}, \boldsymbol{e}_{\gamma} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \xi^{\omega}}\right) =$$
$$= e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\sigma}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{\tau}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \xi^{\omega}}\,, \qquad (6)$$

откуда вытекает, что $e_{\alpha\beta\gamma}$ есть компоненты тензора 3-го ранга. Он обозначается через $\boldsymbol{E}$ и называется дискриминантным тензором:

$$\boldsymbol{E} = e_{\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{e}^{\alpha}\boldsymbol{e}^{\beta}\boldsymbol{e}^{\gamma} = e^{\alpha}_{\ \beta\gamma}\boldsymbol{e}_{\alpha}\boldsymbol{e}^{\beta}\boldsymbol{e}^{\gamma} = e^{\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{e}_{\alpha}\boldsymbol{e}_{\beta}\boldsymbol{e}_{\gamma} = \cdots \qquad (7)$$

Из свойств смешанного произведения (5) следует его антисимметричность по всей тройке индексов:

$$e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\beta\alpha\gamma},\ \ e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\gamma\beta\alpha},\ \ e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\alpha\gamma\beta}. \qquad (8)$$

Значит, все компоненты тензора, у которых два или все три индекса одинаковы, равны нулю. Ненулевые компоненты отличаются от e_{123} только знаком. Так как

$$\left(\boldsymbol{e}_{\alpha}, \boldsymbol{e}_{\beta}, \boldsymbol{e}_{\gamma}\right)^2 = g. \qquad (9)$$

то $e_{123} = \sqrt{g}$, и ковариантные компоненты тензора имеют значения:

$$e_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} \sqrt{g}\ \text{, если } \alpha,\beta,\gamma \text{ — четная перестановка из } 1,2,3; \\ -\sqrt{g}\ \text{, если } \alpha,\beta,\gamma \text{ — нечетная перестановка из } 1,2,3; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \qquad (10)$$

Заметим, что коэффициенты во всех разложениях (4) есть компоненты дискриминантного тензора. Так, для левой части второго равенства имеем

$$\boldsymbol{e}^{\lambda} \times \boldsymbol{e}^{\mu} = g^{\lambda\alpha}g^{\mu\beta}\left(\boldsymbol{e}_{\alpha} \times \boldsymbol{e}_{\beta}\right) = g^{\lambda\alpha}g^{\mu\beta}e_{\alpha\beta\sigma}\,\boldsymbol{e}^{\sigma} = g^{\lambda\alpha}g^{\mu\beta}g^{\rho\sigma}e_{\alpha\beta\sigma}\boldsymbol{e}_{\rho}.$$

Сравнение этого выражения с правой частью показывает, что

$$e^{\lambda\mu\rho} = g^{\lambda\alpha}g^{\mu\beta}g^{\rho\sigma}e_{\alpha\beta\sigma}\,, \qquad (11)$$

т.е. коэффициенты $e^{\lambda\mu\rho}$ получаются из компонент $e_{\alpha\beta\sigma}$ с помощью операции поднятия индексов и, значит, являются контравариантными компонентами тензора $\boldsymbol{E}$. Поскольку $(\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3)^2 = g_1$, то

$$e^{123} = (\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3) = \sqrt{g_1}\,, \qquad (12)$$

и для $e^{\alpha\beta\gamma}$ получим выражение вида (10) с заменой g на g_1.

<u>Замечание 4</u>. В трехмерном пространстве произвольный антисимметричный тензор $\boldsymbol{S}$ третьего ранга тоже имеет только одну независимую компоненту $S_{123} \neq 0$. Поэтому существуют связи

$$e_{123}S_{\alpha\beta\gamma} = S_{123}e_{\alpha\beta\gamma},\ \ e^{123}S^{\alpha\beta\gamma} = S^{123}e^{\alpha\beta\gamma}. \qquad (13)$$

Метрический и дискриминантный тензоры участвуют в скалярном и векторном произведении тензоров. Скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$

$$f = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_\alpha \boldsymbol{e}^\alpha) \cdot \left(b_\beta \boldsymbol{e}^\beta\right) = a_\alpha b_\beta \left(\boldsymbol{e}^\alpha \cdot \boldsymbol{e}^\beta\right) = g^{\alpha\beta} a_\alpha b_\beta = a_\alpha b^\alpha.$$

Если $\boldsymbol{T}$ – тензор 2-го ранга и $\boldsymbol{a}$ - вектор, то

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{a} = \left(T_{\alpha\beta}\, \boldsymbol{e}^\alpha \boldsymbol{e}^\beta\right) \cdot \left(a_\gamma \boldsymbol{e}^\gamma\right) = T_{\alpha\beta} a_\gamma\, \boldsymbol{e}^\alpha \left(\boldsymbol{e}^\beta \cdot \boldsymbol{e}^\gamma\right) = T_{\alpha\beta} a_\gamma g^{\beta\gamma} \boldsymbol{e}^\alpha,$$

$$b_\alpha = T_{\alpha\beta} a_\gamma g^{\beta\gamma} = T_{\alpha\beta} a^\beta. \qquad (14)$$

Векторное произведение двух векторов

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_\alpha \boldsymbol{e}^\alpha) \times \left(b_\beta \boldsymbol{e}^\beta\right) = a_\alpha b_\beta \left(\boldsymbol{e}^\alpha \times \boldsymbol{e}^\beta\right) = e^{\alpha\beta\gamma} a_\alpha b_\beta \boldsymbol{e}_\gamma,$$

$$c^\gamma = e^{\alpha\beta\gamma} a_\alpha b_\beta. \qquad (15)$$

Аналогично, векторное произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на тензор $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{T} = (a_\alpha \boldsymbol{e}^\alpha) \times \left(T_{\beta\gamma}\, \boldsymbol{e}^\beta \boldsymbol{e}^\gamma\right) = a_\alpha T_{\beta\gamma} \left(\boldsymbol{e}^\alpha \times \boldsymbol{e}^\beta\right) \boldsymbol{e}^\gamma = e^{\alpha\beta\sigma} a_\alpha T_{\beta\gamma} \boldsymbol{e}_\sigma \boldsymbol{e}^\gamma,$$

$$Q^\sigma{}_\gamma = e^{\alpha\beta\sigma} a_\alpha T_{\beta\gamma}. \qquad (16)$$

Итак, при скалярном и векторном произведении тензоров получаются тензоры, ранги которых ниже суммы рангов сомножителей соответственно на две или одну единицы. Существует тесная связь между дискриминантным тензором и определителями. Действительно, смешанное произведение векторов

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \left(\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}_\beta, \boldsymbol{e}_\gamma\right) a^\alpha b^\beta c^\gamma = e_{\alpha\beta\gamma} a^\alpha b^\beta c^\gamma$$

$$= e_{123} a^1 b^2 c^3 + e_{132} a^1 b^3 c^2 +$$

$$+ e_{231} a^2 b^3 c^1 + e_{213} a^2 b^1 c^3 + e_{312} a^3 b^1 c^2 + e_{321} a^3 b^2 c^1$$

$$= \sqrt{g} \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}, \quad (17)$$

где применены равенства (10). Если пользоваться ковариантными компонентами векторов, то получим

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = e^{\sigma\tau\omega} a_\sigma b_\tau c_\omega = \sqrt{g_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (18)$$

Пусть теперь в формуле (17) $a^{\alpha} = T^{\alpha}_{\ 1},\ b^{\beta} = T^{\beta}_{\ 2},\ c^{\gamma} = T^{\gamma}_{\ 3}$, где $T^{\alpha}_{\ \beta}$ - компоненты тензора второго ранга. Тогда

$$e_{\alpha\beta\gamma} T^{\alpha}_{\ 1} T^{\beta}_{\ 2} T^{\gamma}_{\ 3} = \sqrt{g}\left|T^{l}_{\ m}\right|, \tag{19}$$

а из (18)

$$e^{\lambda\mu\nu} T^{1}_{\ \lambda} T^{2}_{\ \mu} T^{3}_{\ \nu} = \sqrt{g_1}\left|T^{l}_{\ m}\right|. \tag{20}$$

Видно, что

$$e_{\alpha\beta\gamma} T^{\alpha}_{\ \lambda} T^{\beta}_{\ \mu} T^{\gamma}_{\ \nu} \tag{21}$$

есть антисимметричный тензор 3-го ранга, и когда λ, μ, ν принимают частные значения 1, 2, 3, то величина (21) есть $\sqrt{g}\left|T^{l}_{\ m}\right|$. Отсюда и из (10) делаем вывод, что

$$e_{\alpha\beta\gamma} T^{\alpha}_{\ \lambda} T^{\beta}_{\ \mu} T^{\gamma}_{\ \nu} = \left|T^{l}_{\ m}\right| e_{\lambda\mu\nu}. \tag{22}$$

Аналогично,

$$e^{\sigma\tau\omega} T^{\lambda}_{\ \sigma} T^{\mu}_{\ \tau} T^{\nu}_{\ \omega} = \left|T^{l}_{\ m}\right| e^{\lambda\mu\nu}. \tag{23}$$

Последние два равенства показывают, что перемена мест двух строк или столбцов изменяют знак определителя. В частности, при равенстве двух строк или столбцов определитель обращается в нуль. Если перемножать два дискриминантных тензора, получим тензор 6-го ранга. Обращаясь к формулам (11), (12), нетрудно убедиться в том, что смешанные компоненты тензора 6-го ранга

$$\delta^{\alpha\beta\gamma}_{\ \ \ \sigma\tau\omega} = e^{\alpha\beta\gamma} e_{\sigma\tau\omega} =$$

$$= \begin{cases} 1, \text{если } \alpha\beta\gamma \text{ является четной перестановкой для } \sigma\tau\omega; \\ -1, \text{если } \alpha\beta\gamma \text{ является нечетной перестановкой для } \sigma\tau\omega; \\ 0, \qquad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Оказывается, что полученный тензор может быть выражен через смешанные компоненты метрического тензора. Для этого воспользуемся равенствами (22), (23)

$$e_{\sigma\tau\omega} = e_{\lambda\mu\nu} \delta^{\lambda}_{\sigma} \delta^{\mu}_{\tau} \delta^{\nu}_{\omega} = \sqrt{g} \begin{vmatrix} \delta^{1}_{\sigma} & \delta^{2}_{\sigma} & \delta^{3}_{\sigma} \\ \delta^{1}_{\tau} & \delta^{2}_{\tau} & \delta^{3}_{\tau} \\ \delta^{1}_{\omega} & \delta^{2}_{\omega} & \delta^{3}_{\omega} \end{vmatrix},$$

$$e^{\alpha\beta\gamma} = e^{\lambda\mu\nu}\delta^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\beta}_{\mu}\delta^{\gamma}_{\nu} = \sqrt{g_1}\begin{vmatrix} \delta^{\alpha}_{1} & \delta^{\alpha}_{2} & \delta^{\alpha}_{3} \\ \delta^{\beta}_{1} & \delta^{\beta}_{2} & \delta^{\beta}_{3} \\ \delta^{\gamma}_{1} & \delta^{\gamma}_{2} & \delta^{\gamma}_{3} \end{vmatrix}.$$

Перемножая эти равенства и учитывая, что $g \cdot g_1 = 1$, получим выражение

$$\delta^{\alpha\beta\gamma}{}_{\sigma\tau\omega} = \begin{vmatrix} \delta^{\alpha}_{\nu}\delta^{\nu}_{\sigma} & \delta^{\alpha}_{\nu}\delta^{\nu}_{\tau} & \delta^{\alpha}_{\nu}\delta^{\nu}_{\omega} \\ \delta^{\beta}_{\nu}\delta^{\nu}_{\sigma} & \delta^{\beta}_{\nu}\delta^{\nu}_{\tau} & \delta^{\beta}_{\nu}\delta^{\nu}_{\omega} \\ \delta^{\gamma}_{\nu}\delta^{\nu}_{\sigma} & \delta^{\gamma}_{\nu}\delta^{\nu}_{\tau} & \delta^{\gamma}_{\nu}\delta^{\nu}_{\omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta^{\alpha}_{\sigma} & \delta^{\alpha}_{\tau} & \delta^{\alpha}_{\omega} \\ \delta^{\beta}_{\sigma} & \delta^{\beta}_{\tau} & \delta^{\beta}_{\omega} \\ \delta^{\gamma}_{\sigma} & \delta^{\gamma}_{\tau} & \delta^{\gamma}_{\omega} \end{vmatrix},$$

откуда в развернутой записи

$$\delta^{\alpha\beta\gamma}{}_{\sigma\tau\omega} = \delta^{\alpha}_{\sigma}\delta^{\beta}_{\tau}\delta^{\gamma}_{\omega} + \delta^{\beta}_{\sigma}\delta^{\gamma}_{\tau}\delta^{\alpha}_{\omega} + \delta^{\gamma}_{\sigma}\delta^{\alpha}_{\tau}\delta^{\beta}_{\omega} - \delta^{\beta}_{\sigma}\delta^{\alpha}_{\tau}\delta^{\gamma}_{\omega} - \delta^{\alpha}_{\sigma}\delta^{\gamma}_{\tau}\delta^{\beta}_{\omega} - \delta^{\gamma}_{\sigma}\delta^{\beta}_{\tau}\delta^{\alpha}_{\omega}. \quad (24)$$

Рассмотрим свертки этого тензора. При свертывании по индексам α и σ получим тензор 4-го ранга

$$\delta^{\alpha\beta\gamma}{}_{\alpha\tau\omega} = 3\delta^{\beta}_{\tau}\delta^{\gamma}_{\omega} + \delta^{\gamma}_{\tau}\delta^{\beta}_{\omega} + \delta^{\gamma}_{\tau}\delta^{\beta}_{\omega} - \delta^{\beta}_{\tau}\delta^{\gamma}_{\omega} - 3\delta^{\gamma}_{\tau}\delta^{\beta}_{\omega} - \delta^{\beta}_{\tau}\delta^{\gamma}_{\omega} = \\ = \delta^{\beta}_{\tau}\delta^{\gamma}_{\omega} - \delta^{\gamma}_{\tau}\delta^{\beta}_{\omega}. \quad (25)$$

Свернем еще по паре индексов β и τ, получим тензор 2-го ранга

$$\delta^{\alpha\beta\gamma}{}_{\alpha\beta\omega} = 3\delta^{\gamma}_{\omega} - \delta^{\gamma}_{\omega} = 2\delta^{\gamma}_{\omega}. \quad (26)$$

Последняя свертка по γ и ω дает инвариант

$$\delta^{\alpha\beta\gamma}{}_{\alpha\beta\gamma} = 6. \quad (27)$$

Объекты (24)-(27) называют символами Кронекера, все они выражаются через дельты Кронекера. Символ (26) используется для подстановки индекса

$$\frac{1}{2}e^{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\omega}T^{\sigma\omega} = \delta^{\gamma}_{\omega}T^{\sigma\omega} = T^{\sigma\gamma};$$

символ (25) может быть связан с операцией альтернирования по двум индексам:

$$\frac{1}{2}e^{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\tau\omega}T^{\tau\omega} = \frac{1}{2}\left(T^{\beta\gamma} - T^{\gamma\beta}\right) = T^{[\beta\gamma]},$$

а символ (24) – с альтернированием по трем индексам:

$$\frac{1}{6}e^{\alpha\beta\gamma}e_{\sigma\tau\omega}T^{\sigma\tau\omega} = \frac{1}{6}\left(T^{\alpha\beta\gamma} + T^{\beta\gamma\alpha} + T^{\gamma\alpha\beta} - T^{\beta\alpha\gamma} - T^{\alpha\gamma\beta} - T^{\gamma\beta\alpha}\right) = T^{[\alpha\beta\gamma]}.$$

Отметим еще два полезных результата, связанных с дискриминантным тензором. Пусть $A_{\alpha\beta}$ - антисимметричный тензор 2-го ранга и

$$a^{\gamma} = e^{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha\beta}. \tag{28}$$

Данная формула допускает обращение. Действительно, по формуле (25)

$$e_{\sigma\tau\gamma}a^{\gamma} = e^{\alpha\beta\gamma}e_{\sigma\tau\gamma}A_{\alpha\beta} = \left(\delta^{\alpha}_{\sigma}\delta^{\beta}_{\tau} - \delta^{\beta}_{\sigma}\delta^{\alpha}_{\tau}\right)A_{\alpha\beta} = A_{\sigma\tau} - A_{\tau\sigma} = 2A_{\sigma\tau}\,,$$

откуда

$$A_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}e_{\sigma\tau\gamma}a^{\gamma}. \tag{29}$$

Тензоры $A_{\alpha\beta}$ и a^{γ}, связанные формулами (28) и (29), называются двойственными, или дуальными тензорами.

Умножим обе части равенства (22) на $e^{\lambda\mu\nu}$ и просуммируем по λ, μ, ν, используя (27)

$$e^{\lambda\mu\nu}e_{\alpha\beta\gamma}T^{\alpha}_{\ \lambda}T^{\beta}_{\ \mu}T^{\gamma}_{\ \nu} = \left|T^{l}_{\ m}\right|e^{\lambda\mu\nu}e_{\lambda\mu\nu} = 6\left|T^{l}_{\ m}\right|,$$

отсюда

$$\left|T^{l}_{\ m}\right| = \frac{1}{6}\delta^{\lambda\mu\nu}_{\ \ \ \ \alpha\beta\gamma}T^{\alpha}_{\ \lambda}T^{\beta}_{\ \mu}T^{\gamma}_{\ \nu}\,. \tag{30}$$

Таким образом, определитель $\left|T^{l}_{\ m}\right|$ является инвариантом тензора 2-го ранга. В его образовании участвует тензор 6-го ранга – символ Кронекера.

Вопросы по теоретическому материалу

1. Как определяется метрический тензор, и какими свойствами он обладает?
2. Как определяется дискриминантный тензор, и какими свойствами он обладает?
3. При каких операциях с тензорами образуются метрический и дискриминантный тензоры?

6.4. Тензоры 2-го ранга

Для тензора 2-го ранга имеем следующие четыре формы:

$$\boldsymbol{T} = T_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}^{\alpha}\boldsymbol{e}^{\beta} = T^{\alpha}{}_{\beta}\boldsymbol{e}_{\alpha}\boldsymbol{e}^{\beta} = T_{\alpha}{}^{\beta}\boldsymbol{e}^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\beta} = T^{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_{\alpha}\boldsymbol{e}_{\beta}. \qquad (1)$$

Поэтому в фиксированной системе координат этому тензору соответствуют четыре различные квадратные матрицы 3-го порядка, составленные из компонент тензора,

$$\boldsymbol{A}_1 = (T_{\alpha\beta}),\ \boldsymbol{A}_2 = (T^{\alpha}{}_{\beta}),\ \boldsymbol{A}_3 = (T_{\alpha}{}^{\beta}),\ \boldsymbol{A}_4 = (T^{\alpha\beta}), \qquad (2)$$

причем первый индекс соответствует номеру строки, второй – номеру столбца матрицы. Поскольку $T_{\alpha\beta} = g_{\alpha\sigma}T^{\sigma}{}_{\beta} = T_{\alpha}{}^{\sigma}g_{\sigma\beta} = g_{\alpha\sigma}T^{\sigma\tau}g_{\tau\beta}$, то между матрицами (2) существуют связи

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{g}_*\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{g}_* = \boldsymbol{g}_*\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{g}_*, \qquad (3)$$

где матрица $\boldsymbol{g}_* = (g_{\alpha\beta})$, см. (1.13).

