

Министерство образования и науки РФ  
Федеральное государственное образовательное учреждение высшего образования  
**АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ**

**сборник учебно-методических материалов**  
для направления подготовки 15.03.04 «Автоматизация технологических  
процессов и производств»

Печатается по решению  
Редакционно-издательского совета  
Энергетического факультета  
Амурского государственного университета

*Составитель: Штыкин М.Д.*

Моделирование систем и процессов: сборник учебно-методических материалов для направления подготовки 15.03.04 – Автоматизация технологических процессов и производств. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2017. – 19 с.

©Амурский государственный университет, 2017  
©Кафедра автоматизации производственных  
процессов и электротехники, 2017  
©Штыкин М.Д., составитель

## Содержание

Введение	4
1. Краткий курс лекций	4
2. Методические рекомендации к практическим занятиям	12
3. Методические рекомендации для выполнения курсовой работы	16
4. Методические рекомендации для самостоятельной работы студентов	16
Библиографический список	19

## ВВЕДЕНИЕ

Требования к проектированию систем управления выдвигает в число первоочередных задач построение и использование их математических моделей. Дисциплина «Моделирование систем и процессов» является одним из обязательных направлений в подготовке бакалавров направления подготовки 15.03.04 – Автоматизация технологических процессов и производств.

Целью преподавания дисциплины является подготовка высококвалифицированного специалиста, владеющего основами моделирования систем, методами их исследования, способного овладеть техническими и программными средствами моделирования с целью закрепления практических навыков при выполнении исследовательских и расчетных работ по созданию автоматических систем.

В результате изучения дисциплины студенты должны знать следующее:

- роль и место моделирования на этапе проектирования систем автоматического управления техническими объектами и производствами, с целью получения с наименьшими затратами и рисками наилучших качественных характеристик;
- принципы построения и основные требования к математическим моделям систем;
- владеть методами исследования математических моделей систем;
- знать модели дискретных сигналов и систем, методы их анализа и синтеза;
- знать содержание основных пакетов системы MATLAB – Simulink и его дополнительные компоненты.

В процессе обучения студенты должны приобрести знания по принципам моделирования, классификации способов представления моделей систем, по методам и способам формализации объектов, процессов, явлений и реализации их на компьютере.

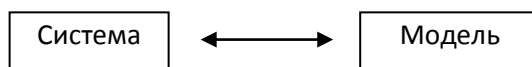
Учебный курс «Моделирование систем» является дисциплиной общепрофессионального цикла, и излагается с учетом знаний, полученных студентами в процессе изучения дисциплин: «Высшая математика», «Физика», «Информатика».

## КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ

### 1. Общие вопросы моделирования

#### 1.1. Основные понятия и определения теории моделирования.

Моделированием называется замещение одного объекта, называемого системой, другим объектом, называемым моделью, и проведение экспериментов с моделью (или на модели), исследование свойств модели, опираясь на результаты экспериментов с целью получения информации о системе.



Моделирование позволяет исследовать такие системы, прямой эксперимент с которыми:

- а) трудно выполним;
- б) экономически невыгоден;
- в) вообще невозможен.

Моделирование - важная сфера применения средств вычислительной техники, когда положения теории моделирования используются в различных областях науки, производства и техники. В то же время сами средства вычислительной техники являются объектами моделирования на этапе проектирования новых и модернизации старых вычислительных систем, при анализе возможности использования вычислительных систем в различных приложениях.

Система.

Объектом исследования в теории моделирования является система. Система — это совокупность взаимосвязанных элементов, объединенных в одно целое для достижения некоторой цели, которая определяется назначением системы. При этом элемент — это минимально

неделимый объект, рассматриваемый как единое целое. Если система — это совокупность взаимосвязанных элементов, то комплекс — это совокупность взаимосвязанных систем.

Элемент, система, комплекс — понятия относительные, т.к. любой элемент, если его расчленишь, если его не рассматривать как неделимый объект, то он становится системой, и наоборот любой комплекс становится системой, если входящие в его состав системы рассматривать как элементы.

Структура и функции.

Для описания системы необходимо определить ее структурную и функциональную организацию.

Структурная организация (структура) системы задается перечнем элементов, входящих в состав системы, и конфигурацией связей между ними.

Для описания структуры системы используются способы:

а) графический — в форме графа, где вершины графа соответствуют элементам системы, а дуги — связям между элементами (частный случай графического задания структуры системы — это форма схем);

б) аналитический, когда задаются количество типов элементов системы, число элементов каждого типа и матрицы связей между ними.

Функциональная организация (функции) системы — это правила достижения поставленной цели, правила, описывающие поведение системы на пути к цели её назначения.

Способами описания функций системы являются:

а) алгоритмический — в виде последовательности шагов, которые должна выполнять система;

б) аналитический — в виде математических зависимостей;

в) графический — в виде временных диаграмм;

г) табличный — в виде таблиц, отображающих основные функциональные зависимости.

Понятие состояния системы.

Свойства системы, значения переменных, описывающих систему, в конкретные моменты времени называются состояниями системы.

Процесс (продвижение – лат.) функционирования системы можно рассматривать как последовательную смену её состояний во времени, другими словами, процесс функционирования системы — это переход её из одного состояния в другое.

Система переходит из одного состояния в другое, если изменяются значения переменных, описывающих состояние системы. Причина изменения переменных состояния, а значит, причина, вызывающая переход системы из состояния в состояние называется событием. Событие является следствием начала или окончания какого-то действия. Например, если в качестве системы рассмотреть кассу в магазине и под состоянием системы понимать количество покупателей у кассы, то в такой системе можно выделить следующие действия и соответствующие события.

