

Министерство образования и науки РФ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (ФГБОУ ВО  
«АмГУ»)**

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**  
**сборник учебно-методических материалов**  
для специальности 21.05.04 "Горное дело"

Благовещенск, 2017

*Печатается по решению  
редакционно-издательского совета  
факультета математики и информатики  
Амурского государственного  
университета*

*Составитель: Бушманов А.В.*

Сопротивление материалов: сборник учебно-методических материалов для специальности 21.05.04 "Горное дело", – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2017. - 115 с.

Рассмотрен на заседании кафедры «Сервисных технологий и общетехнических дисциплин».

04 . сентября 2017, протокол № 1 .

\_\_\_\_\_

© Амурский государственный университет, 2017

© Кафедра Сервисных технологий и общетехнических дисциплин, 2017

© Бушманов А.В., составление

## 1. Краткое изложение лекционного материала

### Тема 1. Основные понятия

При изучении темы обратите внимание на следующие понятия: реальный объект и его схематизация; виды тел, изучаемых в сопротивлении материалов; гипотезы о твердом теле; силы внешние и внутренние; напряжения в точке тела (полное, нормальное, касательное); деформации; перемещения (линейные, угловые); принцип независимости действия сил и др.

Внешние силы, действующие на реальный объект, чаще всего известны. Приложив внешние силы к расчетной схеме детали, можно определить реакции опор, которые при расчетах переходят в разряд внешних. Обычно необходимо определить внутренние силы (силы упругости), которые неизвестны по величине и направлению, но которые нужно знать для выполнения расчетов на прочность и жесткость. Определение внутренних сил осуществляется с помощью, так называемого, метода сечений. Его сущность заключается в следующем:

1. Рассекают (мысленно) тело в интересующем сечении.
2. Отбрасывают одну из частей (безразлично какую).
3. Заменяют действие отброшенной части тела на оставшуюся системой внутренних сил, которые в данном случае переходят в разряд внешних.

Внутренние силы по принципу действия и противодействия всегда взаимны и представляют непрерывно распределенную по сечению систему сил. Их значение и ориентация в каждой точке сечения произвольны, зависят от ориентации сечения относительно тела, величины и направления внешних сил, геометрических размеров тела. Внутренние силы (произвольную систему сил) можно привести к главному вектору  $R$  и главному моменту  $M$ . За точку приведения принимают обычно центр тяжести сечения. Выбрав систему координат  $x, y, z$  (ось  $z$  - по нормали к поперечному сечению, оси  $x$  и  $y$  - в плоскости этого сечения) и начало системы в центре тяжести сечения, обозначим проекции главного вектора  $R$  на координатные оси через  $N, Q_x, Q_y$ , а проекции главного момента  $M$  -  $M_x, M_y, M_z$ . Три силы и три момента называются внутренними силовыми факторами в сечении. Каждый из них имеет определенное название:  $N$ - нормальная (продольная) сила в сечении (проекция  $R$  на ось, нормальную к поперечному сечению, т. е. на ось  $z$ );  $Q_x, Q_y$  - поперечные (перерезывающие) силы в сечении (проекции  $R$  соответственно на оси  $x$  и  $y$ );  $M_z$  - крутящий момент (относительно оси бруса  $z$ );  $M_x, M_y$  - изгибающие моменты относительно осей  $x$  и  $y$  соответственно.

4. Уравновешивают оставшуюся часть рассматриваемого тела, используя уравнения равновесия

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0,$$

$$\sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0,$$

и определяют внутренние силовые факторы.

Знание внутренних силовых факторов совершенно необходимо для расчетов элементов конструкций на прочность и жесткость и поэтому метод сечений следует хорошо усвоить.

#### *Вопросы для самопроверки*

Что изучает сопротивление материалов и каково значение науки в общем цикле инженерных дисциплин? Что такое упругость, пластичность, деформация, перемещение (угловое, линейное), напряжение в точке - полное, нормальное, касательное? Что понимается под прочностью, жесткостью, устойчивостью конструкций? Отличие деформации от перемещения. Какие силы называют внешними, а какие — внутренними, их различие? Внутренние силовые факторы и их определение. Основные гипотезы сопротивления материалов. В чем суть принципа Сен-Венана?

#### Тема 2. Геометрические характеристики плоских сечений

Прочностные и деформационные возможности элементов конструкций, поперечные сечения которых не являются правильными фигурами, существенно зависят от ориентации (в отношении поперечных сечений) внешних сил, прикладываемых к ним. Поэтому изучению разделов сопротивления материалов обычно предшествует ознакомление с некоторыми геометрическими характеристиками сечений, используемых при расчетах на прочность и жесткость.

В теме обратите внимание на следующие понятия: статические моменты площади; полярный, осевой и центробежный моменты инерции сечения; определение знаков статических моментов и центробежного момента инерции связь между осевыми и полярным моментами инерции; основные свойства всех моментов; формула параллельного переноса от центральных осей; зависимость между моментами инерции относительно осей, составляющих между собой некоторый угол, главные моменты инерции сечения; моменты сопротивления сечения при изгибе и кручении; радиусы инерции сечения; вывод формул для определения моментов инерции простейших сечений (прямоугольник, треугольник, круг, кольцо).

При расчетах на жесткость используются значения главных моментов инерции сечения.

Разместим начало системы координат в центре тяжести поперечного сечения и будем поворачивать сечение определенным образом относительно этой системы координат. В этом случае осевые  $J_x$ ,  $J_y$  и центробежный  $J_{xy}$  моменты инерции будут получать каждый раз новые значения. Осевые моменты инерции, достигнут экстремального (максимального и минимального) значения относительно взаимно перпендикулярных осей тогда, когда центробежный момент инерции станет равным нулю. В этом случае оси, лежащие в плоскости поперечного сечения, получают название главных центральных осей инерции, а осевые моменты инерции относительно этих осей - главные центральные моменты инерции. Определение положения главных центральных осей и значений главных центральных моментов инерции является конечной целью изучения раздела.