Ясно, что если задана одна из матриц (3) в фиксированной системе координат, то в этой системе известны компоненты тензора с некоторым строением индексов, значит, известен и сам тензор. Другими словами, между тензорами 2-го ранга и квадратными матрицами 3-го порядка имеется взаимно однозначное соответствие.

Любому тензору 2-го ранга можно сопоставить две линейные вектор-функции

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}' = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{T},\ b^{\alpha} = T^{\alpha}{}_{\beta}a^{\beta},\ \ b'^{\alpha} = T_{\alpha}{}^{\beta}a^{\beta}. \qquad (4)$$

Очевидно, что задание линейной вектор-функции (4) или задание тензора эквивалентно друг другу. Тензору 2-го ранга $\boldsymbol{T}$ сопоставляется билинейная форма $(\boldsymbol{x} = x^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha},\ \boldsymbol{y} = y^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha})$:

$$f(x^{\sigma}, y^{\tau}) = T_{\alpha\beta}x^{\alpha}y^{\beta} \qquad (5)$$

с инвариантной величиной f. Обратно, задание формы (5) определяет матрицу $\boldsymbol{A}_1$ из (3) или, что эквивалентно, тензор $\boldsymbol{T}$. Значит, характеристика тензора как инвариантной величины совпадает с инвариантными свойствами матрицы, линейной вектор-функции или билинейной формы.

Произвольный тензор 2-го ранга $\boldsymbol{T}$ представляется единственным способом в виде

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A}, \tag{6}$$

где компоненты симметричного тензора $\boldsymbol{S}$ и антисимметричного тензора $\boldsymbol{A}$ определяются формулами

$$S_{\alpha\beta} = T_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}\left(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}\right), \quad A_{\alpha\beta} = T_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}\left(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}\right). \tag{7}$$

Введем для первых инвариантов – сверток тензоров $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{A}$ - обозначения:

$$J_1^T \equiv tr\boldsymbol{T} = T^{\alpha}{}_{\alpha}, \qquad J_1^S \equiv tr\boldsymbol{S} = S^{\alpha}{}_{\alpha}, \qquad J_1^A \equiv tr\boldsymbol{A} = A^{\alpha}{}_{\alpha}. \tag{8}$$

По теореме о свойствах двойной свертки

$$J_1^A = A^{\alpha}{}_{\alpha} = g^{\alpha\beta} A_{\beta\alpha} = 0,$$

и из (6) вытекает равенство

$$J_1^T = J_1^S + J_1^A = J_1^S. \tag{9}$$

Тензор $\boldsymbol{P}$ второго ранга называется шаровым, если

$$\boldsymbol{P} = f \cdot \boldsymbol{G}, \; P^{\alpha}{}_{\beta} = f \cdot \delta^{\alpha}{}_{\beta}, \tag{10}$$

где G - метрический тензор, f - скаляр. Первый инвариант шарового тензора

$$J_1^P \equiv tr\boldsymbol{P} = P^{\alpha}_{\alpha} = f \cdot \delta^{\alpha}{}_{\alpha} = 3f.$$

Симметричный тензор 2-го ранга $\boldsymbol{D}$ называется девиатором, если равен нулю его первый инвариант, $J_1^D = 0$. Любому симметричному тензору $\boldsymbol{S}$ второго ранга можно сопоставить девиатор по формуле

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{S} - \boldsymbol{P}, \; \boldsymbol{P} = \frac{1}{3} J_1^S \, \boldsymbol{G}, \tag{11}$$

так как

$$J_1^D = D^{\alpha}{}_{\alpha} = S^{\alpha}{}_{\alpha} - P^{\alpha}_{\alpha} = S^{\alpha}{}_{\alpha} - \frac{J_1^S \delta^{\alpha}{}_{\alpha}}{3} = J_1^S - J_1^S = 0.$$

Поэтому симметричный тензор представляется в виде суммы шарового тензора и девиатора

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{D}. \tag{12}$$

Тем самым произвольный тензор $\boldsymbol{T}$ второго ранга имеет вид

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{A},\ \ \boldsymbol{P} = \frac{1}{3} J_1^T \boldsymbol{G}, \tag{13}$$

Последнее вытекает из формулы (11).

Два тензора $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{T}^{-1}$ называются взаимно обратными, если их скалярное произведение совпадает с метрическим тензором: $\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{G}$.

Пусть $\boldsymbol{T}$ – тензор 2-го ранга, имеющий левый $\boldsymbol{T}_1^{-1}$ и правый $\boldsymbol{T}_2^{-1}$ обратные тензоры:

$$\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{G},\ \ \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T}_2^{-1} = \boldsymbol{G}.$$

Тогда $\boldsymbol{T}_1^{-1} = \boldsymbol{T}_2^{-1}$ и существует только один тензор, обратный данному.

Если $\boldsymbol{Q}$ - правый обратный тензор, то $T^{\alpha}_{\ \sigma} Q^{\sigma}_{\ \beta} = \delta^{\alpha}_{\ \beta}$. Разлагая определитель $\left|T^{l}_{\ m}\right|$ по элементам α строки: $T^{\alpha}_{\ \sigma} t^{\sigma}_{\ \beta} = \left|T^{l}_{\ m}\right| \delta^{\alpha}_{\ \beta},\ t^{\sigma}_{\ \beta}$ - суть алгебраические дополнения (это формула Лапласа), легко находим

$$Q^{\sigma}_{\ \beta} = \frac{t^{\sigma}_{\ \beta}}{\left|T^{l}_{\ m}\right|},\ \ t^{\lambda}_{\ \alpha} = \frac{1}{2} \delta^{\lambda\mu\nu}_{\ \ \ \ \alpha\beta\gamma} T^{\beta}_{\ \mu} T^{\gamma}_{\ \nu}\,. \tag{14}$$

Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ идет в главном направлении тензора $\boldsymbol{T}$, т.е.

$$\lambda \boldsymbol{a} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{a},\ \ (\lambda \boldsymbol{G} - \boldsymbol{T}) \cdot \boldsymbol{a} = 0,\ \ \left(\lambda \delta^{\alpha}_{\ \beta} - T^{\alpha}_{\ \beta}\right) a^{\beta} = 0, \tag{15}$$

$$\mu \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{T},\ \ \boldsymbol{a} \cdot (\lambda \boldsymbol{G} - \boldsymbol{T}) = 0,\ \ \left(\mu \delta_{\beta}^{\ \alpha} - T_{\beta}^{\ \alpha}\right) a^{\beta} = 0, \tag{16}$$

Ненулевое решение систем линейных алгебраических уравнений (15), (16) существует лишь при условии обращения в нуль определителей

$$\left|\lambda \delta^{\alpha}_{\ \beta} - T^{\alpha}_{\ \beta}\right| = 0,\ \ \left|\mu \delta_{\beta}^{\ \alpha} - T_{\beta}^{\ \alpha}\right| = 0. \tag{17}$$

Поскольку

$$\lambda \delta^{\alpha}_{\ \beta} - T^{\alpha}_{\ \beta} = g_{\sigma\beta} (\lambda \delta_{\tau}^{\ \sigma} - T_{\tau}^{\ \sigma}) g^{\alpha\tau},$$

то

$$\left|\lambda \delta^{\alpha}_{\ \beta} - T^{\alpha}_{\ \beta}\right| = g\ (\lambda \delta_{\tau}^{\ \sigma} - T_{\tau}^{\ \sigma}) g_1 = |\lambda \delta_{\tau}^{\ \sigma} - T_{\tau}^{\ \sigma}|,$$

так как $g \cdot g_1 = 1$, и на самом деле два уравнения (17) представляют собой одно уравнение

$$\left|\lambda \delta^{\alpha}_{\ \beta} - T^{\alpha}_{\ \beta}\right| = 0. \tag{18}$$

Оно называется характеристическим для тензора $\boldsymbol{T}$ и является инвариантным. Действительно, в системе координат $\widehat{K}$

$$\lambda \hat{\delta}^{\mu}_{\ \nu} - \hat{T}^{\mu}_{\ \nu} = \left(\lambda \delta^{\alpha}_{\ \beta} - T^{\alpha}_{\ \beta}\right) \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \ \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{\nu}} ,$$

и переход к определителям в этом матричном равенстве дает

$$\left|\lambda \hat{\delta}^{\mu}_{\ \nu} - \hat{T}^{\mu}_{\ \nu}\right| = \left|\lambda \delta^{\alpha}_{\ \beta} - T^{\alpha}_{\ \beta}\right| J \cdot J^{-1} = \left|\lambda \delta^{\alpha}_{\ \beta} - T^{\alpha}_{\ \beta}\right|.$$

Ясно, что λ есть решение кубического уравнения. Раскрывая определитель (18), получим

$$\Delta(\lambda) \equiv \left|\lambda \delta^{\alpha}_{\ \beta} - T^{\alpha}_{\ \beta}\right| = \begin{vmatrix} \lambda - T^{1}_{\ 1} & -T^{1}_{\ 2} & -T^{1}_{\ 3} \\ -T^{2}_{\ 1} & \lambda - T^{2}_{\ 2} & -T^{2}_{\ 3} \\ -T^{3}_{\ 1} & -T^{3}_{\ 2} & \lambda - T^{3}_{\ 3} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0, \quad (19)$$

$$I_1 = T^{\sigma}_{\ \sigma}, \ I_2 = t^{\alpha}_{\ \alpha}, \ I_3 = \left|T^{l}_{\ m}\right|. \quad (20)$$

Величины $I_1, \ I_2, \ I_3$ носят название основных инвариантов тензора $\boldsymbol{T}$. Они выражаются через свертки (2.28) следующим образом:

$$I_1 = T^{\sigma}_{\ \sigma} = J_1, \ I_2 = t^{\alpha}_{\ \alpha} = \frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta\gamma}_{\ \ \alpha\tau\omega} T^{\tau}_{\ \beta} T^{\omega}_{\ \gamma} = \frac{1}{2}(J_1^2 - J_2),$$

$$I_3 = \frac{1}{6} \delta^{\alpha\beta\gamma}_{\ \ \sigma\tau\omega} T^{\sigma}_{\ \alpha} T^{\tau}_{\ \beta} T^{\omega}_{\ \gamma} = \frac{1}{6}(J_1^3 - 3J_1 J_2 + 2J_3). \quad (21)$$

При выводе этих формул нужно воспользоваться свойством тензора 6-го ранга (24)-(27). Обратные к (21) формулы имеют вид

$$J_1 = I_1, \ J_2 = I_1^2 - 2I_2, \ J_3 = I_1^3 - 3I_1 I_2 + 3I_3. \quad (22)$$

Если все корни характеристического уравнения действительны и различны, то соответствующие им собственные векторы линейно независимы. Выберем тройку таких векторов в качестве координатного базиса:

$$\boldsymbol{e}_{\alpha} \equiv \boldsymbol{a}_{\alpha}, \ \alpha = 1, 2, 3, \quad (23)$$

и посмотрим, какой вид принимают, например, смешанные компоненты тензора в этом базисе. Имеем, $\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{e}_{\beta} = T^{\sigma}_{\ \tau} \boldsymbol{e}_{\sigma} \boldsymbol{e}^{\tau} \boldsymbol{e}_{\beta} = T^{\sigma}_{\ \beta} \boldsymbol{e}_{\sigma}, \ \boldsymbol{e}^{\alpha} \cdot \left(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{e}_{\beta}\right) = T^{\sigma}_{\ \beta} \boldsymbol{e}^{\alpha} \cdot \boldsymbol{e}_{\sigma} = T^{\alpha}_{\ \beta}$; аналогично, $\left(\boldsymbol{e}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{T}\right) \cdot \boldsymbol{e}^{\beta} = T_{\alpha}^{\ \beta}$, значит

$$T^{\alpha}_{\ \beta} = \boldsymbol{e}^{\alpha} \cdot \left(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{e}_{\beta}\right), \ T_{\alpha}^{\ \beta} = \left(\boldsymbol{e}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{T}\right) \cdot \boldsymbol{e}^{\beta}. \quad (24)$$

В силу выбора базиса (23) $\lambda_{\alpha} \boldsymbol{e}_{\alpha} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{e}_{\alpha}$, и смешанные компоненты $T^{\alpha}_{\ \beta}$, согласно (24), будут иметь значения

$$T^{\alpha}_{\ \beta} = \boldsymbol{e}^{\alpha} \cdot (\lambda_{\beta} \boldsymbol{e}_{\beta}) = \lambda_{\beta} \delta^{\alpha}_{\ \beta}, \tag{25}$$

т.е. матрица $\boldsymbol{A}_2$ этих компонент, является диагональной:

$$\boldsymbol{A}_2 = (T^{\alpha}_{\ \beta}) = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \tag{26}$$

Однако, матрицы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_3$, $\boldsymbol{A}_4$ в этом базисе не обязательно диагональные. Если взять за базис другую тройку векторов $\boldsymbol{e}_{\alpha} \equiv \boldsymbol{a}'_{\alpha}$, $\lambda_{\alpha} \boldsymbol{e}_{\alpha} = \boldsymbol{e}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{T}$, то к диагональному виду приведется матрица $\boldsymbol{A}_3$:

$$T_{\alpha}^{\ \beta} = \lambda_{\alpha} \delta_{\alpha}^{\ \beta}, \ \boldsymbol{A}_3 = \left(T_{\alpha}^{\ \beta}\right) = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \tag{27}$$

а матрицы $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_4$, вообще говоря, не диагональные в этом базисе.

Представления (24), (27) в главных осях называются каноническими, а ненулевые величины λ_{α} - главными значениями тензора $\boldsymbol{T}$, часто их обозначают T_{α}.

Ясно, что основные инварианты тензора выражаются через его главные значения по формулам (теорема Виета)

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \ I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3, \ I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \tag{28}$$

откуда тензор 2-го ранга имеет три независимых инварианта I_1, I_2, I_3.

Из (22) и (28) для сверток получим выражения через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$J_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \ J_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, J_3 = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3,$$

$$J_4 = \lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4, \ldots \tag{29}$$

Значит, из всей последовательности J_n, $n = 1,2,3$, в (29) независимыми будут только три.

<u>Особенности симметричных тензоров</u>. Для симметричного тензора 2-го ранга $\boldsymbol{T}$

$$T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}, \ T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$$

и, значит, симметричны матрицы $\boldsymbol{A}_1 = (T_{\alpha\beta})$, $\boldsymbol{A}_4 = (T^{\alpha\beta})$.

Для смешанных компонент имеем

$$T^{\alpha}_{\ \beta} = T_{\sigma\beta} g^{\sigma\alpha}, \ T_{\alpha}^{\ \beta} = T_{\alpha\sigma} g^{\sigma\beta}, \tag{30}$$

и матрицы $\boldsymbol{A}_2 = (T^{\alpha}_{\ \beta})$, $\boldsymbol{A}_3 = \left(T_{\alpha}^{\ \beta}\right)$ совпадают. Далее, для такого тензора вместо билинейной формы достаточно рассматривать квадратичную форму

$$f = (\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x}, \ \ f(x^\sigma) = T_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta. \tag{31}$$

Кроме того, $\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{T}$ и тройки главных направлений $\boldsymbol{a}_\alpha$ и $\boldsymbol{a}'_\alpha$ совпадают; для различных корней характеристического уравнения $\lambda_\mu \neq \lambda_\nu$ векторы $\boldsymbol{a}_\mu$ и $\boldsymbol{a}_\nu$ взаимно ортогональны: $\boldsymbol{a}_\mu \cdot \boldsymbol{a}_\nu = \boldsymbol{0}$. Можно показать, что если среди трех корней два одинаковы, то существует целая плоскость главных направлений и еще одно направление, перпендикулярное этой плоскости. При равенстве всех трех корней любое направление является главным. Что касается корней характеристического уравнения, то все они действительны.

Вопросы по теоретическому материалу

1. В каких формах можно представить тензор 2-го ранга и как связаны эти формы между собой?
2. Как представить тензор 2-го ранга в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров?
3. Как определяются шаровой тензор и девиатор?
4. На какие составляющие можно разложить тензор 2-го ранга?
5. Докажите единственность тензора, обратного данному тензору.
6. Как формируется характеристическое уравнение для тензора 2-го ранга?

6.5. Дифференцирование тензоров.

Векторы базисов зависят от выбора точек пространства:

$$\boldsymbol{e}_\alpha = \boldsymbol{e}_\alpha(x^1, x^2, x^3), \ \ \boldsymbol{e}^\alpha = \boldsymbol{e}^\alpha(x^1, x^2, x^3), \ \ \alpha = 1, 2, 3.$$

Темп изменения этих величин при переходе от одной точки к другой характеризуется производными по координатам. Имеем разложения:

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\tau\alpha\beta} \boldsymbol{e}^\tau = \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \boldsymbol{e}_\sigma, \tag{1}$$

коэффициенты которых называют символами Кристоффеля 1-го и 2-го рода соответственно.

Свойства символов Кристоффеля.

1) Умножая скалярно соотношения (1) на векторы $\boldsymbol{e}_\gamma$ и $\boldsymbol{e}^\gamma$, приходим к формулам:

$$\boldsymbol{e}_\gamma \frac{\partial \boldsymbol{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\tau\alpha\beta} \boldsymbol{e}^\tau \boldsymbol{e}_\gamma, \;\; \boldsymbol{e}^\gamma \frac{\partial \boldsymbol{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \boldsymbol{e}_\sigma \boldsymbol{e}^\gamma,$$

откуда

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta} = \boldsymbol{e}_\gamma \frac{\partial \boldsymbol{e}_\alpha}{\partial x^\beta}, \;\; \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \boldsymbol{e}^\gamma \frac{\partial \boldsymbol{e}_\alpha}{\partial x^\beta}, \tag{2}$$

где использованы соотношения взаимности $\mathrm{e}^\tau \mathrm{e}_\gamma = \delta^\tau_\gamma$, $\mathrm{e}_\sigma \mathrm{e}^\gamma = \delta_\sigma^\gamma$.

2) Поскольку

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta} = \boldsymbol{e}_\gamma \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \;\; \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \boldsymbol{e}^\gamma \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta},$$

то символы Кристоффеля симметричны по двум последним индексам

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta} = \Gamma_{\gamma\beta\alpha}, \;\; \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}. \tag{3}$$

3) Имеют место связи между символами:

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta} = g_{\gamma\omega} \boldsymbol{e}^\omega \frac{\partial \boldsymbol{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = g_{\gamma\omega} \Gamma^\omega_{\alpha\beta}, \;\; \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = g^{\gamma\omega} \boldsymbol{e}_\omega \frac{\partial \boldsymbol{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = g^{\gamma\omega} \Gamma_{\omega\alpha\beta}, \tag{4}$$

то есть у символов Кристоффеля можно поднимать и опускать индексы по обычному правилу.

