Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОУВПО «АмГУ»
Факультет математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой МАиМ
Т.В. Труфанова
«___»__________ 2007г.

Учебно – методический комплекс дисциплины

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

для специальности 010701 − физика

Составитель: Труфанов В.А.

Благовещенск
2007

ББК
Х

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и
информатики
Амурского государственного
университета

Труфанов В.А.

Теория вероятностей и математическая статистика. Учебно – методический комплекс дисциплины для студентов очной формы обучения специальности 010701 «Физика». – Благовещенск: Амурский гос. ун–т, 2007. − 46 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Государственный образовательный стандарт

Случайные события, случайные величины, основные понятия и методы. Некоторые типы случайных процессов. Элементы математической статистики, основные свойства и методы.

2. Рабочая программа

по дисциплине "Теория вероятности и математическая статистика"
для специальности 010701–"Физика"
Курс 3 Семестр 6
Лекции 36 час. Экзамен 6 семестр.
Практические (семинарские) занятия 36 час. Зачет (нет).
Лабораторные занятия (нет).
Самостоятельная работа 36 час.
Всего 108 час.

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе.

1.1. Цель преподавания дисциплины.

Дисциплина “Теория вероятностей и математическая статистика” ставит своей целью ознакомление студентов с основными разделами современной теории вероятностей и математической статистики.

1.2. Задачи изучения дисциплины.

В результате изучение дисциплины студент должен знать основные понятия и методы теории вероятностей и математической статистики.

В процессе изучения дисциплины студенты должны приобрести навыки и умения исследования и решения задач, доказательства теорем теории вероятностей и математической статистики, составлять и использовать математические модели с учетом случайных факторов.

1.3. Перечень дисциплин с указанием разделов, усвоение которых студентами необходимо при изучении данной дисциплины.

При изучении курса “Теория вероятностей и математическая статистика” привлекаются понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории дифференциальных уравнений.

2. Сводные данные об основных разделах дисциплины и распределение часов по видам занятий.

Тематический план.

№ темы	Наименование темы	Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа
1	События и их вероятности: конечное вероятностное пространство; операции над событиями; элементы комбинаторики; классическое определение вероятностей; простейшие свойства вероятностей; условные вероятности; независимость событий; формула полной вероятности; схема Бернулли.	6	8	6
2	Дискретные случайные величины и их распределения: счётное вероятностное пространство; дискретные случайные величины и их распределения; числовые характеристики случайных величин; независимость случайных величин; индикаторы событий; некоррелированность случайных величин; предельные теоремы для схемы Бернулли; неравенства Чебышёва; закон больших чисел; сходимость по вероятности.	8	8	8
3	Общие случайные величины: функция распределения; непрерывные случайные величины и их характеристики; примеры абсолютно непрерывных распределений.	3	4	3
4	Совместное распределение общих	3	4	3

	случайных величин: совместная функция распределения, плотность; о некоррелированных зависимых случайных величин; формула свёртки.			
5	Предельные законы теории вероятностей: закон больших чисел; центральная предельная теорема.	2	2	2
6	Цепи Маркова	1	1	1
7	Обзор методов математической статистики: понятие о выборке; эмпирическая функция распределения; гистограмма; выборочное средние и выборочная дисперсия; оценивание неизвестных параметров распределения. Методы построение оценок: метод моментов; метод наибольшего правдоподобия.	4	3	4
8	Доверительные интервалы: понятие доверительного интервала; вероятностные распределения, связанные с нормальным; теорема Фишера для нормальных выборок; доверительное оценивание параметров нормальных выборок.	3	2	3
9	Метод наименьших квадратов: линейная модель; система нормальных уравнений; регрессионная модель.	2	2	2
10	Статистические гипотезы: простые и сложные гипотезы и их проверка; критерий согласия Пирсона; о критериях согласия Колмогорова и Смирнова.	2	2	2
11	Случайные процессы	2		2
Итого		**36**	**36**	**36**

3. Самостоятельная работа студентов

3.1 Знакомство с рекомендуемой литературой.

3.2 Подготовка к практическим занятиям.

3.3 Выполнение индивидуальных заданий.

3.3.1 Темы индивидуальных заданий и задачи к ним

1. Случайные события и действия над ними.

Варианты заданий

1. Пусть *A, B, C* – три произвольных события. Найти выражение для события, состоящего в том, что из *A, B, C* произошли по крайней мере два события; только одно событие.
2. Бросаются два игральных кубика. Пусть A – событие, состоящее в том, что сумма очков нечетная, B– событие, состоящее в том, что хотя бы на одной из костей выпала единица. Описать события $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$.
3. На доске записано несколько натуральных чисел. Пусть событие A – все записанные числа – четные, событие B – среди них имеется одно нечетное. Описать события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \setminus \overline{B}$, $A \cap \overline{B}$.
4. Событие A – хотя бы один из трех проверяемых приборов бракованный, B – все приборы доброкачественные. Что означают события $A \setminus B$, $A \cap \overline{B}$, $A \cup \overline{B}$?
5. Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Событие B – данное число оканчивается нулем, событие A – выбранное число делится на 5. Что означают события $A \setminus B$, $A \cap B$?
6. Игральный кубик подбрасывается дважды. Описать пространство элементарных событий. Описать события: A – хотя бы раз появится 6 очков, B – сумма очков делится на три.
7. Монета бросается три раза. Описать пространство элементарных событий. Описать события: A – выпало не менее двух гербов; B – выпало два герба.
8. Пусть A, B, C – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из A, B, C: а) произошли A и B, но C не произошло; б) произошло не более двух событий; в) произошло хотя бы одно событие.

9. Монета бросается два раза. Описать пространство элементарных событий. Пусть A и B означают соответственно события: при первом бросании выпал герб и при втором бросании выпал герб. Описать события $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.
10. Из колоды карт случайным образом извлекается одна карта. Пусть событие A – извлеченная карта пиковой масти, событие В – извлеченная карта туз пик, событие C – извлеченная карта – туз червей. Описать события $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$, $B \cap C$.
11. Из чисел 0,1,….,9 случайным образом выбирается одно число. Пусть событие A – выбранное число – нечетное, событие B – выбранное число – девять. Описать события: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.
12. Прибор состоит из двух блоков первого типа и трех блоков второго типа. Пусть события: A_i ($i = 1,2$) – исправен i-ый блок первого типа, B_j (j=1,2,3) – исправен j-й блок второго типа. Прибор работает, если хотя бы один блок первого типа и не менее двух блоков второго типа исправны. Выразить событие C, означающее работу прибора, через события A_i и B_j.
13. Бросаются две игральные кости. Пусть A – событие, состоящее в том, что хотя бы на одной из костей выпадет 6 очков; B – событие, состоящее в том, что сумма очков нечетна. Описать события $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup \overline{B}$.
14. Получить пространство элементарных событий, соответствующих трем испытаниям, в которых может появиться $У$ (успех) или $Н$ (неуспех). Выразить через элементарные события: событие B – появилось ровно два успеха; событие C – появился хотя бы один успех.
15. Пусть *A, B, C* – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что на *A, B, C* произошло одно и только одно событие; произошло не более двух событий.

16. Событие A – «мужу больше 40 лет», событие B – «муж старше жены», событие C – «жене больше 40 лет». Что означает событие $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $A \setminus (B \cap C)$?
17. Игральный кубик подбрасывается дважды. Описать пространство элементарных событий. Описать события: A – сумма очков, которые выпали, равна 8; B – хотя бы один раз выпало 6 очков.
18. Среди всех семей, имеющих двух детей, выбрана одна. Описать пространство элементарных событий и события: A – в семье есть мальчик и девочка, B – в семье не более одной девочки. Доказать, что события A и B совместимы.
19. Среди всех семей, имеющих трех детей, выбрана одна. Описать пространство элементарных событий и события: A – в семье есть мальчик и девочка, B – в семье не более одного мальчика. Доказать, что события A и B совместимы.
20. Игральный кубик подбрасывается дважды. Описать пространство элементарных событий. Пусть событие A – на одном из кубиков выпало 6 очков, событие B – сумма выпавших очков равна 10. Описать события: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.

