Н.Н. Двоерядкина, Т.А. Юрьева

РЯДЫ

Учебно-методическое пособие

Благовещенск 2022

ББК 22.16я73

Печатается по решению

редакционно-издательского совета

факультета математики и информатики

Амурского государственного

университета

Ряды : учеб.-метод. пособие / Н. Н. Двоерядкина, Т. А. Юрьева. - Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2022 – 50 с.

Учебно-методическое пособие содержит краткие теоретические сведения по разделу «Ряды» курса математики, которые сопровождаются достаточно большим числом иллюстрирующих примеров. Приведены задания для организации работы на практических занятиях.

Резензенты: И.М. Акилова, доцент кафедры ИУС АмГУ

ВВЕДЕНИЕ

В пособии рассматриваются основные положения раздела «Ряды» математического анализа. Авторы стремились изложить материал полно, строго и доступно, преследуя цель не просто сообщить те или иные сведения, а вызвать у студентов интерес к этой науке, расширить их кругозор и способствовать развитию математической культуры.

Очевидно, что сопровождение достаточным количеством иллюстрирующих примеров изучаемого учебного материала позволяет студентам освоить его легче, чем без примеров. Поэтому большое внимание уделено решению типовых примеров и задач, поясняющих теоретический материал. Однако прежде чем начать решать эти примеры, надо сначала изучить нужный раздел и добиться полной ясности в понимании соответствующих понятий и теорем. Построение учебного пособия потребовало излагать теоретический материал достаточно кратко и отказаться без существенного ущерба от малозначащих и громоздких доказательств.

Задачи с подробными решениями рассматриваются на протяжении всего изложения учебного материала.

Авторы надеются, что данное пособие будет способствовать более глубокому пониманию студентами курса высшей математики.

§ 1 Понятие числового ряда

Понятие ряда и его суммы относятся к основным понятиям математического анализа. Бесконечные ряды применяются во многих теоретических исследованиях, участвуют в формировании многих понятий (например, при определении функций комплексного аргумента), играют важную роль в приложениях математики (вычисление определенных интегралов, решение дифференциальных уравнений, вычисление значений функций и т.д.).

Пусть задана бесконечная последовательность чисел u_1, u_2, u_3, …, u_n, …. Числовым рядом называется составленное из этих чисел выражение:

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n .$$

Числа u_1, u_2, u_3, …, u_n, … называются членами ряда, член, u_n с произвольным номером n – общим членом ряда. Сумма $S_n= u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$ называется частичной, или n-ой суммой ряда. Частичные суммы ряда образуют числовую последовательность $\{S_n\}$: $S_1= u_1$, $S_2= u_1+u_2$, $S_3= u_1+u_2+u_3$, …, $S_n= u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$. Если существует предел последовательности $\{S_n\}$: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ называется сходящимся, в противном случае – расходящимся. Число $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ называется суммой ряда.

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, тогда ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}u_k = u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots$ называется n-м остатком ряда. Если этот ряд сходится, то его сумму обозначают r_n. Имеют место следующие утверждения:

1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, то сходится и каждый его остаток;
2. Сумма ряда $S=S_n+r_n$;
3. Если хотя бы один остаток ряда сходится, то и сам ряд сходится;
4. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$.

При рассмотрении числовых рядов решаются две задачи:

1. Исследование сходимости ряда;

2. Нахождение точного или с заданной точностью значения суммы сходящегося ряда.

Пример 1. По известной формуле для общего члена написать пять первых членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = \frac{2+(-1)^n}{n^2+1}$.

Решение. $u_1 = \frac{2+(-1)^1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{2+(-1)^2}{2^2+1} = \frac{3}{5}$, $u_3 = \frac{2+(-1)^3}{3^2+1} = \frac{1}{10}$, $u_4 = \frac{2+(-1)^4}{4^2+1} = \frac{3}{17}$, $u_5 = \frac{2+(-1)^5}{5^2+1} = \frac{1}{26}$.

Пример 2. Найти отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, если $u_n = \frac{(n+1)!}{n}$.

Решение. $u_n = \frac{(n+1)!}{n}$, $u_{n+1} = \frac{((n+1)+1)!}{n+1} = \frac{(n+2)!}{n+1}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)!}{n+1} : \frac{(n+1)!}{n} =$

$= \frac{(n+2)!\cdot n}{(n+1)(n+1)!} = \frac{(n+2)n}{n+1} = \frac{n^2+2n}{n+1}$, так как $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, $(n+1)!= 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)$, $(n+2)!= 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$.

Пример 3. Найти $(u_n)^2$, u_{2n}, $\sqrt[n]{u_n}$, если $u_n = \left(\frac{3n+1}{n+4}\right)^{3n}$.

Решение. $u_n = \left(\frac{3n+1}{n+4}\right)^{3n}$, $(u_n)^2 = \left[\left(\frac{3n+1}{n+4}\right)^{3n}\right]^2 = \left(\frac{3n+1}{n+4}\right)^{6n}$;

$u_{2n} = \left(\frac{3(2n)+1}{2n+4}\right)^{3(2n)} = \left(\frac{6n+1}{2n+4}\right)^{6n}$; $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{n+4}\right)^{3n}} = \left(\frac{3n+1}{n+4}\right)^{\frac{3n}{n}} = \left(\frac{3n+1}{n+4}\right)^{3}$.

Пример 4. По указанным первым членам ряда найти одну из возможных формул для n-го члена ряда: $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}+\ldots$

Решение. Знаменатели членов ряда образуют арифметическую прогрессию с первым членом 1 и разностью 4. Тогда знаменатель n-го члена записывается: $1+(n-1)\cdot 4=1+4n-4=4n-3$. Числитель общего члена равен 1. Отсюда возможная формула общего члена: $u_n = \frac{1}{4n-3}$.

Пример 5. Пусть b_1, b_1q, b_1q^2, … – геометрическая прогрессия со знаменателем q. Покажем, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_1 q^n$ сходится при $|q_n|<1$ и расходится при $|q_n|\ge 1$.

Решение. Частичная сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} b_1 q^n$ равна $S_n=\frac{b_1-b_1q^{n+1}}{1-q}$ (сумма n первых членов геометрической прогрессии). Если $|q_n|<1$, то $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_1-b_1q^{n+1}}{1-q}=\frac{b_1}{1-q}=S$. Если $|q_n|\ge 1$, то $\lim_{n\to\infty} S_n=\infty$.

Пример 6. Показать, что ряд $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$ сходится и найти его сумму.

Решение. Так как $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, то

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Отсюда $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-0=1$, поэтому ряд сходится и имеет сумму S=1.

Пример 7. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ найти r_n и указать значение N, чтобы при $n>N$ имело место неравенство: $|r_n|<2\cdot 10^{-4}$.

Решение. Из примера 6 $S_n=1-\frac{1}{n+1}$, S=1.

Следовательно, $r_n=S–S_n=1-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$. Решаем неравенство: $\frac{1}{n+1}<2\cdot 10^{-4}$, $n+1>\frac{10^4}{2}$=5000, n>5000–1=4999. В качестве N можно взять любое целое число, не меньшее 4999.

Пример 8. По известной частичной сумме ряда определить общий член ряда и найти его сумму, $S_n=\frac{n}{n+1}$.

Решение. $S_n = u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$, $S_{n-1} = u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{n-1}$.

$$S_n - S_{n-1} = u_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{(n-1)+1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2-(n^2-1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)},$$

$u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Из предыдущих примеров $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$.

Задание для практического занятия

1. Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену.

а) $u_n = \dfrac{1}{2n-1}$; б) $u_n = \dfrac{1}{2^n}$; в) $u_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; г) $u_n = \dfrac{1}{(2n-1)3^{n-1}}$;

д) $u_n = \dfrac{n}{2^n(n+1)}$; е) $u_n = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$; ж) $u_n = \dfrac{2n-1}{4n^2+1}$; з) $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$;

и) $u_n = \dfrac{(2n-1)!!}{n2^{n+1}}$ ($(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)$);

к) $u_n = \dfrac{1}{2n!!}$ ($2n!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n$)).