4) Оказывается, что эти символы выражаются через компоненты метрического тензора. Продифференцируем равенство $\boldsymbol{e}_\gamma \cdot \boldsymbol{e}_\alpha = g_{\gamma\alpha}$ по координате x^β, получим

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\gamma\beta} = \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta}. \tag{5}$$

Циклической перестановкой индексов выводим из (5) равенства:

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}; \tag{6}$$

$$\Gamma_{\beta\gamma\alpha} + \Gamma_{\gamma\beta\alpha} = \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}. \tag{7}$$

Складывая (6), (7) и вычитая из полученной суммы (5), приходим к искомой формуле (использовано свойство симметрии (3))

$$\Gamma_{\beta\gamma\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right). \qquad (8)$$

Символы Кристоффеля 2-го рода в силу равенств (4) имеют вид

$$\Gamma^{\beta}_{\gamma\alpha} = \frac{1}{2} g^{\beta\omega}\left(\frac{\partial g_{\omega\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\omega\alpha}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\omega}}\right). \qquad (9)$$

5) Для производных по координатам от элементов контравариантного базиса имеем представление

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = G^{\alpha}_{\ \beta\sigma}\boldsymbol{e}^{\sigma} = G^{\alpha\ \tau}_{\ \beta}\,\boldsymbol{e}_{\tau}. \qquad (10)$$

откуда, пользуясь равенствами (1.20)

$$G^{\alpha}_{\ \beta\gamma} = \frac{\partial \boldsymbol{e}^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\boldsymbol{e}_{\gamma},\ \ G^{\alpha\ \gamma}_{\ \beta} = \frac{\partial \boldsymbol{e}^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\boldsymbol{e}^{\gamma}. \qquad (11)$$

Левые части (11) можно выразить через символы Кристоффеля:

$$G^{\alpha}_{\ \beta\gamma} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\boldsymbol{e}^{\alpha}\cdot\boldsymbol{e}_{\gamma}\right) - \boldsymbol{e}^{\alpha}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{e}_{\gamma}}{\partial x^{\beta}} = -\Gamma^{\alpha}_{\ \gamma\beta} = -\Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma}; \qquad (12)$$

$$G^{\alpha\ \gamma}_{\ \beta} = -\Gamma^{\alpha}_{\ \beta\sigma}g^{\sigma\gamma}, \qquad (13)$$

и формулы (10) перепишутся так

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = -\Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma}\boldsymbol{e}^{\gamma} = -\Gamma^{\alpha}_{\ \beta\sigma}g^{\sigma\gamma}\boldsymbol{e}_{\gamma}. \qquad (14)$$

Существует связь между символами Кристоффеля и величиной $\sqrt{g} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Дифференцируя последнее равенство по координатам и используя (1), найдем

$$\Gamma^{\sigma}_{\ \sigma\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^{\alpha}}. \qquad (15)$$

Последнее соотношение часто используется при различных тензорных преобразованиях. В новой системе координат $\widehat{K}(\xi^{\sigma})$ символы Кристоффеля имеют вид:

$$\hat{\Gamma}^{\lambda}_{\ \mu\nu} = \hat{\boldsymbol{e}}^{\lambda}\cdot\frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_{\mu}}{\partial \xi^{\nu}} = \left(\boldsymbol{e}^{\alpha}\cdot\frac{\partial \xi^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial \xi^{\nu}}\left(\boldsymbol{e}_{\beta}\cdot\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{\mu}}\right) =$$

$$= \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^\mu \partial \xi^\nu} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^\nu}\right). \quad (16)$$

Точно так же

$$\hat{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\lambda}\left(g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial \xi^\mu \partial \xi^\nu} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^\nu}\right). \quad (17)$$

Видно, что законы преобразования (16), (17) не тензорные и символы Кристоффеля тензора не образуют. Тензорами они являются только при линейном преобразовании координат $x^\alpha = x^\alpha(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$.

Нетрудно показать, что в ортогональной системе координат имеют место равенства:

$$\Gamma_{\beta\gamma\alpha} = 0 \;\; (\beta \neq \gamma \neq \alpha \neq \beta), \;\; \Gamma_{\beta\alpha\alpha} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^\beta} \;\;\; (\alpha \neq \beta),$$

$$\Gamma_{\beta\beta\alpha} = \Gamma_{\beta\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^\alpha}, \;\; \Gamma_{\beta\beta\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^\beta}, \quad (18)$$

$$\Gamma^\beta_{\gamma\alpha} = 0 \;\; (\beta \neq \gamma \neq \alpha \neq \beta), \;\; \Gamma^\beta_{\alpha\alpha} = -\frac{1}{2g_{\beta\beta}}\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^\beta} = -\frac{H_\alpha}{H_\beta^2}\frac{\partial H_\alpha}{\partial x^\beta} \;\;\; (\alpha \neq \beta),$$

$$\Gamma^\beta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2g_{\beta\beta}}\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{H_\beta}\frac{\partial H_\beta}{\partial x^\alpha}, \quad (19)$$

где в последнем равенстве нет суммирования по β; H_α - коэффициенты Ламе: $\mathrm{H}_\alpha^2 = \mathrm{g}_{\alpha\alpha}$.

Если система координат декартова, то $g_{\alpha\beta} = const$ и из (18), (19) следует равенство нулю всех символов Кристоффеля. В криволинейной системе координат они все в нуль не обращаются. Данный факт отражает не тензорную природу этих объектов. Для тензора из равенства нулю всех компонент в одной системе координат следует их равенство нулю в любой другой системе координат.

Пусть $\varphi = \varphi(x^1, x^2, x^3)$ - скалярная однозначная дифференцируемая функция своих координат в некоторой области трехмерного пространства. Возьмем две близкие точки $M(x^\alpha)$ и $M'(x^\alpha + dx^\alpha)$, тогда при переходе от M к M' скаляр φ получит приращение

$$d\varphi = dx^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}.$$

Здесь левая часть – скаляр, а правая – скалярное произведение объекта первого ранга $\partial\varphi/\partial x^\alpha$ на dx^α - произвольный вектор (точка *M′* произвольная). По теореме деления тензоров $\boldsymbol{e}^\alpha \cdot \partial\varphi/\partial x^\alpha$ есть вектор – скалярный градиент. Для него употребляется обозначение

$$\nabla\varphi \equiv grad\ \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}\boldsymbol{e}^\alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}\boldsymbol{e}_\beta.$$

Компоненты скалярного градиента есть

$$\nabla_\alpha\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha},\ \ \nabla^\beta\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}.$$

Так как $dx^\alpha = g^{\alpha\beta}\delta x_\beta,\ \ \delta x_\beta = g_{\alpha\beta}dx^\alpha$, то

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}g^{\alpha\beta},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}g_{\alpha\beta}. \tag{20}$$

Квадрат модуля скалярного градиента есть инвариант и

$$|\nabla\varphi|^2 = g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\beta} = g_{\sigma\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\tau} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}. \tag{21}$$

Итак, изменение скаляра в окрестности данной точки *M* характеризуется вектором – скалярным градиентом.

Если некоторый вектор ***a*** есть градиент скаляра, то его называют потенциальным вектором, а скаляр – потенциалом.

Пусть $\varphi(x^1, x^2, x^3) = const$ есть поверхность уровня, тогда скалярный градиент направлен по нормали к этой поверхности, поскольку

$$d\varphi = dx^\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Рассмотрим теперь однозначную дифференцируемую вектор-функцию $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(x^1, x^2, x^3)$; ее еще называют векторным полем. Приращение вектора при переходе из точки *M* в точку *M′* дается выражением:

$$d\boldsymbol{a} = dx^\alpha\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x^\alpha} = \delta x_\alpha\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x_\alpha}. \tag{22}$$

отсюда по теореме деления тензоров заключаем, что объект $e^{\alpha}(\partial a/\partial x^{\alpha})$ есть тензор 2-го ранга. Его называют векторным градиентом и обозначают символами

$$\nabla \boldsymbol{a} \equiv grad\ \boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{r}} = \boldsymbol{e}^{\alpha} \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x^{\alpha}} = \boldsymbol{e}_{\beta} \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x_{\beta}}. \tag{23}$$

Таким образом, изменение вектора в окрестности точки характеризуется тензором 2-го ранга – векторным градиентом.

Используя формулы (1), найдем

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(a^{\sigma}\boldsymbol{e}_{\sigma}) = \left(\frac{\partial a^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + a^{\sigma}\Gamma^{\beta}_{\sigma\alpha}\right)\boldsymbol{e}_{\beta} \equiv \nabla_{\alpha} a^{\beta} \boldsymbol{e}_{\beta}, \tag{24}$$

то есть

$$\nabla \boldsymbol{a} = \nabla_{\alpha} a^{\beta} \boldsymbol{e}^{\alpha} \boldsymbol{e}_{\beta}. \tag{25}$$

Величины

$$\nabla_{\alpha} a^{\beta} = \frac{\partial a^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + a^{\sigma}\Gamma^{\beta}_{\sigma\alpha} \tag{26}$$

носят название ковариантных производных от контравариантных компонент вектора и являются компонентами тензора $\nabla \boldsymbol{a}$. Для декартовой системы координат ковариантная производная совпадает с обычной производной по координате,

$$\nabla_{\alpha} a^{\beta} = \frac{\partial a^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}.$$

Если представить вектор $\boldsymbol{a}$ через его ковариантные компоненты, то получим (см. (14))

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(a_{\sigma}\boldsymbol{e}^{\sigma}) = \nabla_{\alpha} a_{\beta} \boldsymbol{e}^{\beta}, \quad \nabla \boldsymbol{a} = \nabla_{\alpha} a_{\beta} \boldsymbol{e}^{\alpha} \boldsymbol{e}^{\beta}; \tag{27}$$

$$\nabla_{\alpha} a_{\beta} = \frac{\partial a_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - a_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha}, \tag{28}$$

где последние величины называют ковариантными производными от ковариантных компонент вектора.

Используя связи (1.34) между компонентами dx^{α} и δx_{β}, можно получить еще два представления векторного градиента:

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} = \nabla^\alpha a^\sigma \boldsymbol{e}_\sigma = \nabla^\alpha a_\tau \boldsymbol{e}^\tau, \quad \nabla \boldsymbol{a} = \nabla^\alpha a^\sigma \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}_\sigma = \nabla^\alpha a_\tau \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}^\tau, \tag{29}$$

где величины

$$\nabla^\alpha a^\sigma = g^{\alpha\beta} \nabla_\beta a^\sigma, \; \nabla^\alpha a_\tau = g^{\alpha\beta} \nabla_\beta a_\tau \tag{30}$$

суть контравариантные производные от контравариантных и ковариантных компонент соответственно. На формулу (30) также можно смотреть как на операцию жонглирования индексами.

Таким образом, векторный градиент имеет следующие формы (представления):

$$\nabla \boldsymbol{a} = \nabla_\alpha a_\beta \boldsymbol{e}^\alpha \boldsymbol{e}^\beta = \nabla_\alpha a^\beta \boldsymbol{e}^\alpha \boldsymbol{e}_\beta = \nabla^\alpha a_\beta \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}^\beta = \nabla^\alpha a^\beta \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}_\beta \,. \tag{31}$$

Если $\boldsymbol{a}$ - постоянное векторное поле, то $\nabla_\alpha a_\beta = 0, \; \alpha, \beta = 1, 2, 3.$

Рассмотрим некоторые дифференциальные выражения. Первый инвариант векторного градиента называется дивергенцией вектора:

$$div\, \boldsymbol{a} \equiv \nabla_\alpha a^\alpha = \frac{\partial a^\alpha}{\partial x^\alpha} + a^\sigma \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(a^\alpha \sqrt{g}\right)}{\partial x^\alpha}, \tag{32}$$

где использовано (15).

В ортогональной системе координат, полагая $a^*_\alpha = H_\alpha a^\alpha$ и учитывая, что $\sqrt{g} = H_1 H_2 H_3$, получим из (32)

$$div\, \boldsymbol{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial(H_2 H_3 a^*_1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(H_1 H_3 a^*_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial(H_1 H_2 a^*_3)}{\partial x^3} \right). \tag{33}$$

Для декартовой системы координат y_1, y_2, y_3 имеем

$$H_1 = H_2 = H_3 = 1, \; a^*_\alpha = a_\alpha = a^\alpha,$$

и (33) упрощается

$$div\, \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x^1} + \frac{\partial a_2}{\partial x^2} + \frac{\partial a_3}{\partial x^3}.$$

Векторное поле, в каждой точке которого дивергенция вектора равна нулю, называется соленоидальным полем (вектором). Введем еще один вектор $\boldsymbol{\omega}$:

$$\omega^\alpha = e^{\alpha\beta\gamma} \, \nabla_\beta a_\gamma \,. \tag{34}$$

Он называется вихрем векторного поля и обозначается $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{rot\ a}$. Контравариантные компоненты вихря имеют вид:

$$\omega^1 = \sqrt{g_1}\left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3}\right), \omega^2 = \sqrt{g_1}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1}\right),$$

$$\omega^3 = \sqrt{g_1}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2}\right), \qquad (35)$$

поскольку члены с символами Кристоффеля взаимно уничтожаются. В ортогональной системе координат $\sqrt{g_1} = (H_1 H_2 H_3)^{-1}$ и, вводя физические компоненты вектора ω:

$$\omega_\alpha^* = H_\alpha \omega^\alpha, \;\; a_\alpha^* = a_\alpha / H_\alpha,$$

будем иметь

$$\begin{cases} \omega_1^* = \dfrac{1}{H_2 H_3}\left(\dfrac{\partial (H_3 a_3^*)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial (H_2 a_2^*)}{\partial x^3}\right), \\ \omega_2^* = \dfrac{1}{H_1 H_3}\left(\dfrac{\partial (H_1 a_1^*)}{\partial x^3} - \dfrac{\partial (H_3 a_3^*)}{\partial x^1}\right), \\ \omega_3^* = \dfrac{1}{H_1 H_2}\left(\dfrac{\partial (H_2 a_2^*)}{\partial x^1} - \dfrac{\partial (H_1 a_1^*)}{\partial x^2}\right). \end{cases} \qquad (36)$$

Для декартовой системы координат компоненты вихря равны

$$\omega_1 = \frac{\partial a_3}{\partial y^2} - \frac{\partial a_2}{\partial y^3}, \qquad \omega_2 = \frac{\partial a_1}{\partial y^3} - \frac{\partial a_3}{\partial y^1}, \qquad \omega_3 = \frac{\partial a_2}{\partial y^1} - \frac{\partial a_1}{\partial y^2}. \qquad (37)$$

Векторное поле, вихрь которого равен нулю в некоторой области, называется безвихревым. Если область односвязная, то векторное поле является безвихревым тогда и только тогда, когда оно потенциально.

Пусть векторное поле $\boldsymbol{a} = \nabla\varphi$. Его дивергенция

$$div\,\boldsymbol{a} = div\,\nabla\varphi = \nabla_\alpha \nabla^\alpha \varphi$$

обозначается специальным символом $\Delta\varphi = \nabla_\alpha \nabla^\alpha \varphi$ и называется оператором Лапласа. Из (32) следует

$$\Delta\varphi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{H_1 H_3}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\right)\right), \quad (39)$$

в частности, в декартовой системе координат оператор Лапласа имеет простое выражение:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial y^1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y^1}\right) + \frac{\partial}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y^3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y^3}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{(\partial y^1)^2} + \frac{\partial^2\varphi}{(\partial y^2)^2} + \frac{\partial^2\varphi}{(\partial y^3)^2}\,. \qquad (40)$$

Перейдем к рассмотрению тензорных полей. В произвольной системе координат функциями точки области будут как компоненты тензора, так и элементы полиад

$$T^{\alpha_1\ldots\alpha_n} = T^{\alpha_1\ldots\alpha_n}(x^1, x^2, x^3), \;\; \boldsymbol{e}_{\alpha_j} = \boldsymbol{e}_{\alpha_j}(x^1, x^2, x^3)\,.$$

Замечание 5. На самом деле тензор может зависеть и от некоторых дополнительных параметров. Изучим сначала изменение тензора 2-го ранга $\boldsymbol{T} = T^{\alpha}{}_{\beta}\boldsymbol{e}_{\alpha}\boldsymbol{e}^{\beta}$ в окрестности произвольной точки *M*. Его приращение при переходе от точки *M* к близлежащей точке *M′* есть

$$d\boldsymbol{T} = dx^{\alpha}\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial x^{\alpha}} = \delta x_{\alpha}\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial x_{\alpha}}. \qquad (41)$$

По теореме деления тензоров объект $\boldsymbol{e}^{\alpha}(\partial\boldsymbol{T}/\partial x^{\alpha})$ есть тензор 3-го ранга, называемый тензорным градиентом и обозначается символами

$$\nabla\boldsymbol{T} = \frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{e}^{\alpha}\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial x^{\alpha}} = \boldsymbol{e}_{\beta}\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial x_{\beta}}. \qquad (42)$$

Этот градиент и определяет поведение тензора 2-го ранга $\boldsymbol{T}$ в окрестности точки *M*. Получим, используя формулы (1), (14)

$$\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(T^{\beta}{}_{\gamma}\boldsymbol{e}_{\beta}\boldsymbol{e}^{\gamma}\right) =$$

$$= \frac{\partial T^{\beta}{}_{\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\boldsymbol{e}_{\beta}\boldsymbol{e}^{\gamma} + T^{\beta}{}_{\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha}\boldsymbol{e}_{\sigma}\boldsymbol{e}^{\gamma} - T^{\beta}{}_{\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\sigma}\boldsymbol{e}_{\beta}\boldsymbol{e}^{\sigma} = \nabla_{\alpha}T^{\beta}{}_{\gamma}\boldsymbol{e}_{\beta}\boldsymbol{e}^{\gamma}, \qquad (43)$$

где

$$\nabla_{\alpha}T^{\beta}{}_{\gamma} = \frac{\partial T^{\beta}{}_{\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + T^{\sigma}{}_{\gamma}\Gamma^{\beta}_{\sigma\alpha} - T^{\beta}{}_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma}, \qquad (44)$$

значит

$$\nabla\boldsymbol{T} = \nabla_{\alpha}T^{\beta}{}_{\gamma}\boldsymbol{e}^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\beta}\boldsymbol{e}^{\gamma}. \qquad (45)$$

Величины (44) суть компоненты тензорного градиента, они называются ковариантными производными от смешанных компонент тензорного градиента $\boldsymbol{T}$. В декартовой системе координат ковариантные производные совпадают с обычными:

$$\nabla_\alpha T^\beta_{\ \gamma} = \frac{\partial T^\beta_{\ \gamma}}{\partial x^\alpha}\ ,\ \ \Gamma^\beta_{\sigma\alpha} = \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}\ = 0.$$

Для другого представления тензора, например, через контравариантные компоненты, $\boldsymbol{T} = T^{\beta\gamma}\boldsymbol{e}_\beta\boldsymbol{e}_\gamma$, имеем

$$\nabla\boldsymbol{T} = \nabla_\alpha T^{\beta\gamma}\boldsymbol{e}^\alpha\boldsymbol{e}_\beta\boldsymbol{e}_\gamma,$$

где величины

$$\nabla_\alpha T^{\beta\gamma} = \frac{\partial T^{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + T^{\sigma\gamma}\Gamma^\beta_{\sigma\alpha} + T^{\beta\sigma}\Gamma^\gamma_{\sigma\alpha} \qquad (46)$$

называют ковариантными производными от контравариантных компонент тензора T. Используя второе равенство (42), находим

$$\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x_\alpha} = \nabla^\alpha T^\sigma_{\ \tau}\boldsymbol{e}_\sigma\boldsymbol{e}^\tau,\ \ \nabla^\alpha T^\sigma_{\ \tau} = g^{\alpha\beta}\nabla_\beta T^\sigma_{\ \tau},\ \ \nabla\boldsymbol{T} = \nabla^\alpha T^\sigma_{\ \tau}\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\sigma\boldsymbol{e}^\tau. \quad (47)$$

Величины $\nabla^\alpha T^\sigma_{\ \tau}$ называют контравариантными производными тензора $\boldsymbol{T}$ и выражаются через ковариантные производные с помощью операции поднятия индекса.