2. Классическое вероятностное пространство

Варианты заданий

1. Бросаются 2 игральных кубика. Определить вероятность того, что хотя бы на одном из них выпадет пять очков.
2. Из 10 лотерейных билетов 4 выигрышных. Определить вероятность того, что из наугад взятых 5 билетов два выигрышных.
3. В урне 3 белых и 2 чёрных шара. Вынули сразу 2 шара. Какова вероятность того, что среди них хотя бы один шар чёрный?
4. Определить вероятность того, что среди трёх выбранных наугад цифр есть одинаковые.

5. Игральный кубик подбрасывается 6 раз. Определить вероятность того, что выпадут все 6 граней.
6. Числа 1,2,…,n расставлены случайным образом. Найти вероятность того, что числа 1,2,3 расположены рядом и притом в порядке возрастания.
7. Чему равна вероятность того, что все дни рождения двенадцати человек придутся на разные месяцы года?
8. Пять мужчин и пять женщин рассаживаются произвольным образом в ряд на 10 мест. Какова вероятность того, что никакие 2 женщины не будут сидеть рядом?
9. Лифт отправляется с 6 пассажирами и останавливается на 10 этажах. Чему равна вероятность того, что никакие два пассажира не выйдут на одном и том же этаже?
10. Пять мужчин и четыре женщины рассаживаются произвольным образом в ряд. Какова вероятность того, что все женщины будут сидеть рядом?
11. В мастерской находится $a+b$ блоков от двух различных радиоприёмников, причём два блока повреждены. Какова вероятность того, что повреждены блоки различных приёмников?
12. В лотерее n билетов, среди которых m выигрышных. Определить вероятность выигрыша для того, кто имеет k билетов.
13. Числа 1,2,…,10 расставлены случайным образом. Найти вероятность того, что между числами 1 и 2 будут находиться 5 других.
14. Случайно 5 шаров размещаются по пяти ящикам. Найти вероятность того, что ровно один ящик останется пустым.
15. В ящике 8 деталей, среди которых 3 нестандартные. Найти вероятность того, что среди 5 наудачу выбранных деталей окажется не менее двух нестандартных.
16. В чулане 10 пар ботинок. Из них случайно выбирается 4 пары. Найти вероятность того, что среди них нет парных.
17. В чулане 6 пар ботинок. Из них случайно выбирается 3 пары. Найти вероятность того, что среди них ровно одна пара.

18. Среди n экзаменационных билетов m “счастливых”. У какого студента больше вероятность выбрать “счастливый” билет: у того, кто подошёл первым, или у того, кто подошёл вторым?
19. В урне 5 белых и 3 чёрных шара. Из урны последовательно наугад вытаскивают все шары. Какова вероятность того, что последним будет вытащен чёрный шар?
20. Найти вероятность того, что среди четырёх выбранных наугад цифр две одинаковые (выбор производится из чисел 0,1,…,9 с возвращением).

3. Геометрические вероятности

Варианты заданий

1. На отрезке длины L наугад выбрано две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними не превосходит $L/4$?
2. На плоскости проведены параллельные прямые, расстояние между которыми $2a$. На плоскость наугад бросается круг радиуса r ($r<a$). Какова вероятность того, что круг не пересечет ни одну прямую?
3. На окружности радиуса R наугад выбрано три точки A, B, C. Какова вероятность того, что треугольник ABC остроугольный?
4. На отрезке AB длиной L на удачу поставлены две точки M и P . Определить вероятность того, что длины каждого из трех получившихся отрезков не превосходят $2/3 \cdot L$.
5. Стержень длиной L наудачу ломается на три части. Определить вероятность того, что хотя бы одна часть будет не более $0{,}05L$.
6. На окружности радиуса R наугад взяли две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними не превышает r(r<$2R$)?
7. Какова вероятность того, что сумма двух положительных чисел, каждое из которых не больше двух, не превосходит 3, а их произведение будет больше двух?

8. Какова вероятность того, что частное двух положительных чисел, каждое из которых не больше единицы, не превосходит 3 , а их сумма меньше 3/2?
9. В круг радиуса r с центром в начале координат наугад бросается точка. Найти вероятность того, что точка попадет в область, заданную неравенством: $x^2-2y^2 \leq r^2/4$.
10. На отрезке AB длинной L случайным образом поставлены две точки M и K. Найти вероятность того, что точка M будет ближе к точке A, чем к точке K.
11. На окружности единичного радиуса с центром в начале координат наугад выбрана точка. Какова вероятность того, что проекция точки на диаметр расположена от центра на расстоянии, не превышающем r ($r<1$ и диаметр лежит на оси Оx)?
12. На окружности единичного радиуса с центром в начале координат наугад выбрана точка. Какова вероятность того, что ее расстояние от точки с координатами (1,0) не превышает r ($r<1$)?
13. На отрезок (0,1) наудачу брошены три точки. Найти вероятность того, что из отрезков, равным расстояниям точек падения от начала координат, можно составить треугольник.
14. В шаре радиуса R случайно и независимо друг от друга разбросано n точек. Чему равна вероятность того, что расстояние от центра до ближайшей точки будет не меньше r ($r<R$)?
15. В квадрат $\{(x_1,x_2)\colon 0\leq x_1\leq 1;\ 0\leq x_2\leq 1\}$ наудачу брошена точка. Пусть (ξ_1,ξ_2) ее координаты. Найти вероятность того, что $\{\xi_1+\xi_2<x\}$.
16. В квадрат $\{(x_1,x_2)\colon 0\leq x_1\leq 1;\ 0\leq x_2\leq 1\}$ наудачу брошена точка. Пусть (ξ_1,ξ_2) ее координаты. Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2-\xi_1 x+\xi_2=0$ действительны.
17. В квадрат $\{(x_1,x_2)\colon 0\leq x_1\leq 1;\ 0\leq x_2\leq 1\}$ наудачу брошена точка. Пусть (ξ_1,ξ_2) ее координаты. Найти вероятность события $\{\xi_1\,\xi_2<x\}$.

18. В квадрат $\{(x_1,x_2)\colon 0\le x_1\le 1;\ 0\le x_2\le 1\}$ наудачу брошена точка. Пусть (ξ_1,ξ_2) ее координаты. Найти вероятность события $\{\min(\xi_1,\xi_2) < x\}$.
19. На отрезке длины L наудачу выбраны 5 точек. Определить вероятность того, что две точки лежат от левого конца отрезка на расстоянии, меньшем, чем x, а три точки –на расстоянии большем , чем x .
20. В круг вписан равносторонний треугольник. Определить вероятность того, что из пяти точек, наугад выбранных внутри круга, три лежат по одной в каждом сегменте, а две лежат внутри треугольника.

4. Вычисление вероятности события с использованием основных свойств вероятности.

Варианты заданий

1. Вероятность выигрыша в лотерее равна p. Некто решил покупать по одному билету из каждого тиража, пока не выиграет. Найти вероятность того, что он будет участвовать в пятом тираже.
2. Два стрелка, вероятности попадания по мишени которых равны соответственно p_1 и p_2, делают по одному выстрелу по мишени. Найти вероятность хотя бы одного попадания.
3. Вероятность того, что событие появится хотя бы один раз в трех независимых испытаниях, равна 0,936. Найти вероятность появления события в одном испытании.
4. Для каждого прибора вероятность того, что он включен в данный момент равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включен хотя бы один из трех приборов.
5. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, а вторым стрелком – 0,6. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком.