2. Найти формулу для общего члена ряда.

а) $1+\dfrac{1}{2^\alpha}+\dfrac{1}{3^\alpha}+\dfrac{1}{4^\alpha}+\ldots$; б) $\dfrac{1}{\ln 2}+\dfrac{1}{\ln 3}+\dfrac{1}{\ln 4}+\dfrac{1}{\ln 5}+\ldots$;

в) $1+\dfrac{4}{2}+\dfrac{9}{6}+\dfrac{16}{24}+\dfrac{25}{120}+\ldots$; г) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{37}+\ldots$;

д) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{11}+\ldots$; е) $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\ldots$;

ж) $\dfrac{1}{2+3}+\dfrac{1}{4+3}+\dfrac{1}{8+3}+\dfrac{1}{16+3}+\ldots$; з) $1+\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$;

и) $1+2\dfrac{1}{4}+2\dfrac{7}{9}+3\dfrac{1}{16}+3\dfrac{6}{25}+\ldots$; к) $2+10+26+82+242+730+\ldots$.

3. По определению сходимости ряда выяснить вопрос о сходимости рядов и найти сумму рядов.

а) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\ldots$; б) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\ldots$; в) $1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{8}}+\ldots$;

г) $\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5}+\ldots$; д) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 6}+\ldots$;

е) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+5)}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+\pi)(n+\pi+1)}$;

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^{n}}$; к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{8}{16n^{2}+8n-15}$.

§ 2 Признаки сходимости положительных рядов

Необходимое условие сходимости ряда

Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

Пример 1. Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n+1}$. Установить, выполняется ли необходимое условие сходимости ряда.

Решение. $u_n = \frac{2n}{2n+1}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1} = \frac{2}{2} = 1 \neq 0$. Необходимое условие сходимости ряда не выполняется, следовательно, ряд расходится.

Указанное условие не является достаточным для сходимости ряда, то есть существуют расходящиеся ряды, для которых $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$. Так как $\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \ldots > \frac{1}{\sqrt{n}}$, то $S_n > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$, т.е. $S_n > \sqrt{n}$, следовательно $\lim_{n\to\infty} S_n \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$.

Достаточные признаки сходимости числовых рядов
с неотрицательными членами

I. Признак Даламбера.

Пусть дан ряд $u_1+u_2+u_3+ \ldots +u_n+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами.

Если существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то: 1) при $l<1$ ряд сходится;

2) при $l>1$ ряд расходится;

3) при $l=1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Пример 1. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}$. Исследуем его сходимость при помощи признака Даламбера. Имеем $u_n=\frac{4^n}{n!}$, $u_{n+1}=\frac{4^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{4\cdot 4^n}{n!(n+1)}$. Тогда $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{4\cdot 4^n}{n!(n+1)}:\frac{4^n}{n!}=\frac{4\cdot 4^n\cdot n!}{4^n n!(n+1)}=\frac{4}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n+1}=4\cdot 0=0<1$, поэтому ряд $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n}{n!}$ сходится по признаку Даламбера.

Пример 2. Исследовать ряд на сходимость, общий член $u_n=\frac{5^n}{n\cdot 2^n}$.

Решение. Имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n\cdot 2^n}$, $u_n=\frac{5^n}{n\cdot 2^n}$, $u_{n+1}=\frac{5^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\frac{5\cdot 5^n}{(n+1)\cdot 2\cdot 2^n}$,

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{5\cdot 5^n}{(n+1)\cdot 2\cdot 2^n}:\frac{5^n}{n\cdot 2^n}=\frac{5\cdot 5^n\cdot n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2\cdot 2^n\cdot 5^n}=\frac{5n}{2n+2}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n}{2n+2}=\frac{5}{2}>1$, следовательно, ряд расходится по признаку Даламбера.

II. Признак Коши.

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ с положительными членами. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u^n}=l$, то : 1) при l<1 ряд сходится;

2) при l>1 ряд расходится;

3) при l=1 вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+n}{1+9n}\right)^n$.

Решение. Здесь $u_n=\left(\frac{3+n}{1+9n}\right)^n$, $\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\left(\frac{3+n}{1+9n}\right)^n}=\frac{3+n}{1+9n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+n}{1+9n}=\frac{1}{9}$<1, следовательно, ряд сходится по признаку Коши.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{8n-1}{n+2}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Решение. Здесь $u_n=\frac{1}{2^n}\left(\frac{8n-1}{n+2}\right)^{\frac{n}{2}}$,

$$\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(\frac{8n-1}{n+2}\right)^{\frac{n}{2}}}=\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n}\sqrt[n]{\left(\frac{8n-1}{n+2}\right)^{\frac{n}{2}}}=\frac{1}{2}\left(\frac{8n-1}{n+2}\right)^{\frac{\frac{n}{2}}{n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{8n-1}{n+2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8n-1}{n+2}},$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u^n}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{8n-1}{n+2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n-1}{n+2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8}{1}}=\frac{1}{2}2\sqrt{2}=\sqrt{2}>1$, следовательно, ряд расходится по признаку Коши.

III. Первый признак сравнения.

Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ с неотрицательными членами, причем члены первого ряда не превосходят соответствующих членов второго ряды: $u_n\leq v_n$, тогда:

1) если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$;

2) если расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, то расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$.

Замечание 1. Обратные утверждения не верны.

Замечание 2. Так как сходимость ряда равносильна сходимости любого его остатка, то члены рядов $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ можно сравнивать, начиная с некоторого места.

Для сравнения часто используют следующие «эталонные» ряды:

1. Ряд, составленный из членов геометрической прогрессии: $b_1+b_1q+b_1q^2+\ldots+b_1q^{n-1}+\ldots$. Известно, что он сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\geq 1$.

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ называется обобщенным гармоническим рядом. Данный ряд сходится при $\alpha>1$, расходится при $\alpha\leq 1$.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.

Решение. Сравним члены рядов $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ и $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$. Известно, что $\ln n<n$, поэтому $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$, или $\frac{1}{n}<\frac{1}{\ln n}$. Ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический, является расходящимся. По первому признаку сравнения рассматриваемый ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ также является расходящимся.

Пример 6. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

Решение. Сравним данный ряд с обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который является сходящимся, так как $\alpha=2>1$. Имеем $n^2+1>n^2$, тогда $\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2}$. По первому признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ сходится.

IV. Второй признак сравнения.

Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ с неотрицательными членами.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k\neq 0$, то данные ряды сходятся или расходятся одновременно.

Если $k=0$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ вытекает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ – расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$.

Пример 7. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n^2}$.

Решение. Сравним ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. Здесь $u_n=\frac{1}{n^3+n^2}$, $v_n=\frac{1}{n^3}$, тогда $\frac{u_n}{v_n}=\frac{1}{n^3+n^2}:\frac{1}{n^3}=\frac{n^3}{n^3+n^2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3+n^2}=\frac{1}{1}=1\neq 0$. Следовательно, оба ряда ведут себя относительно сходимости одинаково. Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ является сходящимся, поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n^2}$ также сходится.

Пример 8. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{4n-3}}$.

Решение. Сравним данный ряд с обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{5}}}$ с $\alpha=\frac{1}{5}<1$. Этот ряд является расходящимся. $u_n=\frac{1}{\sqrt[5]{4n-3}}$,

$v_n=\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$, $\frac{u_n}{v_n}=\frac{1}{\sqrt[5]{4n-3}}:\frac{1}{\sqrt[5]{n}}=\frac{\sqrt[5]{n}}{\sqrt[5]{4n-3}}=\sqrt[5]{\frac{n}{4n-3}}$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[5]{\frac{n}{4n-3}}=\sqrt[5]{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{4n-3}}=\sqrt[5]{\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[5]{4}}\neq 0$, следовательно, ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{4n-3}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ ведут себя относительно сходимости одинаково; таким образом, исследуемый ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{4n-3}}$ является расходящимся.