Аналогично могут быть получены и другие производные. Установленные выше правила дифференцирования очевидным образом обобщаются на случай тензора ранга $n > 2$. При этом тензорный градиент есть тензор порядка $n + 1$.

Можно доказать, что для метрического и дискриминантного тензоров имеют место равенства

$$\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0,\ \ \nabla_\sigma e_{\alpha\beta\gamma} = 0. \qquad (48)$$

Нетрудно убедиться, что аналогичными свойствами обладают компоненты тензоров $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{E}$ с иными строениями индексов. Другими словами, поля этих тензоров однородные, следовательно, их компоненты можно вносить и выносить за знак производной.

Введенное выше ковариантное дифференцирование обладает некоторыми свойствами обычного дифференцирования:

а) ковариантная производная суммы двух тензоров равна сумме их ковариантных производных;

б) ковариантная производная индефинитного произведения двух тензоров подчиняется обычному правилу дифференцирования произведения:

$$\nabla_\sigma\left(a^\alpha b^\beta\right) = (\nabla_\sigma a^\alpha)b^\beta + a^\alpha\left(\nabla_\sigma b^\beta\right); \tag{49}$$

в) операции ковариантного дифференцирования и свертывания перестановочны: если, например, вычислить $\nabla_\alpha T^\lambda{}_{\mu\nu}$ и свернуть по λ и μ, или сначала свернуть $T^\lambda{}_{\mu\nu}$ по λ и μ, а затем вычислить $\nabla_\alpha T^\lambda{}_{\mu\nu}$, то результаты будут одинаковы;

г) умножение (49) сначала на $g_{\alpha\beta}$, а затем на $e_{\alpha\beta\gamma}$ и суммирование по индексам α, β дает равенства (учтены свойства (48))

$$\nabla_\sigma\left(g_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta\right) = g_{\alpha\beta}(\nabla_\sigma a^\alpha)b^\beta + g_{\alpha\beta}a^\alpha\left(\nabla_\sigma b^\beta\right),$$

$$\nabla_\sigma\left(e_{\alpha\beta\gamma}a^\alpha b^\beta\right) = e_{\alpha\beta\gamma}(\nabla_\sigma a^\alpha)b^\beta - e_{\beta\alpha\gamma}a^\alpha\left(\nabla_\sigma b^\beta\right),$$

или в инвариантной форме

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = (\nabla\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} + (\nabla\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}\,.\;\; \nabla(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (\nabla\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} - (\nabla\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}. \tag{50}$$

Пусть $T^{\alpha\beta}$ - тензор 2-го ранга, а $\nabla_\sigma T^{\alpha\beta}$ - тензорный градиент. Его свертки

$$t^\alpha = \nabla_\beta T^{\alpha\beta},\;\; t'^\alpha = \nabla_\beta T^{\beta\alpha} \tag{51}$$

называются дивергенциями тензора T соответственно 1-го и 2-го рода. Они являются векторами.

Пользуясь формулой (46), получим выражения

$$t^\alpha = \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + T^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\sigma\beta} + T^{\alpha\sigma}\Gamma^\beta_{\sigma\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}\,T^{\alpha\beta}\right)}{\partial x^\beta} + T^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\,, \tag{52}$$

$$t'^\alpha = \frac{\partial T^{\beta\alpha}}{\partial x^\beta} + T^{\sigma\alpha}\Gamma^\beta_{\sigma\beta} + T^{\beta\sigma}\Gamma^\alpha_{\sigma\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}\,T^{\beta\alpha}\right)}{\partial x^\beta} + T^{\beta\sigma}\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\,, \tag{53}$$

Если тензор $\boldsymbol{T}$ симметричен, то $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$ и из (51) следует совпадение дивергенций 1-го и 2-го рода, и такому тензору соответствует только одна дивергенция. Используя симметрию $\boldsymbol{T}$ и свойства символов Кристоффеля, получим

$$t_\alpha = \nabla_\beta T_\alpha^{\ \beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(\sqrt{g} T_\alpha^{\ \beta}\right)}{\partial x^\beta} - T^{\sigma\beta}\Gamma_{\sigma\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(\sqrt{g} T_\alpha^{\ \beta}\right)}{\partial x^\beta} - \frac{1}{2} T^{\sigma\beta} \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^\alpha}; \quad (54)$$

д) для ортогональной системы координат $\sqrt{g} = H_1 H_2 H_3$

$$\frac{1}{2} T^{\sigma\beta} \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2} T^{\beta\beta} \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^\alpha} = T^{\beta\beta} H_\beta \frac{\partial H_\beta}{\partial x^\alpha} = T_\beta^{\ \beta} \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{\partial x^\alpha} = T_\beta^{\ \beta} \frac{\partial\left(\ln H_\beta\right)}{\partial x^\alpha},$$

и формулы (54) упрощаются

$$t_\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(\sqrt{g} T_\alpha^{\ \beta}\right)}{\partial x^\beta} - \sum_{\beta=1}^{3} T_\beta^{\ \beta} \frac{\partial\left(\ln H_\beta\right)}{\partial x^\alpha}. \quad (55)$$

Вводя физические компоненты $\left(T_\alpha^{\ \beta}\right)^* = H_\beta H_\alpha^{-1} T_\alpha^{\ \beta}$, будем иметь

$$t_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{H_\alpha}{H_\beta} \sqrt{g} \left(T_\alpha^{\ \beta}\right)^* \right) - \left(T_\beta^{\ \beta}\right)^* \frac{\partial\left(\ln H_\beta\right)}{\partial x^\alpha} \right], \quad (56)$$

отсюда для декартовой системы координат

$$t_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial T_\alpha^{\ \beta}}{\partial y^\beta} = \frac{\partial T_\alpha^{\ 1}}{\partial y^1} + \frac{\partial T_\alpha^{\ 2}}{\partial y^2} + \frac{\partial T_\alpha^{\ 3}}{\partial y^3}. \quad (57)$$

Если тензор 2-го ранга является шаровым: $\boldsymbol{T} = \varphi \boldsymbol{G}$, то $T_\alpha^{\ \beta} = \varphi \cdot \delta_\alpha^{\ \beta}$, где φ - скаляр и

$$t_\alpha = \nabla_\beta T_\alpha^{\ \beta} = \nabla_\beta \left(\varphi \cdot \delta_\alpha^{\ \beta}\right) = \nabla_\alpha \varphi, \quad \boldsymbol{t} = \nabla \varphi, \quad (58)$$

то есть дивергенция шарового тензора равна градиенту скаляра φ.

Возьмем теперь в качестве тензора 2-го ранга векторный градиент гладкого поля $\boldsymbol{a}$: $\boldsymbol{T} = \nabla \boldsymbol{a} = \nabla^\alpha a^\beta \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}_\beta$. Ему соответствуют векторы $\boldsymbol{T}^\beta = \nabla^\alpha a^\beta \boldsymbol{e}_\alpha$ и $\boldsymbol{T}'^\beta = \nabla^\beta a^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha = \nabla^\beta \boldsymbol{a}$. Согласно формулам (52), (53) инвариантный вид дивергенций 1-го и 2-го рода таков:

$$\boldsymbol{t} = div\,\boldsymbol{T} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}\,\boldsymbol{T}^{\beta}\right)}{\partial x^{\beta}}, \quad \boldsymbol{T}^{\beta} = T^{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_{\alpha};$$

$$\boldsymbol{t}' = div'\boldsymbol{T} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}\,\boldsymbol{T}'^{\beta}\right)}{\partial x^{\beta}}, \quad \boldsymbol{T}'^{\beta} = T^{\beta\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}. \tag{59}$$

Для рассматриваемого случая дивергенция 2-го рода тензора $\nabla\,\boldsymbol{a}$ имеет специальную структуру и обозначается

$$\Delta\boldsymbol{a} = \boldsymbol{t}' = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}\,\nabla^{\beta}\boldsymbol{a}\right)}{\partial x^{\beta}}. \tag{60}$$

Она носит название оператора Лапласа от вектора и является также вектором. Компоненты этого вектора имеют вид (см. (53))

$$\Delta a^{\alpha} = t'^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{g}\,\nabla^{\beta}a^{\alpha}\right)}{\partial x^{\beta}} + \sqrt{g}\,\nabla^{\beta}a^{\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}\right] \tag{61}$$

и для декартовой системы координат

$$\Delta a^{\alpha} = t'^{\alpha} = \frac{\partial^2 a^{\alpha}}{(\partial y^1)^2} + \frac{\partial^2 a^{\alpha}}{(\partial y^2)^2} + \frac{\partial^2 a^{\alpha}}{(\partial y^3)^2}\,. \tag{62}$$

Подобно тому, как вводились потенциальные векторы, можно ввести потенциальные тензоры. Рассмотрим скалярную функцию тензорного аргумента $f = f(\boldsymbol{T})$, где $\boldsymbol{T}$ – тензор 2-го ранга. Ее приращение при переходе от точки M к близлежащей точке M' есть

$$df = dT^{\alpha}{}_{\beta}\,\frac{\partial f}{\partial T^{\alpha}{}_{\beta}}\ .$$

Поскольку $dT^{\alpha}{}_{\beta} = dx^{\sigma}\nabla_{\sigma}T^{\alpha}{}_{\beta}$, то

$$df = dx^{\sigma}\nabla_{\sigma}T^{\alpha}{}_{\beta}\,\frac{\partial f}{\partial T^{\alpha}{}_{\beta}}. \tag{63}$$

По теореме деления тензоров объект $\partial f/\partial T^{\alpha}{}_{\beta}$ есть тензор 2-го ранга, называемый тензорным градиентом скаляра. Его обозначают так:

$$H^{\beta}{}_{\alpha} = \frac{\partial f}{\partial T^{\alpha}{}_{\beta}}, \quad \boldsymbol{H} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{T}}\,, \tag{64}$$

и тензор H называют потенциальным тензором, а f - скалярным потенциалом.

Соотношение (63) является тензорным. В системе координат $\widehat{K}(\xi^\sigma)$ оно имеет тот же вид

$$df = d\xi^\tau \widehat{\nabla}_\tau \widehat{T}^\lambda{}_\mu \frac{\partial f}{\partial \widehat{T}^\lambda{}_\mu},$$

то есть

$$\widehat{H}^\mu{}_\lambda = \frac{\partial f}{\partial \widehat{T}^\lambda{}_\mu}.$$

Если воспользоваться очевидными формулами

$$T^{\lambda\mu} = \delta^\lambda{}_\alpha T^\alpha{}_\sigma g^{\sigma\mu}, \quad \frac{\partial T^{\lambda\mu}}{\partial T^\alpha_\sigma} = \delta^\lambda{}_\alpha g^{\sigma\mu}, \quad g_{\beta\sigma} g^{\sigma\mu} = \delta^{\ \mu}_{\beta},$$

то легко получить выражения для других компонент потенциального тензора

$$H_{\beta\alpha} = \frac{\partial f}{\partial T^{\alpha\beta}}, \quad H^{\beta\alpha} = \frac{\partial f}{\partial T_{\alpha\beta}}, \quad H_\sigma{}^\alpha = \frac{\partial f}{\partial T_\alpha{}^\sigma}, \tag{65}$$

Видим, что операции поднятия и опускания индексов применимы и к потенциальным тензорам.

Пусть теперь тензор 2-го ранга $\boldsymbol{H}$ есть изотропная тензорная функция тензора 2-го ранга $\boldsymbol{T}$: $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})$.

Теорема 1.3. Для потенциальности тензора $\boldsymbol{H}$ необходимо и достаточно выполнения следующих равенств:

$$\frac{\partial H_{\beta\alpha}}{\partial T^{\lambda\mu}} = \frac{\partial H_{\lambda\mu}}{\partial T^{\alpha\beta}}, \tag{66}$$

Доказательство очевидно, так как последние соотношения являются условиями интегрируемости линейной дифференциальной формы $H_{\beta\alpha} dT^{\alpha\beta}$.

Вопросы по теоретическому материалу

1. Чем характеризуется изменение базисных векторов вдоль координатных линий и как образуются символы Кристоффеля?
2. Какими свойствами обладают символы Кристоффеля?

3. Чем отличаются производные векторов ковариантного и контравариантного базисов?

4. Что собой представляет производная скалярной функции по координатам криволинейной системы? Как образуется скалярный градиент?

5. Как дифференцируется векторная функция по координатам криволинейной системы? Как образуется векторный градиент?

6. Как образуются ковариантные и контравариантные производные от ковариантных и контравариантных компонент вектора?

7. Что называют дивергенцией вектора? Что называют вихрем (ротором) векторного поля?

8. Как определяется тензорный градиент? Что собой представляют ковариантные и контравариантные производные от компонент тензора?

9. Какими свойствами обладает ковариантное дифференцирование?

Индивидуальное задание «Векторы»

Теоретические вопросы

1. Векторы. Линейные операции над векторами: сложение векторов, умножение вектора на число, вычитание векторов.

2. Скалярное произведение векторов. Модуль вектора и его направляющие косинусы. Проекции вектора на координатные оси. Угол между векторами. Условие перпендикулярности векторов.

3. Векторное произведение векторов. Геометрический смысл векторного произведения. Условие коллинеарности векторов.

4. Смешанное произведение векторов и его свойства. Геометрический смысл смешанного произведения. Условие компланарности трех векторов.

5. Плоскость. Нормальный вектор плоскости. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости.

6. Прямая в пространстве. Направляющий вектор прямой. Уравнения прямой как пересечение плоскостей. Канонические уравнения прямой. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между прямыми. Пересечение прямой и плоскости.

Варианты заданий

Задача 1. Написать разложение вектора $\boldsymbol{x}$ по векторам $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$.				
1.1.	$\boldsymbol{x}=(-2, 4, 7)$	$\boldsymbol{p}=(0, 1, 2)$	$\boldsymbol{q}=(1, 0, 1)$	$\boldsymbol{r}=(-1, 2, 4)$
1.2.	$\boldsymbol{x}=(6, 12, -1)$	$\boldsymbol{p}=(1, 3, 0)$	$\boldsymbol{q}=(2, -1, 1)$	$\boldsymbol{r}=(0, -1, 2)$
1.3	$\boldsymbol{x}=(1, -4, 4)$	$\boldsymbol{p}=(2, 1, -1)$	$\boldsymbol{q}=(0, 3, 2)$	$\boldsymbol{r}=(1, -1, 1)$
1.4	$\boldsymbol{x}=(-9, 5, 5)$	$\boldsymbol{p}=(4, 1, 1)$	$\boldsymbol{q}=(2, 0, -3)$	$\boldsymbol{r}=(-1, 2, 1)$
1.5	$\boldsymbol{x}=(-5, -5, 5)$	$\boldsymbol{p}=(-2, 0, 1)$	$\boldsymbol{q}=(1, 3, -1)$	$\boldsymbol{r}=(0, 4, 1)$
1.6	$\boldsymbol{x}=(13, 2, 7)$	$\boldsymbol{p}=(5, 1, 0)$	$\boldsymbol{q}=(2, -1, 3)$	$\boldsymbol{r}=(1, 0, -1)$
1.7	$\boldsymbol{x}=(-19, -1, 7)$	$\boldsymbol{p}=(0, 1, 1)$	$\boldsymbol{q}=(-2, 0, 1)$	$\boldsymbol{r}=(3, 1, 0)$
1.8	$\boldsymbol{x}=(3, -3, 4)$	$\boldsymbol{p}=(1, 0, 2)$	$\boldsymbol{q}=(0, 1, 1)$	$\boldsymbol{r}=(2, -1, 4)$
1.9	$\boldsymbol{x}=(3, 3, -1)$	$\boldsymbol{p}=(3, 1, 0)$	$\boldsymbol{q}=(-1, 2, 1)$	$\boldsymbol{r}=(-1, 0, 2)$
1.10	$\boldsymbol{x}=(-1, 7, -4)$	$\boldsymbol{p}=(-1, 2, 1)$	$\boldsymbol{q}=(2, 0, 3)$	$\boldsymbol{r}=(1, 1, -1)$
1.11	$\boldsymbol{x}=(6, 5, -14)$	$\boldsymbol{p}=(1, 1, 4)$	$\boldsymbol{q}=(0, -3, 2)$	$\boldsymbol{r}=(2, 1, -1)$
1.12	$\boldsymbol{x}=(6, -1, 7)$	$\boldsymbol{p}=(1, -2, 0)$	$\boldsymbol{q}=(-1, 1, 3)$	$\boldsymbol{r}=(1, 0, 4)$
1.13	$\boldsymbol{x}=(5, 15, 0)$	$\boldsymbol{p}=(1, 0, 5)$	$\boldsymbol{q}=(-1, 3, 2)$	$\boldsymbol{r}=(0, -1, 1)$
1.14	$\boldsymbol{x}=(2, -1, 11)$	$\boldsymbol{p}=(1, 1, 0)$	$\boldsymbol{q}=(0, 1, -2)$	$\boldsymbol{r}=(1, 0, 3)$
1.15	$\boldsymbol{x}=(11, 5, -3)$	$\boldsymbol{p}=(1, 0, 2)$	$\boldsymbol{q}=(-1, 0, 1)$	$\boldsymbol{r}=(2, 5, -3)$
1.16	$\boldsymbol{x}=(8, 0, 5)$	$\boldsymbol{p}=(2, 0, 1)$	$\boldsymbol{q}=(1, 1, 0)$	$\boldsymbol{r}=(4, 1, 2)$

Задача 2. Найти косинус угла между векторами $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{AC}$.			
2.1	$A(1, -2, 3)$	$B(0, -1, 2)$	$C(3, -4, 5)$
2.2	$A(0, -3, 6)$	$B(-12, -3, -3)$	$C(-9, -3, -6)$
2.3	$A(3, 3, -1)$	$B(5, 5, -2)$	$C(4, 1, 1)$

2.4	$A(-1, 2,-3)$	$B(3, 4,-6)$	$C(1, 1,-1)$
2.5	$A(-4,-2, 0)$	$B(-1,-2, 4)$	$C(3,-2, 1)$
2.6	$A(5, 3,-1)$	$B(5, 2, 0)$	$C(6, 4,-1)$
2.7	$A(-3,-7,-6)$	$B(0,-1,-2)$	$C(2, 3, 0)$
2.8	$A(2,-4, 6)$	$B(0,-2, 4)$	$C(6,-8, 10)$
2.9	$A(0, 1,-2)$	$B(3, 1, 2)$	$C(4, 1, 1)$
2.10	$A(3, 3,-1)$	$B(1, 5,-2)$	$C(4, 1, 1)$
2.11	$A(2, 1,-1)$	$B(6,-1,-4)$	$C(4, 2, 1)$
2.12	$A(-1,-2, 1)$	$B(-4,-2, 5)$	$C(-8,-2, 2)$
2.13	$A(6, 2,-3)$	$B(6, 3,-2)$	$C(7, 3,-3)$
2.14	$A(0, 0, 4)$	$B(-3,-6, 1)$	$C(-5,-10,-1)$
2.15	$A(2,-8,-1)$	$B(4,-6, 0)$	$C(-2,-5,-1)$
2.16	$A(3,-6, 9)$	$B(0,-3, 6)$	$C(9,-12, 15)$