Действия:	События:
"поход (ходьба) в кассу"	"прибытие";
"ожидание"	"уход из очереди",
	"начало обслуживания";
"обслуживание"	"окончание обслуживания",
	"уход из системы".

Понятия "система" и "процесс функционирования" тесно взаимосвязаны и часто рассматриваются как эквивалентные понятия.

Классификация систем.

Прежде чем классифицировать системы необходимо определить соответствующие классификационные признаки. Таковыми являются:

- 1) характер изменения значений переменных системы;
- 2) характер протекающих в системе процессов;
- 3) характер функционирования системы во времени;
- 4) режим функционирования.

По первому признаку, т.е. в зависимости от того, как изменяются значения переменных, описывающих состояния системы, все системы делятся на два класса:

а) с непрерывными состояниями, для которых характерен плавный переход из состояния в состояние, обусловленный тем, что переменные, описывающие состояния, могут принимать любые значения из некоторого интервала, т.е. переменные являются непрерывными величинами;

б) с дискретными состояниями (дискретные системы), для которых характерен скачкообразный переход из состояния в состояние, обусловленный тем, что переменные, описывающие состояния системы, изменяются скачкообразно и принимают значения, которые могут быть пронумерованы, т.е. переменные являются дискретными величинами.

2. По второму признаку, т.е. в зависимости от характера протекающих в системах процессов, все системы делятся на:

а) детерминированные системы, в которых отсутствуют всякие случайные воздействия (факторы), а значит, поведение таких систем может быть предсказано заранее;

б) стохастические системы, в которых процессы функционирования развиваются под влиянием случайных факторов (внешних или внутренних), т.е. процессы являются случайными.

3. По третьему признаку, т.е. в зависимости от характера функционирования системы во времени, все системы делятся на:

а) системы, функционирующие в непрерывном времени, когда переходы между состояниями системы возможны в любые (а, значит, в случайные) моменты времени;

б) системы, функционирующие в дискретном времени, когда переходы между состояниями возможны только в определенные (дискретные), заранее известные моменты времени.

4. По четвертому признаку, т.е. в зависимости от режима функционирования, все системы подразделяются на:

а) системы с установившимся (стационарным) режимом;

б) системы с неустановившимся (нестационарным) режимом; этот режим характерен для переходного этапа или для систем, функционирующих в условиях перегрузки.

Проведенная классификация систем приведена ниже на рисунке.

В курсе "Моделирование дискретных систем" изучаются стохастические системы с дискретными состояниями, функционирующие в непрерывном времени. Такие системы часто еще называют системами массового обслуживания (СМО) или системами с очередями или Q–системами (Queue – очередь).

Детерминированные системы с непрерывными состояниями, функционирующие в непрерывном времени, называют динамическими системами или D-системами (Dynamic – динамический). Такие системы изучаются в курсе "Моделирование".

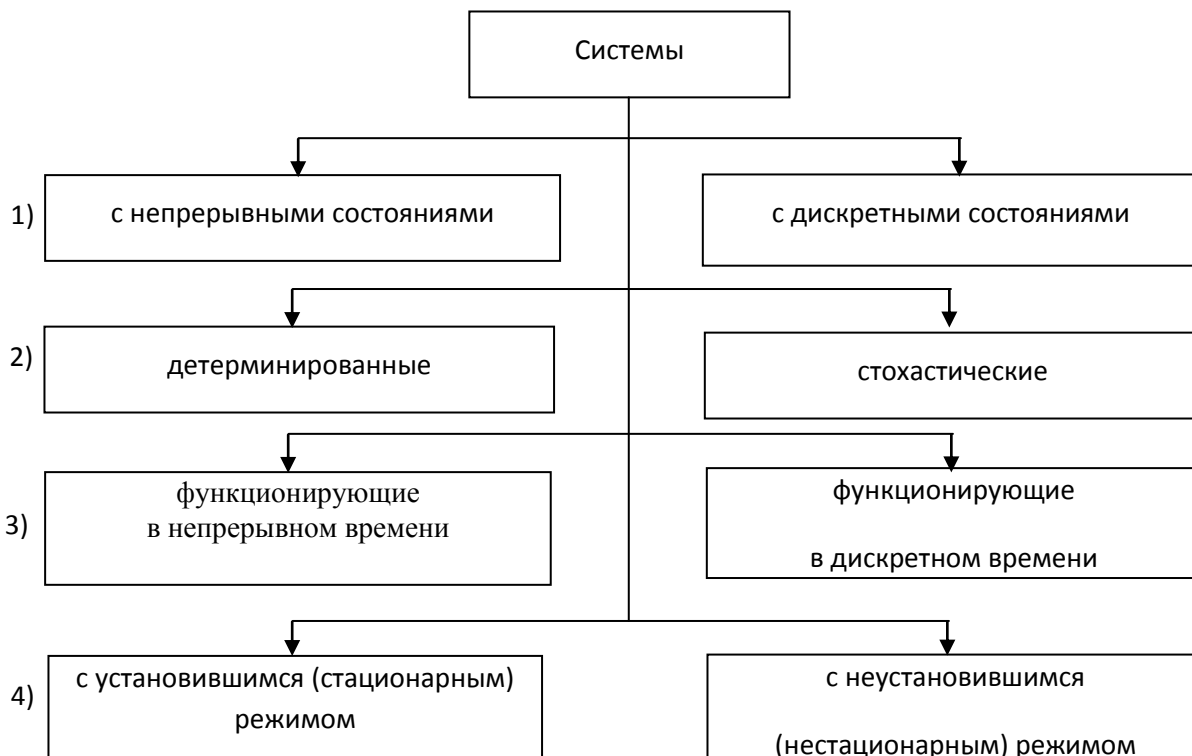
Детерминированные системы с дискретными состояниями, функционирующие в дискретном времени называют конечными автоматами или F-системами (Finite – конечный). Такие системы изучаются в курсе "Теория автоматов".