Главные центральные моменты инерции определяются в такой последовательности:

1. Делят сложное сечение на простые фигуры и определяют их площади и моменты инерции относительно собственных центральных осей.

2. Выбирают применительно к поперечному сечению балки систему координат.

3. Относительно этой системы координат определяют положение центра тяжести всего сечения.

4. Проводят через центр тяжести сечения центральные оси, параллельные исходным.

5. Используя формулы переноса, находят значения осевых и центробежного моментов инерции всего сечения относительно центральных осей.

6. Определяют величину главных центральных моментов инерции  $J_{x_0}$ ,  $J_{y_0}$  сечения и положение главных осей (аналитически и графически):

$$J_{x_0} = \frac{1}{2} \left[ (J_x + J_y) + \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} \right],$$

$$J_{y_0} = \frac{1}{2} \left[ (J_x + J_y) - \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} \right],$$

$$\alpha_0 = -\operatorname{arctg} \frac{J_{xy}}{J_x - J_y}.$$

При графическом определении главных моментов инерции строится круг Мора.

Для расчетов на прочность при изгибе необходимо знать моменты сопротивления сечения изгибу:

$$W_{x_0} = \frac{J_{x_0}}{|y_0|_{\text{наиб}}}, \quad W_{y_0} = \frac{J_{y_0}}{|x_0|_{\text{наиб}}},$$

где  $|x_0|_{\text{наиб}}$ ,  $|y_0|_{\text{наиб}}$  – координаты наиболее удаленных от главных центральных осей точек сечения, определяемые из формул

$$x_0 = x \cos \alpha_0 + y \sin \alpha_0,$$

$$y_0 = y \cos \alpha_0 - x \sin \alpha_0,$$

$\alpha_0$  – угол между осями  $x$  и  $x_0$ .

При расчетах на устойчивость потребуются значения радиусов инерции сечения

$$i_{x_0} = \sqrt{\frac{J_{x_0}}{A}}, \quad i_{y_0} = \sqrt{\frac{J_{y_0}}{A}},$$

где  $A$  – площадь сечения.

*Вопросы для самопроверки*

Что такое осевой, центробежный и полярный моменты инерции? Какая существует связь между осевыми и полярными моментами инерции? Основное свойство статического момента площади. Формулы для определения ко-

ординат центра тяжести сечения. Как определяются знаки статических моментов и центробежного момента инерции? Формула параллельного переноса осей. Относительно какой оси осевой момент инерции сечения достигает наименьшего значения? Какие оси называются главными, а какие - центральными? Укажите основное свойство всех моментов. Как определяются главные моменты инерции сечения (аналитически и графически)? Как изменяются значения моментов инерции правильных фигур (например, квадрат, круг и т.д.) относительно взаимно перпендикулярных центральных осей при повороте на произвольный угол?

### Тема 3. Растяжение, сжатие

Раздел растяжения, сжатия бруса с прямолинейной осью внешними силами, равнодействующие которых совпадают с осью бруса, занимает важное место при изучении курса сопротивления материалов. В теме изучается деформация бруса, более подробно освещается понятие нормальной силы в сечении, способы ее определения, изучаются деформации. При решении инженерных задач необходимо оценивать способность материала противодействовать внешним силам. Поэтому приводится описание методов испытания образцов, изготовленных из пластичных материалов, и определение их важнейших характеристик: пределов - пропорциональности  $\sigma_{пц}$ , упругости  $\sigma_y$ , текучести  $\sigma_T$ , прочности  $\sigma_b$ ; модуля продольной упругости  $E$ , коэффициента Пуассона  $\mu$ . Устанавливается зависимость  $\sigma = E \varepsilon$  между напряжениями и деформациями в пределах малых деформаций. Эта зависимость известна под названием закона Гука.

Вводятся понятия опасного состояния, допускаемого напряжения, коэффициента запаса (или запаса) прочности. Составляется условие прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma],$$

где  $N$  – нормальное усилие;  $A$  – площадь поперечного сечения стержня;

$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n}$  – допускаемое напряжение;  $n$  – нормативный (для данной области машиностроения) коэффициент запаса прочности);  $\sigma_{\text{пред}}$  – предельное напряжение: для пластичного материала  $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_T$ ; для хрупкого  $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_b$ .

Из условия прочности можно решить три основные задачи сопротивления материалов:

1. Оценка прочности:

$$\left| \frac{N}{A} \right|_{\text{наиб}} \leq [\sigma];$$

2. Назначение размеров поперечного сечения:

$$A \geq \frac{|N|_{\text{наиб}}}{[\sigma]};$$

3. Определение грузоподъемности:

$$|N|_{\text{наиб}} \leq [\sigma] \cdot A.$$

Рассматриваются способы решения статически неопределимых систем, их особенности. Отмечается единство статической, геометрической и физической сторон задачи.

#### *Вопросы для самопроверки*

Что такое расчетная схема? Дайте определение гипотезы плоских сечений. Что такое абсолютное и относительное удлинение (укорочение)? Назовите основные характеристики пластичных и хрупких материалов. Объясните физический и геометрический смысл модуля продольной упругости. Что такое коэффициент Пуассона, зоны упругости, общей текучести, упрочнения? Что такое площадка текучести? Какое явление называется наклепом? Какие задачи решаются при расчетах на прочность? Какие системы называются статически определимыми и какие - статически неопределимыми? Что такое степень статической неопределимости системы? Какой расчет называется по допускаемым напряжениям и какой - по предельным нагрузкам? Как определяется потенциальная энергия деформации при центральном растяжении, сжатии?