Пример 9. Доказать справедливость равенства $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

Решение. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ и исследуем его на сходимость, используя признак Даламбера. $u_n=\frac{n!}{n^n}$,

$$u_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\frac{n!(n+1)}{(n+1)^n(n+1)}=\frac{n!}{(n+1)^n};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n!}{(n+1)^n}:\frac{n!}{n^n}=\frac{n!}{(n+1)^n}\cdot\frac{n^n}{n!}=\frac{n^n}{(n+1)^n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n=\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$, следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ сходится. Из необходимого признака сходимости ряда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

V Интегральный признак Коши

Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ являются значениями положительной, непрерывной и убывающей на промежутке $[1,+\infty)$ функции $f(x)$. Тогда из сходимости (расходимости) несобственного интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ следует сходимость (расходимость) ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Пример 10. Установить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Решение. Общий член ряда имеет вид $f(n) = \frac{1}{n}$. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x}$. Свойства этой функции удовлетворяют интегральному признаку Коши на промежутке $[1,+\infty)$: она положительна, непрерывна, убывает. Проверим сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$.

$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{1}{x} dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \ln x \Big|_{1}^{b} = \lim\limits_{b\to+\infty} (\ln b - \ln 1) = \infty$. То есть интеграл расходится, значит и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Пример 11. Установить сходимость обобщенного гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ ($\alpha > 0$).

Решение. Общий член ряда имеет вид $f(n) = \frac{1}{n^{\alpha}}$. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$. Свойства этой функции удовлетворяют интегральному признаку

Коши на промежутке $[1,+\infty)$ и при $\alpha > 0$: она положительна, непрерывна, убывает. Проверим сходимость несобственного интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b\to+\infty} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, \alpha > 1; \\ \infty, \alpha \le 1 \end{cases}$$

Таким образом, если $\alpha > 1$ несобственный интеграл равен числу, т.е. сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится. Если $0 < \alpha \le 1$, то несобственный интеграл расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится.

Пример 12. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+5)\ln^2(2n+1)}$.

Решение. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^2(2n+1)}$. Исследуем его сходимость с помощью интегрального признака. Свойства функции $f(x) = \frac{1}{(2x+1)\ln^2(2x+1)}$ удовлетворяют интегральному признаку Коши на промежутке $[1,+\infty)$. Проверим сходимость несобственного интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(2x+1)\ln^2(2x+1)} = \left| \begin{array}{l} \ln(2x+1) = t; \\ dt = \frac{2dx}{2x+1}; \\ t_{x=1} = \ln 3; t_{x=+\infty} = +\infty \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int\limits_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| \Big|_{\ln 3}^{+\infty} = +\infty.$$

Интеграл расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^2(2n+1)}$ расходится. Воспользуемся вторым признаком сравнения. Сравним ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+5)\ln^2(2n+1)}$ и

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^2(2n+1)}$. $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(3n+5)\ln^2(2n+1)}}{\frac{1}{(2n+1)\ln^2(2n+1)}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{3n+5}=\frac{2}{3}\neq 0$. Ряды ведут себя одинаково. Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+5)\ln^2(2n+1)}$ расходится.

<u>Задание для практического занятия</u>

1. Используя необходимый признак сходимости, установите расходящиеся ряды.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

2. Определите, какие из гармонических и геометрических рядов сходятся, а какие расходятся.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty}5^n$

3. Используя признаки сравнения сходимости, установите расходящиеся ряды.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^5-1}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2-1}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n-1)}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$; и) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{2n-1}$; к) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)^2}$; л) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2(2+\sin n)}$.

4. С помощью признака Даламбера установите сходимость рядов.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{(n-1)!}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+3)!}{10^n n^2}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{2^{n-1}n!}$; и) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^{n+2}1}{5^n}$.

5. С помощью признака Коши установите сходимость рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)^n}{(10n+2)^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)^{3n}}{(10n+2)^{2n}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+4)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{n+1}}{n^n}$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{1}{n}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}arctg^{2n}\frac{\pi}{4n}$.

6. Используя интегральный признак Коши определите сходимость рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(3n-2)^2}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^5(n+1)}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\sqrt[3]{\ln(n+1)}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2}$.

§ 3 Свойства сходящихся рядов

Некоторые свойства числовых рядов непосредственно вытекают из соответствующих свойств числовых последовательностей.

Ряд не может иметь двух различных сумм.

Если данный ряд сходится, то и любой ряд, полученный из него группировкой слагаемых, сходится и имеет ту же сумму, что и данный ряд.

Утверждение, обратное сформулированному, неверно.

Пример 1. Ряд $1–1+1–1+\ldots+(–1)^{n–1}+\ldots$ расходится, так как его общий член $u_n=(–1)^{n–1}$ не стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$.

Группируя члены этого ряда, получаем ряд из нулей: $(1–1)+(1–1)+(1–1)+\ldots$, который сходится.

Пусть даны два сходящихся ряда: $a_1+a_2+a_3+\ \ldots+a_n+\ldots\ =\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $b_1+b_2+b_3+\ \ldots+b_n+\ldots\ =\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \grave{a}_n = s$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sigma$. Тогда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) =$ $(a_1+ b_1)+(a_2+ b_2)+(a_3+ b_3)\ \ldots+(a_n+ b_n)+\ldots$, причем его сумма $S=s+\sigma$.

Пример 2. Даны ряды $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ и $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$. Эти ряды сходящиеся, каждый из них представляет собой сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем q меньшим единицы: $q=\frac{1}{2}<1$ для первого ряда, $q=\frac{1}{3}<1$ – для второго. Сумма первого ряда равна $s=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$, сумма второго –

$$\sigma=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}.$$

Тогда ряд $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{27}\right)+...+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$ сходится и имеет сумму $S=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

Пусть дан ряд $a_1+a_2+a_3+ \ldots+a_n+\ldots =\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, который сходится и имеет сумму s: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n = s$. Пусть λ – произвольное действительное число: $\lambda\in R$. Тогда ряд $\lambda a_1+\lambda a_2+\lambda a_3+ \ldots+\lambda a_n+\ldots =\sum_{n=1}^{\infty}\lambda a_n$ является сходящимся и его сумма равна λs: $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda a_n =\lambda s$.

<u>Пример 3.</u> Известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ сходится и имеет сумму S=1. Тогда и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)}$ сходится и имеет сумму $3S=3\cdot1=3$/

Сумма сходящегося и расходящегося ряда является расходящимся рядом.

Разность двух расходящихся рядов может сходиться.

<u>Пример 4.</u> Рассмотрим ряды: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n(n+1)}\right)$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)$. Общий член первого ряда $a_n=1+\frac{2}{n(n+1)}=\frac{n(n+1)+2}{n(n+1)}=\frac{n^2+n+2}{n^2+n}$, его предел $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n+2}{n^2+n}=\frac{1}{1}=1\neq0$, следовательно первый ряд расходится. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

Общий член первого ряда $a_n=1+\frac{2}{n(n+1)}=\frac{n(n+1)+2}{n(n+1)}=\frac{n^2+n+2}{n^2+n}$, его предел $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n+2}{n^2+n}=\frac{1}{1}=1\neq0$, следовательно, первый ряд расходится.

Общий член второго ряда $b_n = 1 + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n(n+1)+1}{n(n+1)} = \frac{n^2+n+1}{n^2+n}$, его предел $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+n} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0$, он также расходится. Но их разность $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{2}{n(n+1)} - 1 - \frac{1}{n(n+1)}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ – сходящийся ряд.

§ 4 Знакопеременные ряды

Ряд, содержащий бесконечное число отрицательных членов, называется знакопеременным.

Знакопеременный ряд $u_1+u_2+u_3+ \ldots+u_n+\ldots =\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из абсолютных величин его членов: $|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$.

Сходящийся знакопеременный ряд называется условно сходящимся, если ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.

Если для знакопеременного ряда $u_1+u_2+u_3+ \ldots+u_n+\ldots$ сходится ряд $|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots$, составленный из абсолютных величин его членов, то данный знакопеременный ряд сходится. Иными словами, абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

<u>Пример 1.</u> Исследовать сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$.