6. Вероятность попадания в цель из первого орудия равна 0,6, из второго – 0,8, из третьего – 0,5. Цель будет поражена, если произойдет хотя бы два попадания. Каждое орудие произвело по одному выстрелу по цели. Определить вероятность того, что цель будет поражена.
7. Из трех орудий по одной цели произведено по выстрелу. Вероятность попадания из первого орудия равна 0,9, из второго – 0,8, из третьего – 0,7. Определить вероятность того, что будет ровно два попадания.
8. Два стрелка, вероятности попадания в цель которых p_1 и p_2 соответственно, стреляют по цели поочередно до первого попадания. Найти вероятность того, что больше выстрелов сделает начинающий стрелять первым.
9. Определить вероятность появления события в одном опыте, если вероятность появления этого события один раз в двух опытах равна 5/18.
10. Вероятность появления события в каждом опыте одинакова и равна 0,4. Опыты производятся до наступления события. Определить вероятность того, что придется производить четвертый опыт.
11. Из колоды в 36 карт наудачу вынимаются две карты. Определить вероятность того, что хотя бы одна карта будет тузом.
12. При передаче текста 10% букв искажаются и принимаются неверно. Какова вероятность того, что все пять букв данного слова будут приняты правильно?
13. Каждая буква слова «математика» написана на отдельной карточке, карточки тщательно перемешаны. Последовательно извлекаются четыре карточки. Какова вероятность получить слово «тема»?
14. Двое поочередно бросают игральную кость. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет 6 очков. Определить вероятность выигрыша второго игрока.
15. Из трех орудий по одной цели произведено по выстрелу. Вероятность попадания из первого орудия равна 0,9, из второго – 0,8, из третьего – 0,6. Определить вероятность хотя бы двух попаданий.

16. Из колоды в 36 карт наудачу вынимают три карты. Определить вероятность того, что они будут одной и той же масти.
17. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Стрельба ведется до первого попадания. Найти вероятность того, что будет произведено 5 выстрелов.
18. Из колоды в 36 карт наудачу вынимают три карты. Определить вероятность того, что они будут разных мастей.
19. Вероятность появления события A в трех независимых опытах хотя бы один раз равна 0,75. Определить вероятность того, что в двух опытах событие появится оба раза.
20. Девять пассажиров размещаются по трем вагонам. Каждый пассажир выбирает вагон наугад. Какова вероятность того, что в каждый вагон сядет по три пассажира?

5. Условная вероятность, формула полной вероятности и формулы Байеса.

Варианты заданий

1. Завод выпускает за три декады месяца соответственно 20, 30 и 50 % задания, причем вероятности брака соответственно составляют 0,01, 0,012, 0,015. Найти вероятность того, что изделие выпущено в первой декаде, если в нем обнаружен дефект.
2. В трех урнах содержатся шары, причем в первой – a белых и b черных, во второй c белых и d черных, в третьей – только белые. Наугад выбирается урна, затем из нее выбирается шар. Найти вероятность того, что вынутый шар – белый.
3. Из урны, в которой m белых и n черных шаров, потерян один шар. Для того, чтобы определить состав шаров в урне , извлечено два шара, которые оказались белыми. Определить вероятность того, что утерян белый шар.

4. Сборщик получил три коробки деталей, изготовленных заводом №1 и две коробки, изготовленных заводом №2. Вероятность того, что деталь завода №1 стандартная равна 0,8, а завода №2 – 0,9. Сборщик извлек деталь из наудачу выбранной коробки. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь.
5. В двух ящиках есть радиолампы. В первом содержится 12 ламп, из них одна нестандартная, а во втором – 10, из которых 2 нестандартные. Из первого ящика во второй переложена одна лампа. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная из второго ящика лампа будет нестандартной..
6. Вероятность попадания в цель для одного стрелка равна 0,8, для второго – 0,6. Один из стрелков произвел выстрел, но в цель не попал. Определить вероятность того, что это был первый стрелок.
7. В ящике три детали. Все предположения о количестве стандартных среди них равновероятны. Наугад взятая деталь оказалась стандартной. Определить вероятности всех предположений о количестве стандартных деталей.
8. Среди n билетов m выигрышных. Какова вероятность выиграть для лица, покупающего один билет, если перед этим был куплен только один билет.
9. В одной урне два белых и два черных шара, в другой два белых и три черных. Из наугад выбранной урны извлечен шар, оказавшийся черным. Найти вероятность того, что он извлечен из первой урны.
10. Из урны, содержащей 4 белых и 6 черных шаров, наудачу вынуты два шара и переложены в другую урну, содержащую 5 белых и 3 черных шара. После этого из второй урны вынули шар, оказавшийся черным. Найти вероятность того, что оба переложенных шара были одного цвета.
11. Два из трех независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Вычислить вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,2; 0,4; 0,3.

12. Среди n лотерейных билетов m выигрышных. Какова вероятность выиграть для лица, покупающего один билет, если перед этим было куплено только два билета?
13. Из пяти урн в двух по два белых и одному черному шару, в одной 10 черных шаров, в двух по три белых и одному черному шару. Из наугад выбранной урны извлечен шар. Определить вероятность того, что этот шар белый.
14. Вероятность того, что параметры одного из трех блоков радиостанции выйдут из допусков во время полета самолета равны соответственно 0,1, 0,2, 0,3. Если из поля допусков вышли параметры одного блока, связь не будет установлена с вероятностью 0,25, если двух блоков, то 0,4, если трех, то 0,5. Найти вероятность того, что связь не будет установлена.
15. В первом ящике 20 деталей, из них 15 стандартных, во втором ящике 30 деталей, из них 24 стандартных, в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу выбранного ящика – стандартная.
16. В первом ящике 20 деталей, из которых 5 бракованных, во втором - 30, из которых 6 бракованных, в третьем – 16 , из которых 4 бракованные. Из наугад выбранного ящика извлечена деталь. Найти вероятность того, что деталь взята из второго или третьего ящика, если она оказалась бракованной.
17. В ящике 4 детали. Все предположения о количестве стандартных среди них одинаково вероятны. Определить вероятность того, что наудачу взятая деталь оказалась стандартной.
18. В урну, в которой n шаров положили белый шар. Какова вероятность того, что вытащенный наудачу после этого шар будет белым, если все предположения о первоначальном составе урны равновозможны.
19. В урне 7 белых и 5 черных шаров. Вытащили два шара. После этого вытащен еще один шар. Какова вероятность того, что он белый?

20. В одной урне 6 белых и 4 черных шара, во второй 3 белых и 5 черных. Из первой урны во вторую переложили два шара. После этого из второй урны вытащили два шара, которые оказались разного цвета. Определить вероятность того, что и шары, переложенные из первой урны во вторую, были разного цвета.

6. Схема Бернулли.

Варианты заданий

1. 1.Произведено 12 выстрелов по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.8. Определить наиболее вероятное число попаданий и его вероятность. Определить вероятность того, что будет два или три попадания.
2. Какова вероятность не менее двух раз попасть в цель, если вероятность попадания равна 1/5 и произведено 10 независимых выстрелов?
3. Произведено 20 выстрелов по цели. A вероятность попадания при одном выстреле равна 0.2 . Определить вероятность уничтожения цели, если для этого необходимо не менее трех попаданий.
4. Найти вероятность того, что событие A появится в пяти независимых испытаниях не менее двух раз, если в каждом испытании вероятность его появления равна 0.3 .
5. Игральный кубик подбрасывается до первого появления шестерки. Какова вероятность того, что будет сделано не более трех бросаний.
6. Монету подбрасывают 6 раз. Определить вероятность того, что герб выпадет не менее трех раз.
7. Считая вероятности рождения мальчика или девочки равными 0.5 определить, что более вероятно : в семье из 8 детей 4 мальчика или в семье из 5 детей 3 мальчика?
8. Вероятность выхода из строя прибора равна 0.2 . Найти вероятность того, что из десяти приборов выйдут из строя два или больше.