Стохастические системы с дискретными состояниями, функционирующие в дискретном времени, называют вероятностными автоматами или P-системами (Probability – вероятность).

Параметры и характеристики системы.

Количественно любая система описывается совокупностью величин, которые могут быть разбиты на два класса:

1) параметры ( $\Pi$ ), описывающие первичные свойства системы и являющиеся исходными



данными при исследовании системы;

2) характеристики ( $X$ ), описывающие вторичные свойства системы и определяемые как функции параметров системы:  $X=f(\Pi)$ .

Параметры любой системы подразделяются на:

а) внутренние, описывающие структурно-функциональную организацию системы;

б) внешние, описывающие взаимодействие системы с внешней (по отношению к системе) средой.

К внутренним параметрам относятся:

а) структурные параметры, описывающие состав элементов системы и саму её структуру;

б) функциональные параметры, описывающие функциональную организацию (процесс функционирования) системы.

К внешним параметрам относятся параметры нагрузки, показывающие, как часто и в каком объеме используются ресурсы системы. В общем случае — это параметры взаимодействия системы с внешней средой.

Характеристики системы делятся на:

а) глобальные, показывающие эффективность функционирования системы в целом;

б) локальные, описывающие качество функционирования отдельных элементов системы.

К глобальным характеристикам системы относятся:

а) мощностные характеристики или характеристики производительности, показывающие скорость достижения цели назначения системы;

б) временные характеристики, описывающие временные аспекты функционирования системы;

в) надёжностные характеристики, определяющие надёжность функционирования системы;

г) экономические характеристики в виде стоимостных показателей, свидетельствующие об экономической целесообразности использования системы.

Модель

Модель — это физический или абстрактный объект, отражающий в той или иной степени процессы в исследуемой системе.

Основное требование к модели – это её адекватность (*приравненный, равный* - лат.), под которым понимается степень соответствия процессов, протекающих в модели, процессам, имеющих место, в системе, и, следовательно, степень соответствия свойств и характеристик модели свойствам и характеристикам системы.

Адекватность модели зависит от:

- а) степени полноты и достоверности сведений об исследуемой системе;
- б) степени детализации модели;
- в) корректности параметризации модели, под которой понимается установления соответствия между параметрами системы и модели;
- г) уровня подготовки и опыта самого исследователя.

Классификация моделей (видов моделирования).

Многообразие систем предопределяет использование для их изучения множества различных моделей. В качестве основных признаков, необходимых для классификации моделей, можно рассмотреть:

- 1) степень адекватности модели;
- 2) характер исследуемых на модели процессов;
- 3) способ реализации модели.

1) По первому признаку, т.е. в зависимости от степени адекватности, модели подразделяются на:

а) полные (подробные) модели, когда модель в полной мере адекватна изучаемой системе, что характерно для тривиальных систем;

б) приближенные модели, когда модель не отражает некоторые аспекты функционирования моделируемой системы, что характерно для большинства моделей.

2) По второму признаку, т.е. в зависимости от характера процессов функционирования системы, все модели могут быть подразделены на:

а) непрерывные и дискретные модели — для моделирования процессов с дискретными и непрерывными состояниями;

б) детерминированные и стохастические (вероятностные) модели — для моделирования соответствующих процессов функционирования систем;

в) статические (структурные) и динамические (функциональные) модели; при этом статические модели используются для изучения поведения системы в отдельные моменты времени, а динамические отображают поведение системы во времени;

г) модели с непрерывным и с дискретным временем — в зависимости от характера изменения во времени процессов функционирования системы (такое разделение характерно только для динамических моделей);

д) стационарные и нестационарные модели — для моделирования стационарных и нестационарных процессов в соответствующих режимах функционирования системы.

Классификация моделей по второму признаку во многом аналогична классификации самих систем, приведенной ранее.

3) По третьему признаку, т.е. в зависимости от способа реализации модели или от способа представления системы, модели подразделяются на:

а) физические;

б) математические.

Физические модели — это "материальные" модели, эквивалентные или подобные в той или иной степени оригиналу. В общем случае физические модели — это модели, процесс функционирования которых такой же, как у оригинала, имеет ту же или подобную физическую природу.

Математические модели — это "абстрактные" модели, представляющие собой формализованное описание изучаемой системы с помощью абстрактного языка, в частности, с помощью математических соотношений, отображающих процесс функционирования системы.



В дальнейшем при изучении дискретных систем будем рассматривать только математическое моделирование, которое, в зависимости от метода анализа моделей (признак классификации математических моделей), можно разделить на:

а) аналитическое моделирование, для которого характерно то, что процессы функционирования, как отдельных элементов, так и системы в целом записываются в виде некоторых математических соотношений (алгебраических, дифференциальных, логических и т.д.);

б) имитационное моделирование, когда модель воспроизводит процесс функционирования системы во времени, причем модель имитирует все элементарные составляющие процесса с обязательным сохранением их взаимосвязанности и взаимообусловленности, логической структуры и последовательности протекания по времени;

в) комбинированное моделирование, когда процессы функционирования одних элементов системы моделируются аналитически, а процессы функционирования остальных — имитационно.

Аналитические модели могут быть исследованы следующими методами:

а) аналитическими, когда (путем применения математических правил) для характеристик функционирования системы получены явные аналитические зависимости от параметров системы и параметров внешних воздействий.