Задача 3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах ***a*** и ***b***.					
3.1.	$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} + 2\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}$	$\lvert\boldsymbol{p}\rvert = 1$	$\lvert\boldsymbol{q}\rvert = 2$	$(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q}) = \pi/6$
3.2.	$\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{p} - 2\boldsymbol{q}$	$\lvert\boldsymbol{p}\rvert = 4$	$\lvert\boldsymbol{q}\rvert = 1$	$(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q}) = \pi/4$
3.3	$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} - 3\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{p} + 2\boldsymbol{q}$	$\lvert\boldsymbol{p}\rvert = 1/5$	$\lvert\boldsymbol{q}\rvert = 1$	$(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q}) = \pi/2$
3.4	$\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{p} - 2\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{p} + 5\boldsymbol{q}$	$\lvert\boldsymbol{p}\rvert = 4$	$\lvert\boldsymbol{q}\rvert = 1/2$	$(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q}) = 5\pi/6$
3.5	$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} - 2\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$	$\lvert\boldsymbol{p}\rvert = 2$	$\lvert\boldsymbol{q}\rvert = 3$	$(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q}) = 3\pi/4$
3.6	$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} + 3\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{p} - 2\boldsymbol{q}$	$\lvert\boldsymbol{p}\rvert = 2$	$\lvert\boldsymbol{q}\rvert = 3$	$(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q}) = \pi/3$
3.7	$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{p} + 3\boldsymbol{q}$	$\lvert\boldsymbol{p}\rvert = 3$	$\lvert\boldsymbol{q}\rvert = 2$	$(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q}) = \pi/2$
3.8	$\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}$	$\lvert\boldsymbol{p}\rvert = 7$	$\lvert\boldsymbol{q}\rvert = 2$	$(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q}) = \pi/4$
3.9	$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} - 4\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$	$\lvert\boldsymbol{p}\rvert = 1$	$\lvert\boldsymbol{q}\rvert = 2$	$(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q}) = \pi/6$
3.10	$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} + 4\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}$	$\lvert\boldsymbol{p}\rvert = 7$	$\lvert\boldsymbol{q}\rvert = 2$	$(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q}) = \pi/3$

3.11	$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$	$\lvert\boldsymbol{p}\rvert=10$	$\lvert\boldsymbol{q}\rvert=1$	$(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q})=\pi/2$
3.12	$\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}$	$\lvert\boldsymbol{p}\rvert=5$	$\lvert\boldsymbol{q}\rvert=4$	$(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q})=\pi/4$
3.13	$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{p}+3\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}-2\boldsymbol{q}$	$\lvert\boldsymbol{p}\rvert=6$	$\lvert\boldsymbol{q}\rvert=7$	$(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q})=\pi/3$
3.14	$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}$	$\lvert\boldsymbol{p}\rvert=3$	$\lvert\boldsymbol{q}\rvert=4$	$(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q})=\pi/3$
3.15	$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{p}+3\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}-2\boldsymbol{q}$	$\lvert\boldsymbol{p}\rvert=2$	$\lvert\boldsymbol{q}\rvert=3$	$(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q})=\pi/4$
3.16	$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{p}-3\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$	$\lvert\boldsymbol{p}\rvert=4$	$\lvert\boldsymbol{q}\rvert=1$	$(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q})=\pi/6$

Задача 4. Компланарны ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$?			
4.1.	$\boldsymbol{a}=(2, 3, 1)$	$\boldsymbol{b}=(-1, 0, -1)$	$\boldsymbol{c}=(2, 2, 2)$
4.2.	$\boldsymbol{a}=(3, 2, 1)$	$\boldsymbol{b}=(2, 3, 4)$	$\boldsymbol{c}=(3, 1, -1)$
4.3	$\boldsymbol{a}=(1, 5, 2)$	$\boldsymbol{b}=(-1, 1, -1)$	$\boldsymbol{c}=(1, 1, 1)$
4.4	$\boldsymbol{a}=(1, -1, -3)$	$\boldsymbol{b}=(3, 2, 1)$	$\boldsymbol{c}=(2, 3, 4)$
4.5	$\boldsymbol{a}=(3, 3, 1)$	$\boldsymbol{b}=(1, -2, 1)$	$\boldsymbol{c}=(1, 1, 1)$
4.6	$\boldsymbol{a}=(3, 1, -1)$	$\boldsymbol{b}=(-2, -1, 0)$	$\boldsymbol{c}=(5, 2, -1)$
4.7	$\boldsymbol{a}=(4, 3, 1)$	$\boldsymbol{b}=(1, -2, 1)$	$\boldsymbol{c}=(2, 2, 2)$
4.8	$\boldsymbol{a}=(4, 3, 1)$	$\boldsymbol{b}=(6, 7, 4)$	$\boldsymbol{c}=(2, 0, -1)$
4.9	$\boldsymbol{a}=(3, 2, 1)$	$\boldsymbol{b}=(1, -3, -7)$	$\boldsymbol{c}=(1, 2, 3)$
4.10	$\boldsymbol{a}=(3, 7, 2)$	$\boldsymbol{b}=(-2, 0, -1)$	$\boldsymbol{c}=(2, 2, 1)$
4.11	$\boldsymbol{a}=(1, -2, 6)$	$\boldsymbol{b}=(1, 0, 1)$	$\boldsymbol{c}=(2, -6, 17)$
4.12	$\boldsymbol{a}=(6, 3, 4)$	$\boldsymbol{b}=(-1, -2, -1)$	$\boldsymbol{c}=(2, 1, 2)$
4.13	$\boldsymbol{a}=(7, 3, 4)$	$\boldsymbol{b}=(-1, -2, -1)$	$\boldsymbol{c}=(4, 2, 4)$
4.14	$\boldsymbol{a}=(2, 3, 2)$	$\boldsymbol{b}=(4, 7, 5)$	$\boldsymbol{c}=(2, 0, -1)$
4.15	$\boldsymbol{a}=(5, 3, 4)$	$\boldsymbol{b}=(-1, 0, -1)$	$\boldsymbol{c}=(4, 2, 4)$
4.16	$\boldsymbol{a}=(3, 10, 5)$	$\boldsymbol{b}=(-2, -2, -3)$	$\boldsymbol{c}=(2, 4, 3)$

Задача 5. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

5.1.	$A_1(1, 3, 6)$	$A_2(2, 2, 1)$	$A_3(-1, 0, 1)$	$A_4(-4, 6, -3)$
5.2	$A_1(-4, 2, 6)$	$A_2(2, -3, 0)$	$A_3(-10, 5, 8)$	$A_4(-5, 2, -4)$
5.3	$A_1(7, 2, 4)$	$A_2(7, -1, -2)$	$A_3(3, 3, 1)$	$A_4(-4, 2, 1)$
5.4	$A_1(2, 1, 4)$	$A_2(-1, 5, -2)$	$A_3(-7, -3, 2)$	$A_4(-6, -3, 6)$
5.5	$A_1(-1, -5, 2)$	$A_2(-6, 0, -3)$	$A_3(3, 6, -3)$	$A_4(-10, 6, 7)$
5.6	$A_1(0, -1, -1)$	$A_2(-2, 3, 5)$	$A_3(1, -5, -9)$	$A_4(-1, -6, 3)$
5.7	$A_1(5, 2, 0)$	$A_2(2, 5, 0)$	$A_3(1, 2, 4)$	$A_4(-1, 1, 1)$
5.8	$A_1(2, -1, -2)$	$A_2(1, 2, 1)$	$A_3(5, 0, -6)$	$A_4(-10, 9, -7)$
5.9	$A_1(-2, 0, -4)$	$A_2(-1, 7, 1)$	$A_3(4, -8, -4)$	$A_4(1, -4, 6)$
5.10	$A_1(14, 4, 5)$	$A_2(-5, -3, 2)$	$A_3(-2, -6, -3)$	$A_4(-2, 2, -1)$
5.11	$A_1(1, 2, 0)$	$A_2(3, 0, -3)$	$A_3(5, 2, 6)$	$A_4(8, 4, -9)$
5.12	$A_1(2, -1, 2)$	$A_2(1, 2, -1)$	$A_3(3, 2, 1)$	$A_4(-4, 2, 5)$
5.13	$A_1(1, 1, 2)$	$A_2(-1, 1, 3)$	$A_3(2, -2, 4)$	$A_4(-1, 0, -2)$
5.14	$A_1(2, 3, 1)$	$A_2(4, 1, -2)$	$A_3(6, 3, 7)$	$A_4(7, 5, -3)$
5.15	$A_1(1, 1, -1)$	$A_2(2, 3, 1)$	$A_3(3, 2, 1)$	$A_4(5, 9, -8)$
5.16	$A_1(1, 5, -7)$	$A_2(-3, 6, 3)$	$A_3(-2, 7, 3)$	$A_4(-4, 8, -12)$

Задача 6. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3.				
6.1	$M_1(-3, 4, -7)$	$M_2(1, 5, -4)$	$M_3(-5, -2, 0)$	$M_0(-12, 7, -1)$
6.2	$M_1(-1, 2, -3)$	$M_2(4, -1, 0)$	$M_3(2, 1, -2)$	$M_0(1, -6, -5)$
6.3	$M_1(-3, -1, 1)$	$M_2(-9, 1, -2)$	$M_3(3, -5, 4)$	$M_0(-7, 0, -1)$
6.4	$M_1(1, -1, 1)$	$M_2(-2, 0, 3)$	$M_3(2, 1, -1)$	$M_0(-2, 4, 2)$
6.5	$M_1(1, 2, 0)$	$M_2(1, -1, 2)$	$M_3(0, 1, -1)$	$M_0(2, -1, 4)$
6.6	$M_1(1, 0, 2)$	$M_2(1, 2, -1)$	$M_3(2, -2, 1)$	$M_0(-5, -9, 1)$
6.7	$M_1(1, 2, -3)$	$M_2(1, 0, 1)$	$M_3(-2, -1, 6)$	$M_0(3, -2, -9)$
6.8	$M_1(3, 10, -1)$	$M_2(-2, 3, -5)$	$M_3(-6, 0, -3)$	$M_0(-6, 7, -10)$

6.9	$M_1(-1, 2, 4)$	$M_2(-1, -2, -4)$	$M_3(3, 0, -1)$	$M_0(-2, 3, 5)$
6.10	$M_1(0, -3, 1)$	$M_2(-4, 1, 2)$	$M_3(2, -1, 5)$	$M_0(-3, 4, -5)$
6.11	$M_1(1, 3, 0)$	$M_2(4, -1, 2)$	$M_3(3, 0, 1)$	$M_0(4, 3, 0)$
6.12	$M_1(-2, -1, -1)$	$M_2(0, 3, 2)$	$M_3(3, 1, -4)$	$M_0(-2, 4, 2)$
6.13	$M_1(-3, -5, 6)$	$M_2(2, 1, -4)$	$M_3(0, -3, -1)$	$M_0(3, 6, 68)$
6.14	$M_1(2, -4, -3)$	$M_2(5, -6, 0)$	$M_3(-1, 3, -3)$	$M_0(2, -10, 8)$
6.15	$M_1(1, -1, 2)$	$M_2(2, 1, 2)$	$M_3(1, 1, 4)$	$M_0(-3, 2, 7)$
6.16	$M_1(1, 3, 6)$	$M_2(2, 2, 1)$	$M_3(-1, 0, 1)$	$M_0(5, -4, 5)$

Задача 7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору ВС.			
7.1	$A(1, 0, -2)$	$B(2, -1, 3)$	$C(0, -3, 2)$
7.2	$A(-1, 3, 4)$	$B(-1, 5, 0)$	$C(2, 6, 1)$
7.3	$A(4, -2, 0)$	$B(1, -1, -5)$	$C(-2, 1, -3)$
7.4	$A(-8, 0, 7)$	$B(-3, 2, 4)$	$C(-1, 4, 5)$
7.5	$A(7, -5, 1)$	$B(5, -1, -3)$	$C(3, 0, -4)$
7.6	$A(-3, 5, -2)$	$B(-4, 0, 3)$	$C(-3, 2, 5)$
7.7	$A(1, -1, 8)$	$B(-4, -3, -10)$	$C(-1, -1, 7)$
7.8	$A(-2, 0, -5)$	$B(2, 7, -3)$	$C(1, 10, -1)$
7.9	$A(1, 9, -4)$	$B(5, 7, 1)$	$C(3, 5, 0)$
7.10	$A(-7, 0, 3)$	$B(1, -5, -4)$	$C(2, -3, 0)$
7.11	$A(0, -3, 5)$	$B(-7, 2, 6)$	$C(-3, 2, 4)$
7.12	$A(5, -1, 2)$	$B(2, -4, 3)$	$C(4, -1, 3)$
7.13	$A(-3, 7, 2)$	$B(3, 5, 1)$	$C(4, 5, 3)$
7.14	$A(0, -2, 8)$	$B(4, 3, 2)$	$C(1, 4, 3)$
7.15	$A(1, -1, 5)$	$B(0, 7, 8)$	$C(-1, 3, 8)$
7.16	$A(-10, 0, 9)$	$B(12, 4, 11)$	$C(8, 5, 15)$

Задача 8. Найти угол между плоскостями.		
8.1.	$x-3y+5=0$	$2x-y+5z-16=0$
8.2.	$x-3y+z-1=0$	$x+z-1=0$
8.3	$4x-5y+3z-1=0$	$x-4y-z+9=0$
8.4	$3x-y+2z+15=0$	$5x+9y-3z-1=0$
8.5	$6x+2y-4z+17=0$	$9x+3y-6z-4=0$
8.6	$x-y\sqrt{2}+z-1=0$	$x+y\sqrt{2}-z+3=0$
8.7	$3y-z=0$	$2y+z=0$
8.8	$6x+3y-2z=0$	$x+2y+6z-12=0$
8.9	$x+2y+2z-3=0$	$16x+12y-15z-1=0$
8.10	$2x-y+5z+16=0$	$x+2y+3z+8=0$
8.11	$2x+2y+z-1=0$	$x+z-1=0$
8.12	$3x+y+z-4=0$	$y+z+5=0$
8.13	$3x-2y-2z-16=0$	$x+y-3z-7=0$
8.14	$2x+2y+z+9=0$	$x-y+3z-1=0$
8.15	$x+2y+2z-3=0$	$2x-y+2z+5=0$
8.16	$3x+2y-3z-1=0$	$x+y+z-7=0$

Задача 9. Найти координаты точки A, равноудаленной от точек B и C.			
9.1	$A(0, 0, z)$	$B(5, 1, 0)$	$C(0, 2, 3)$
9.2	$A(0, 0, z)$	$B(3, 3, 1)$	$C(4, 1, 2)$
9.3	$A(0, 0, z)$	$B(3, 1, 3)$	$C(1, 4, 2)$
9.4	$A(0, 0, z)$	$B(-1, -1, -6)$	$C(2, 3, 5)$
9.5	$A(0, 0, z)$	$B(-13, 4, 6)$	$C(10, -9, 5)$
9.6	$A(0, 0, z)$	$B(-5, -5, 6)$	$C(-7, 6, 2)$
9.7	$A(0, 0, z)$	$B(-18, 1, 0)$	$C(15, -10, 2)$

9.8	$A(0, 0, z)$	$B(10, 0, -2)$	$C(9, -2, 1)$
9.9	$A(0, 0, z)$	$B(-6, 7, 5)$	$C(8, -4, 3)$
9.10	$A(0, 0, z)$	$B(6, -7, 1)$	$C(-1, 2, 5)$
9.11	$A(0, 0, z)$	$B(7, 0, -15)$	$C(2, 10, -12)$
9.12	$A(0, y, 0)$	$B(3, 0, 3)$	$C(0, 2, 4)$
9.13	$A(0, y, 0)$	$B(1, 6, 4)$	$C(5, 7, 1)$
9.14	$A(0, y, 0)$	$B(-2, 8, 10)$	$C(6, 11, -2)$
9.15	$A(0, y, 0)$	$B(-2, -4, 6)$	$C(7, 2, 5)$
9.16	$A(0, y, 0)$	$B(2, 2, 4)$	$C(0, 4, 2)$

Задача 10. Написать канонические уравнения прямой.		
10.1.	$2x+y+z-2=0$	$2x-y-3z+6=0$
10.2.	$x-3y+2z+2=0$	$x+3y+z+14=0$
10.3	$x-2y+z-4=0$	$2x+2y-z-8=0$
10.4	$x+y+z-2=0$	$x-y-2z+2=0$
10.5	$2x+3y+z+6=0$	$x-3y-2z+3=0$
10.6	$3x+y-z-6=0$	$3x-y+2z=0$
10.7	$x+5y+2z+11=0$	$x-y-z-1=0$
10.8	$3x+4y-2z+1=0$	$2x-4y+3z+4=0$
10.9	$5x+y-3z+4=0$	$x-y+2z+2=0$
10.10	$x-y-z-2=0$	$x-2y+z+4=0$
10.11	$4x+y-3z+2=0$	$2x-y+z-8=0$
10.12	$3x+3y-2z-1=0$	$2x-3y+z+6=0$
10.13	$6x-7y-4z-2=0$	$x+7y-z-5=0$
10.14	$8x-y-3z-1=0$	$x+y+z+10=0$
10.15	$6x-5y-4z+8=0$	$6x+5y+3z+4=0$
10.16	$x+5y-z-5=0$	$2x-5y+2z+5=0$

Задача 11. Найти точки пересечения прямой и плоскости.		
11.1.	$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4}$	$x+2y+3z-14=0$
11.2.	$\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{5}$	$x+2y-5z+20=0$
11.3	$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{2}$	$x-3y+7z-24=0$
11.4	$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{2}$	$2x-y+4z=0$
11.5	$\frac{x-5}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{0}$	$3x+y-5z-12=0$
11.6	$\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-2}$	$x+3y-5z+9=0$
11.7	$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}$	$x-2y+5z+17=0$
11.8	$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-4}{1}$	$x-2y+4z-19=0$
11.9	$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{-1}$	$2x-y+3z+23=0$
11.10	$\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{0}$	$2x-3y-5z-7=0$
11.11	$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+2}{3}$	$4x+2y-z-11=0$
11.12	$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{-1}$	$3x-2y-4z-8=0$
11.13	$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{2}$	$x+2y-z-2=0$
11.14	$\frac{x+3}{1}=\frac{x-2}{-5}=\frac{y+2}{3}$	$5x-y+4z+3=0$
11.15	$\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3}$	$x+3y+5z-42=0$
11.16	$\frac{x-3}{-1}=\frac{y-4}{5}=\frac{z-4}{2}$	$7x+y+4z-47=0$

Рабочие формулы и указания к выполнению заданий.

К задаче 1. Разложить вектор $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$ по векторам $\boldsymbol{p}=(p_1, p_2, p_3)$, $\boldsymbol{q}=(q_1, q_2, q_3)$, $\boldsymbol{r}=(r_1, r_2, r_3)$ − это значит представить его в виде:

$$\boldsymbol{x}=\alpha\ \boldsymbol{p}+\beta\,\boldsymbol{q}+\gamma\,\boldsymbol{r}\,, \tag{1}$$

где коэффициенты α, β, γ определяются как решение системы линейных алгебраических уравнений:

$$p_1\alpha+q_1\beta+r_1\gamma=x_1\ ,$$
$$p_2\alpha+q_2\beta+r_2\gamma=x_2\ ,$$
$$p_3\alpha+q_3\beta+r_3\gamma=x_3\ .$$

В ответе необходимо указать значения коэффициентов α, β, γ или выписать конкретное разложение (1).