#### Тема 4. Кручение

Вводится понятие чистого сдвига. Находятся нормальные и касательные напряжения в наклонных площадках в случае чистого сдвига. Вводится понятие модуль сдвига  $G$ . Устанавливается связь между модулем продольной деформации  $E$ , модулем сдвига  $G$  и коэффициентом Пуассона  $\mu$ :

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

В теме дается определение деформации кручения бруса с прямой осью при нагружении внешними (скручивающими) парами в сечениях, перпендикулярных его оси. Используя метод сечений, уточняется определение понятия крутящего момента.

Основное внимание уделяется установлению зависимости между касательным напряжением, крутящим моментом, полярным моментом инерции и полярной координатой площадки, в которой определяется напряжение для бруса круглого и кольцевого сечений. При этом в основу вывода указанной зависимости положена гипотеза плоских сечений: поперечные сечения, плоские и нормальные к оси бруса до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси после деформации; радиусы в поперечном сечении, прямолинейные до деформации, остаются прямолинейными после деформации.

Расчет брусьев на прочность выполняется по формуле:

$$|\tau|_{\text{наиб}} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau],$$

где  $M_k$  - крутящий момент;  $W_p$  - момент сопротивления сечения кручению;  $[\tau]$ - допускаемое напряжение при сдвиге, равное примерно  $[\tau] = (0.5 - 0.6) [\sigma]$ .

Брусья, работающие на кручение, рассчитывают также на жесткость.

Для этого вводят понятие угла поворота сечения (угла закручивания)  $\varphi$ ,

относительного угла закручивания  $\theta = \varphi l$ . Здесь  $l$  - длина участка бруса.

При этом  $\varphi$  определяется из выражения

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{C},$$

где  $C = G J_p$  - жесткость сечения бруса при кручении;  $J_p$  - полярный момент инерции поперечного сечения бруса.

Считается, что жесткость бруса обеспечена, если  $\theta < [\theta]$ , где допустимый угол закручивания  $[\theta]$  обычно задается.

#### *Вопросы для самопроверки*

Что такое чистый сдвиг, как формулируется закон парности касательных напряжений? Напишите закон Гука при сдвиге. Что называется крутящим моментом? Как он определяется, его размерность? Как найти касательное напряжение в произвольной точке бруса круглого поперечного сечения? Покажите закономерность распределения касательного напряжения в брус круглого поперечного сечения. Что такое полярный момент инерции сечения, момент сопротивления кручению? Чему они равны для простых форм и их размерность? Как определяется угол закручивания бруса? Как решаются основные задачи расчета на прочность при кручении?

#### Тема 5. Изгиб

Брус испытывает плоский (прямой) изгиб, если он нагружен парами сил или (и) силами, перпендикулярными его оси, плоскость действия которых совпадает с одной из главных плоскостей жесткости.

Главная плоскость жесткости бруса - это плоскость, проходящая через его ось и одну из главных центральных осей его поперечного сечения (см. тему 2). Как правило, брус нагружается в плоскости наибольшей жесткости (проходящей через ось  $y$ ). Предположим, что внешние силовые факторы приложены в одной плоскости, она проходит через ось  $y$ . Пусть ось  $y$  будет осью симметрии сечения. Тогда внутренние силы в поперечном сечении приводят только к изгибающему моменту  $M_x$  или изгибающему моменту и поперечной (перерезывающей) силе  $Q_y$  одновременно. В первом случае изгиб называется прямым чистым, а во втором - прямым поперечным.

В этом разделе остановимся в основном на расчете балок на прочность и изучении деформаций и перемещений, так как вопросы определения внутренних силовых факторов в сечениях бруса изложены в теме 1.

При прямом чистом изгибе в поперечном сечении балки возникают только нормальные напряжения. Расчет балок на изгиб и подбор размеров поперечного сечения осуществляется на основании условия прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma], \quad \text{где } [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n}.$$

Здесь  $M_x$  - изгибающий момент относительно нейтральной линии (оси  $x$ );  $W_x$  - момент сопротивления изгибу;  $[\sigma]$  - допускаемое напряжение;  $\sigma_{\text{пред}}$  - предельное напряжение: для пластичных материалов -  $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_T$ , для хрупких

-  $\sigma_{пред} = \sigma_в, \sigma_T$  - предел текучести;  $\sigma_в$  - предел прочности материала;  $n$  - запас прочности, задаваемый в каждой отрасли машиностроения.

В случае прямого поперечного изгиба расчет балок на прочность осуществляется по той же формуле, что и при прямом чистом изгибе, если сечение не тонкостенное, и при условии, что отношение длины балки  $l$  к размеру  $b$ , параллельному силовой оси поперечного сечения балки,  $l/b > 6$ . При этом касательные напряжения примерно на порядок меньше нормальных напряжений и все "перекрывается" запасом прочности, который в машиностроении, например, принимается 2,0 - 2,5.

Если сечение тонкостенное или соотношение длины балки и размера поперечного сечения в направлении силовой оси меньше или равно 6, то следует учитывать действие касательных напряжений.

Для балок сплошного поперечного сечения касательные напряжения определяют по формуле Журавского

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{отс}}{J_x b(y)}$$

где  $Q_y$  - поперечная сила в сечении;  $S_x^{отс}$  - статический момент отсеченной части сечения балки;  $J_x$  - осевой момент инерции;  $b(y)$  - ширина балки (в направлении нейтральной линии) в точке поперечного сечения, в которой определяется значение касательного напряжения.

Следует обратить внимание на то, что в формуле для определения значения касательного напряжения  $S_x^{отс}$  относится не ко всему поперечному сечению балки, а лишь к части его, лежащей выше или ниже линии, параллельной нейтральной оси, в точках которой определяется касательное напряжение. В то же время момент инерции  $J_x$  относительно нейтральной оси принимается для всего сечения.