б) численными, когда для модели, хотя она реализована аналитически (например, в виде системы уравнений), не удастся получить в явном виде зависимости характеристик (не удастся решить систему уравнений); при этом математические операции заменяются операциями над числами.

Основным достоинством аналитического моделирования является возможность детального (полного) анализа характеристик системы в широком диапазоне изменения исходных данных. Однако характерные для аналитического моделирования явные математические соотношения удаются, как правило, получать только для сравнительно простых систем или ценой определенных предположений и допущений, которые "уводят" исходную модель от реальной системы и тут же возникает вопрос об адекватности модели.

В тех случаях, когда исследование систем методами аналитического моделирования (даже численными) затруднительно или невозможно, эффективными методами исследования, а зачастую единственными практически доступными, становятся методы имитационного моделирования, базирующиеся на теории статистических испытаний.

Основное преимущество имитационного моделирования перед аналитическим — это возможность моделирования более сложных систем с учетом таких условий и факторов, которые исключают применение методов аналитического моделирования. Однако существенный недостаток имитационного моделирования — это трудоемкость построения модели и частный характер получаемых результатов.

### **Математические модели в пространстве состояний**

Математическая модель (образ) представляет собой абстрактное отражение реального объекта (оригинала, прообраза). В зависимости от типа объекта и целей, ради которых строится и используется модель, формальное описание может быть различным. Для моделирования объектов могут быть использованы структурные схемы, операторные уравнения, алгебраические уравнения, дифференциальные, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения, Марковские цепи, передаточные функции, частотные характеристики, весовые функции, графы и т. д. Все эти методы функционально связывают входные и выходные сигналы объекта. По количеству входов и выходов объекты и соответствующие им модели разделяют на одномерные и многомерные. Одномерными называют объекты, имеющие один вход и один выход, многомерными — объекты, имеющие несколько входов и выходов, причем число входов не обязательно равно числу выходов. Блок-схемы одномерного и многомерного объектов изображены соответственно на Рис. Ошибка! *Текст указанного стиля в документе отсутствует..1*, а и б. Причем число входов не обязательно равно числу выходов.

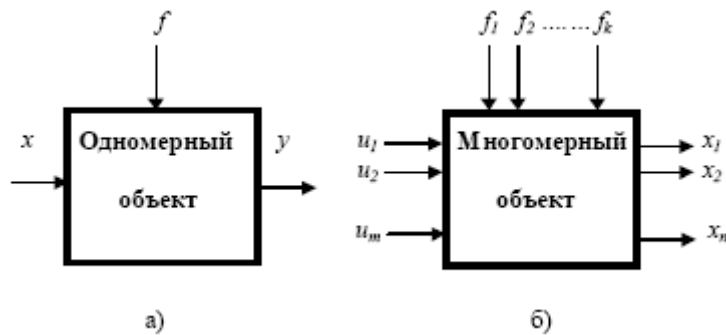


Рис. **Ошибка! Текст указанного стиля в документе отсутствует..1.** Блок-схема одномерного и многомерного объектов

Наиболее полно идентифицируемый объект описывается в терминах пространства состояний. Под состоянием объекта понимается совокупность величин  $x_i$ , полностью определяющих его положение в данный момент времени.

Наиболее употребительной моделью динамических объектов являются дифференциальные уравнения. Будем рассматривать только объекты с сосредоточенными параметрами, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Порядок системы дифференциальных уравнений, описывающей модель объекта, непосредственно не определяется количеством входов и выходов, а зависит от операторов, преобразующих входные сигналы в выходные.

Для динамических систем, в которых физические процессы протекают непрерывно во времени, скорости изменения переменной состояния объекта можно также задать вектором

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left( \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_{n1}}{dt} \right)^T$$

где  $\frac{dx_i}{dt}$ ,  $i = \overline{1, n}$  – скорости изменения многомерной переменной состояния.

В свою очередь эти скорости определяются текущими значениями переменной состояния  $x$ , управлениями  $u$  и возмущениями  $f$ , действующими на объект

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}, t), \quad x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)^T$  – вектор функция;

$x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$  – начальные условия.

Если  $\mathbf{g}(\ )$  – нелинейная функция, то решение уравнения усложняется, так как сводится к интегрированию системы нелинейных ДУ. Так как методы интегрирования систем ДУ хорошо разработаны только для линейных систем, то перед работой с ними необходимо линеаризовать  $\mathbf{g}(\ )$  в окрестности рабочей точки, которой соответствует установившейся режим работы объекта.

Для линеаризованной функции  $\mathbf{g}(\ )$  ДУ вида с учетом воздействия среды можно представить в векторной форме:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}(t)\mathbf{e}(t),$$

где  $\mathbf{A}(t)$ ;  $\mathbf{B}(t)$ ;  $\mathbf{E}(t)$  – матрицы преобразования, элементы которых, в общем случае являются функциями времени.

Элементы  $x_i$  в уравнении называются переменными состояния объекта или фазовыми координатами. Переменные состояния  $x$  (фазовые координаты) образуют вектор состояния, переменные управления  $u$  и возмущения  $f$  образуют векторы управления и возмущения.

Множество этих векторов составляет пространство состояний (фазовое пространство)  $X$ , пространство управлений  $U$  и возмущений  $F$ .