<u>Решение.</u> Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$. Сравним полученный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который сходится, так как является обобщенным гармоническим рядом с α=2>1. Так как $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|<\frac{1}{n^2}$, то по первому признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$ сходится. Исходный ряд является сходящимся, так как он сходится абсолютно.

<u>Пример 2.</u> Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{3^n}$.

Решение. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$ и воспользуемся признаком сходимости Даламбера: $u_n=\frac{n^2}{3^n}$,

$u_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^2}{3^n\cdot 3}:\frac{n^2}{3^n}=\frac{(n+1)^2 3^n}{3^n\cdot 3n^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(n+1)^2}{n^2}$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{(n+1)^2}{n^2}=\frac{1}{3}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}<1$, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$ сходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{3^n}$ является абсолютно сходящимся, поэтому он сходится.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{3n}$.

Решение. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{3n}$, применим к данному ряду признак Коши: $u_n=\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{3n}$,

$\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{3n}}=\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{\frac{3n}{n}}=\left(\frac{n+1}{2n}\right)^3$.

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^3=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}<1$. П признаку сходимости Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{3n}$ сходится, следовательно исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{3n}$ сходится абсолютно, а значит является сходящимся.

Если знаки членов ряда чередуются, то ряд называется знакочередующимся: $u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ или $-u_1+u_2-u_3+\ldots+(-1)^n u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$, $u_n>0$, $n=1, 2, \ldots$

Теорема Лейбница. Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине и общий член ряда стремится к нулю, то этот ряд сходится. Ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница, называется рядом Лейбница.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}+...$

Решение. Данный ряд знакочередующийся. u_1=1, $u_2=\frac{1}{2}$, $u_3=\frac{1}{3}$, $u_n=\frac{1}{n}$, …. $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{n}>$… – члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, следовательно данный ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, поэтому является сходящимся.

Исследуем абсолютную сходимость данного ряда. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Получим гармонический ряд, который является расходящимся. Следовательно, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ условно сходящийся.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n5^n}$.

Решение. Имеем знакочередующийся ряд. $u_n=\frac{1}{n5^n}$, $u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)5^{n+1}}$. Так как $n5^n<(n+1)5^{n+1}$, то $u_{n+1}>u_n$ при всех n, т.е. $u_1>u_2>u_3>$ …$>u_n>$… – члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине. Далее, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5^n}$=0, так как $\frac{1}{5}<1$. Поэтому рассматриваемый ряд является рядом Лейбница и, следовательно, сходится. Исследуем абсолютную сходимость данного ряда. Рассматриваемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n5^n}$ и применим признак сходимости Даламбера: $u_n=\frac{1}{n5^n}$, $u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)5^{n+1}}$,

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n5^n}{(n+1)5^n 5} = \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{n}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{5} < 1$, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n5^n}$ сходится. Это означает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n5^n}$ является абсолютно сходящимся.

Замечание. Исследование абсолютной сходимости проводится теми же методами, с помощью которых исследуются ряды с неотрицательными членами.

В частности, используются признаки Даламбера и Коши. В общем случае из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ не следует расходимость знакопеременного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, он может сходиться условно. Однако, если расходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ установлена с помощью признаков Даламбера и Коши, то это означает, что общий член $|u_n|$ не стремится к нулю, т.е. и u_n не стремится к нулю, и для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ нарушается необходимый признак сходимости ряда.

Таким образом, из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$, установленной с помощью признаков Даламбера или Коши, следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

<u>Пример 6.</u> Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{3n+2}{n-1}\right)^{2n}$.

<u>Решение.</u> Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{3n+2}{n-1}\right)^{2n}$, применим к данному ряду признак Коши: $u_n = \left(\dfrac{3n+2}{n-1}\right)^{2n}$,

$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\dfrac{3n+2}{n-1}\right)^{2n}} = \left(\dfrac{3n+2}{n-1}\right)^{2}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{n-1}\right)^2=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{n-1}\right)\right)^2=\left(\frac{3}{1}\right)^2=9>1$, следовательно, это ряд расходится. Тогда расходится и исходный ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{3n+2}{n-1}\right)^{2n}$.

Пример 6. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$.

Решение. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда и исследуем его сходимость.

Имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$, $u_n=\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$, $u_{n+1}=\frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{4^n4((n+1)!)^2}{(2n+2))!}\cdot\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}=$$

$$\frac{4(n!)^2(n+1)^2(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)(n!)^2}=\frac{4(n+1)^2}{2(2n+1)(n+1)}=\frac{2(n+1)}{2n+1}=$$

$=\frac{2n+2}{2n+1}>1$. Это означает, что $|u_n|$ не стремится к нулю, не стремится к нулю и общий член исходного ряда. Следовательно, исходный ряд расходится.

Пример 8. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n^3}$.

Решение. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3}$ и исследуем его с помощью признака Даламбера: $u_n=\frac{2^n}{n^3}$, $u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}$,

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}\cdot\frac{2^n}{n^3}=\frac{2n^3}{(n+1)^3}$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3}{(n+1)^3}=\frac{2}{1}=2>1$, следовательно, ряд расходится по признаку Даламбера. Тогда и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n^3}$ расходится.

Пусть имеем знакочередующийся ряд Лейбница: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$, u_n>0.

Сумма S ряда Лейбница удовлетворяет условию: $0<S<u_n$. Остаток r_n ряда Лейбница имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине: $|r_n|<u_{n+1}$, $r_n<0$ при n нечетном и $|r_n|<u_{n+1}$, $r_n>0$ при n четном.

Указанное утверждение дает возможность найти сумму ряда Лейбница с любой заданной точностью.

Чтобы найти сумму ряда Лейбница с заданной точностью ε, достаточно найти член ряда, не превосходящий по абсолютной величине ε, и вычислить сумму предшествующих ему членов ряда.

Пример 9. Найти с точностью до 0,01 сумму ряда $1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{6^3}...+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n)^3}+...$.

Решение. Имеем знакочередующийся ряд. Так как $u_{n+1}=\frac{1}{(2(n+1))^3}<u_n=\frac{1}{(2n)^3}$, то члены ряда монотонно убывают по абсолютно величине: $u_1>u_2>u_3>\ \ldots>u_n>\ldots$. Далее, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(2n)^3}=0$, отсюда данный ряд является рядом Лейбница, поэтому сходится и имеет сумму S.

Имеем $u_1=1$, $u_2=\frac{1}{8}=0{,}125$, $u_3=\frac{1}{64}=0{,}015625\approx0{,}016$, $u_4=\frac{1}{216}\approx0{,}004$. Заметим, что $u_4\le0{,}01$, поэтому $S\approx S_3=1–0{,}125+0{,}016=0{,}891$.

Пример 10. Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}$. Выяснить, сколько членов ряда нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,001; до 0,001.

Решение. Данный ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница: $u_n=\frac{1}{n!}$, $u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$, то есть $u_n>u_{n+1}$ при всех n, значит члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине; $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$. Следовательно, данный ряд сходится и имеет сумму S. Остаток $|r_n|$ не превышает модуля первого отброшенного члена. Запишем последовательно значения $n!$, пока не превысим числа 1000: 1!=1, 2!=2, 3!=6, 4!=24, 5!=120, 6!=720, 7!=5040. Следовательно, для вычисления суммы ряда с точностью до 0,01 достаточно вычислить S_4, т.е. ограничиться суммой первых четырех членов. При этом знак погрешности совпадает со знаком пятого члена $(-1)^5\frac{1}{5!}=-\frac{1}{120}$. Таким образом, S_4 дает приближенное значение суммы ряда с избытком, не превышающим $\frac{1}{120}$. Точно также для получения ответа с точностью до 0,001 можно ограничиться суммой первых шести членов ряда. При этом получаем приближенное значение с избытком, не превышающим $\frac{1}{5040}$.

Задания для практического занятия

1. Докажите применимость теоремы Лейбница, укажите, сколько первых членов надо взять, чтобы найти сумму ряда с точностью до 0,001. Найти сумму ряда с указанной точностью.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{5n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n3^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$.