9. Найти вероятность того, что при шести бросаниях игрального кубика три очка выпадет не более двух раз.
10. Найти вероятность того, что при пяти бросаниях монеты герб выпадет не менее трех раз.
11. Производится шесть независимых выстрелов по цели. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.75 . Вычислить вероятность не менее пяти попаданий.
12. Вероятность попадания в цель равна 0.6 и производится 10 независимых выстрелов. Найти условную вероятность хотя бы двух попаданий при условии, что одно попадание произошло.
13. Рабочий обслуживает 12 однотипных станков. Вероятность того, что станок потребует к себе внимания рабочего в течение промежутка времени длительностью τ, равна 1/3. Чему равна вероятность того, что число требований к рабочему со стороны станков за время τ будет между 3 и 6 (включая границы)?
14. Испытание заключается в бросании трех игральных костей. Найти вероятность того, что при 10 испытаниях ровно в 4-х испытаниях появится в точности по две “шестерки”.
15. Двое бросают монету по n раз каждый. Найти вероятность того, что у них выпадет одинаковое число гербов.
16. Сколько раз нужно бросить игральный кубик для того, чтобы вероятность появления шести очков хотя бы один раз была не менее 0.9?
17. В круг вписан квадрат. Какова вероятность того, что из 10 точек, брошенных на удачу в круг, 4 попадут в квадрат, 3 – в один из сегментов и по одной – в оставшиеся 3 сегмента?
18. Монета подбрасывается 20 раз. Найти вероятность того, что в первых 10 бросаниях герб появится 4 раза, а в последующих 10 бросаниях – 6 раз.
19. Рабочий изготовил 6 изделий. Вероятность изготовления стандартного изделия равна 0.8. Какова вероятность того, что среди шести изготовленных изделий будет не менее 4-х стандартных?

20. Сколько нужно произвести независимых опытов, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0.4, чтобы наивероятнейшее число появлений события было равно 8?

7. Функция и плотность распределения случайной величины. Числовые характеристики случайных величин, распределение функции одной случайной величины.

Варианты заданий

Ниже записаны выражения для плотности распределения $f_\xi(x)$ случайной величины ξ.

Требуется определить:

а) число A; б) функцию распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ; в) математическое ожидание $E\xi$ и дисперсию $D\xi$; г) плотность распределения случайной величины $\eta = \psi(\xi)$.

1. $f_\xi(x) = \begin{cases} A x^2 \exp\{-k x\}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$ $\psi(\xi) = 2\xi^2 - 1.$

2. $f_\xi(x) = \begin{cases} A x \sin x, & x \in (0, \pi/2), \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases}$ $\psi(\xi) = -2\xi + 1.$

3. $f_\xi(x) = \begin{cases} A(1 - \frac{|x|}{a}), & x \leq a, \\ 0, & x > a; \end{cases}$ $\psi(\xi) = 3\xi + 2.$

4. $f_\xi(x) = \begin{cases} A x^m \exp\{-x\}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0; \end{cases}$ $\psi(\xi) = 2\xi^2.$

5. $f_\xi(x) = A \exp\{-2|x|\};$ $\psi(\xi) = 2\sqrt{\xi}.$

6. $f_\xi(x) = \begin{cases} A x \exp\{-3x\}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$ $\psi(\xi) = \ln \xi.$

7. $f_\xi(x) = \begin{cases} A x \exp\{-x^2/2\}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$ $\psi(\xi) = 2\xi^2 + 1$.

8. $f_\xi(x) = A \exp\{-\frac{1}{2}|x-1|\}$; $\psi(\xi) = 2\xi^2 - 1$.

9. $f_\xi(x) = \begin{cases} A\cos(x/2), & x \in (0, \pi/2), \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases}$ $\psi(\xi) = \cos\xi$.

10. $f_\xi(x) = \begin{cases} A x^2 \exp\{-x^2/2\}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0; \end{cases}$ $\psi(\xi) = 2\xi^2$.

11. $f_\xi(x) = \begin{cases} A(2x - x^2), & x \in [-1;2], \\ 0, & x \notin [-1;2]; \end{cases}$ $\psi(\xi) = |2\xi - 1|$.

12. $f_\xi(x) = \begin{cases} A|x-1|, & x \in (0;3), \\ 0, & x \notin (0;3); \end{cases}$ $\psi(\xi) = 1 - \xi^2$.

13. $f_\xi(x) = \begin{cases} A|2x-1|, & x \in (0;2), \\ 0, & x \notin (0;2); \end{cases}$ $\psi(\xi) = e^\xi$.

14. $f_\xi(x) = \begin{cases} 3/4 - A(x-1)^2, & x \in (0;2), \\ 0, & x \notin (0;2); \end{cases}$ $\psi(\xi) = |\xi - 1|$.

15. $f_\xi(x) = \begin{cases} A|x+2|, & x \in (-3;3), \\ 0, & x \notin (-3;3); \end{cases}$ $\psi(\xi) = \arcsin\frac{\xi}{3}$.

16. $f_\xi(x) = \begin{cases} A x(1-x), & x \in (0;1), \\ 0, & x \notin (0;1); \end{cases}$ $\psi(\xi) = |2\xi - 1|$.

17. $f_\xi(x) = \begin{cases} A x(2+x), & x \in (-2;0), \\ 0, & x \notin (-2;0); \end{cases}$ $\psi(\xi) = -\xi^2$.

18. $f_\xi(x) = \begin{cases} A(2x+1), & x \in (0;2), \\ 0, & x \notin (0;2); \end{cases}$ $\psi(\xi) = 3e^{2\xi}$.

19. $f_\xi(x) = \begin{cases} A x\cos(x/2), & x \in [0;\pi/2], \\ 0, & x \notin [0;\pi/2] \end{cases}$ $\psi(\xi) = \sqrt{\xi}$.

20. $f_\xi(x) = \begin{cases} A(2x+1)\exp\{-x/2\}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$ $\psi(\xi) = \ln\xi$.

8. Закон больших чисел. Предельные теоремы теории вероятностей.

Варианты заданий

1. Вероятность появления события в одном опыте p=0,003. Определить вероятность того, что в 1000 опытах событие появится не более четырёх раз.
2. Телефонная станция обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что за время t поступит один вызов, равна 0,002. Определить вероятность того, что за время t поступит не более двух вызовов.
3. Вероятность того, что прибор за время испытаний выйдет из строя, равна 0,8. Определить вероятность того, что за время испытаний 100 приборов не менее 70 из них выйдут из строя.
4. Какое наименьшее число испытаний нужно произвести для того, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9 частота отклонялась от вероятности p=0,5 не больше, чем на 0,01?
5. Дисперсия каждой из 800 независимых случайных величин менее 9. Какова верхняя граница абсолютной величины отклонения средней арифметической этих величин от средней арифметической их математических ожиданий, если вероятность этого отклонения превышает 0,997
6. Вероятность появления события в одном опыте равна 0,4. С какой вероятностью можно утверждать, что частота этого события при 100 опытах будет лежать в пределах от 0,2 до 0,5?
7. Определить количество испытаний, которое нужно произвести, чтобы с вероятностью не менее 0,99 можно было бы утверждать, что отклонение частоты появления события от его вероятности p=0,7 было бы не более 0,01.
8. Вероятность наличия зазубрин на брусках, заготовленных для обточки, равна 0,2. Оценить вероятность того, что в партии из 1000 брусков отклонение числа пригодных от 800 не превышает 5%.
9. Вероятность появления события в одном опыте равна 0,002. Определить вероятность того, что в 1000 опытах событие появится не менее двух раз.

10. Вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,02. Свёрла укладываются в коробку по 100 штук. Чему равна вероятность того, что: а) в коробке не окажется бракованных свёрл; б) число бракованных свёрл окажется не более 2?
11. Вероятность любого абонента позвонить на коммутатор в течение часа равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 200 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят не менее трёх абонентов?
12. Игральную кость бросают 120 раз. Определить вероятность того, что число выпадений 5 очков будет находиться между 15 и 27.
13. Вероятность брака при изготовлении некоторых деталей равна 0,02. Определить вероятность того, что среди взятых 1000 штук деталей окажется не более 25 бракованных.
14. Вероятность выхода изделий из строя за время испытаний на надёжность равна 0,05. Какова вероятность того, что за время испытания 90 изделий выйдут из строя менее 5 изделий?
15. Вероятность получить бракованное изделие равна 0,002. Найти вероятность того, что среди 500 изделий будет меньше 5 бракованных.
16. Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,02. Свёрла укладывают в коробку. Сколько их нужно туда положить, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, в ней было не менее 100 исправных?
17. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,004. Определить вероятность того, что при 500 выстрелах будет больше 5 попаданий.
18. В передаваемой по каналу связи последовательности знаков, образующих сообщение, любой знак из-за помех независимо искажается с вероятностью 0,2. Передано 10000 знаков. Какова вероятность того, что в принятой последовательности будет от 2000 до 2100 искажений?
19. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти, какое отклонение относительной частоты от его вероятности можно ожидать с вероятностью 0,92 при 5000 испытаниях.

20. Сколько раз нужно бросить монету, чтобы с вероятностью 0,6 можно было ожидать, что отклонение частоты появления герба от вероятности p=0,5 окажется по абсолютной величине не более 0,01?

9. Методы нахождения оценок: метод моментов

Варианты заданий

Пусть $X_1,\ldots,X_n$ – выборка объема n (если не будет оговорено другое) из распределения F_θ .

1. Используя первый момент, оценить параметр θ равномерного распределения на отрезке [θ,θ+5].

2. Используя первый момент, оценить параметр p распределения Бернулли.. Можно ли получить оценку параметра p, отличную от найденной?

3. По первому и второму моменту оценить параметр λ распределения Пуассона.

4. По первому и второму моменту оценить параметры a и b равномерного распределения на отрезке [a, b] .

5. Оценить параметр α показательного распределения по всем моментам.

6. Построить оценку параметра 1/α показательного распределения по первому моменту.

7. Построить оценку неизвестного параметра θ равномерного распределения на отрезке [-θ,θ] по методу моментов.

8. Пусть дана выборка из нормального распределения с параметрами a и . Используя метод моментов, построить оценку неизвестной дисперсии σ^2 при известном a и при a неизвестном.

9. Пусть дана выборка из нормального распределения с параметрами a и 1 $(-\infty < a < \infty)$. По первому моменту построить оценку неизвестного среднего значения.

10. Используя метод моментов, оценить параметр θ равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$, $\theta > 0$.

11. Используя метод моментов, оценить параметр θ равномерного распределения на отрезке $[\theta-1, \theta+1]$, $\theta \in R$.

12. Пусть дана выборка из биномиального распределения с параметрами m и p. Используя метод моментов, построить оценку векторного параметра (m, p).

13. Пусть дана выборка из гамма-распределения с параметрами $\alpha>0$ и $\beta>0$. Построить оценки по методу моментов векторного параметра (α, β). Указание: использовать начальные моменты $m_1 = \frac{\beta}{\alpha}$ и $m_2 = \frac{\beta(\beta+1)}{\alpha^2}$).

14. Используя метод моментов, оценить параметр θ равномерного распределения на отрезке $[0, 2\theta]$, $\boxed{\theta > 0}$.

15. Пусть дана выборка из нормального распределения с параметрами 0 и θ^2. Построить оценку неизвестного параметра θ по второму моменту.

16. Используя метод моментов, оценить параметр α по выборке из показательного распределения с параметром $1/\sqrt{\alpha}$.

17. Пусть дана выборка из гамма-распределения с параметрами $\alpha>0$ и $\beta>0$. Построить оценки по методу моментов:

а) параметра α, если значение β известно;

б) параметра β, если значение α известно.

Указание. См. указание задания 13.

18. Пусть дана выборка из биномиального распределения с параметрами m и p. Используя метод моментов, построить оценку:

а) параметра p, если значение m известно;

б) параметра m, если значение p известно.

19. Пусть дана выборка из биномиального распределения с параметрами 2 и p. Используя метод моментов, найти оценку для параметра $\theta = 2^p$.

20. Используя метод моментов, оценить значение $\lambda > 1$ по выборке из распределения Пуассона с параметром $\ln\lambda$.

10. Методы нахождения оценок: метод максимального правдоподобия

Варианты заданий

Пусть $X_1,\dots,X_n$ – выборка объема n (если не будет оговорено другое) из распределения F_θ, $\theta \in \theta$.

1. Найти оценку максимального правдоподобия параметра $\lambda + 1$ распределения Пуассона.

2. Найти оценку максимального правдоподобия параметра θ равномерного распределения на отрезке $[-\theta, 2\theta]$, $\theta > 0$.

3. Пусть дана выборка из показательного распределения с параметром $2\alpha+3$. Построить оценку максимального правдоподобия параметра α.

4. Найти оценку максимального правдоподобия параметра θ равномерного распределения на отрезке $[-\theta, \theta]$, $\theta > 0$.

5. Найти оценку максимального правдоподобия параметра дисперсии σ^2 нормального распределения, если среднее значение a известно.

6. Пусть дана выборка из биномиального распределения с параметром $p\in(0,1)$ и m. Найти оценку максимального правдоподобия параметра p, если значение m известно.

7. Пусть дана выборка из показательного распределения с параметром $1/\alpha$. Построить оценку максимального правдоподобия параметра α.

8. Найти оценку максимального правдоподобия параметра a нормального распределения, если дисперсия равна 1.

9. Найти оценку максимального правдоподобия параметра $p\in(0,1)$ геометрического распределения.

10. Найти оценку максимального правдоподобия параметра $\theta > 0$, если распределение выборки имеет нормальную плотность со средним θ и дисперсией 2θ .

11. Найти оценку максимального правдоподобия параметра θ равномерного распределения на отрезке $[-\theta, \theta+2]$, $\theta \in R$.

12. Пусть дана выборка из двухпараметрического показательного распределения с плотностью $f_{\alpha,\beta}(y) = \begin{cases} \alpha^{-1} e^{-(y-\beta)/\alpha}, \text{если } y \geq \beta; \\ 0, \text{ если } y < \beta, \end{cases}$

где $\alpha > 0$, $\beta \in R$. Найти оценку максимального правдоподобия двумерного параметра (α, β).

13. Пусть дана выборка из распределения Парето с параметрами $\beta > 0$ и $\theta > 0$, с плотностью $f_{\beta,\theta}(y) = \begin{cases} \beta\theta^{\beta} y^{-(\beta+1)}, y \geq 0; \\ 0, \text{ если } y < 0. \end{cases}$ Найти оценку максимального правдоподобия для параметра β, если значение θ известно.

14. Пусть дана выборка из распределения Парето с параметрами $\boxed{\beta > 0}$ и $\boxed{\theta > 0}$. Построить оценку максимального правдоподобия для параметра θ, если значение β известно (плотность см. в задании 13).

15. . Пусть дана выборка из распределения Парето с параметрами $\boxed{\beta > 0}$ и $\boxed{\theta > 0}$. Найти оценку максимального правдоподобия векторного параметра (β, θ). (Плотность см. в задании 13).

16. Пусть дана выборка из распределения Вейбулла с параметрами α и θ, с плотностью $f_{\alpha,\theta}(y) = \begin{cases} \theta\alpha y^{\alpha-1} \exp(-\theta y^{\alpha}), y \geq 0; \\ 0, \text{ если } y < 0. \end{cases}$ Построить оценку максимального правдоподобия параметра $\theta > 0$, если $\alpha > 1$ известно.

17. Построить оценку максимального правдоподобия параметра $\alpha > 0$ для гамма-распределения с параметрами α и β с плотностью

$f_{\alpha,\beta}(y) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{\beta}}{\Gamma(\beta)} y^{\beta-1} e^{-\alpha y}, y \geq 0; \\ 0, \text{ если } y < 0, \end{cases}$ если значение β известно.