Во многих физических объектах регулируются, измеряются и передаются по информационным каналам не значения вектора состояния  $x$ , а другие значения – функции составляющих вектора фазовых координат, называемые управляемыми или выходными величинами. Обозначим измеряемые величины через  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_s(t)$ , причем обычно  $s \leq n$ . Тогда уравнение измерения, связывающее регулируемые и фазовые координаты объекта примет вид

$$\mathbf{y}(t) = \Phi[\mathbf{x}(t)].$$

Для линейного объекта это соотношение линейное:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t).$$

Матрица  $\mathbf{C}(t)$  называется матрицей измерения. Она показывает, как изменяются значения вектора состояний при измерении. При измерениях, описываемых выражениями, вектором выходных сигналов (или просто вектором выхода) является вектор  $\mathbf{y}(t)$ . Отметим, что между векторами входа, выхода и состояния существует принципиальное различие. Если все составляющие вектора входа и вектора выхода являются вполне конкретными физическими величинами, то элементами вектора состояния могут быть некоторые абстрактные переменные, физическая природа которых не всегда определена.

Векторно-матричная запись модели линейного динамического объекта с учетом уравнения измерения принимает вид:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}_{n,n}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{n,m}(t)\mathbf{u}(t);$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_{s,n}(t)\mathbf{x}(t).$$

Если матрицы  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$  и  $\mathbf{C}(t)$  не зависят от времени, то объект называется объектом с постоянными коэффициентами, или стационарным, объектов. В противном случае объект будет нестационарным.

При наличии погрешностей при измерении, выходные (регулируемые) сигналы задаются линеаризованным матричным уравнением:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t),$$

где  $\mathbf{y}(t)$  – вектор регулируемых (измеряемых) величин;

$\mathbf{C}(t)$  – матрица связи вектора измерений с вектором состояний;

$\mathbf{v}(t)$  – вектор ошибок измерений (помехи).

Структура линейной непрерывной системы, реализующая уравнения приведена на рис. 0.4.

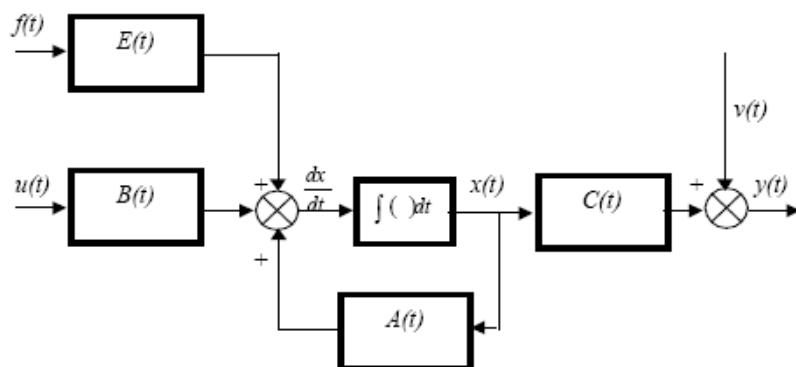


Рис. Ошибка! Текст указанного стиля в документе отсутствует..2. Структура линейной непрерывной системы

Данная структура соответствует математической модели объекта построенной в

пространстве состояний его входных  $f(t)$ ,  $u(t)$ , выходных  $y(t)$  и внутренних, или фазовых координат  $x(t)$ .

## 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Задачей практических занятий является закрепление знаний, полученных на лекциях, выработка практических навыков применения информации, необходимой инженеру в процессе его деятельности. При решении задач обращается внимание на логику решения, на правильность используемых методов. После этого проводится анализ полученного решения, результат сопоставляется с реальными объектами, что вырабатывает у студентов инженерную интуицию.

К выполнению заданий следует приступать после прочтения теоретического материала, изложенного на лекциях и в рекомендуемой литературе. При возникновении затруднений с выполнением заданий необходимо проконсультироваться у преподавателя. Далее по каждой теме приводится по одному примеру или одной задаче для демонстрации разделов дисциплины «Моделирование систем».

**Пример 1.** Рассмотрим математическую модель двигателя постоянного тока с независимым возбуждением от постоянных магнитов.

Система уравнений электрической и механической частей двигателя для рассматриваемого случая будет выглядеть:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + c_e \omega = U;$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_d - M_c;$$

$$M_d = c_m I.$$

Первое уравнение отражает взаимосвязь между переменными в цепи якоря, второе - условия механического равновесия. В качестве обобщенных координат выберем тока якоря  $I$  и частоту вращения якоря  $\omega$ . Управлением являются напряжение на якоре  $U$ , возмущением момент сопротивления нагрузки  $M_c$ . Параметрами модели являются активное сопротивление и индуктивность цепи и якоря, обозначенные соответственно  $R_{я}$  и  $L_{я}$ , а также приведенный момент инерции  $J$  и конструктивные постоянные  $c_e$  и  $c_m$ . В системе СИ  $c_e = c_m$ .

Разрешая исходную систему относительно первых производных, получим уравнения двигателя в пространстве состояний:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} I - \frac{c_e}{L} \omega + \frac{1}{L} U;$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{c_m}{J} I - \frac{1}{J} M_c.$$

В матричном виде уравнения переменные примут вид

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Gf};$$

$$y = \mathbf{Cx},$$

где вектор обобщенных координат  $x=(I \ \omega)^T$ , вектор управлений  $u=U$  (в рассматриваемом случае он является скаляром), вектор (скаляр) возмущений  $f=M_c$ . Матрицы модели

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{c_e}{L} \\ \frac{c_m}{J} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} \end{pmatrix},$$

Если в качестве регулируемой величины выбрать частоту вращения, то уравнение измерения запишется в виде

$$y = \omega,$$

а матрица измерений примет вид

$$C = (0 \ 1).$$

Сформируем модель двигателя в MATLAB. Для этого вначале зададим конкретные значения параметров двигателя ( $U = 110$  В;  $R = 0,2$  Ом;  $L = 0,006$  Гн;  $J = 0,1$  кг/м<sup>2</sup>;  $c_e = c_m = 1,3$  В/С) и найдем значения коэффициентов матриц объекта.