При изучении закономерности распределения нормальных напряжений необходимо обратить внимание на неравномерность его в направлении силовой оси. С учетом этого целесообразно самостоятельно найти пути снижения расхода материала балки при одинаковой ее прочности.

Расчет балки на жесткость предполагает определение перемещений ее сечений обычно в направлении, перпендикулярном оси. В общем случае значения угловых и линейных перемещений можно находить, применяя дифференциальные уравнения изогнутой оси балки:

$$E J_x y'' = M_x$$

Интегрируя это уравнение, сначала находят углы поворота  $\theta$  сечений

$$E J_x y' = E J_x \theta = \int M_x dz + C$$

а после второго интегрирования – прогибы балки  $y$

$$E J_x y = \int dz \int M_x dz + Cz + D$$

Постоянные интегрирования  $C$  и  $D$  определяются из граничных условий.

В теме изучается также частный случай изгиба - косой изгиб. Он имеет место в случае, когда плоскость действия сил и моментов не совпадает ни с одной из главных плоскостей жесткости бруса. Косой изгиб наиболее удобно рас-

смагивать как одновременный изгиб бруса в двух взаимно перпендикулярных главных плоскостях.

Напряжение при косом изгибе определяется по формуле

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x,$$

а расчет балок на прочность осуществляется из выражения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} y_0 + \frac{M_y}{J_y} x_0 \geq [\sigma],$$

где  $x_0$  и  $y_0$  - координаты точки, наиболее удаленной от нейтральной линии, для которой  $\sigma_0 = |\sigma|_{\text{наиб}}$ .

Деформация косоуго изгиба особенно опасна для балок, главные центральные моменты инерции сечения которых сильно отличаются друг от друга. Для балок, сечения которых - правильные фигуры (круг, квадрат, равнобедренный треугольник и др.), косоуго изгиб невозможен.

В этой же теме изучается внецентренное растяжение-сжатие бруса. Расчет брусков, испытывающих внецентренное растяжение-сжатие, выполняется на основании

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \left[ 1 + \frac{x_F}{i_y^2} x_0 + \frac{y_F}{i_x^2} y_0 \right] \leq [\sigma],$$

где  $x_F$  и  $y_F$  координаты точки поперечного сечения бруса, в которой приложена внешняя сила (полюс силы);  $x_0$  и  $y_0$  - координаты точки, наиболее удаленной от нейтральной линии;  $A$  - площадь поперечного сечения бруса;  $[\sigma]$  - допускаемое напряжение.

*Вопросы для самопроверки*

Какой изгиб называется прямым чистым, прямым поперечным, а какой - косым? Что такое нейтральный слой, силовая плоскость, нейтральная линия (ось), силовая линия (ось)? Как взаимно расположены силовая и нейтральная линии при прямом изгибе? Как изменяются нормальные и касательные напряжения по сечению в направлении силовой и нейтральной осей при прямом поперечном изгибе балки? В каких точках поперечного сечения балки возникают наибольшие нормальные напряжения? Укажите физический смысл постоянных интегрирования дифференциального уравнения упругой линии. Какие приемы используют при интегрировании? Как определяют нормальные напряжения при внецентренном растяжении, сжатии? Как решаются основные задачи расчета на прочность при плоском, косом изгибах и внецентренном растяжении-сжатии?

Тема 6. Основы теории напряженного и деформированного состояния

В теме изучается напряженное и деформированное состояние в общем случае нагружения тела, что необходимо для последующего решения более сложных задач, в частности задач расчета на прочность.

Если воспользоваться методом сечений и мысленно рассечь тело, нагруженное внешними силами, в интересующем нас сечении, отбросить одну из ча-

стей, то внешние силы уравниваются силами взаимодействия отброшенной части тела. Эти силы для всего тела являются внутренними, а для каждой части - внешними. Рассмотрим какую-нибудь точку в сечении и найдем напряжение. Если через эту точку провести другие плоскости, то каждый раз напряжения в этой же точке будут другими. Через точку можно провести множество плоскостей и поэтому в каждой точке следует рассматривать множество напряжений. С учетом этого в общем случае говорят не о напряжении в точке, а о напряженном состоянии в ней.

Вырезая из тела в окрестности исследуемой точки элементарный параллелепипед, показываем по каждой грани полный вектор напряжения. В общем виде полный вектор может быть разложен на нормальное, перпендикулярное площадке, и касательные напряжения. Следовательно, по трем взаимно перпендикулярным площадкам будет действовать девять составляющих напряжения, называемых компонентами напряженного состояния в точке.

Основной задачей исследования напряженного состояния является определение напряжений на произвольной площадке, проходящей через данную точку, положения главных площадок и значений главных напряжений.

Среди бесконечно большого числа площадок, проходящих через данную точку тела, всегда найдутся, по крайней мере, три взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения отсутствуют. Такие площадки носят название главных площадок, а нормальные напряжения на них - главных нормальных напряжений. Главные напряжения обозначают  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , при этом  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Значения главных нормальных напряжений  $\sigma_i$  можно определить из выражения  $\sigma_i^3 - J_1\sigma_i^2 + J_2\sigma_i - J_3 = 0$ , где  $J_1, J_2, J_3$  - инварианты напряженного состояния в точке, определяемые из выражений:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$

$$J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2;$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Здесь  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  - компоненты напряженного состояния в точке. Они известны.

Главные напряжения в каждой точке тела имеют всегда одни и те же значения и направления. Они не зависят от положения выбранной системы координат.

Следует обратить внимание на имеющуюся классификацию видов напряженного состояния в точке. Различают линейное (одноосное), плоское (двухосное) и объемное (трехосное) напряженное состояние. Напряженное состояние считается объемным, если по всем граням элементарного параллелепипеда главные нормальные напряжения не равны нулю. Если главные нормальные напряжения действуют только по двум или одному направле-

нию, то напряженные состояния получают названия плоского или линейного соответственно.