2. Вычислите сумму ряда с указанной точностью.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{(1+n^3)^2}$, $\alpha=0{,}001$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4+n)n^3}$, $\alpha=0{,}01$;

в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2+n^2}$, $\alpha=0{,}01$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)}{1+n^3}$, $\alpha=0{,}01$.

3. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость следующие ряды.

а) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots$; б) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\ldots$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{\alpha}}$; е) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\ln n}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sqrt[3]{n}}{n+2}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^{10}}{e^n}$; и) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$; к) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n}{3n+4}$.

§ 5 Понятие функционального ряда

Рассмотрим ряды, членами которых являются не числа, а функции. Пусть функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$, …, $u_n(x)$,… заданы на одном и том же множестве X.

Функциональным рядом с общим членом $u_n(x)$ называется выражение $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$

Если заменить в этом выражении переменную x любым числом $x_0 \in X$, то получим числовой ряд $u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots$. Таким Образом, каждый функциональный ряд определяет множество числовых рядов, получаемых из него подстановкой вместо переменной ее численных значений.

Эти числовые ряды могут сходиться при одних значениях аргумента и расходиться при других значениях.

Множество значений аргумента x, при которых сходится функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, называется областью сходимости D этого ряда. Таким образом, каждому значению $x_0 \in D$ соответствует число $S(x_0)$ – сумма ряда при $x=x_0$. Тем самым в области D сходимости ряда определена функция $S(x)$, называемая суммой функционального ряда.

Частичные суммы ряда будем обозначать $S_n(x)$, а его остаток обозначим $R_n(x)$. В области сходимости D имеем: $S(x)= S_n(x)+ R_n(x)$, $S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x)$, $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

Чаще всего используют функциональные ряды двух типов: степенные и тригонометрические.

Степенные ряды – это ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Таким образом, степенной ряд является частным случаем функционального ряда, в котором $u_n(x)=a_n(x-x_0)^n$. При $x_0=0$ степенной ряд принимает вид $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$.

Тригонометрические ряды – это функциональные ряды вида: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. В данном пособии мы не будем рассматривать тригонометрические ряды, а также всю теорию степенных рядов, так как данный материал требует предварительного изучения курса математического анализа. Остановимся лишь на элементах теории степенных рядов, не требующих знаний дифференциального и интегрального исчислений.

Сходимость функционального ряда можно исследовать с помощью признаков сходимости числовых рядов.

<u>Пример 1.</u> Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n$.

<u>Решение.</u> Имеем ряд: $1+\frac{x}{4}+\left(\frac{x}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x}{4}\right)^n+\ldots$ – сумма членов геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{x}{4}$. Если $|q|=\left|\frac{x}{4}\right|<1$, то ряд сходится. Поэтому область сходимости данного ряда определяется неравенством: $\left|\frac{x}{4}\right|<1$ или $|x|<4$. Данное неравенство равносильно: $-4<x<4$, отсюда область сходимости ряда $D=(-4; 4)$.

<u>Пример 2.</u> Исследовать сходимость ряда $1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$.

<u>Решение.</u> Применим признак Даламбера: $|u_n(x)|=\frac{|x^n|}{n!}$, $|u_{n+1}(x)|=\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}$,

$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}:\frac{|x^n|}{n!}=\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|x^n|}=\frac{|x^{n+1}|}{|x^n|}\cdot\frac{n!}{n!(n+1)}=\frac{|x|}{n+1}$, отсюда $\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0$.

Таким образом, при любом значении x ряд сходится абсолютно, следовательно, является сходящимся в интервале $x \in (-\infty, \infty)$, $D = (-\infty, \infty)$.

Замечание. Определение абсолютной сходимости функционального ряда аналогично таковому для числового ряда. Утверждение, что абсолютно сходящийся функциональный ряд сходится, также имеет место.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n x^n}$.

Решение. Используем признак Коши: $|u_n(x)| = \frac{1}{4^n |x^n|}$,

$\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \sqrt[n]{\frac{1}{4^n |x^n|}} = \frac{1}{4|x|}$. Ряд из абсолютных величин членов данного ряда сходится, если $\frac{1}{4|x|} < 1$ или $4|x| > 1$, $|x| > \frac{1}{4}$. Поэтому $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$ – объединение интервалов абсолютной сходимости ряда. Исследуем поведение ряда на концах интервалов, т.е. в точках $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{4}$.

При $x_1 = -\frac{1}{4}$ получаем ряд 1–1+1–1+…, а при $x_2 = \frac{1}{4}$ имеем ряд 1+1+1+…, которые являются расходящимися, так ка не выполняется необходимый признак сходимости ряда. Таким образом, область абсолютной сходимости, а, следовательно, и сходимости ряда равна $D = \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$.

Пример 4. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

Решение. По признаку Даламбера имеем $|u_n(x)| = |\ln^n x|$, $|u_{n+1}(x)| = |\ln^{n+1} x|$,

$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \left|\frac{\ln^{n+1} x}{\ln^n x}\right| = |\ln x|$. Ряд сходится при $|\ln x| < 1$, т.е. при $-1 < \ln x < 1$ или при $\frac{1}{e} < x < e$. Отсюда $\left(\frac{1}{e}; e\right)$ – интервал абсолютной сходимости, а, следовательно, и сходимости ряда. В точках $x_1 = \frac{1}{e}$ и $x_2 = e$ сходимость ряда исследуем дополнительно.

Полученные для этих значений ряды $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}1^n$ расходятся, так как не выполняется необходимый признак сходимости ряда. Поэтому $D=\left(\frac{1}{e};e\right)$.

<u>Пример 5.</u> Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$.

<u>Решение.</u> $|u_n(x)| = \frac{x^{2n}}{n}$, $|u_{n+1}(x)| = \frac{x^{2(n+1)}}{n+1}$, $\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{x^{2(n+1)}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^{2n}} = x^2\cdot\frac{n}{n+1}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = x^2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = x^2\cdot 1 = x^2$. Ряд сходится, если $x^2<1$ или при $|x|<1$, что равносильно двойному неравенству: $-1<x<1$. Итак, интервал сходимости (–1, 1). На концах интервала сходимости имеем: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд, который является расходящимся. Отсюда область сходимости D=(–1, 1).

<u>Задания для практического занятия</u>

1. Определить области сходимости (абсолютной и условной) следующих рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n x^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{tg^n x}{n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+3)^{2n}}{n^n}$.

§ 6 Интервал сходимости степенного ряда

Степенной ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при x=0, так как в этой точке все члены ряда, кроме первого, равны нулю.

Есть степенные ряды, которые сходятся лишь в точке x=0. Например, ряд $1+x+2!x^2+\ldots+n!x^n+\ldots$ сходится лишь в точке $x_0=0$.

Есть степенные ряды, которые сходятся на всей числовой оси. Например, ряд $1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$ сходится абсолютно на всей числовой оси $(-\infty,\infty)$ (пример 2 § 5).

Для каждого степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ существует число R>0, называемое радиусом сходимости этого ряда и обладающее свойством: при $|x|<R$ ряд сходится абсолютно, при $|x|>R$ расходится. Промежуток (–R, R) называется интервалом сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Если степенной ряд сходится только в точке x=0, то полагают R=0. Если степенной ряд сходится на всей числовой оси, то $R=\infty$. В этом случае интервал сходимости есть $(-\infty,\infty)$.

Областью сходимости степенного ряда является интервал (–R, R), к которому в отдельных случаях добавляют один или оба конца.

Радиус сходимости степенного ряда вычисляется по формулам: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ или $R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ имеет интервал сходимости (x_0–R, x_0+R), где R – радиус сходимости, который вычисляется по указанным выше формулам.

Пример 1. Определить радиус сходимости и выяснить поведение на концах интервала сходимости ряда $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$.

Решение. Имеем коэффициенты ряда: $a_n=\frac{1}{n}$, $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$. Тогда $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=1$, R=1. Следовательно, ряд сходится в интервале (–1, 1).

Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

При x= –1 получим знакочередующийся ряд: $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots$. Этот ряд сходится так как удовлетворяет условиям теоремы Лейбница.

При x=1 получим гармонический ряд: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, который является расходящимся.

Таким образом, ряд $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$ сходится при $x\in[-1{,}1)$.

Пример 2. Найти интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$.

Решение. Воспользуемся формулой $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$. Здесь $a_n=\frac{1}{n^n}$, $\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\frac{1}{n}$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, следовательно, $R=\infty$, интервал сходимости $(-\infty,\infty)$.

Пример 3. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{ï}\,x^n}{n^2}$.

Решение. Найдем радиус сходимости ряда, интервал сходимости и исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

Имеем $a_n = \dfrac{3^n}{n^2}$, $a_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{(n+1)^2} = \dfrac{3^n 3}{(n+1)^2}$, отсюда $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{n^2}\cdot\dfrac{(n+1)^2}{3^n 3} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{3n^2} = \dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{n^2} = \dfrac{1}{3}$. Тогда интервал сходимости $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$. Далее, пусть $x = -\dfrac{1}{3}$, тогда получим ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n(-1)^n\frac{1}{3^n}}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$. Это знакочередующийся ряд Лейбница, следовательно, он сходится. Поэтому $\tilde{o} = -\dfrac{1}{3}$ принадлежит области сходимости степенного ряда. Пусть $x = \dfrac{1}{3}$. Тогда имеем ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, который является обобщенным гармоническим рядом, $\alpha = 2 > 1$. Поэтому он является сходящимся. Следовательно, $\tilde{o} = \dfrac{1}{3}$ также принадлежит области сходимости степенного ряда.

Итак, $D = \left[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right]$.

Пример 4. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!\,x^n}{2^n}$.

Решение. Имеем $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$, $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}}$, $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \dfrac{n!}{2^n}\cdot\dfrac{2^n\cdot 2}{(n+1)!} = \dfrac{2n!}{n!(n+1)} = \dfrac{2}{n+1}$.

Тогда $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n+1} = 0$. В этом случае ряд сходится только в точке x=0. Отсюда D={0}.

Пример 5. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n x^n}{\left(\sqrt{n}\right)^n}$.

Решение. Имеем $a_n = \frac{2^n}{\left(\sqrt{n}\right)^n}$, $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{\left(\sqrt{n}\right)^n}} = \frac{2}{\sqrt{n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 0$, отсюда $R = \infty$. Ряд сходится на всей числовой оси, D=($-\infty,\infty$).

Пример 6. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n4^{n-1}}$.

Решение. Имеем $a_n = \frac{1}{n4^{n-1}}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)4^n}$,

$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{n4^{n-1}} : \frac{1}{(n+1)4^n} = \frac{(n+1)4^n}{n4^{n-1}} = \frac{4(n+1)}{n}$, отсюда $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 4\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 4\cdot 1 = 4$, тогда интервал сходимости: $(-R, R)$=(−4, 4).

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

Пусть x=−4, тогда имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n4^{n-1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{n4^{n-1}} = 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Данный ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, поэтому является сходящимся, значит x=−4 принадлежит области сходимости степенного ряда.

Пусть x=4, тогда получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n4^{n-1}} = 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится, так как является гармоническим, поэтому x=4 не принадлежит области сходимости степенного ряда.

Итак, D=[−4, 4).

Пример 7. Исследовать сходимость ряда: $(x-2)+\frac{1}{2^3}(x-2)^2+\frac{1}{3^3}(x-2)^3+\ldots$.

Решение. Имеем $a_n = \frac{1}{n^3}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^3}$. Тогда $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{n^3} : \frac{1}{(n+1)^3} = \frac{(n+1)^3}{n^3}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\right)^3 = 1^3 = 1$, поэтому R=1, следовательно, интервал сходимости: (x_0-R, x_0+R)=(2−1, 2+1)==(1, 3), так как x_0=2.

Исследуем сходимость ряда в точках x=1, x=3.

При x=1 получим ряд $-1+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}-\ldots$ Составим ряд из абсолютных величин членов этого ряда: $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\ldots$, $u_n = \frac{1}{n^3}$. Это обобщенный гармонический ряд, $\alpha = 3 > 1$, поэтому он сходится, тогда ряд $-1+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}-...$ является абсолютно сходящимся и, следовательно, сходится. Точка x=1 принадлежит области сходимости степенного ряда.

При x=3 получим ряд Составим ряд из абсолютных величин членов этого ряда: $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+...+\frac{1}{n^3}+...$ Как уже было показано, он сходится, поэтому точка x=3 принадлежит области сходимости степенного ряда.

Итак, D=[−1, 3].

<u>Пример 8.</u> Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(x+3)^n}{4^{n+1}}$.

<u>Решение.</u> $a_n = \frac{5^n}{4^{n+1}}$, $a_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{4^{n+2}}$, $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{5^n}{4^{n+1}} : \frac{5^{n+1}}{4^{n+2}} = \frac{5^n 4^{n+2}}{4^{n+1}5^{n+1}} = \frac{5^n 4^{n+1} 4}{4^{n+1}5^n 5} = \frac{4}{5}$.

Тогда $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{5} = \frac{4}{5}$ − радиус сходимости степенного ряда. Далее, x_0=−3, поэтому (x_0−R, x_0+R)=($-3-\frac{4}{5}$, $-3+\frac{4}{5}$)=($-\frac{19}{5}$, $-\frac{11}{5}$) – интервал сходимости степенного ряда.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости.

Пусть $x=-\frac{19}{5}$, тогда имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(-1)^n\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n}{4^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4} = \frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-...$.

Этот ряд является расходящимся, так как не удовлетворяет необходимому признаку сходимости ряда, поэтому точка $x=-\frac{19}{5}$ не принадлежит области сходимости степенного ряда.

Пусть $x=-\frac{11}{5}$, получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+...$. Этот ряд также расходится, для него не выполняется необходимый признак сходимости ряда. Поэтому точка $x=-\frac{11}{5}$ не принадлежит области сходимости степенного ряда.

Итак, D=($-\frac{19}{5}$, $-\frac{11}{5}$).

Пример 9. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n(n+1)}$.

Решение. $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{1}{n(n+1)}:\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+2}{n}$.

Тогда $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n}=1=R$ − радиус сходимости степенного ряда.

Так как $x_0=-1$, поэтому $(x_0-R,\ x_0+R)=(-1-1,\ -1+1)=(-2,\ 0)$ – интервал сходимости степенного ряда.

Пусть $x=-2$, тогда имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$, который является рядом Лейбница, поэтому сходится, значит $x=-2$ принадлежит области сходимости степенного ряда.

Пусть $x=0$, то получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. При сравнении его с обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который является сходящимся ($\alpha=2>1$) имеем: $n(n+1)=n^2+n>n^2$, тогда $\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}$. По первому признаку сравнения ряд сходится. Отсюда область сходимости степенного ряда $D=[-2,\ 0]$.

Пример 10. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n\sqrt{n+1}}{3^n}$.

Решение. $a_n=\frac{\sqrt{n+1}}{3^n}$, $a_{n+1}=\frac{\sqrt{n+2}}{3^{n+1}}$, $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{\sqrt{n+1}\cdot 3^{n+1}}{3^n\cdot\sqrt{n+2}}=3\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$. Тогда $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}3\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}=3\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}}=3\sqrt{1}=3=R$ − радиус сходимости, следовательно, интервал сходимости $(x_0-R,\ x_0+R)=(3-3,\ 3+3)=(0,\ 6)$, так как $x_0=3$.

Пусть $x=0$.

Тогда имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n\sqrt{n+1}}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n+1}=-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\sqrt{5}-...$, который является расходящимся, так как общий член ряда не стремиться к нулю. Значит $x=0$ не принадлежит области сходимости степенного ряда.

Пусть x=6, то получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\sqrt{n+1}}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\ldots$, который также является расходящимся; точка x=6 не принадлежит области сходимости степенного ряда.