Программа, формирующая модели двигателя приведена ниже.

```
u=110; % Напряжение якоря
```

```
J=1; % Момент инерции
```

```
c=1.3; % Конструктивный коэффициент
```

```
R=.2; L=.006; % Активное сопротивление и индуктивность якоря
```

```
A=[-R/L -c/L;c/J 0];
```

```
B=[1/L;0];
```

```
C=[0 1];
```

```
D=0;
```

```
sd=ss(A,B,C,D) % Задание модели объекта в пространстве состояний
```

```
wd=tf(sd) % Задание передаточной функции двигателя
```

```
step(wd),grid % Построение переходной характеристики
```

```
a =
```

```
      x1    x2
x1 -33.33 -216.7
x2   13      0
```

```
b =
```

```
      u1
x1 166.7
x2   0
```

```
c =
```

```
      x1 x2
y1  0  1
```

```
d =
```

```
      u1
y1  0
```

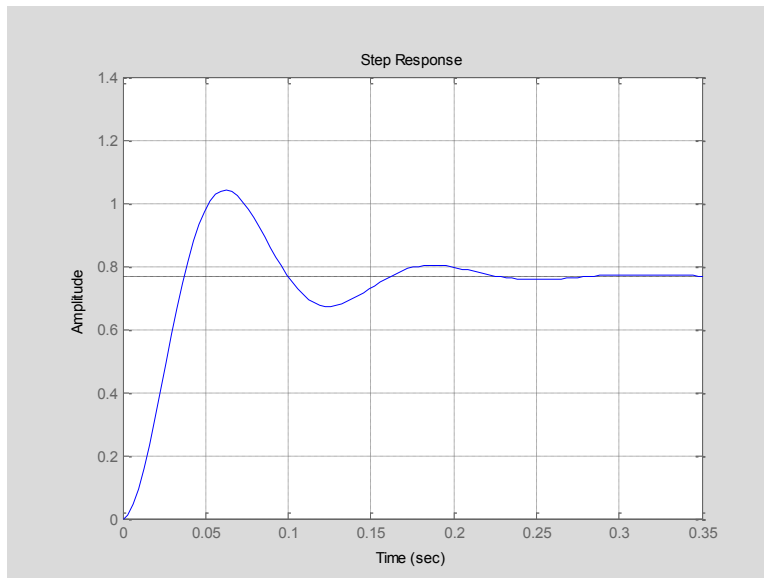
1. Continuous-time model.

Transfer function:

2167

-----

s<sup>2</sup> + 33.33 s + 2817



**Пример 2.** Рассмотрим приведение многомерного объекта, задаваемого уравнением

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{22}u_2,$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2$$

к канонической диагональной форме.

Матрицы объекта равны

$$A = \begin{pmatrix} -0,5 & 3 \\ -0,25 & -2,5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = (3 \quad 2).$$

Вычислим собственные значения матрицы A из условия (2.16)

$$\begin{vmatrix} -0,5 - \lambda & 3 \\ -0,25 & -2,5 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая полученный определитель, получим характеристическое уравнение объекта

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Корни этого уравнения или собственные значения матрицы A по теореме Виета равны

$$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = -2.$$

Найдем собственные векторы матрицы, подставляя в (2.23) вычисленные собственные значения. Для первого собственного значения имеем:

$$(-0,5 - \lambda_1)t_{11} + 3t_{21} = 0;$$

$$-0,25t_{11} + (-2,5 - \lambda_1)t_{21} = 0.$$

При  $\lambda_1 = -1$  получаем следующую систему уравнений для вычисления первого собственного вектора

$$0,5t_{11} + 3t_{21} = 0;$$

$$-0,25t_{11} - 1,5t_{21} = 0.$$

Откуда  $t_{11} = -6t_{21}$ .

Конкретные значения первого собственного вектора определяются условием нормировки

$$\sqrt{t_{11}^2 + t_{21}^2} = 1.$$

Подставляя сюда, решение уравнений  $t_{11} = -6t_{21}$  получим

$$t_{11} = \frac{6}{\sqrt{37}}; \quad t_{21} = -\frac{1}{\sqrt{37}}.$$

Аналогично найдем и второй собственный вектор

$$t_{12} = -\frac{2}{\sqrt{5}}; \quad t_{22} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Зная собственные векторы можно записать выражение для матрицы  $\mathbf{T}$  задающей переход в новую систему координат

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{37}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{37}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу  $\mathbf{T}^{-1}$ :

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{37}}{4} & \frac{\sqrt{37}}{2} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} & 3\sqrt{5} \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Не трудно убедиться, что

$$\mathbf{T} \times \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Новый вектор координат  $\mathbf{q}$  задается линейным преобразованием  $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{q}$ .

Подставляя его в уравнения объекта, получим

$$\mathbf{T} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{u}.$$

Умножая обе части уравнения на  $\mathbf{T}^{-1}$  слева будем иметь

$$\mathbf{I} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{q} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}.$$

Матрица  $\mathbf{A}_d = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ , в соответствии с (2.21), будет иметь диагональный вид, где в главной диагонали стоят ее собственные значения.