Очень важно знать выражения для определения значений главных нормальных напряжений в случае плоского напряженного состояния, которое наиболее часто встречается в бруске, подвергающемся одновременно действию изгибающих, скручивающих и растягивающих нагрузок, а также в тонкостенных оболочках. Наиболее часто в этом случае главные напряжения определяют по формуле

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

С учетом соотношения между главными напряжениями  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  ( $1000 > -20 > -500$ ) имеем:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2};$$

$$\sigma_2 = 0;$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Необходимо обратить внимание на значения максимальных касательных напряжений, действующих в площадках под углом  $45^\circ$  к главным площадкам. Обозначая главные направления, перпендикулярные главным площадкам, через 1, 2 и 3, наибольшие касательные напряжения в равно наклонённых площадках определяются из выражений

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

$$\text{Так как } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3, \text{ то } \tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Решение вопроса о прочности элемента инженерной конструкции, а иногда конструкции в целом, является конечной целью большинства инженерных расчетов. Вопрос прочности элемента, работающего при простых деформациях - растяжении-сжатии, кручении, прямом изгибе, - осуществляется путем сопоставления наибольшего напряжения в опасной точке с величиной предельного напряжения для материала, из которого изготовлен элемент. В случае сложных видов нагружения элемента конструкции (сочетание изгиба и кручения; кручения и растяжения и т.д.) напряженное состояние в опасной точке опасного сечения тела отличается от указанных выше, и расчеты на прочность его также отличаются от расчетов на прочность элемента при простых видах нагружения.

В общем случае нагружения количество комбинаций значений главных напряжений бесконечно велико, поэтому о прочности элемента, находящегося в произвольном напряженном состоянии, приходится судить по прочности элемента, находящегося в напряженном состоянии, для которого предельное состояние известно, путем высказывания предположения о равнопрочности.

Предположение о равнопрочности двух элементов, находящихся в разнотипных напряженных состояниях, носит название гипотезы или теории прочности. Одноосное напряженное состояние, равнопрочное данному,

называется эквивалентным, а его главное нормальное напряжение — эквивалентным напряжением  $\sigma_{\text{эКВ}}$ .

При изучении темы следует обратить внимание на теории наибольших касательных напряжений и энергетическую теорию формоизменения, а также на области применения этих теорий. Учитывая исключительную важность усвоения данной темы, приведем выражения некоторых теорий прочности.

Теория наибольших касательных напряжений, учитывающая лишь два главных нормальных напряжения, однако дающая хорошие результаты для пластичных материалов (в частности, малоуглеродистой стали), одинаково сопротивляющихся растяжению-сжатию, записывается так:

для объемного вида напряженного состояния

$$\sigma_{\text{эКВ III}} = \sigma_1 - \sigma_3 ;$$

для плоского напряженного состояния, характерного для балок, работающих на изгиб, тонкостенных оболочек и т.д.

$$\sigma_{\text{эКВ III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

Согласно энергетической теории прочности формоизменения, два элемента, находящиеся в разнотипных напряженных состояниях, будут равнопрочными, если энергии, идущие на изменение формы, у них одинаковы.

Теория прочности для объемного напряженного состояния имеет вид

$$\sigma_{\text{эКВ IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}.$$

Для плоского напряженного состояния, как уже указано, характерного для условий работы балок, тонкостенных оболочек и т.д.,

$$\sigma_{\text{эКВ III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

Условием прочности по каждой теории прочности будет выражение

$$\sigma_{\text{эКВ}} \leq [\sigma].$$

*Вопросы для самопроверки*

Какие виды напряженного состояния в точке вы знаете? Назовите компоненты напряженного состояния в точке и сколько из них независимых? Что называется главными осями, главными площадками, главными напряжениями? Напишите выражения для максимальных значений касательных напряжений и укажите площадки их действия. Как определяется значение главных напряжений и положение главных площадок? Какие вы знаете теории прочности? Дайте критический обзор теорий прочности. Как решаются задачи расчета на прочность по теории наибольших касательных напряжений, энергетической теории формоизменения?

Тема 7. Общие методы определения перемещений в произвольных произвольно нагруженных системах. Статически неопределимые системы.

В этой теме изучаются общие методы определения угловых и линейных перемещений, когда в поперечных сечениях балки возникают одновременно (или в том или ином сочетании): нормальное усилие  $N$ , поперечные

силы  $Q_x, Q_y$  изгибающие моменты  $M_x, M_y$  относительно осей  $x$  и  $y$  и крутящий момент  $M_k$  относительно оси бруса  $z$ .

Наиболее целесообразно определять перемещения с помощью интеграла Мора, позволяющего находить их для любых сечений упругой системы и в любом направлении. Интеграл Мора имеет следующий вид:

$$\Delta_c = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \left[ \frac{M_{xF} \bar{M}_{x1}}{E J_x} + \frac{M_{yF} \bar{M}_{y1}}{E J_y} + \frac{M_{kF} \bar{M}_{k1}}{G J_p} + \frac{N_F \bar{N}_1}{E A} + \frac{k_x Q_{xF} \bar{Q}_{x1}}{G A} + \frac{k_y Q_{yF} \bar{Q}_{y1}}{G A} \right] dz$$

Если элементы упругих систем испытывают деформации кручения и изгиба, тогда тремя последними членами обычно пренебрегают, так как перемещения сечений от нормального усилия  $N$ , поперечных сил  $Q_x$  и  $Q_y$  часто весьма малы по сравнению с перемещениями от  $M_x, M_y$  и  $M_k$ . Для прямого чистого или поперечного изгиба обычно используют выражение

$$\Delta_c = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_{xF} \bar{M}_{x1}}{E J_x} dz.$$