18. . Найти оценку максимального правдоподобия параметра $\alpha > 0$

распределения с плотностью $f_{\alpha,\beta}(y) = \begin{cases} 3y^2\alpha^{-3}\exp\{-(y/\alpha)^3\}, y \geq 0; \\ 0, \text{ если } y < 0. \end{cases}$

19. Найти оценку максимального правдоподобия параметра $\theta > 0$, если распределение выборки имеет плотность $f_\theta(y) = \theta y^{\theta-1}$ при $y \in [0,1]$.

20. Найти оценку максимального правдоподобия параметра $\theta > 0$, если распределение выборки имеет плотность $f_\theta(y) = 2y/\theta^2$ при $y \in [0,\theta]$.

4. Наименование тем лекций и их содержание

Тема 1

События и их вероятности

Теория вероятностей служит основой для анализа тех явлений окружающего мира, которым свойственна “изменчивость”, и проявление которых не определяется однозначно условиями проводимых наблюдений. Вопрос о применимости вероятностных и статистических методов является непростым, и, во всяком случае, его целесообразно рассматривать после того, как участники обсуждения познакомятся с основными подходами и результатами данной науки. Пока же заметим лишь, что главным обстоятельством, которое определяет границы применимости теории вероятностей, является наличие у изучаемых явлений свойства “*статистической устойчивости*”.

Теория вероятностей − это математическая наука. Отправной точкой всех построений является универсальный формализм вероятностного пространства.

1.1 Конечное вероятностное пространство. В истоках любых математических построений лежат понятия множества и отображения (функции). Излагаются формальные схемы и постепенно устанавливаются на примерах необходимые параллели со случайными явлениями реального мира.

1.2 Понятие события

1.3 Элементы комбинаторики.. Размещения, перестановки, сочетания. Рассматриваются примеры, связанные с разными способами выбора n шаров из M различных шаров. Выбор с возвращением, выбор без возвращения, размещение дробинок по ячейкам.

1.4 Операции над событиями. Рассматривается, как язык теории вероятностей определяет теоретико-множественные операции.

1.5 Простейшие свойства вероятностей В данном параграфе показываются, какие свойства вероятности P имеют место по отношению к введенным операциям над событиями.

1.6 Классическое определение вероятностей. Под классическим определением вероятностей подразумевают выбор такого конечного вероятностного пространства, в котором все элементарные исходы равновозможны.

1.7 Геометрическая вероятность. Непосредственный подсчет вероятностей событий в опытах с континуумом равновозможных элементарных исходов.

1.7 Условные вероятности. Нередко мы сталкиваемся с необходимостью оценить шансы интересующего нас события A в ситуации, когда нам известно о том, что произошло некоторое другое событие B. Для этого вводится понятие условной вероятности.

1.8 Формула полной вероятности и формула Байеса. Приводимые формулы очень удобны при подсчете условных и безусловных вероятностей. Обе они связаны с понятием разбиения вероятностного пространства.

1.9 Независимость событий. Понятие независимости является одним из ключевых в теории вероятностей. Начинается с обсуждения независимости двух событий.

1.10 Статистическая независимость. Распространим понятие независимости на случай произвольного конечного набора событий $A_1, \ldots, A_n$. Обсуждаются два способа определения независимости, а именно, понятия *взаимной независимости* и *попарной независимости*.

1.11 Схема Бернулли. В теории вероятностей имеет большое значение простая схема случайных экспериментов, называемая схемой Бернулли.

Тема 2

Дискретные случайные величины и их распределения

Для дальнейшего нам необходимо ввести понятие *дискретного вероятностного пространства*. Будем называть дискретным вероятностным пространством либо конечное вероятностное пространство, либо счетное вероятностное пространство.

2.1 Счетное вероятностное пространство

2.2 Дискретные случайные величины

2.3 Математическое ожидание Так как случайная величина ξ может принимать различные значения $\xi(\omega)$, в зависимости от того, какой исход ω виртуального эксперимента будет разыгран, то с разных точек зрения удобно иметь числовую характеристику, имеющую смысл среднего значения случайной величины.

2.4 Общие свойства математического ожидания

2.5 Дисперсия случайной величины

2.6 Общие свойства дисперсии

2.7 Индикаторы событий

2.8 Независимость случайных величин. Определим понятие независимости для дискретных случайных величин.

2.9 Некоррелированность случайных величин

2.10 Предельные теоремы для схемы Бернулли. Пуассоновское приближение, Интегральная теорема Муавра-Лапласа**.**

2.11 Неравенства Чебышева

2.12 Закон больших чисел. Законы больших чисел являются одними из наиболее важных утверждений теории вероятностей. Теорема Бернулли, сходимость по вероятности**.**

Тема 3

Общие случайные величины

Дискретные вероятностные пространства обладают ограничительной особенностью: случайные величины, определенные на них, могут принимать не более, чем счетное, число значений. Как с точки зрения развития теории, так и из потребностей практических приложений, часто бывает необходимо рассматривать случайные величины с непрерывными значениями. Построение теории, поставившей вероятность на строгий математический фундамент, и, в частности, позволившей строго изучать общие случайные величины, оказалось очень трудной научной проблемой. Эта задача была решена только в XX веке, и ее автором является выдающийся отечественный математик А.Н. Колмогоров. Предложенный им подход получил название *аксиоматики теории вероятностей Колмогорова*, и безусловно принят в современном научном мире. Он привлекает аппарат математической науки, называемой теорией меры, для задания вероятностей, и интегрирование по Лебегу для вычисления математических ожиданий. С целью общего ознакомления лишь коснемся вопросов, связанных с определением общего вероятностного пространства по Колмогорову.

3.1 Общее определение вероятностного пространства.

3.2 Случайные величины (общий случай)

3.3 Функция распределения случайной величины. В общем случае распределение случайных величин описывается в терминах функций распределений.

3.4 Непрерывные случайные величины. Примеры абсолютно непрерывных распределений.

3.*5 Математическое ожидание и дисперсия абсолютно непрерывной случайной величины.*

3.6 Понятие о квантилях распределений

3.7 Нормальное распределение

Тема 4

Совместное распределение общих случайных величин

Задачи, в которых участвует только одна случайная величина, крайне редки. Как правило, приходится одновременно рассматривать много случайных величин. Формализм для изучения распределений случайных векторов вполне аналогичен рассмотрению распределения одной (скалярной) случайной величины.

4.1 Совместная функция распределения, плотность. Как и раньше, наиболее универсальным инструментом являются функции распределения.

4.2 Математическое ожидание функции от случайных величин

4.3 Независимость случайных величин. Здесь обобщается понятие независимости, данное в § 2.8, на случай произвольных случайных величин.

4.4 О некоррелированных зависимых случайных величинах. Здесь рассматривается пример, показывающий, что некоррелированность и независимость не являются эквивалентными понятиями.

4.5 Формула свертки. Многие важные случайные величины представляются в виде сумм независимых слагаемых. Рассматриваемое здесь утверждение устанавливает, как распределение суммы связано с распределениями слагаемых.

Тема 5

Предельные законы теории вероятностей

В этой теме обсуждаются классические теоремы, имеющие универсальный характер – закон больших чисел (ЗБЧ) и центральную предельную теорему (ЦПТ). Они имеют исключительное значение для математической статистики.

5.1 Закон больших чисел. В § 2.12 произошло первое знакомство с законом больших чисел. Замечательно то, что утверждение закона больших чисел без изменений переносится со случая дискретных случайных величин на общий случай.

5.2 Центральная предельная теорема. Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа, которая обсуждалась в § 2.10, интересна тем, что она является частным случаем общей и универсальной центральной предельной теоремы. Основополагающий вклад в разработку этой тематики внесли выдающиеся отечественные математики: П.Л. Чебышев, А.А. Марков и А.М. Ляпунов. Будет рассмотрен без доказательства вариант ЦПТ для независимых одинаково распределенных слагаемых.