Задания для практического занятия

1. Найдите радиус и интервал сходимости ряда и исследуйте его сходимость на границах интервала.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{n-1}}{n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n^2}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n x^n$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}}$;

ж) $1+\frac{2x}{3^2\sqrt{3}}+\frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}}+\frac{8x^3}{7^2\sqrt{3^3}}+\ldots$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$; и) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$;

к) $1-\frac{x}{5\sqrt{2}}+\frac{x^3}{5^2\sqrt{3}}-\frac{x^5}{5^3\sqrt{4}}+\ldots$; м) $\sum_{n=1}^{\infty}(xn)^n$.

2. Найдите область сходимости степенного ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^{n-1}n}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{2^n}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2}$; и) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n3^n}$; к) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(x-2)^n}{4^{n+1}}$; м) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^3}$.

§ 7 Представление некоторых функций степенным рядом

Представление функции $f(x)$ в виде суммы ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ называется разложением этой функции в степенной ряд. Для разложения функции в степенные ряды применяется формула Тейлора.

Пусть $f(x)$ имеет на отрезке $[x_0-\delta; x_0+\delta]$ производные до $(n+1)$-го порядка включительно, причем $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна на этом отрезке. Тогда для любого x из этого отрезка выполняется равенство:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + r_n(x),$$ где

$r_n(x) = \dfrac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$. Данное равенство называется формулой Тейлора, а $r_n(x)$ – остаточный член этой формулы, записанный в интегральной форме.

Пример 1. Разложить $f(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4$ по степеням $(x-1)$. Вычислить $f(1{,}01)$ с точностью до 10^{-6}.

Решение. Вычислим производные функции $f(x)$: $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 16x + 4$, $f''(x) = 12x^2 + 12x - 16$, $f'''(x) = 24x + 12$, $f^{IV}(x) = 24$, $f^{V}(x) = f^{(n)}(x) = 0$, при $n \ge 5$.

В точке $x_0 = 1$ имеем $f(1) = 3$, $f'(x) = -2$, $f''(x) = 12x^2 + 12x - 16$, $f'''(x) = 36$, $f^{IV}(x) = 24$. При $n \ge 4$ получим разложение функции $f(x)$ по степеням $(x-1)$, поскольку $r_n(x)$ обращается в нуль:

$$f(x) = 3 - 2(x-1) + \frac{8(x-1)^2}{2!} + \frac{36(x-1)^3}{3!} + \frac{24(x-1)^4}{4!} =$$

$$= 3 - 2(x-1) + 4(x-1)^2 + 6(x-1)^3 + (x-1)^4.$$

Последнее слагаемое в разложении $f(x)$ при $x = 1{,}01$ равно 10^{-8}. Предыдущее слагаемое при $x = 1{,}01$ равно $6 \cdot 10^{-6}$. Для вычисления с точностью 10^{-6} можно лишь отбросить последнее слагаемое. Имеем $f(1{,}01) = 3 - 2 \cdot 0{,}01 + 4 \cdot 0{,}0001 + 6 \cdot 0{,}000001 = 2{,}980406$ с точностью до 10^{-6}.

Формула Тейлора дает представление функции $f(x)$ в виде суммы конечного множества слагаемых. Если $f(x)$ имеет на $[x_0-\delta; x_0+\delta]$ производные любого порядка, причем на этом отрезке выполняется соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$, то можно перейти в формуле Тейлора к пределу при $n\to\infty$. Получим, что $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$. Ряд, стоящий в правой части последней формулы, называется рядом Тейлора функции $f(x)$. Он зависит не только от этой функции, но и от выбора значения x_0. Если $x_0=0$, то ряд Тейлора принимает вид $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$ и называется рядом Маклорена. Непосредственно проверить, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$ для всех $[x_0-\delta; x_0+\delta]$, часто бывает затруднительно. Поэтому нужно ввести признак того, что на $[x_0-\delta; x_0+\delta]$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$, то есть что функция равна на данном отрезке сумме своего ряда Тейлора.

Признак сходимости ряда Тейлора к разлагаемой функции формулируется следующим образом. Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на $[x_0-\delta; x_0+\delta]$, пусть существует такое число M, что для всех x и всех n выполняется неравенств $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$, тогда функция $f(x)$ является на $[x_0-\delta; x_0+\delta]$ суммой своего ряда Тейлора. Иными словами, в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$ для всех $x\in[x_0-\delta; x_0+\delta]$.

Имеют место следующие утверждения:

1) сумма степенного ряда есть функция, непрерывная в каждой точке интервала сходимости ряда;

2) степенной ряд можно почленно интегрировать по любому отрезку, целиком лежащему в интервале сходимости. Если $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, то $\int\limits_0^x f(t)dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n x^{n+1}}{n+1}$;

3) степенной ряд можно дифференцировать в любой точке, лежащей внутри интервала сходимости. Если $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то $f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Приведем разложения некоторых функций в степенной ряд.

1. $\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...,\quad x\in(-\infty,\infty)$;

2. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...,\quad x\in(-\infty,\infty)$;

3. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...,\quad x\in(-\infty,\infty)$;

4. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+....,\quad x\in(-1,1]$;

5. $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+...+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-n+1)}{n!}x^n+...,$
$|x|<1$

(биномиальный ряд);

6. $\arcsin x=x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7+...,\quad x\in[-1,1]$;

7. $arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+(-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...,\quad x\in[-1,1]$;

8. $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+...=$
$=1+\frac{1}{2}x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5...(2n-3)}{2^n n!}x^n+...,\quad x\in(-1,1);$

9. $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n+...,\quad x\in(-1,1)$.

Разложение функций в ряд используется, в частности, в приближенных вычислениях.

Пример 1. Вычислить $e^{0,2}$ с точностью до 0,0001.

Решение. Воспользуемся разложением функции e^x в степенной ряд: $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$ Тогда $e^{0,2}=1+0,2+\frac{(0,2)^2}{2!}+\frac{(0,2)^3}{3!}+\frac{(0,2)^4}{4!}+....$

Оценим погрешность, получаемую при отбрасывании всех членов, начиная с пятого:

$$r_4=\frac{(0{,}2)^4}{4!}+\frac{(0{,}2)^5}{5!}+\frac{(0{,}2)^6}{6!}+\ldots=\frac{(0{,}2)^4}{4!}\left(1+\frac{0{,}2}{5}+\frac{(0{,}2)^2}{5\cdot 6}+\ldots\right)<\frac{(0{,}2)^4}{4!}\left(1+\frac{0{,}2}{5}+\frac{(0{,}2)^2}{5}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{0{,}0016}{24}\cdot\frac{1}{1-\frac{0{,}2}{5}}<0{,}0001.$$

Следовательно, с точностью до 0,0001 имеем

$$e^{0,2}=1+0{,}2+\frac{(0{,}2)^2}{2!}+\frac{(0{,}2)^3}{3!}=1+0{,}2+\frac{0{,}04}{2}+\frac{0{,}008}{6}\approx 1{,}2213.$$

Пример 2. Вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью до 0,001.

Решение. Воспользуемся биномиальным рядом

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots.$$

Представим 130 в виде (5^3+5), тогда $\sqrt[3]{130}=\left(5^3+5\right)^{\frac{1}{3}}$, отсюда

$$\left(5^3+5\right)^{\frac{1}{3}}=5\left(1+\frac{1}{5^2}\right)^{\frac{1}{3}}=5\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\frac{1}{5^4}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\frac{1}{5^6}+\ldots\right)=$$

$$=5+\frac{1}{3\cdot 5}-\frac{1}{3^2\cdot 5^2}+\frac{1}{3^4\cdot 5^4}-\ldots.$$

Полученный ряд является знакочередующимся. Четвертый член по абсолютной величине $\frac{1}{3^4\cdot 5^4}<0{,}001$. Требуемая точность вычислений обеспечивается сохранением первых трех членов ряда.