В элементах ферменных систем значения внутренних силовых факторов  $M_{xF} = M_{yF} = M_{kF} = Q_x = Q_y = 0$ . Следовательно, в них возникает только нормальное усилие, поэтому

$$\Delta_c = \sum_{i=1}^n \frac{N_F \bar{N}_1}{E A} l_i.$$

Для балок с прямолинейной осью (при постоянной площади поперечного сечения по их длине) упрощение решения интеграла Мора дает способ Верещагина. Например, для балки, испытывающей деформацию изгиба, перемещение можно найти по формуле

$$\Delta_c = \sum_{i=1}^n \frac{\Omega_i \cdot \bar{M}_{1C}^{(i)}}{E \cdot J_x}$$

Здесь  $\Omega_i$  - площадь эпюры изгибающего момента от заданных сил;  $M_{1C}^{(i)}$  - ордината, взятая с эпюры изгибающего момента балки, нагруженной единичной силой или единичным моментом, под центром тяжести эпюры от заданных сил;  $E J_x$  - жесткость сечения балки.

Принимается следующая последовательность определения перемещений по способу Верещагина:

1. Строят эпюры внутренних силовых факторов от заданных сил (при необходимости эпюры расслаиваются).
2. Балку освобождают от внешних нагрузок и нагружают в интересующем сечении единичной силой (или единичным моментом) и строят соответствующие эпюры.
3. Перемножают эпюры.

В ряде случаев равнодействующие внутренних сил не могут быть определены при помощи уравнений равновесия. Упругие системы, которые не могут быть решены с помощью только уравнений равновесия, называются статически неопределимыми. Раскрытие статической неопределимости предлагается производить по методу сил. Система считается геометрически неиз-



6. Перемножают эпюры по способу Верещагина и находят значения коэффициентов, входящих в канонические уравнения.

7. Решая систему канонических уравнений, находят значения неизвестных  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  по направлению соответствующих лишних связей.

8. Значения неизвестных величин показывают в эквивалентной системе и строят эпюры внутренних силовых факторов.

*Вопросы для самопроверки*

Что понимается под названием потенциальная энергия деформации? Какие члены интеграла Мора сохраняются при решении плоских систем, при решении стержневых систем? В чем сущность способа Верещагина и когда его нельзя применять? Что называется заданной, основной и эквивалентной системами? Какой геометрический смысл имеют коэффициенты канонических уравнений? Какие перемещения называют главными, а какие - побочными? Назовите симметричные и обратносимметричные внутренние силовые факторы. Какие упругие системы называют симметричными, а какие — обратно, - кососимметричными?

Тема 8. Устойчивость сжатых стержней

Ранее изучались вопросы прочности и жесткости элементов инженерных конструкций, работающих в условиях одноосного растяжения (сжатия), сдвига, кручения, изгиба. Рассматривались такие условия работы элементов, в опасных точках которых напряженное состояние плоское или объемное. Применяя теории прочности, для таких случаев выполняли проектировочный или поверочный расчет. Между тем многие элементы (назовем их стойками) сравнительно большой длины и тонкие нагружены продольными силами, равнодействующие которых направлены по оси стойки. При этом возможна потеря устойчивости конструкций.

Если стойку с прямолинейной осью последовательно нагружать все возрастающей продольной нагрузкой, то при некотором ее значении стойка будет иметь две формы равновесия: прямолинейную неустойчивую и криволинейную устойчивую. Явление изгиба стойки при приложении к ней продольной силы носит название потери устойчивости. Минимальное значение сжимающей силы, при котором ось стойки может иметь устойчивую криволинейную и неустойчивую прямолинейную форму упругого равновесия, называется критической силой. Следует особо отметить, что опасность явления потери устойчивости состоит в том, что оно может наступить при значениях сжимающих напряжений значительно меньших, чем предел прочности материала стойки.

Вопросы продольного изгиба стоек изучали и разрабатывали известные русские и советские ученые: Л. Эйлер, Ф.С. Ясинский, А.Н. Крылов, Б.Г. Галеркин, Н. Динник. Расчет на устойчивость сводится к определению значения критической силы  $F_{кр}$  для длинного тонкого сжатого стержня. Величина  $F_{кр}$  для стержней с различными опорными устройствами определяется по формуле Эйлера

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu l)^2},$$

где  $J_{\min}$  - наименьший момент инерции поперечного сечения стойки;  $l$  - длина стойки;  $\mu$  - коэффициент приведения длины стойки, учитывающий условия крепления стоек.

Формула Эйлера справедлива до тех пор, пока критическое напряжение  $\sigma$  в стойке не превосходит предел пропорциональности материала стойки  $\sigma_{\text{пл}}$ , т.е.

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{A(\mu l)^2} \leq \sigma_{\text{пл}}.$$

Формула Эйлера применима для сравнительно длинных стоек. Для стоек средней длины применима формула Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda.$$

Здесь  $a$  и  $b$  - коэффициенты, зависящие от свойств материалов и определяемые опытным путем;  $\lambda$  - гибкость стержня, определяемая из выражения

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}},$$

где  $i_{\min}$  - минимальный радиус инерции поперечного сечения стойки.

Расчет стоек на устойчивость производится в следующей последовательности:

1. Определяется гибкость стойки  $\lambda$ .
2. Сопоставляется  $\lambda$  с предельной гибкостью  $\lambda_{\text{пред}}$ , определяемой по формуле

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пл}}}}.$$

В случае, если  $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$ , критическое значение напряжения определяется по формуле Эйлера. Если  $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$ , то при определенных условиях (для так называемых стоек средней гибкости) критическое напряжение находят по формуле Ясинского. Представляет практический интерес способ расчета стоек на устойчивость по коэффициенту снижения допускаемого напряжения, значения которого приводятся в справочной литературе.