Тема 6

Цепи Маркова

6.1 Дискретные цепи Маркова. Рассматривается простейший вариант последовательности зависимых испытаний.

Тема 7

Обзор методов математической статистики

В своей практике естествоиспытателю приходится обрабатывать большие массивы данных, полученных в результате эксперимента путем измерений, наблюдений, анализа проб и т.п. Часто этим данным присуща изменчивость, вызванная случайными ошибками. Природа этих ошибок может быть различной: погрешность измерительных приборов, неоднородность образцов проб и др. Как правило, экспериментатор имеет возможность многократно повторить свой опыт и получить большое количество однородных данных. Затем перед исследователем встает задача обработки этих данных, чтобы извлечь как можно более точную информацию об измеряемой величине. Мы приступаем к изложению базовых принципов и методов статистической обработки данных.

Задачи, решаемые математической статистикой, являются, в некотором смысле, обратными задачам теории вероятностей. Вероятностные задачи, как правило, устроены следующим образом: распределения случайных величин считаются изначально известными, основываясь на знании этих распределений требуется найти вероятности различных событий, математические ожидания, дисперсии, моменты распределений и т.п. В статистических задачах само распределение считается неизвестным, и целью исследования является получение более или менее достоверной информации об этом распределении на основе данных, собранных в результате наблюдений (экспериментов).

7.1 Понятие о выборке. Отправной точкой любого статистического анализа являются данные, полученные экспериментатором в результате опыта.

7.2 Эмпирическая функция распределения. В теме 3 шла речь о том, что все важнейшие характеристики случайной величины могут быть выражены в терминах ее функции распределения. В задачах математической статистики функция распределения (теоретическая) всегда является неизвестной. Замечательно то, что основываясь на выборке, можно построить хорошее приближение для неизвестной функции распределения $F = F(t)$.

7.3 Гистограмма. Помимо эмпирических функций распределения, наглядное (но, вместе с тем, довольно приближенное) представление о неизвестном распределении можно получить при помощи *гистограмм*.

7.4 Выборочное среднее и выборочная дисперсия. Иногда исследователь ставит перед собой более конкретную проблему: как, основываясь на выборке, оценить интересующие его числовые характеристики неизвестного распределения, не прибегая к приближению этого распределения как такового, то есть без построения выборочных функций распределения, гистограмм и т.п.

В данном параграфе рассмотрены простые (но, весьма хорошие) выборочные аппроксимации для математического ожидания и дисперсии. Примечательно то, что они применимы в очень общей ситуации.

7.5 Оценивание неизвестных параметров распределения. Свойства оценок, сравнение оценок.

7.6 Методы построения оценок. Метод моментов, метод наибольшего правдоподобия

Тема 8

Метод наименьших квадратов

*8.1 Линейная модель***.** Общая линейная модель

8.2 Система нормальных уравнений

Тема 9

Доверительные интервалы

Оценки параметров позволяют по выборке вычислить некоторые значения, которые приближают неизвестные параметры. Существует другой подход к тому, чтобы извлечь информацию о неизвестных параметрах. Он состоит в том, чтобы, основываясь на данных наблюдений, определить границы, в которых с заданной степенью достоверности лежит неизвестный параметр.

9.1 Понятие доверительного интервала

9.2 Вероятностные распределения, связанные с нормальным. Хи-квадрат распределение, распределение Стьюдента

9.3 Теорема Фишера для нормальных выборок. В этом параграфе приводится теорема, впервые доказанной Р.А. Фишером в 1925 г. Она существенно облегчает статистический анализ независимых выборок из нормального распределения.

9.4 Доверительное оценивание параметров нормальных выборок. Доверительный интервал для среднего при известной дисперсии, доверительный интервал для дисперсии при известном среднем, доверительный интервал для дисперсии при неизвестном среднем, доверительный интервал для среднего при неизвестной дисперсии

Тема 10

Статистические гипотезы

В математической статистике считается, что данные, получаемые в результате наблюдений, подчинены некоторому неизвестному вероятностному распределению, и задача состоит в том, чтобы извлечь из данных правдоподобную информацию об этом неизвестном распределении. Здесь разберем еще один подход к этой общей задаче, состоящий в проверке гипотез. *Статистической гипотезой* называют предположение о распределении вероятностей, которое необходимо проверить по имеющимся данным.

10.1 Простые и сложные гипотезы и их проверка

10.2 Критерий согласия Пирсона

10.3 Критерий согласия для сложных гипотез

10.4 О критериях согласия Колмогорова и Смирнова.. Часто при проверке гипотез о распределении тех или иных данных недостаточно применить какой-то один критерий, в особенности, когда данные наблюдений не показывают значимого отклонения от гипотезы, и ситуация представляется сомнительной. В этих случаях целесообразно воспользоваться другими критериями, основанными на других вероятностных идеях, чтобы при их помощи подвергнуть анализу *те же данные*. Таким образом, очень важно иметь широкий арсенал методов для статистической обработки данных. В настоящем параграфе кратко освещено два других эффективных подхода, приводящих к хорошим критериям согласия.

Тема 11

Случайные процессы

В предыдущих темах изучались в основном отдельные случайные величины. На практике явления протекают во времен и пространстве, поэтому приходится иметь дело не с отдельными случайными величинами, а с семейством случайных величин, зависящих от параметра.

11.1 Определение случайных процессов. Определения, характеристики и свойства случайных процессов.

11.2 Основные классы случайных процессов. Нормальные, с конечными моментами второго порядка, марковские и диффузионные процессы.

5. Учебно-методическое обеспечение

Основная литература

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука Эдиториал УРСС, 2001.

2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.— М.: Высш. шк.,1999. — 576 с.

3. Коршунов Д.А., Фосс С.Г., Эйсымонт И.М. Сборник задач и упражнений по теории вероятностей. – СПБ.: Изд-во "Лань", 2004.

4. Коршунов Д.А., Чернова Н.И. Сборник задач и упражнений по математической статистике. — Новосибирск: Изд-во Института математики, 2001.

5. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. — СПБ.: Изд-во "Лань", 2004.

Дополнительная литература

6. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.

7. Климов Г.П. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Изд-во МГУ, 1983. — 328 с.

8. Климов Г.П., Кузьмин А.Д. Вероятность, процессы, статистика. Задачи с решениями. — М.: Изд-во МГУ,1985.-232 с.

9. Пытьев Ю.П., Шишмарев И.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. — М.: Изд-во МГУ,1983. — 256 с.

10. Сборник задач по математике. Ч.3. Теория вероятностей и математическая статистика / под ред. А.В.Ефимова. — М.: Наука, 1990. — 428 с.

Учебное пособие

11. Труфанов В.А., Рыженко А.В. Типовой расчёт по курсу "Теория вероятностей и математическая статистика": Учебное пособие с грифом ДВ РУМЦ. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2006.

6. Перечень и темы промежуточных форм контроля знаний

6.1 Контрольная работа №1— 8 неделя, тема 1

Образцы вариантов заданий для контрольной работы

№ 1

1. Пять занумерованных шаров расставляются в случайном порядке. Рассматриваются события A={шарик с номером 1 оказался третьим слева} и

B={шарик с номером 2 оказался левее шарика с номером 1}.

а) Описать пространство Ω элементарных исходов, найти число элементов в множестве Ω и вероятность $P(A \cap B)$;

б) привести примеры трех различных элементарных исходов ω_1, ω_2 и ω_3, благоприятствующих событиям A, B и $A \cap B$ соответственно.

2. Точка с координатой ξ выбирается наудачу на отрезке [0, 1], и независимо от нее точка с координатой η выбирается наудачу на отрезке [0, 2]. Проверить, являются ли три события $\{\xi+\eta < 1\}$, $\{\xi > \eta\}$ и $\{\eta = 1\}$ независимыми в совокупности.