К задаче 2. Косинус угла α между векторами $\boldsymbol{AB}=(b_1, b_2, b_3)$ и $\boldsymbol{AC}=(c_1, c_2, c_3)$ находится из определения скалярного произведения векторов:

$$\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{AC}=|\boldsymbol{AB}|\,|\boldsymbol{AC}|\,Cos\alpha\,,$$

с учетом представления скалярного произведения в координатной форме,

$$\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{AC}=b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3,$$

и модулей векторов:

$$|\boldsymbol{AB}|=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\ ,\quad |\boldsymbol{AC}|=\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}\ .$$

К задаче 3. Площадь параллелограмма находится как модуль векторного произведения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$,

$$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\ ;$$

векторное произведение $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ нужно суметь выразить через векторное произведение векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, модуль которого находится непосредственно из определения,

$$|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}|=|\boldsymbol{p}|\,|\boldsymbol{q}|\,Sin(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q}),$$

где $(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q})$ − заданный угол между векторами $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$.

К задаче 4. Условием компланарности векторов $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$ и $\boldsymbol{c}=(c_1, c_2, c_3)$ является равенство нулю их смешанного произведения, $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}=0$. Смешанное произведение векторов в проекциях выражается определителем:

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

К задаче 5. Объем V_m тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 составляет шестую часть объема V_n параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{A_1A_2}=(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{A_1A_3}=(b_1, b_2, b_3)$, $\boldsymbol{A_1A_4}=(c_1, c_2, c_3)$,

$$V_m=\frac{1}{6}\,V_n.$$

Объем V_n параллелепипеда выражает геометрический смысл смешанного произведения векторов $\boldsymbol{A_1A_2}$, $\boldsymbol{A_1A_3}$, $\boldsymbol{A_1A_4}$,

$$V_n=\left|\boldsymbol{A_1A_2}\cdot\boldsymbol{A_1A_3}\cdot\boldsymbol{A_1A_4}\right|=\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}\right\|.$$

Далее заметим, что высота тетраэдра совпадает с соответствующей высотой параллелепипеда. Для определения высоты h_4, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$, нужно рассмотреть площадь параллелограмма S_n, построенного на векторах $\boldsymbol{A_1A_2}$, $\boldsymbol{A_1A_3}$,

$$S_n=\left|\boldsymbol{A_1A_2}\times\boldsymbol{A_1A_3}\right|=\left\|\begin{matrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}\right\|,$$

и использовать известную формулу:

$$V_n=S_n\cdot h_4.$$

К задаче 6. Сначала нужно составить уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

привести его к общему виду,

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

а затем использовать формулу расстояния от точки M0(x0, y0, z0) до этой плоскости,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

<u>К задаче 7.</u> Сначала находится вектор $\boldsymbol{BC} = (\alpha, \beta, \gamma)$, для искомой плоскости он является нормальным. Затем составляется уравнение плоскости, проходящей через данную точку $A(x_0, y_0, z_0)$,

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0.$$

Его необходимо привести к общему виду.

<u>К задаче 8.</u> Угол между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ определяется как угол между их нормальными векторами $\boldsymbol{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\boldsymbol{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$. Далее использовать указания к задаче 2.

<u>К задаче 9.</u> Неизвестная координата точки A определяется из условия равенства расстояний, $AB = AC$. Используется формула расстояния между двумя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$,

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

<u>К задаче 10.</u> Канонические уравнения прямой имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z},$$

где x_0, y_0, z_0 – координаты одной из точек M_0, через которую проходит прямая; a_x, a_y, a_z – проекции направляющего вектора $\boldsymbol{a}$ прямой. Искомая прямая является линией пересечения двух данных плоскостей:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0;$$

Координаты точки M_0 находится как одно из решений системы двух последних уравнений. Например, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

полагая $z = 0$, разрешаем систему уравнений относительно переменных $x=x_0$, $y=y_0$.

Направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ прямой находится как вектор, перпендикулярный нормальным векторам $\boldsymbol{N_1} = (A_1, B_1, C_1)$ и $\boldsymbol{N_2} = (A_2, B_2, C_2)$, а именно

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{N_1} \times \boldsymbol{N_2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

<u>К задаче 11.</u> Для того, чтобы найти точку M_1 (x_1, y_1, z_1) пересечения прямой с плоскостью, необходимо совместно разрешить уравнения прямой и плоскости. Это проще всего сделать переходом к параметрическим уравнениям прямой, вводя параметр t,

$$\frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{a_y} = \frac{z-z_0}{a_z} = t,$$

и выражая отсюда x, y, z через параметр t. Далее подставить эти выражения в уравнение плоскости,

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

найти сначала значение t_1 параметра t, соответствующее точке пересечения прямой с плоскостью, а уже затем восстановить координаты x_1, y_1, z_1 этой точки.

Индивидуальное задание «Кратные интегралы. Элементы теории поля»

Задание

1. Изменить порядок интегрирования.
2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.
3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями.
4. Найти площадь поверхности, отсекаемую поверхностями.
5. Найти координаты центра масс фигуры, ограниченной линиями.
6. Вычислить криволинейные интегралы.
7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями.
8. Переходя к сферическим координатам, вычислить интеграл.
9. Переходя к цилиндрическим координатам, вычислить интеграл.
10. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}$ по внешней стороне замкнутой поверхности S по формуле Остроградского - Гаусса и непосредственно.
11. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру L по формуле Стокса и непосредственно.

Варианты заданий

№	Вариант 1	Вариант 2
1.	$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{2-y^2} f(x,y)dx$	$\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{3}{2}\sqrt{y}}^{\sqrt{25y-y^2}} f(x,y)dx$
2.	$y = x^2 - 3x;\ 3x + y - 4 = 0$	$y = x^2;\ y + x = 2$
3.	$z = 4 - x^2;\ z = 0;\ x^2 + y^2 = 4$	$z = y;\ z = 0;\ y^2 = 4 - x;\ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
4.	$x^2 + z^2 = 1;\ y = x;\ y = 0$	$y^2 + z^2 = x^2;\ x^2 + y^2 \le a^2$
5.	$y = \frac{1}{9}x^2;\ y = \frac{1}{3}x + 2$	$y = \frac{x^2}{2};\ y = 4 - x$
6.	а) $\int\limits_L \frac{ds}{x^2 - y};\ L: y = \frac{1}{3}x + 2;\ 1 \le x \le 3$ б) $\int\limits_L (x^2 - 2xy)dx + (2x + y^2)dy$ $L: y^2 = x + 2;\ -1 \le x \le 2$	а) $\int\limits_L -ydx + xdy$ $L: x = \frac{t}{1+t^3};\ y = \frac{t^2}{1+t^3};\ 0 \le t \le 1$ б) $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}ds;\ L: x^2 + y^2 = ax$
7.	$z = \sqrt{1-y};\ z = 0;\ y = x^2$	$z = x^2 + y^2;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0;\ y + x = 1$
8.	$\iiint\limits_V x^2 dv$; $V: x^2 + y^2 + z^2 = 1;\ y \ge 0;\ z \ge 0$	$\iiint\limits_V \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}dv$ $V: x^2 + y^2 + z^2 \le 1$
9.	$\iiint\limits_V (x^2 + y^2)dv;\ V: z = x^2 + y^2;\ z = 4$	$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dv$; $V: z = x^2 + y^2;\ z = 1$
10.	$\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + (x - y - z)\boldsymbol{j} + (3y + 2z)\boldsymbol{k}$ $S: x + y + 2z = 2;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$	$\boldsymbol{F} = (2x + y)\boldsymbol{i} + (x - 2z)\boldsymbol{j} + (x - 2y - z)\boldsymbol{k}$ $S: 2x + y + 2z = 2;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$
11.	$\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ $L: z = 2(1 - x^2 - y^2);\ z = 0$	$\boldsymbol{F} = (x + z^2)\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + 2x\boldsymbol{k}$ $L: 3x + 2y + z = 2;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$

№	Вариант 3	Вариант 4
1.	$\int_0^4 dx \int_{2-\frac{1}{2}x}^{8-\frac{1}{2}x^2} f(x, y)dy$	$\int_0^{3/2} dy \int_{2y^2}^{y+3} f(x, y)dx$
2.	$y = 1 - x^2;\ 2x - y + 1 = 0$	$y = x^2 - 3x;\ y = 4 - 3x$
3.	$x = 1 - z^2;\ y = x;\ y = -x$	$z = x^2 + y^2;\ x + y = 3;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$
4.	$2z = x^2 + y^2;\ x^2 + y^2 \le 4$	$x^2 + y^2 + z^2 = R^2;\ x^2 + y^2 \le Rx$
5.	$y = x^2 + 2x;\ y = 4 - x$	$y = x^2 + 2x;\ y = 4 - x$
6.	а) $\int_L \frac{ds}{x^2 - y^2};\ L: y = 4x;\ \frac{1}{2} \le x \le 1$ б) $\int_{AB} (3x^2y + 1)dx + (x^3 - 2)dy$ $AB: y = kx + b;\ A(1;\ 2);\ B(3;\ 6)$	а) $\int_L (y^2 - x)dx + (x^2 + y^2)dy$ $L: y = x^3 - 1;\ 0 \le x \le 2$ б) $\int_L xyds;\ L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;\ x \ge 0;\ y \ge 0$
7.	$z = 2x;\ x + y = 3;\ z = 0;\ y = 2x^2;\ x = \frac{1}{2}$	$z = x^2 + y^2;\ x^2 + y^2 = x;\ z = 0$
8.	$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dv$ $V: x^2 + y^2 + z^2 = R^2;\ z \ge 0$	$\iiint_V x^2dxdydz$; $V: x^2 + y^2 + z^2 = R^2;\ x \ge 0;\ z \ge 0$
9.	$\iiint_V dv; V: z = \frac{x^2 + y^2}{2};\ z = 2;\ x = 0;\ y = 0$	$\iiint_V dv; V: x^2 + y^2 = x;\ z = x^2 + y^2;\ z = 0$
10.	$\boldsymbol{F} = (z + y)\boldsymbol{i} + (x + 2y)\boldsymbol{j} + (y + z)\boldsymbol{k}$ $S: 2x + y + 2z = 2;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$	$\boldsymbol{F} = (y + \sqrt{z})\boldsymbol{i} + 3x\boldsymbol{j} + (3z + 5x)\boldsymbol{k}$ $S: 8(x^2 + y^2) = z^2;\ z = 2$
11.	$\boldsymbol{F} = (z + y)\boldsymbol{i} + (x + 2y)\boldsymbol{j} + (y + z)\boldsymbol{k}$ $L: 2x + y + 2z = 4;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$	$\boldsymbol{F} = xz\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ $L: x^2 + y^2 + z^2 = 4;\ z = 1$

№	Вариант 5	Вариант 6
1.	$\int_0^1 dy \int_{2y^2}^{3-y} f(x, y)dx$	$\int_{-3/2}^0 dx \int_{2x^2}^{3-x} f(x, y)dy$
2.	$y = x^2 + 2;\ y = 4 - x^2$	$y = \frac{1}{9}x^2;\ y = \frac{1}{3}x + 2$
3.	$z = 2x^2 + y^2 + 1;\ x + y = 1;$ $x = 0;\ y = 0;\ z = 0$	$z = 3y;\ y = \sqrt{9 - x^2};\ x > 0;\ y > 0;\ z > 0$
4.	$x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2;\ x^2 + y^2 = 2az$	$x + z = 1;\ y^2 = x;\ y^2 = 2x;\ x \ge 0;\ y \ge 0$
5.	$y = \frac{1}{2}x^2;\ y = 4 - x$	$y = x^2 + 4x;\ y = 4 + x$
6.	а) $\int_L \sqrt{x^2 + y^2}ds;\ L: x = a(\cos t + t\sin t);$ $y = a(\sin t - t\cos t);\ 0 \le t \le 2\pi$ б) $\int_L 2xy^3dx + 3(x^2 + y)dy$ $L: y = x^2;\ \ 0 \le x \le 2$	а) $\int_L (x^3 + y^2 - 1)dx + (x - y)dy$ $L: y = x^3;\ 0 \le x \le 1$ б) $\int_L (x + y)ds$; $L: \rho^2 = a^2\cos 2\varphi;\ -\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$
7.	$y = 1 - z^2;\ y = x;\ y = -x$	$3x + y = 6;\ 3x + 2y = 12;$ $x + y + z = 6;\ z = 0;\ y = 0$
8.	$\iiint_V dxdydz$ $V: z = \sqrt{R^2 - y^2 - x^2};\ x \ge 0;\ z \ge 0$	$\iiint_V (x^2 + y^2)dxdydz$ $V: x^2 + y^2 + z^2 = R^2;\ y \ge 0;\ z \ge 0;\ x \ge 0$
9.	$\iiint_V dxdydz$; $V: z = y^2 + x^2;\ z = 1$	$\iiint_V dv;\ V: z = x^2 + y^2;\ z = 2$
10.	$\boldsymbol{F} = (x + z + y)\boldsymbol{i} + 2z\boldsymbol{j} + (y - 7z)\boldsymbol{k}$ $S: 2x + 3y + z = 6;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$	$\boldsymbol{F} = (2z - x)\boldsymbol{i} + (y - x)\boldsymbol{j} + (3z + x)\boldsymbol{k}$ $S: x + y + 2z = 2;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$
11.	$\boldsymbol{F} = (2x - z)\boldsymbol{i} + (y - x)\boldsymbol{j} + (x + 2z)\boldsymbol{k}$ $L: x - y + z = 2;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$	$\boldsymbol{F} = z\boldsymbol{i} + (x - y)\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ $L: x - 2y + 2z = 2;\ z = 0;\ y = 0;\ x = 0$

№	Вариант 7	Вариант 8
1.	$\int_0^3 dx \int_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$	$\int_0^4 dy \int_{\frac{3}{4}y}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx$
2.	$y^2=16-8x;\ y^2=24+4x$	$y=\frac{1}{3}x^2;\ y=4-\frac{2}{3}x^2$
3.	$z=x^2;\ y=0;\ x+y=2;\ z=0$	$z=3x^2+y^2;\ x+y=3;\ x=0;\ y=0;\ z=0$
4.	$2z=x^2;\ y=\frac{x}{2};\ y=2x;\ x=\sqrt{8};\ z=0$	$z^2=a^2-x^2-y^2;\ x^2+y^2\le R^2;\ R\le a$
5.	$y=2+x^2;\ y=4-x^2$	$y=x^2-3x;\ y=4-3x$
6.	а) $\int_L zds$ $L: x=tCost;\ y=tS\,int;\ z=t;\ 0\le t\le t_0$ б) $\int_L (x^2+y^2)dx+3(x^2-y^2)dy$ $L: y^2=x^3;\ 0\le x\le 2$	а) $\int_L (x+y)dx+(x-y)dy$ $L: y=x^2;\ 2\le x\le 3$ б) $\int_L \sqrt{x^2+y^2}ds;\ L: x^2+y^2=ax$
7.	$y=\sqrt{x};\ z=0;\ y=2\sqrt{x};\ x+z=6$	$z=x^2-y^2;\ z=0;\ x=3$
8.	$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$ $V: x^2+y^2+z^2=R^2;\ z\ge 0$	$\iiint_V dv$ $V: x^2+y^2+z^2=R^2;\ x\ge 0;\ y\ge 0;\ z\ge 0$
9.	$\iiint_V dv; V: z=3-x^2-y^2=4;\ z=0$	$\iiint_V dv; V: x^2+y^2+z^2=a^2;\ x^2+y^2=ax$
10.	$\boldsymbol{F}=2x\boldsymbol{i}+(x-y+z)\boldsymbol{j}+(3y+z)\boldsymbol{k}$ $S: x-y+z=1;\ x=0;\ y=0;\ z=0$	$\boldsymbol{F}=(y-z)\boldsymbol{i}+(2x+y)\boldsymbol{j}+(x+y+z)\boldsymbol{k}$ $S: 2x+y+z=2;\ x=0;\ y=0;\ z=0$
11.	$\boldsymbol{F}=(2x+y)\boldsymbol{i}+(x+z)\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ $L: x+y+z=2;\ x=0;\ y=0;\ z=0$	$\boldsymbol{F}=z\boldsymbol{i}+(x+3y)\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ $L: x+y+2z=2;\ z=0;\ y=0;\ x=0$

№	Вариант 9	Вариант 10
1.	$\int_0^2 dx \int_{x^2+1}^{2\sqrt{2x}+1} f(x,y)dy$	$\int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}x^2}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$
2.	$x^2+y^2=9;\ x=0;\ y=0$	$y=2^x;\ y=2;\ x=0$
3.	$z=0;\ z=2x;\ x+y=3;\ x=\sqrt{\frac{y}{2}};\ y=0$	$z=2-x;\ z=0;\ y=2\sqrt{x};\ y=\frac{1}{4}x^2$
4.	$6x+3y+2z=12;\ x=0;\ y=0;\ z=0$	$z=\frac{x^2+y^2}{4};\ x^2+y^2=4$
5.	$y=Sinx;\ y=0;\ x=\frac{\pi}{4}$	$y=\frac{x^2}{3};\ y=4-\frac{2}{3}x^2$
6.	а) $\int_L (x^2-y+2)ds;\ L: y=4x-1;\ 0\le x\le 2$; б) $\int_L \frac{y^2+1}{x}dx-\frac{x}{y}dy$ $L=AB: y=rx+b;\ A(1;\ 2);\ B(2;\ 4)$	а) $\int_L Cosydx-Sinxdy;$ $L: y=-x;\ -3\le x\le 3$; б) $\int_L xyds;$ $L=\Gamma_{\Delta ABC};\ A(0;\ 2);\ O(0;\ 0);\ B(4;\ 0)$
7.	$z=4-x^2;\ z=0;\ x^2+y^2=4$	$z=0;\ z=2x;\ x+y=3;\ x=\sqrt{\frac{y}{2}}$
8.	$\iiint_V x^2dv;\ V: x^2+y^2+z^2=R^2;\ x\ge 0;\ y\ge 0$	$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dv;\ V: x^2+y^2+z^2=R^2;$ $y\ge 0$
9.	$\iiint_V dv;\ V: z=x^2+y^2;\ z=4;\ x\ge 0;\ y\ge 0$	$\iiint_V (x^2+y^2)dv;\ V: z=\frac{1}{2}(x^2+y^2);\ z=2$
10.	$\boldsymbol{F}=(x+z)\boldsymbol{i}+(y-z)\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}$ $S: 2x+y+z=2;\ x=0;\ y=0;\ z=0$	$\boldsymbol{F}=2x\boldsymbol{i}+(x-y+z)\boldsymbol{j}+(3y+z)\boldsymbol{k}$ $S: x-y+z=1;\ x=0;\ y=0;\ z=0$
11.	$\boldsymbol{F}=y^2\boldsymbol{i}+(xy+z)\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ $L: x+y+z=1;\ x=0;\ y=0;\ z=0$	$\boldsymbol{F}=(2x+y)\boldsymbol{i}+(x+z)\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ $L: x+y+z=2;\ x=0;\ y=0;\ z=0$