#### *Вопросы для самопроверки*

В чем суть явления потери устойчивости сжатой стойки? Что такое критическая сила и по какой формуле она определяется? Укажите пределы применимости формулы Эйлера. Что такое гибкость стойки? Как определяется критическое напряжение для стоек большой, средней и малой гибкости? Какой вид имеет график критических напряжений? Как влияют условия закрепления стоек на значение критической силы? Как производится проверка стоек на устойчивость по коэффициенту  $\varphi$ .

Тема 9. Прочность при напряжениях, циклически изменяющихся во времени

При переменных напряжениях материал разрушается при напряжениях значительно меньших, чем предельные характеристики, определяемые при статических испытаниях материала. Прочность материала при переменных напряжениях как бы уменьшается. Однако, современные исследования показали, что никакого изменения структуры и свойств материала не наблюдается. Разрушения связаны с дефектами кристаллической решетки материала. Под действием переменных напряжений эти дефекты размножаются, развиваются. Объединяясь, эти дефекты образуют микротрещины, которые, увеличиваясь и сливаясь, образуют макротрещины. Дальнейшее разрушение происходит по первой образовавшейся макротрещине, т.к. напряжения у ее вершины гораздо выше, чем в других сечениях, из-за ослабления поперечного сечения и концентрации напряжений. При увеличении размеров трещины поперечное сечение постепенно уменьшается, напряжения увеличиваются и в какой-то момент достигают предела прочности материала. Тогда происходит мгновенное, полное разрушение детали.

Изучая тему, обратите особое внимание на механизм усталостного разрушения; кривые усталости; предел выносливости и способы его определения; факторы, влияющие на выносливость; расчеты по выносливости деталей и образцов при симметричных и асимметричных циклах изменения напряжений в случае одноосного напряженного состояния, при кручении и при совместном действии изгиба и кручения.

#### *Вопросы для самопроверки*

Каковы современные представления о прочности материала, работающего в условиях переменных напряжений? Какие вы знаете циклы изменения напряжений во времени? Что такое кривая выносливости, предел выносливости? Какие факторы наиболее существенно влияют на выносливость? Что такое эффективный коэффициент концентрации напряжений и его отличие от теоретического коэффициента концентрации напряжений? Что такое запас прочности по усталости и чему он равен для образца и детали при симметричном и асимметричном цикле изменения напряжений в случае одноосного напряженного состояния и при кручении?

#### Тема 10. Динамическая нагрузка

В теме изучается влияние сил инерции движущихся элементов конструкций на прочность элементов. При этом усилия, возникающие в движущемся теле, определяют по принципу Даламбера, суть которого можно сформулировать так: если движущееся тело в какой-то момент времени представить находящимся в покое и помимо сил, производящих движение, приложить к нему силы инерции, то в покоящемся теле возникнут такие же внутренние силы, напряжения и деформации, какие и во время его движения.

В теме изучается также влияние ударных нагрузок на упругую систему. Явление удара наблюдается во всех случаях, когда скорости соударяющихся тел изменяются в течение очень малого промежутка времени. В этом случае

напряжения и деформации будут существенно выше тех, которые возникли бы в той же системе при статическом нагружении. Напряжения и перемещения в ударяемой системе достигают максимальных в момент наибольшей деформации системы, а это позволяет применить приближенный энергетический метод, рассматривая при этом удар как неупругий.

#### *Вопросы для самопроверки*

Как определяют напряжения в элементах конструкции при равноускоренном поступательном движении и при вращательном движении? Что такое динамический коэффициент и как он определяется с учетом и без учета массы ударяемой упругой системы? Как производят испытания на ударную нагрузку?

## **2. Методические рекомендации (указания) к практическим занятиям**

### **1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР**

Как правило, балки имеют те или иные опорные устройства – опоры. Конструктивные формы опор весьма разнообразны. Для расчета же их схематизируют в виде трех основных типов опор:

1. Шарнирно-подвижная опора, в которой может возникать только одна составляющая реакции –  $R_A$ , направленная вдоль опорного стержня (рис. 1).

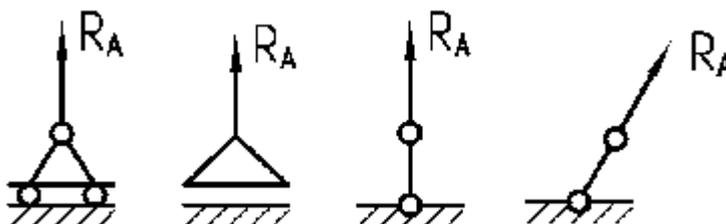


Рис. 1

2. Шарнирно-неподвижная опора, в которой могут возникать две составляющие – вертикальная реакция  $R_A$  и горизонтальная реакция  $H_A$  (рис. 2.)

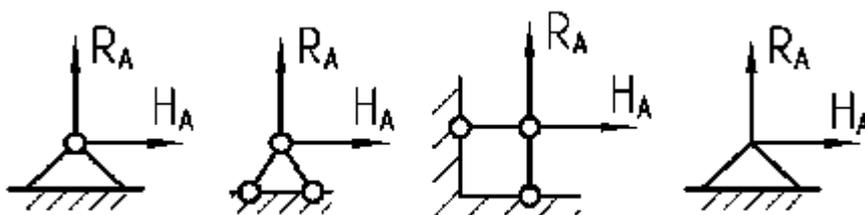


Рис. 2

3. Защемление (жесткое защемление или заделка), где могут быть три составляющие – вертикальная  $R_A$  и горизонтальная  $H_A$  реакции и опорный

момент  $M_A$  (рис. 3).