3. Четырнадцать раз подбрасывается пара игральных костей. Какова вероятность того, что сумма очков, равная 4, выпадет не менее пяти раз?

4. В первой урне 7 белых и 2 черных шара, во второй - 4 белых и 5 черных. Из первой урны наудачу выбирают три шара и перекладывают во вторую, после чего из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот последний шар окажется белым.

5. Один стрелок попадает по мишени с вероятностью 0.4, другой — с вероятностью 0.7 независимо от первого. Стрелки делают по одному выстрелу. С какой вероятностью хотя бы один из них попадет по мишени?

№ 2

1. Четыре занумерованных шара раскладываются в три ящика (красный, синий и зеленый) так, что для каждого шара равновозможно попасть в любой ящик. Рассматриваются события A={шарик с номером 1 попал в синий ящик} и B={шарики с номерами 1 и 2 оказались в разных ящиках}.

а) Описать пространство Ω элементарных исходов, найти число элементов в множестве Ω и вероятность $P(A \cap B)$;

б) привести примеры трех различных элементарных исходов ω_1, ω_2 и ω_3, благоприятствующих событиям A, B и $A \cap B$ соответственно.

2. Точка с координатой ξ выбирается наудачу на отрезке [0, 2], и независимо от нее точка с координатой η выбирается наудачу на отрезке [0, 3]. Проверить, являются ли три события $\{\xi+\eta < 2\}$, $\{\eta = 1\}$ и $\{\xi > \eta\}$ независимыми в совокупности.

3. Семь раз подбрасываются три игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков, равная 17, выпадет не более трех раз?

4. В первой урне 8 белых и 3 черных шара, во второй - 5 белых и 3 черных. Из первой урны наудачу выбирают два шара, а из второй — один шар. После этого из выбранных трех шаров наудачу берут один шар. Найти вероятность того, что этот последний шар окажется белым.

5. Первая лампочка перегорает с вероятностью 2/3, вторая — с вероятностью 3/5 независимо от первой. С какой вероятностью перегорит хотя бы одна лампочка?

№ 3

1. Подбрасываются три игральные кости. Рассматриваются события A={на третьей кости выпало 3 очка} и B={на второй кости выпало меньше очков, чем на третьей}.

а) Описать пространство Ω элементарных исходов, найти число элементов в множестве Ω и вероятность $P(A \cap B)$;

б) привести примеры трех различных элементарных исходов ω_1, ω_2 и ω_3, благоприятствующих событиям A, B и $A \cap B$ соответственно.

2. Точка с координатой ξ выбирается наудачу на отрезке [0, 1], и независимо от нее точка с координатой η выбирается наудачу на отрезке [−1, 1]. Проверить, являются ли три события $\{\eta = 0\}$, $\{\xi < \eta\}$ и $\{\xi+\eta < 1\}$ независимыми в совокупности.

3. Девять раз подбрасывается пара игральных костей. Какова вероятность того, что сумма очков, равная 10, выпадет не менее двух раз?

4. В первой урне 2 белых и 5 черных шаров, во второй — 7 белых и 5 черных. Из первой урны наудачу выбирают три шара и перекладывают во вторую, после чего из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот последний шар окажется черным.

5. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Первый отказывает с вероятностью 0.7, второй — с вероятностью 0.5. С какой вероятностью откажет хотя бы один из этих двух элементов?

6.2 Расчётно-графические работы — охватывает все темы практических занятий (представлены в разделе 3.1.1).

7. Вопросы для подготовки к экзаменам

1. Теория вероятностей: введение. Конечное вероятностное пространство.
2. Понятие события. Операции над событиями.
3. Язык теории вероятностей. Классическое определение вероятностей.

4. Элементы комбинаторики: выбор с возвращением, выбор без возвращения. Размещение дробинок по ячейкам.

5. Геометрическая вероятность. Простейшие свойства вероятностей.

6. Условные вероятности.

7. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

8. Независимость событий. Статистическая независимость.

9. Схема Бернулли.

10. Счётное вероятностное пространство. Примеры дискретных распределений.

11. Математическое ожидание. Общие свойства математического ожидания.

12. Дисперсия случайной величины. Общие свойства дисперсии.

13. Индикаторы событий. Независимость случайных величин.

14. Некоррелированность случайных величин.

15. Предельные теоремы для схемы Бернулли.

16. Неравенства Чебышёва. Закон больших чисел. Сходимость по вероятности.

17. Общее определение вероятностного пространства. Случайная величина (общий случай).

18. Функция распределения случайной величины.

19. Непрерывные случайные величины. Примеры абсолютно непрерывных распределений.

20. Математическое ожидание и дисперсия абсолютно непрерывных распределений.

21. Понятие о квантилях распределений. Совместная функция распределения, плотность.

22. Независимость случайных величин. Математическое ожидание от случайных функций.

23. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.

24. Определение дискретной цепи Маркова. Классификации состояний цепи. Необходимое и достаточное условие возвратности состояний.

25. Понятие о выборке. Эмпирическая функция распределения. Гистограмма.

26. Выборочные числовые характеристики: среднее и выборочная дисперсия.

27. Оценивание неизвестных параметров. Свойства оценок. Сравнение оценок.

28. Нахождение оценок методом моментов и методом наибольшего правдоподобия.

29. Доверительный интервал. Пример на построение доверительного интервала.

30. Вероятностные распределения, связанные с нормальным.

31. Теорема Фишера для нормальных выборок. Доверительное оценивание параметров нормальных выборок.

32. Метод наименьших квадратов: линейная модель. Система нормальных уравнений.

33. Статистические гипотезы: простые и сложные гипотезы и их проверка. Критерий согласия Пирсона.

34. О критериях согласия Колмогорова и Смирнова.

35. Основные понятия случайных процессов.. Нормальные процессы.

36. С конечными моментами второго порядка, марковские и диффузионные процессы.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕКАЯ (ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ) КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ

Номер недели	Номер темы		Занятия (номера)			Самостоятельная работа студентов		
			Прак-тич.	Лабора-торные	лекция, доп. литература	Содержание	часы	
1	1	Случайные события	1		лекция, доп. литература, мет. пособие	индивид, за-дание № 1	2	отчет по инд. заданию № 1
2	1	Классич. вероятн. пр-во	2		теже	индивид, задание № 2	2	отчет по индвид. зад. №2
3	1	Геометр. вероят-ность	3		теже	индивид, задание №3	2	отчет по индвид. зад. №3
4	1	Основн. свойства вероятн.	4		теже	индивид, задание №4	2	отчет по лабор. работе №3, контр. работа
5	1	Формулы полной вер и Байеса	5		теже	индивид, задание №5	2	отчет по индвид. зад. №5
6	1	Схема Бер-нулли	6		теже	индивид, задание №6	2	отчет по индвид. зад. №6
7	1		7		теже	подготовка к контрольной работе	2	контрольная работа
8	2	Функция распредел.	8		теже	индивид, задание №7	2	отчет по индвид. зад. №7
9	2	Преобраз. случайных величин	9		теже	тоже	2	тотже
10	2,3	Моменты	10		теже	тоже	2	тотже
11	4	Совместн. распредел.	11		лекция	нет	2	нет
12	5,6	Предель-ные теоремы	12		лекция, доп. литература, мет. пособие	индивид, задание №8	2	отчет по индвид. зад. № 8
13	7	Метод моментов.	13		теже	индивид, задание №9	2	отчет по индвид. зад. № 9
14	7	метод наи-большего правдопод.	14		теже	индивид, задание №10	2	отчет по индвид. зад. №10а
15	8	Доверител ьные интервалы	15		лекция		2	

16	9	Метод наименьш. квадратов	16		лекция		2	
17	10	Статистис-тические гипотезы	17		лекция		2	
18	11	Случайные процессы	18		лекция		2	