Таким образом, $\sqrt[3]{130}\approx 5+0{,}0667-0{,}0009=5{,}0658.$

Задания для практического занятия

1. Разложите по степеням $x-1$ функцию:

а) $y=x^3-2x+1$; б) $y=\ln x$; в) $y=\frac{1}{x}$; г) $y=\sqrt[3]{x}$; д) $y=e^{\frac{x}{2}}$.

2. Разложите в ряд Маклорена функцию:

а) $y=\sin^2 x$; б) $y=\arccos x$; в) $y=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$; д) $y=\cos^2 x$.

3. Найдите сумму ряда $\frac{x^3}{6}+\frac{x^7}{7}+...+\frac{x^{4n-1}}{4n-1}+...$

4. Вычислите приближенно с точностью до 0,0001:

а) $\cos 18^0$; б) $\ln 3$; в) $\ln 1{,}4$; г) $\sqrt[3]{30}$.

5. Вычислите приближенное значение интегралов, взяв два члена разложения подынтегральной функции. Оцените получившиеся при этом погрешности:

а) $\int\limits_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$; б) $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3 arctgx dx$; в) $\int\limits_0^1 \sin x^2 dx$.

§ 8 Тригонометрические ряды

Чтобы функцию $y = f(x)$ можно было разложить в степенной ряд по степеням $(x - x_0)$, необходимо ее бесконечная дифференцируемость в точке x_0. Например, $y = |x|$ нельзя разложить в ряд по степеням x, так как она не дифференцируема в точке $x = 0$. Кроме того, степенные функции не периодичны и поэтому неудобно строить по ним разложение периодических функций. В связи с этим рассматривают разложение периодических функций в ряды по гармоническим колебаниям, то есть по функциям вида $y = A\sin(\omega x + \alpha)$. Так как $y = A_n \sin(nx + \alpha_n) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$, где $A_n = \sqrt{a^2{}_n + b^2{}_n}$, $\sin\alpha_n = \frac{a_n}{A_n}$, $\cos\alpha_n = \frac{b_n}{A_n}$, то будем рассматривать разложения периодических функций в тригонометрические ряды вида $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx =$

$$= \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots .$$

Отметим, что другую запись этого разложения можно получить, используя формулы Эйлера: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{b_n}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$, где $c_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i)$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + b_n i)$, $c_0 = \frac{a_0}{2}$.

Определим скалярное произведение функций f и g, заданных на $[a;b]$, формулой $(f, g) = \int_a^b f(x) \cdot g(x)dx$. Здесь и далее рассматриваются лишь кусочно-непрерывные функции. Функции f и g, заданные на $[a;b]$, называются ортогональными на этом отрезке, если $(f, g) = \int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = 0$.

Число $\sqrt{(f, f)}$ называется нормой функции f и обозначается $\|f\|$. Система функций $\{f_n(x), a \le x \le b, n \in N\}$ (конечная или бесконечная) называется ортогональной, если функции этой системы попарно ортогональны. Система функций $1, \cos x, \sin x, ..., \cos nx, \sin nx, ...$ ортогональна на $[0;2\pi]$ (и на любом отрезке вида $[a;a+2\pi]$): $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$, $\int_0^{2\pi} \cos x dx = 0$, $\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx dx = 0$, $\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx = 0$ $(n \neq m)$ и при любых n, m $\int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx dx = 0$. Отметим, что $\int_0^{2\pi} \sin^2 nx dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx = \pi$ и $\int_0^{2\pi} dx = 2\pi$. Для любой кусочно-непрерывной функции $f(x)$, $a \le x \le b$ и любой ортогональной на $[a;b]$ системы функций $\{\varphi_m(x)\}$ можно формально определить ряд $\sum_n a_n \varphi_n(x)$, где $a_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$. Число a_n называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$ по $a_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$. Числа a_n называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$ по ортогональной системе функций $\{\varphi_m(x)\}$, а ряд $\sum_n a_n \varphi_n(x)$ – рядом Фурье этой функции по заданной системе. В случае тригонометрической системы функций $1, \cos x, \sin x, ..., \cos nx, \sin nx, ...$ ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, коэффициенты Фурье находятся по формулам: $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) dx$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nx dx$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nx dx$.

Если вместо отрезка $[a;a+2\pi]$ взять отрезок $[a;a+2l]$, то $a_0 = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) dx$, $a_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$, $b_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$, а ряд Фурье принимает вид: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$.

Пример 1. Вычислить коэффициенты Фурье функции $y = x^2$ на $[0;2\pi]$.

Решение. Имеем $a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3}$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left.\left(\frac{x^2 \sin nx}{n} - \frac{2\sin nx}{n^3} + \frac{2x\cos nx}{n^2}\right)\right|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left.\left(-\frac{x^2 \cos nx}{n} + \frac{2\cos nx}{n^3} + \frac{2x\sin nx}{n^2}\right)\right|_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{n}.$$

Следовательно, ряд Фурье функции $y = x^2$ имеет вид $\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi\sin nx}{n}\right)$.

В общем случае нельзя утверждать, что ряд Фурье данной функции сходится к ней. Сформулируем достаточные условия для того, чтобы ряд Фурье функции $f(x)$, имеющей период 2π, сходился к этой функции.

Теорема. Пусть $y = f(x)$, имеет период 2π и является кусочно-гладкой. Тогда ее ряд Фурье сходится в каждой точке x_0 числовой оси к значению $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Так как в точках, где функция $f(x)$ непрерывна, $f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0)$, то ряд Фурье кусочно-гладкой функции сходится к ней во всех точках непрерывности этой функции. Отметим, что встречающиеся при решении практических задач функции с периодом 2π удовлетворяют условиям теоремы.

Если периодическая с периодом $2l$ функция четна на $(-l;l]$, то ее ряд Фурье имеет вид: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$, $a_0 = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)dx$, $a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$.

В случае нечетной функции: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$, $b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на $[-\pi;\pi)$ выражением $f(x) = x$ и имеющую период 2π.

Решение. Так как функция является нечетной, то $b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx =$

$= \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\sin nx dx = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\sin nx}{n^2} - \dfrac{x\cos nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \dfrac{2\cdot(-1)^n}{n}$. Тогда ряд Фурье будет иметь вид: $f(x) = 2(\sin x - \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin 3x + ...)$.

<u>Задания для практического занятия</u>

1. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию с периодом 2π, заданную на указанном отрезке:

а) $f(x) = \begin{cases} -3, при -\pi \le x \le 0; \\ 3, при 0 < x \le \pi; \end{cases}$ б) $f(x) = x + \pi$, $[-\pi;\pi]$.

2. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию с периодом 2, заданную на указанном отрезке:

а) $f(x) = |x|$, $[-1;1]$ б) $f(x) = x^2$, $[-1;1]$.

3. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию с периодом 2π, заданную выражением $f(x) = \pi - 2x$ на отрезке $[0;\pi]$, продолжив $f(x)$ на отрезке $[-\pi;0]$

а) четным образом; б) нечетным образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шипачев, В. С. Высшая математика: учебное пособие для вузов / В. С. Шипачев. – 8-е изд., перераб. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2019. – 447 с. – (Бакалавр и специалист). – ISBN 978-5-534-12319-7. –22 (дата обращения: 18.03.2020).

2. Назаров, А.И. Курс математики для нематематических специальностей и направлений бакалавриата [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.И. Назаров, И.А. Назаров. – Электрон. дан. – Санкт-Петербург: Лань, 2011. – 576 с. – Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/1797.

3. Петрушко, И.М. Курс высшей математики. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление. Лекции и практикум [Электронный ресурс] : учеб. пособие – Электрон. дан. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 288 с. – Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/302. – Загл. с экрана.

4. Петрушко, И.М. Курс высшей математики. Интегральное исчисление. Функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения. Лекции и практикум [Электронный ресурс] : учеб. пособие – Электрон. дан. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 608 с. – Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/306. –– Загл. с экрана

5. Икрянников В.И. Практикум по высшей математике [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.И. Икрянников, Э.Б. Шварц. – Электрон. текстовые данные. – Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2011. – 439 с. – 978-5-7782-1870-3. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/45424.html

СОДЕРЖАНИЕ