Действительно

$$\mathbf{A}_d = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{37}}{4} & \frac{\sqrt{37}}{2} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} & 3\sqrt{5} \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,5 & 3 \\ -0,25 & -2,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{37}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{37}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим новую матрицу управления  $\mathbf{B}_d = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$

$$\mathbf{B}_d = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{37}}{4} & \frac{\sqrt{37}}{2} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} & 3\sqrt{5} \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{37}}{4} & \sqrt{37} \\ -\frac{\sqrt{5}}{4} & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

и матрицу измерения

$$C_d = (3 \quad 2) \times \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{37}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{37}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{\sqrt{37}} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Тогда в новых координатах  $q_1, q_2$  уравнения объекта примут вид

$$\frac{dq_1}{dt} = \lambda_1 q_1 + b_{\partial 11} u_1 + b_{\partial 12} u_2$$

$$\frac{dq_2}{dt} = \lambda_2 q_2 + b_{\partial 21} u_1 + b_{\partial 22} u_2.$$

$$y = c_{\partial 1} q_1 + c_{\partial 2} q_2$$

Проведем аналогичные расчеты, используя систему MATLAB, используя сначала операторы матричных преобразований, а затем - оператор `canon`, который осуществляет линейные преобразования моделей систем заданных в пространстве состояний и поддерживает две канонические формы модальную (диагональную) и присоединенную (форму наблюдаемости).

### 3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Курсовая работа выполняется с использованием пособий:

1. Лекции по курсу Моделирование систем.
2. Моделирование линейных систем: учебное пособие / Л. А. Мироновский. – СПб.: ГУАП, 2009. – 244 с.
3. Математическое моделирование систем и процессов в курсовом проектировании. Методические указания для студентов электротехнического факультета дневной и заочной форм обучения. - Самара: СамГАПС, 2005.-30 с.

Критерии оценки курсового проекта на защите курсового проекта.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если студент изучил основные положения теории моделирования систем и процессов.

Оценка «хорошо» ставится, если студент изучил основные положения теории и показал хорошие знания по принципам моделирования, классификации способов представления моделей систем, по методам и способам формализации объектов, процессов, явлений и построения математических моделей.

Оценка «отлично» ставится, если студент изучил основные положения теории и показал отличные знания по принципам моделирования, классификации способов представления моделей систем, по методам и способам формализации объектов, процессов, явлений и реализации их на компьютере.

### 4. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

При изучении дисциплины студентам следует опираться на знание, а при необходимости повторение отдельных разделов следующих учебных дисциплин: Высшая математика, Прикладная математика, Информатика, Физика.

Целесообразная последовательность самостоятельного изучения материала дисциплины определяется соответствующими рекомендациями преподавателя. Самостоятельная работа проводится с целью углубления знаний по дисциплине и предусматривает:

- чтение студентами рекомендованной литературы и усвоение теоретического материала дисциплины;
- подготовку к практическим занятиям;



работу с Интернет-источниками;

- посещение отраслевых выставок и семинаров, проводимых в Благовещенске;
- подготовку к написанию контрольной работы, сдаче экзамена.

Планирование времени на самостоятельную работу, необходимого на изучение настоящей дисциплины, студентам лучше всего осуществлять на весь семестр, предусматривая при этом регулярное повторение пройденного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо регулярно дополнять сведениями из литературных источников, представленных в "Рабочей программе". По каждой из тем для самостоятельного изучения, приведенных в Рабочей программе дисциплины следует сначала прочитать рекомендованную литературу и при необходимости составить краткий конспект основных положений, терминов, сведений, требующих запоминания и являющихся основополагающими в этой теме и для освоения последующих разделов курса.

При проведении самостоятельной работы, связанной с проработкой теоретического материала, студентам предлагается законспектировать рассматриваемый вопрос, в случае необходимости задать возникшие вопросы на практическом занятии или на консультации.

При изучении дисциплины «Моделирование систем» практикуются следующие виды и формы самостоятельной работы студентов:

- выполнение практических работ
- подготовка к устному опросу
- подготовка к тестированию
- подготовка к письменной контрольной работе, тестированию, контрольной точке.

Самостоятельная работа тесно связана с контролем (контроль также рассматривается как завершающий этап выполнения самостоятельной работы), при выборе вида и формы самостоятельной работы следует учитывать форму контроля.

Формы контроля при изучении дисциплины «Моделирование систем»:

- устный опрос;
- контрольная работа;
- контрольная точка;
- письменная работа;
- тестирование.

Самостоятельная работа проводится в виде подготовительных упражнений для усвоения нового, упражнений при изучении нового материала, упражнений в процессе закрепления и повторения, упражнений проверочных и контрольных работ, а также для самоконтроля.

Для организации самостоятельной работы необходимы следующие условия:

- готовность студентов к самостоятельному труду;
- наличие и доступность необходимого учебно-методического и справочного материала;
- консультационная помощь.

Самостоятельная работа может проходить в лекционном кабинете, лаборатории, компьютерном зале, библиотеке, дома. Самостоятельная работа тренирует волю, воспитывает работоспособность, внимание, дисциплину и т.д.

### **Рекомендации по организации аудиторной самостоятельной работой**

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Основными видами аудиторной самостоятельной работы являются:

- выполнение практических работ по инструкциям; работа с литературой и другими источниками информации, в том числе электронными;
- само- и взаимопроверка выполненных заданий;

Выполнение практических работ осуществляется на практических занятиях в соответствии с графиком учебного процесса. Работа с литературой, другими источниками информации, в т.ч. электронными может реализовываться на лекционных и практических занятиях. Данные источники информации могут быть представлены на бумажном и/или электронном носителях, в

том числе, в сети Internet. Преподаватель формулирует цель работы с данным источником информации, определяет время на проработку документа и форму отчетности.

Само- и взаимопроверка выполненных заданий чаще используется на лекционном, практическом занятии и имеет своей целью приобретение таких навыков как наблюдение, анализ ответов сокурсников, сверка собственных результатов с эталонами.