№	Вариант 11	Вариант 12
1.	$\int_0^4 dy \int_{\frac{1}{2}y+1}^{\frac{3}{2}y+4} f(x,y)dx$	$\int_0^4 dy \int_{\frac{1}{2}y+1}^{1-y} f(x,y)dx$
2.	$xy=1;\ y=x^2;\ x=4$	$y^2=10x+25;\ y^2=9-6x$
3.	$4y=x^2+y^2;\ z^2=4-y$	$z=x^2;\ y=2x;\ x+y=9;\ z=0$
4.	$y=x^2+z^2;\ x+z=1;\ x=0;\ z=0$	$2z=x^2+y^2;\ x^2+y^2\le 1$
5.	$y^2=4x;\ x^2=4y$	$y=2x+x^2;\ y=0$
6.	а) $\int_L \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$ $L=AB: y=kx+b;\ A(0;0);\ B(1;2)$ б) $\int_L (4-y)dx+xdy$ $L: x=2(t-Sint);\ y=2(1-Cost);\ 0\le t\le 2\pi$	а) $\int_L \frac{ds}{x^2+y^2}$ $L=OA: y=kx;\ O(0;0);\ A(2;4)$ б) $\int_L (1+x+y)dx+(x-y)dy$ $L: x=4-Sin2t;\ y=1-Cos2t;\ 0\le t\le 2\pi$
7.	$z=x^2;\ z=0;\ y=0;\ x+y=2$	$x=0;\ y=0;\ z=0;\ x+y+z=2;$ $y=\sqrt{1-z}$
8.	$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dv$ $V: x^2+y^2+z^2=R^2;\ z\ge 0;\ x\ge 0$	$\iiint_V z^2dv;\ V: x^2+y^2+z^2=R^2;\ z\ge 0$
9.	$\iiint_V (x^2+y^2)dv;\ V: z=x^2+y^2;\ z=1$	$\iiint_V dv;\ V: x^2+y^2=4;\ z=0;\ z=x+y+10$
10.	$\boldsymbol{F}=(x+z)\boldsymbol{i}+(z-x)\boldsymbol{j}+(z+x)\boldsymbol{k}$ $S: 2x+2y+z=0;\ x=0;\ y=0;\ z=0$	$\boldsymbol{F}=(x+z)\boldsymbol{i}+(2y+x)\boldsymbol{j}+(x+y-z)\boldsymbol{k}$ $S: x+2y+z=1;\ x=0;\ y=0;\ z=0$
11.	$\boldsymbol{F}=z^2\boldsymbol{i}+(xz+y)\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ $L: x+y+z=1;\ z=0;\ y=0;\ x=0$	$\boldsymbol{F}=(z-x)\boldsymbol{i}+(x-y)\boldsymbol{j}+(x+z)\boldsymbol{k}$ $L: x+y+2z=2;\ x=0;\ y=0;\ z=0$

№	Вариант 13	Вариант 14
1.	$\int\limits_{2,5}^{6} dx \int\limits_{\frac{1}{4}x^2}^{\frac{3}{2}x} f(x, y)dy$	$\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{\frac{x}{3}}^{4-x} f(x, y)dy$
2.	$y^3 = x;\ y = 1;\ x = 8$	$y = x;\ y = 4x;\ x = 1;\ x = 3$
3.	$z = 1 - y^2;\ x + y = 1;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$	$x + y = 2;\ y = \sqrt{1-z};\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$
4.	$x^2 + y^2 + z^2 = 9;\ z = 2$	$x^2 + y^2 = 2az;\ x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2;\ z \geq 0$
5.	$y = 4x - x^2;\ y = 0$	$x^2 + y^2 = 4;\ y = x;\ x = 0$
6.	а) $\int\limits_L (x^2 - y^2)ds;\ L: y = 2x + 1;\ 0 \leq x \leq 4$ б) $\int\limits_L (2xy + 1)dx + 3x^2 ydy$ $L: 2x + y^2 = 16;\ 0 \leq x \leq 8$	а) $\int\limits_L \frac{x^2 ds}{y^2 + x};\ L: y = 2x;\ 0 \leq x \leq 1$ б) $\int\limits_L 2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy$ $L: y = x^2;\ 0 \leq x \leq 2$
7.	$z = 2 - x;\ x = 1;\ y^2 = x;\ z = 0$	$x = 1 - z^2;\ y = x;\ y = -x;\ z = 0$
8.	$\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dv$ $V: x^2 + y^2 + z^2 = R^2;\ x \geq 0;\ z \geq 0$	$\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dv$ $V: x^2 + y^2 + z^2 = R^2;\ x \geq 0;\ y \geq 0$
9.	$\iiint\limits_V dv;\ V: x^2 + y^2 = 4;\ x + y + z = 12;\ z = 0$	$\iiint\limits_V dv;\ V: x^2 + y^2 = 9;\ x + y + z = 6;\ z = 0$
10.	$\boldsymbol{F} = (z + y)\boldsymbol{i} + (x + 2y)\boldsymbol{j} + (y + z)\boldsymbol{k}$ $S: 2x + y + 2z = 2;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$	$\boldsymbol{F} = (x + z)\boldsymbol{i} + (y + 2z)\boldsymbol{j} + (x + y)\boldsymbol{k}$ $S: 2x + y + z = 2;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$
11.	$\boldsymbol{F} = (x + z)\boldsymbol{i} + (2x + y)\boldsymbol{j} + 4z\boldsymbol{k}$ $L: 2x + y + 2z = 4;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$	$\boldsymbol{F} = x^2 z\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + (x - z)\boldsymbol{k}$ $L: 2x + y + z = 2;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$

№	Вариант 15	Вариант 16
1.	$\int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x,y)dx$	$\int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$
2.	$xy = a^2;\ xy = b^2;\ y = m;\ y = n$	$y = 4x - x^2;\ y = 0$
3.	$z = x^2 + y^2 + 1; x = 4;\ y = 4;$ $x = 0;\ y = 0;\ z = 0$	$z = \frac{1}{2}y^2;\ x + y = 9;\ 2x - y = 0;\ z = 0$
4.	$z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2);\ x - y = \pm 1;\ x + y = \pm 1$	$x + y + z = 4;\ x = 2;\ y = x;\ y = 0$
5.	$y = 2x^3;\ y^2 = 2x$	$x^2 + y^2 = 4;\ x = 0;\ y = 0$
6.	а) $\int_L y ds;\ L: y^2 = 2x;\ 0 \le x \le 1$ б) $\int_L y dx + x dy$ $L: x = \rho Cost;\ y = \rho Sint;\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$	а) $\int_L (x^2 + y^2) ds;\ L: y = kx;\ 0 \le x \le 1$ б) $\int_L (2xy + 1)dx + 3x^2 y dy$ $L = AB: y = kx + b;\ A(2;1);\ B(0;2)$
7.	$y^2 = 4a^2 - 3ax;\ y^2 = ax;\ z = \pm h$	$z = 1 - x^2;\ x + y = 3;\ y = x;\ z = 0;\ y = 0$
8.	$\iiint_V (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}) dv; V: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$ $z \ge 0$	$\iiint_V z^2 dv; V: x^2 + y^2 + z^2 = R^2;\ x \ge 0;\ z \ge 0$
9.	$\iiint_V dv; V: z = \frac{1}{a}(a^2 - x^2 - y^2);\ z = 0$	$\iiint_V dv; V: x^2 + y^2 = 9;\ z = x + y + 10;\ z = 0$
10.	$\boldsymbol{F} = (2x + 3y)\boldsymbol{i} + (3z - 2x)\boldsymbol{j} + (3y - x)\boldsymbol{k}$ $S: -2x + 3y - z = 1;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$	$\boldsymbol{F} = (x + z)\boldsymbol{i} + (y + x)\boldsymbol{j} + (x + z)\boldsymbol{k}$ $S: x + 2y + z = 1;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$
11.	$\boldsymbol{F} = (x^2 - 2x)\boldsymbol{i} + (y^2 - 2y)\boldsymbol{j} + (z^2 - 2z)\boldsymbol{k}$ $L: x - 2y + z = 1;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$	$\boldsymbol{F} = (2x + y)\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ $L: x + y + z = 1;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$

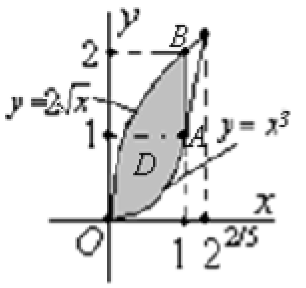
Пример выполнения индивидуального задания

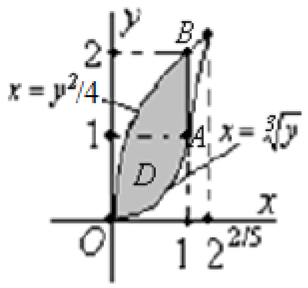
1. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy \right) dx.$$

Решение. В соответствии с формулой интеграла областью интегрирования является плоская фигура (на чертеже выделена цветом), ограниченная линиями:

$$x = 1, \;\; y = x^3, \;\; y = 2\sqrt{x}\,.$$





Обратив зависимости $y = y(x)$, получим:

$$x = \sqrt[3]{y}, \;\; x = \frac{y^2}{4}, \;\; x = 1.$$

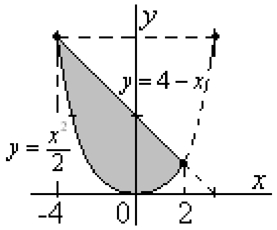
Так как правый участок границы состоит из двух частей - *OA* и *AB*, при изменении порядка интегрирования интеграл представится суммой

$$\int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{1} f(x,y)dx.$$

Ответ:

$$\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy \right) dx = \int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{1} f(x,y)dx.$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \dfrac{x^2}{2}$; $y = 4 - x$.



Решение. Определяем координаты граничных точек:

$$\frac{x^2}{2} = 4 - x \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -4, \;\; x_2 = 2\,.$$

Составляем интеграл площади:

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{-4}^{2}dx\int\limits_{x^2/2}^{4-x}dy=\int\limits_{-4}^{2}dx\cdot y\Big|_{x^2/2}^{4-x}=\int\limits_{-4}^{2}(4-x-\frac{x^2}{2})dx=$$

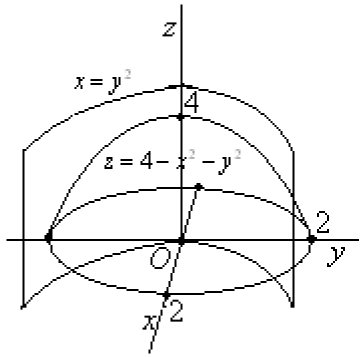
$$=(4x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6})\Big|_{-4}^{2}=18.$$

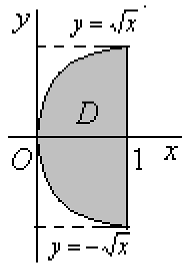
Ответ: $S=18$.

3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z=4-x^2-y^2;\ x=y^2;\ x=1;\ z=0.$$

<u>Решение</u>. Тело ограничено параболоидом вращения $z=4-x^2-y^2$, параболическим цилиндром $x=y^2$ и плоскостями $x=1$ и $z=0$. Для наглядности достаточно представить параболические поверхности и область интегрирования D.



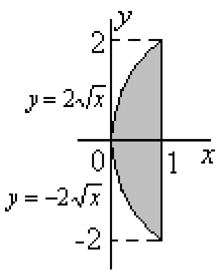


Составляем интеграл объема:

$$V=\iint\limits_D(4-x^2-y^2)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}(4-x^2-y^2)dy=\int\limits_0^1 dx(4y-x^2y-\frac{y^3}{3})\Big|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}=$$

$$=\int\limits_0^1(8\sqrt{x}-2x^2\sqrt{x}-\frac{2x\sqrt{x}}{3})\,dx=(\frac{16}{3}x\sqrt{x}-\frac{4}{7}x^3\sqrt{x}-\frac{4x^2\sqrt{x}}{15})\Big|_0^1=\frac{296}{315}.$$

Ответ: $V=\frac{296}{315}$.



4. Найти площадь поверхности, отсекаемую поверхностями:

$$z^2=4x;\ y^2=4x;\ x=1.$$

<u>Решение</u>. Искомая поверхность есть часть параболического цилиндра $z^2=4x$, отсекаемая другим параболическим цилиндром

$y^2 = 4x$ и плоскостью $x = 1$. Рассматривая в качестве уравнения поверхности $z = 2\sqrt{x}$, а качестве области интегрирования параболический сегмент

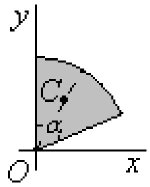
$$D = \{(x, y): 0 \le x \le 1,\ -2\sqrt{x} \le y \le 2\sqrt{x}\},$$

используем формулу

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\,dx \cdot y\Big|_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} = \int\limits_0^1 4\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\,dx = 4\int\limits_0^1 \sqrt{x+1}\,dx =$$

$$= \frac{8}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\Big|_0^1 = \frac{8}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$



Ответ: $\sigma = \frac{8}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.

5. Найти координаты центра масс фигуры, ограниченной линиями:

$$x = R\sin t,\ y = R\cos t,\ 0 \le t \le \alpha;\ x = 0;\ y = x \cdot ctg\alpha$$

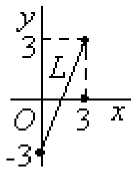
Решение. Искомая плоская фигура имеет вид кругового сектора радиуса R с центральным углом α. В силу симметрии Центр масс фигуры находится на среднем радиусе сектора, то есть его координаты x_C, y_C удовлетворяют условию: $y_C = x_C \cdot ctg(\alpha/2)$. Известна формула площади кругового сектора $S = \frac{1}{2}R^2\alpha$.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint\limits_D xdxdy = \frac{1}{S}\iint\limits_{D'} r\cos\varphi \cdot rdrd\varphi = \frac{1}{S}\int\limits_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^R r^2 dr =$$

$$= \frac{1}{S}\int\limits_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi\, \frac{r^3}{3}\Big|_0^R = \frac{R^3}{3S}\sin\varphi\Big|_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} = \frac{R^3}{3S}(1 - \cos\alpha) = \frac{2}{3}R\frac{1 - \cos\alpha}{\alpha}.$$

$$y_C = x_C \cdot ctg(\alpha/2) = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Ответ: $x_C = \frac{2}{3}R\frac{1 - \cos\alpha}{\alpha}$, $y_C = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$.



6. Вычислить криволинейные интегралы.

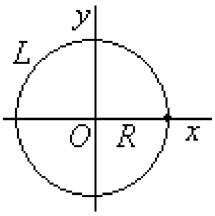
а) $\int\limits_L (x^2+2y^2)ds$; $L: y=2x-3;\ 0\le x\le 3$.

Решение.

$$\int\limits_L (x^2+2y^2)ds=\int\limits_0^3 (x^2+2y^2)\sqrt{1+(y')^2}dx=\int\limits_0^3 (x^2+2(2x-3)^2)\sqrt{1+2^2}dx=$$

$$=3\sqrt{5}\int\limits_0^3 (3x^2-8x+6)dx=3\sqrt{5}(x^3-4x^2+6x)\Big|_0^3=27\sqrt{5}.$$

б) $\int\limits_L (x^2-y)dx+(x-y^2)dy;\ L: x=R\cos t;\ y=R\sin t;\ 0\le t\le 2\pi$.



Решение. Учитывая $dx=-R\sin t\,dt; dy=R\cos t\,dt$, получаем

$$\int\limits_L (x^2-y)dx+(x-y^2)dy=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}((R^2\cos^2 t-R\sin t)(-R\sin t)+(R\cos t-R^2\sin^2 t)R\cos t)dt=$$

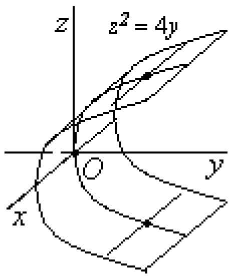
$$=R^2\int\limits_0^{2\pi}(1-R(\cos^2 t\cdot\sin t+\sin^2 t\cdot\cos t))dt=2\pi R^2.$$

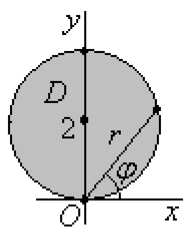
Ответ: а) $27\sqrt{5}$; б) $2\pi R^2$.

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$z^2=4y;\ x^2+y^2=4y$.

Решение. Тело ограничено параболическим цилиндром $z^2=4y$ и





круговым цилиндром $x^2+y^2=4y$, или $x^2+(y-2)^2=2^2$, со смещенной осью $x=0, y=2$. В цилиндрической (полярной) системе координат уравнение поверхности кругового цилиндра имеет вид $r=4\sin\varphi$. Для наглядности достаточно представить параболический цилиндр и область интегрирования в плоскости x, y. Вычисляем объем искомого тела с помощью тройного интеграла, учитывая симметрию тела относительно плоскости Oxy:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = 4\iint\limits_D \sqrt{y}\,dxdy = 4\iint\limits_{D'} \sqrt{r\sin\varphi}\,rdrd\varphi =$$

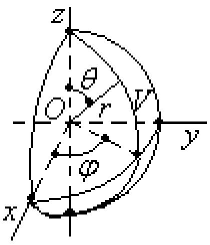
$$= \frac{8}{5}\int\limits_0^{\pi} \sqrt{\sin\varphi}\,d\varphi \cdot r^2\sqrt{r}\Big|_0^{4\sin\varphi} = \frac{16}{5}\int\limits_0^{\pi} \sin^3\varphi\,d\varphi = -\frac{16}{5}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos^2\varphi)\,d(\cos\varphi) = \frac{64}{15}.$$

Ответ: $\frac{64}{15}$.

8. Переходя к сферическим координатам, вычислить интеграл:

$$\iiint\limits_V zdv;\ V: x^2+y^2+z^2=4;\ x\ge 0; y\ge 0.$$

Решение. При переходе к сферическим координатам имеем:



$$x^2+y^2+z^2=r^2,\ z=r\cos\theta,\ |J|=r^2\sin\theta,$$

и область интегрирования принимает вид

$$V': r\le 2; 0<\theta<\pi;\ 0\le\varphi\le\pi/2.$$

Далее

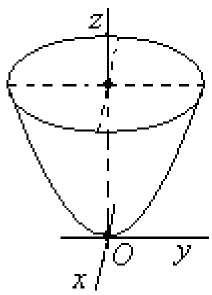
$$\iiint\limits_V zdv = \iiint\limits_{V'} r\cos\theta |J| dv' = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \cos\theta\sin\theta\,d\theta \int\limits_0^2 r^3 dr =$$

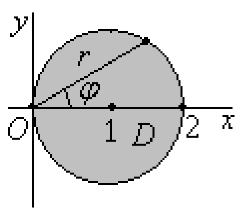
$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \cos\theta\sin\theta\,d\theta\, \frac{r^4}{4}\Big|_0^2 = 4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 0.$$

Ответ: 0.

9. Переходя к цилиндрическим координатам, вычислить интеграл:

$$\iiint\limits_V dv;\ \ V: x^2+y^2=2x;\ z=x^2+y^2;\ z=0.$$





Решение. Область интегрирования V ограничена цилиндром $x^2+y^2=2x$, или $(x-1)^2+y^2=1$, со смещенной осью $x=1, y=0$; параболоидом вращения $z=x^2+y^2$ и координатной плоскостью $z=0$. Для наглядности достаточно представить параболоид вращения и проекцию V на плоскость Oxy в виде плоской области D. При переходе к цилиндрическим координатам имеем:

$$x^2+y^2=r^2,\ x=r\cos\varphi,\ |J|=r\,,$$

и область интегрирования принимает вид

$$V':0<r\le 2\cos\varphi;\ \ 0<z<r^2;\ \ -\pi/2\le\varphi\le\pi/2\,.$$

Далее

$$\iiint\limits_V dv=\iiint\limits_{V'}|J|d\varphi drdz=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}rdr\int\limits_0^{r^2}dz=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}rdr\cdot z\Big|_0^{r^2}=$$

$$=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\,\frac{r^4}{4}\Big|_0^{2\cos\varphi}=4\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\varphi d\varphi\ =\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(\frac{3}{2}+2\cos2\varphi+\frac{1}{2}\cos4\varphi)d\varphi\ =\frac{3}{2}\pi\,.$$

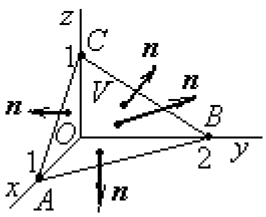
Ответ: $\frac{3}{2}\pi$.