### **Рекомендации по организации внеаудиторной самостоятельной работы**

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

При предъявлении видов заданий на внеаудиторную самостоятельную работу рекомендуется использовать дифференцированный подход к уровню подготовленности обучающегося. Перед выполнением внеаудиторной самостоятельной работы преподаватель проводит консультацию с определением цели задания, его содержания, сроков выполнения, ориентировочного объема работы, основных требований к результатам работы, критериев оценки, форм контроля и перечня литературы. В процессе консультации преподаватель предупреждает о возможных типичных ошибках, встречающихся при выполнении задания.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня подготовленности обучающихся.

Видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы могут быть:

– для овладения знаниями: чтение текста (учебника, первоисточника, дополнительной литературы); составление плана текста; графическое изображение структуры текста; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочниками; учебно-исследовательская работа; использование аудио- и видеозаписей, компьютерной техники и Интернет-ресурсов и др.;

– для закрепления и систематизации знаний: работа с конспектом лекции (обработка текста); повторная работа над учебным материалом (учебника, первоисточника, дополнительной литературы, аудио- и видеозаписей); составление плана и тезисов ответа; составление таблиц, глоссария для систематизации учебного материала; изучение словарей, справочников; ответы на контрольные вопросы; аналитическая обработка текста (аннотирование, рецензирование, реферирование, контент-анализ и др.); подготовка сообщений к выступлению на семинаре, конференции; подготовка рефератов, докладов; составление библиографии, заданий в тестовой форме и др.;

– для формирования умений: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; составление схем; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности и др.

Для обеспечения внеаудиторной самостоятельной работы по дисциплине преподавателем разрабатывается перечень заданий для самостоятельной работы, который необходим для эффективного управления данным видом учебной деятельности обучающихся.

Преподаватель осуществляет управление самостоятельной работой, регулирует ее объем на одно учебное занятие и осуществляет контроль выполнения всеми обучающимися группы. Для удобства преподаватель может вести ведомость учета выполнения самостоятельной работы, что позволяет отслеживать выполнение минимума заданий, необходимых для допуска к итоговой аттестации по дисциплине.

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Обучающийся самостоятельно определяет режим своей внеаудиторной работы и меру труда, затрачиваемого на овладение знаниями и умениями по каждой дисциплине, выполняет внеаудиторную работу по индивидуальному плану, в зависимости от собственной подготовки, бюджета времени и других условий.

Ежедневно обучающийся должен уделять выполнению внеаудиторной самостоятельной работы в среднем не менее 3 часов.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов может проводиться в письменной, устной или смешанной форме с представлением продукта деятельности обучающегося. В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы могут быть использованы зачеты, тестирование, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и др.

#### **Методические рекомендации по изучению теоретических основ дисциплины**

Изучение теоретической части дисциплин призвано не только углубить и закрепить знания, полученные на аудиторных занятиях, но и способствовать развитию у студентов творческих навыков, инициативы и организовать свое время.

Самостоятельная работа при изучении дисциплин включает:

- чтение студентами рекомендованной литературы и усвоение теоретического материала дисциплины;

- знакомство с Интернет-источниками;

- подготовку к различным формам контроля (тесты, контрольные работы);

- подготовку и написание рефератов;

- выполнение контрольных работ;

- подготовку ответов на вопросы по различным темам дисциплины в той последовательности, в какой они представлены.

Материал, законспектированный на лекциях, необходимо регулярно прорабатывать и дополнять сведениями из других источников литературы, представленных не только в программе дисциплины, но и в периодических изданиях.

При подготовке к контрольной работе необходимо прочитать соответствующие страницы основного учебника. Желательно также чтение дополнительной литературы. При написании контрольной работы ответ следует иллюстрировать схемами.

При выполнении самостоятельной работы по написанию реферата студенту необходимо: прочитать теоретический материал в рекомендованной литературе, периодических изданиях, на Интернет-сайтах; творчески переработать изученный материал и представить его для отчета в форме реферата, проиллюстрировав схемами, диаграммами, фотографиями и рисунками.

Тексты контрольных работ и рефератов должны быть изложены внятно, простым и ясным языком.

При ответе на экзамене необходимо: продумать и четко изложить материал; дать определение основных понятий; дать краткое описание явлений; привести примеры. Ответ следует иллюстрировать схемами, рисунками и графиками.

#### **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Моделирование систем: учебник для студ. высш. заведений /С.И.Дворецкий, Ю.Л.Муромцев, В.А.Погонин, А.Г.Схиртладзе. – М.: Издательский центр «Академия», 2009.- 320 с.

2. Советов Б.Я. Моделирование систем: учеб. для вузов/Б.Я.Советов, С.А.Яковлев-5-е изд.стер.-М.: Высш.шк., 2007.-343 с.

3. Советов Б.Я. Моделирование систем. Практикум. Учеб. пособие для вузов/ Советов Б.Я., С.А.Яковлев-3-е изд.стер.-М: Высш. шк., 2005.-295 с.

4. Введение в самостоятельные методы моделирования систем: Учеб. пособие: В 2-х ч. Ч 1. Математические основы моделирования систем/Ф.Ф.Пашенко.- М.: Финансы и статистика, 2006.- 328 с.

5. Основы компьютерного моделирования технологических процессов: Учеб. пособие для вузов / Т.Н. Гартман, Д.В. Клушин. – М.: ИКЦ «Академкнига», 2006. – 416 с.

6. Моделирование динамических систем: Учеб.пособие /С.Н. Музыкин, Ю.М. Родионова. – Ярославль: Верх.-Волж.кн.изд-во, 1984.-304 с.

7. Моделирование нелинейных систем с использованием беложумовой идентификации: Учеб. пособие /С.Н.Музыкин, Ю.М.Родионова.- ОАО Можайский полиграфич. комбинат, 1999.- 200 с.