10. Вычислить поток векторного поля

$$\boldsymbol{F}=(z+y)\boldsymbol{i}+(x+2y)\boldsymbol{j}+(y+z)\boldsymbol{k}$$

по внешней стороне замкнутой поверхности

$$S:2x+y+2z=2;\,x=0;\,y=0;\,z=0$$



по формуле Остроградского - Гаусса и непосредственно.

Решение. Искомая замкнутая поверхность представляет собой поверхность пирамиды V, расположенной в положительном октанте пространственной системы координат $Oxyz$, состоит из четырех плоских граней.

По формуле Гаусса-Остроградского поток векторного поля равен

$$\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}ds=\iiint\limits_V div\boldsymbol{F}\ dV=\iiint\limits_V(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z})\,dV=\iiint\limits_V(2+1)\,dV=1,$$

так как $\iiint\limits_V dV=1/3$ - объем пирамиды $OABC$.

При непосредственном вычислении:

$$\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}ds=\iint\limits_{ABC}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}ds+\iint\limits_{OBC}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}ds+\iint\limits_{OAC}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}ds+\iint\limits_{OAB}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}ds$$

Вычисляем поток по каждой грани:

$$ABC: \boldsymbol{n} = \frac{1}{3}(2,1,2),\ z = 1 - x - \frac{y}{2},\ \cos\gamma = \frac{2}{3};$$

$$\iint_{ABC} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, ds = \iint_{ABC} \frac{1}{3}(2(z+y) + (x+2y) + 2(y+z))\, ds =$$

$$= \frac{1}{3}\iint_{OAB}(4 - 3x + 4y)\frac{3}{2}dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{2-2x}(4 - 3x + 4y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx\,(4y - 3xy + 2y^2)\Big|_0^{2-2x} = \frac{1}{2}\int_0^1 (16 - 30x + 14x^2)dx =$$

$$= \frac{1}{2}(16x - 15x^2 + \frac{14}{3}x^3)\Big|_0^1 = \frac{17}{6}.$$

$$OBC: \boldsymbol{n} = (-1, 0, 0),\ x = 0,$$

$$\iint_{OBC} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, ds = -\iint_{OBC}(z+y)\, dydz = -\int_0^2 dy \int_0^{1-y/2}(z+y)\, dz = -\int_0^2 dy(\frac{z^2}{2} + yz)\Big|_0^{1-y/2} =$$

$$= -\int_0^2 (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}y^2)dy = -(\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{8}y^3)\Big|_0^2 = -1.$$

$$OAC: \boldsymbol{n} = (0, -1, 0),\ y = 0,$$

$$\iint_{OAC} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, ds = -\iint_{OAC} x\, dxdz = -\int_0^1 x dx \int_0^{1-x} dz = -\int_0^1 x dx \cdot z\Big|_0^{1-x} =$$

$$= -\int_0^1 (x - x^2)dx = -(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3)\Big|_0^1 = -\frac{1}{6}$$

$$OAB: \boldsymbol{n} = (0, 0, -1),\ z = 0,$$

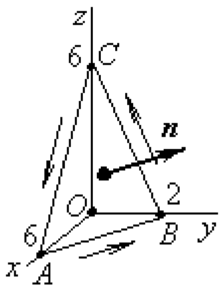
$$\iint_{OAB} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, ds = -\iint_{OAB} y\, dxdy = -\int_0^1 dx \int_0^{2-2x} y dy = -\int_0^1 dx \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{2-2x} =$$

$$= -2\int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{2}{3}(1-x)^3\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}$$

Получаем

$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, ds = \frac{17}{6} - 1 - \frac{1}{6} - \frac{2}{3} = 1$. Результаты совпали.

Ответ: 1.



11. Найти циркуляцию векторного поля

$$\boldsymbol{F} = 2xz\boldsymbol{i} + (x+2z)\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$$

по замкнутому контуру

$$L: x+3y+z=6;\ x=0;\ y=0;\ z=0$$

по формуле Стокса и непосредственно.

Решение. Замкнутый контур L состоит из сторон треугольника ABC, опирающегося на координатные оси $Oxyz$. По формуле Стокса

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_{ABC} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} ds = \iint_{ABC} \begin{vmatrix} 1/\sqrt{11} & 3/\sqrt{11} & 1/\sqrt{11} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz & x+2z & xz \end{vmatrix} ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{11}} \iint_{ABC} (6x-3z-1)ds = \frac{1}{\sqrt{11}} \iint_{OAC} (6x-3z-1)\frac{\sqrt{11}}{3} ds = \frac{1}{3}\int_0^6 dx \int_0^{6-x} (6x-3z-1)dz =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^6 dx(6xz - \frac{3}{2}z^2 - z)\Big|_0^{6-x} = \frac{1}{3}\int_0^6 (-\frac{15}{2}x^2 + 55x - 60)dx =$$

$$= \frac{5}{3}(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 12x)\Big|_0^6 = 30.$$

При непосредственном вычислении:

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{AB} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{BC} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{CA} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Вычисляем каждый интеграл отдельно:

$$AB: x = 6-3y,\ dx = -3dy,\ z=0,\ dz=0,\ 0 \le y \le 2;$$

$$\int_{AB} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{AB} 2xzdx + (x+2z)dy + xzdz = \int_0^2 (6-3y)dy = (6y - \frac{3}{2}y^2)\Big|_0^2 = 6.$$

$$BC: z = 6-3y,\ dz = -3dy,\ x=0,\ dx=0,\ 2 \ge y \ge 0;$$

$$\int_{BC} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{BC} 2xzdx + (x+2z)dy + xzdz = 2\int_2^0 (6-3y)dy = -2(6y - \frac{3}{2}y^2)\Big|_0^2 = -12$$

.

$$CA: z = 6-x,\ dz = -dx,\ y=0,\ dy=0,\ 0 \le x \le 6;$$

$$\int\limits_{CA} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dr} = \int\limits_{CA} 2xzdx + (x+2z)dy + xzdz = \int\limits_0^6 (-x^2 + 6x)dx = (-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2)\Big|_0^6 = 36.$$

Получаем

$\int\limits_L \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dr} = 6 - 12 + 36 = 30$. Результаты совпали.

Ответ: 30.

Задачи к экзамену «Векторный и тензорный анализ»

1. Найти производную скалярного поля $u = 2xy + y^2$ в точке $(\sqrt{2},1)$ эллипса

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

по направлению внешней нормали к эллипсу в этой точке.

2. Найти производную скалярного поля $u = x^2 - y^2$ в точке (5, 4) гиперболы $x^2 - y^2 = 9$ по направлению этой кривой.

3. Найти производную скалярного поля

$$u = \ln(xy + yz + zx)$$

в точке $M_0(0, 1, 1)$ по направлению окружности $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$.

4. Найти производную скалярного поля

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

в точке M_0, соответствующей значению параметра $t = \pi/2$ по направлению винтовой линии $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = at$.

5. Найти производную функции

$$u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

в произвольной точке $M(x, y, z)$ в направлении радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ этой точки.

6. Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{a} = xz\boldsymbol{i}$ через внешнюю сторону параболоида $z = 1 - x^2 - y^2$, ограниченного плоскостью $z = 0$ $(z \geq 0)$.

7. Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ через сферу

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 .$$

8. Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{a} = 3x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$ через внешнюю сторону параболоида $x^2 + y^2 = 9 - z$, расположенную в первом октанте.

9. Вычислить поток векторного поля

$$\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$$

через полную поверхность пирамиды, ограниченную плоскостями

$$x + y + z = 1,\ \ x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0.$$

10. Доказать, что если функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

то

$$\oiint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0,$$

где $\partial \mathrm{u}/\partial \mathrm{n}$ – производная по направлению внешней нормали к кусочно гладкой замкнутой поверхности Σ.

11. Доказать, что если функция $u(x, y, z)$ является многочленом второй степени и Σ – кусочно гладкая замкнутая поверхность, то интеграл

$$\oiint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

пропорционален объему, ограниченному поверхностью Σ, $\partial \mathrm{u}/\partial \mathrm{n}$ – производная по направлению внешней нормали.

12. Показать, что

$$\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}^0) d\sigma = V,$$

где V – объем, ограниченный замкнутой поверхностью Σ; n^0 – внешняя единичная нормаль.

13. Найти поток радиуса вектора $\boldsymbol{r}$ через поверхность произвольной сферы радиуса R.

14. Доказать, что если Σ – кусочно гладкая замкнутая поверхность и $\boldsymbol{c}$ – ненулевой постоянный вектор, то интеграл

$$\oiint_{\Sigma} \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{c})\, d\sigma = 0,$$

где $\boldsymbol{n}$ – вектор, нормальный к поверхности Σ.

15. Доказать формулу

$$\oiint_{\Sigma} (\varphi \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}^0) d\sigma = \iiint_{V} \big(\varphi div \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}, grad \varphi)\big) dV,$$

где $\varphi = \varphi(x, y, z)$, Σ – поверхность, ограничивающая объем V, а $\boldsymbol{n}^0$ – вектор единичной внешней нормали к поверхности Σ. Установить условия применимости формулы.

16. Показать, что если имеется соотношение вида $a^r_{st} = b^r_s a_t$, связывающее тензоры a^r_{st}, b^r_s, a_t в некоторой системе переменных, то то же самое соотношение между составляющими имеет место в любой другой системе переменных.

17. Показать, что символ Кронекера δ^r_s является тензором.

18. Показать, что дифференциалы dx^r образуют контравариантный тензор первого порядка (вектор).

19. Показать, что если φ – инвариантная функция, то $\partial\varphi/\partial x^r$ есть ковариантный вектор.

20. Показать, что если $\mathrm{a}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{st}}$, $\mathrm{b}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{q}}$ – тензоры третьего и второго порядков соответственно, то $a^r_{st}\, b^p_r$ есть тензор третьего порядка.

21. Найти матрицы

$$\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}\right), \quad \left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha}\right)$$

и локальный базис $\boldsymbol{e}^\alpha$ цилиндрической системы координат

$$y^1 = x^1 \cos x^2,\ y^2 = x^1 \sin x^2,\ y^3 = x^3.$$

22. Найти матрицы

$$\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}\right), \quad \left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha}\right)$$

и локальный базис e^α сферической системы координат

$$y^1 = x^1 \cos x^2 \cos x^3, \;\; y^2 = x^1 \sin x^2 \cos x^3, \; y^3 = x^1 \sin x^3.$$

23. Вывести формулу $\boldsymbol{e}_\alpha = g_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}^\beta$.

24. Найти $|\boldsymbol{e}^\alpha|$, $|\boldsymbol{e}_\alpha|$ для цилиндрической системы координат

$$y^1 = x^1 \cos x^2, \; y^2 = x^1 \sin x^2, \; y^3 = x^3.$$

25. Найти $|\boldsymbol{e}^\alpha|$, $|\boldsymbol{e}_\alpha|$ для сферической системы координат

$$y^1 = x^1 \cos x^2 \cos x^3, \;\; y^2 = x^1 \sin x^2 \cos x^3, \; y^3 = x^1 \sin x^3.$$

26. Проверьте, выполняются ли условия

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha}$$

для цилиндрической $\mathrm{y}^1 = \mathrm{x}^1 \cos \mathrm{x}^2$, $\mathrm{y}^2 = \mathrm{x}^1 \sin \mathrm{x}^2$, $\mathrm{y}^3 = \mathrm{x}^3$ системы координат.

27. Проверьте, выполняются ли условия

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha}$$

для сферической системы координат

$$y^1 = x^1 \cos x^2 \cos x^3, \;\; y^2 = x^1 \sin x^2 \cos x^3, \; y^3 = x^1 \sin x^3.$$

28. Показать, что

$$e_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} \sqrt{g}\,, \text{ если } \alpha, \beta, \gamma \text{ -- четная перестановка из } 1, 2, 3; \\ -\sqrt{g}\,, \text{если } \alpha, \beta, \gamma \text{ -- нечетная перестановка из } 1, 2, 3; \\ 0, \;\; \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

29. Доказать, что в ортогональной системе координат имеют место равенства:

$$\Gamma_{\beta\gamma\alpha} = 0 \;\; (\beta \neq \gamma \neq \alpha \neq \beta), \;\; \Gamma_{\beta\alpha\alpha} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^\beta} \;\;\; (\alpha \neq \beta),$$

$$\Gamma_{\beta\beta\alpha} = \Gamma_{\beta\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^\alpha}, \;\; \Gamma_{\beta\beta\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^\beta},$$

где в последнем равенстве нет суммирования по β; H_α - коэффициенты Ламе: $H_\alpha^2 = g_{\alpha\alpha}$.

30. Доказать, что в ортогональной системе координат имеют место равенства:

$$\Gamma^{\beta}_{\gamma\alpha} = 0 \ \ (\beta \neq \gamma \neq \alpha \neq \beta), \quad \Gamma^{\beta}_{\alpha\alpha} = -\frac{1}{2g_{\beta\beta}}\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^\beta} = -\frac{H_\alpha}{H_\beta^2}\frac{\partial H_\alpha}{\partial x^\beta} \quad (\alpha \neq \beta),$$

$$\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2g_{\beta\beta}}\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{H_\beta}\frac{\partial H_\beta}{\partial x^\alpha},$$

где в последнем равенстве нет суммирования по β; H_α - коэффициенты Ламе: $H_\alpha^2 = g_{\alpha\alpha}$.

31. Доказать, что для метрического тензора имеет место равенство $\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$.

Указание. Использовать формулу $\nabla_\alpha T_{\beta\gamma} = \dfrac{\partial T_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} - T_{\sigma\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha} - T_{\beta\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma}$, где $T_{\beta\gamma}$ - произвольный тензор 2-го ранга.

32. Доказать, что для дискриминантного тензора имеет место равенство $\nabla_\sigma e_{\alpha\beta\gamma} = 0$.

Указание. Использовать формулу $\nabla_\alpha T_{\beta\gamma\delta} = \dfrac{\partial T_{\beta\gamma\delta}}{\partial x^\alpha} - T_{\sigma\gamma\delta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} - T_{\beta\sigma\delta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma} - T_{\beta\gamma\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\delta}$, где $T_{\beta\gamma\delta}$ - произвольный тензор 3-го ранга.

33. Даны тензор a_{ij} валентности 2, матрица которого в некотором базисе равна

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

и тензоры x_i и y_i валентности 1, которые в том же базисе имеют компоненты

$$(x_i) = (2,\ 1,\ 4),\ (y_i) = (3,\ 7, -1).$$

Найти:

а) $a_{ij}x_j$; б) $a_{ij}x_i$; в) $a_{ij}y_i$; г) $a_{ij}y_j$; д) $a_{ij}x_iy_j$; е) $a_{ij}y_ix_j$; ж) $a_{ij}\delta_{ij}$; з) $a_{ij}-\frac{2}{5}\delta_{ij}a_{ll}$; и) $\left(a_{ij}-\frac{2}{5}\delta_{ij}a_{ll}\right)x_i$; к) $\left(a_{ij}-\frac{2}{5}\delta_{ij}a_{ll}\right)x_iy_j$.

34. Разложить тензор a_{ij}, матрица которого

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

на симметричный (b_{ij}) и кососимметричный (c_{ij}) тензоры. Найти:

а) $c_{ij}a_{ij}$; б) $b_{ij}c_{ij}$; в) $c_{ij}\delta_{ij}$; г) $c_{ij}x_i$, где $(x_i) = (2,\ 3,\ -4)$; д) $c_{ij}x_ix_j$; е) $b_{ij}\delta_{ij}$; ж) $b_{ij}x_i$; з) $b_{ij}x_ix_j$.

Литература

1. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. Учебное пособие. – 3-е изд. перераб. – М.: Физматлит, 2005. – 304 с.
2. Андреев, В. К. Математические модели механики сплошных сред : учебное пособие / В. К. Андреев. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 240 с. — ISBN 978-5-8114-1998-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/67464 (дата обращения: 17.08.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Баврин, Иван Иванович. Высшая математика [Текст] : учеб. : рек. Мин. обр. РФ / И. И. Баврин. - 4-е изд., испр. и доп. - М. : Академия, 2004. - 616 с.
4. Бараненков, Александр Иванович. Сборник задач и типовых расчетов по высшей математике [Текст] : учеб. пособие / А. И. Бараненков, Е. П. Богомолова, И. М. Петрушко. - СПб. : Лань, 2009. - 235 с.
5. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. –М.: Наука,1984, 1987.
6. Бергман, Георгий Николаевич. Сборник задач по курсу математического анализа [Текст] : учеб. пособие для вузов / Г. Н. Бергман. - М. : Наука, 1997. - 416 с.
7. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа. [Элек-

тронный ресурс] / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2010. — 736 с.

8. Бугров Я. С., Никольский С. М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.:1988.

9. Виноградова, И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу [Текст] : в 2-х кн.: Учеб. пособие: Рек. Мин. обр. РФ / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. - 2-е изд., перераб. - М. : Высш. шк., 2000

10. Владимирский, Борис Михайлович. Математика. Общий курс. [Текст] : учеб.: рек. Мин. обр. РФ / Б. М. Владимирский, А. Б. Горстко, Я. М. Ерусалимский. - 2-е изд., испр. и доп. - СПб. : Лань, 2004. - 959 с.

11. Власов В.Г. Конспект лекций по высшей математике [Текст] : [Учеб. пособие] / Власов В.Г. - М. : Айрис, 1997. - 288 с.

12. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в примерах и задачах. В 2-х ч. Учеб. пособие для втузов.- М.: Высш.шк., 1997.- 304 с., 416 с.

13. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] : учеб. пособие / Б. П. Демидович. - СПб. : Мифрил, 1995. - 489 с.

14. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2014.

15. Ильин, В.А. Основы математического анализа. [Электронный ресурс] / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. — Электрон. дан. — М. : Физматлит, 2001. — 645 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/2180 — Загл. с экрана.

16. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. Ч.3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — Минск : "Вышэйшая школа", 2013. — 367 с.

17. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа [Текст] : учеб. для вузов / Кудрявцев Л.Д. - М. : Наука, 1989.

18. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2015. — 240 с

19. Никольский, С. М. Курс математического анализа [Текст] : учебник для вузов: рек. Мин. обр. РФ / С. М. Никольский. - 5-е изд., перераб. - М. : Физматлит, 2000. - 592с.

20. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. − М.: Айрис пресс, 2007.

21. Сборник задач по высшей математике [Текст] : учеб. пособие : рек. Мин. обр. РФ / под ред. В. И. Ермакова. - М. : Инфра-М, 2005. - 575 с.

22. Сборник задач по математике для втузов [Текст] : в 4-х ч. / В. А. Болгов, А. В. Ефимов. - М. : Наука, 1995.

23. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа [Текст] : учебник: В 2-х ч. / Г. М. Фихтенгольц. - 4-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2002.

24. Чудесенко, В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты). [Электронный ресурс] — СПб. : Лань, 2010. — 192 с.

25. Шипачев, Виктор Семенович. Математический анализ [Текст] : теория и практика : учеб. пособие : рек. УМО / В. С. Шипачев. - М. : Дрофа, 2006. - 351 с.

26. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2014. — 464 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/149 — Загл. с экрана.

Оглавление