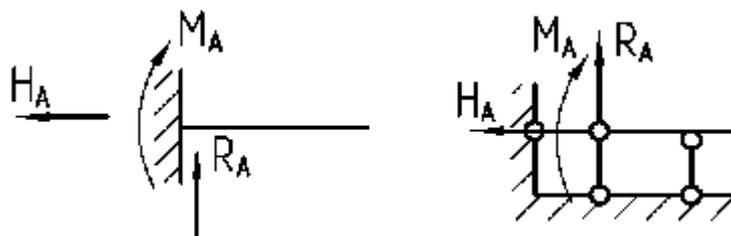


Рис. 3

Способы вычисления опорных реакций изучают в курсе теоретической механики. Поэтому остановимся здесь на некоторых практических вопросах.

Рассмотрим балку АВ (рис. 4).

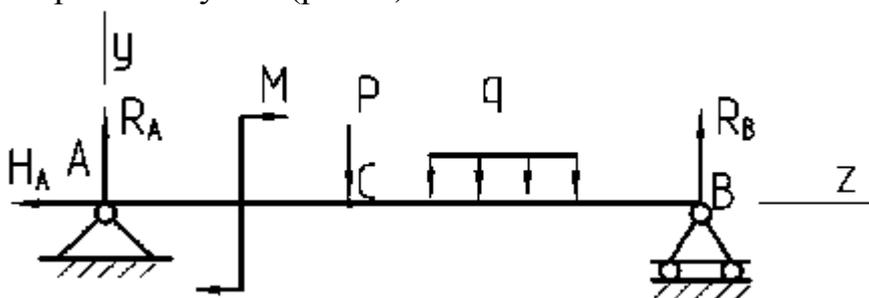


Рис. 4

1. Опоры обычно обозначают буквами А и В. Три неизвестные реакции можно найти из следующих уравнений равновесия:

а) сумма проекций всех сил на ось балки равна нулю:

$$\Sigma P_z = 0, \text{ z откуда находят } H_A \text{ (или } X_A);$$

б) сумма моментов всех сил относительно шарнира А равна нулю:

$$\Sigma M_A = 0, \text{ откуда находят } R_B;$$

в) сумма моментов всех сил относительно шарнира В равна нулю:

$$\Sigma M_B = 0, \text{ откуда находят } R_A.$$

2. Если на балку действует распределенная нагрузка, то для определения реакций её заменяют равнодействующей, которая равна площади эпюры нагрузки и приложена в центре тяжести этой эпюры.

3 Найденные реакции обязательно следует проверить, для чего удобно использовать или равенство нулю суммы проекций всех сил на вертикальную ось  $\Sigma P_y = 0$ , или условие равенства нулю суммы моментов всех сил относительно какой-либо точки С, отличной от А и В, т.е.  $\Sigma M_C = 0$ .

### Задача 1

Вычислить опорные реакции для балки (рис. 5).

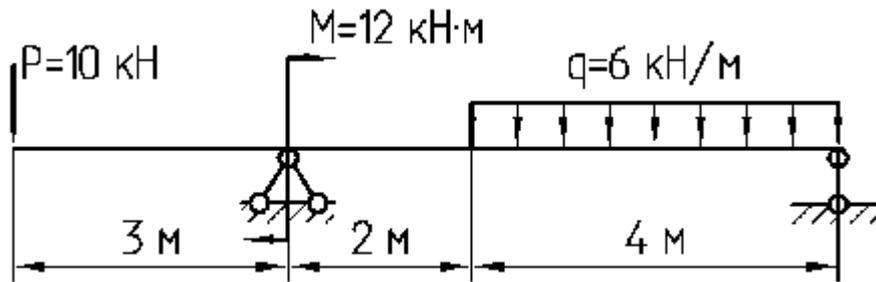


Рис. 5

Решение:

1. Опоры обозначаем буквами А и В, выбираем (произвольно) направление реакций и изображаем их на рисунке (рис. 6). Так как нагрузка перпендикулярна к оси балки, то  $H_A = 0$ .

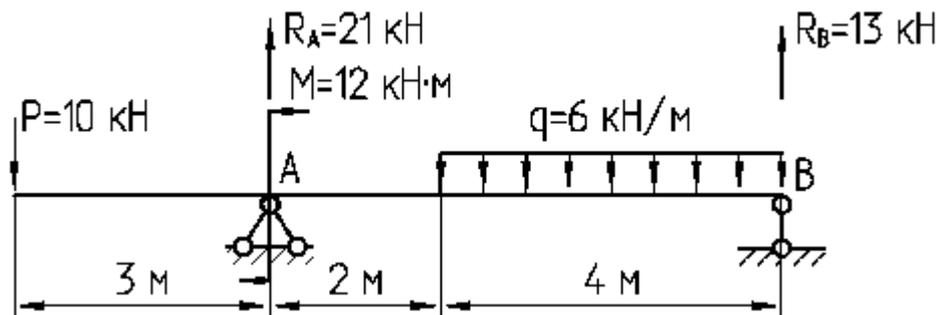


Рис. 6

2. Неизвестные реакции опор находим из уравнений равновесия:

$$\sum M_A = 0,$$

$$-M + P \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 4 + R_B \cdot 6 = 0,$$

$$R_B = \frac{M - P \cdot 3 + q \cdot 4 \cdot 4}{6} = \frac{12 - 10 \cdot 3 + 6 \cdot 4 \cdot 4}{6} = 13 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$-M + P \cdot 9 + q \cdot 4 \cdot 2 - R_A \cdot 6 = 0,$$

$$R_A = \frac{-M + P \cdot 9 + q \cdot 4 \cdot 2}{6} = \frac{-12 + 10 \cdot 9 + 6 \cdot 4 \cdot 2}{6} = 21 \text{ кН}.$$

3. Для контроля используем условия равенства нулю суммы проекций на вертикаль:

$$\sum P_y = 0,$$

$$-P - q \cdot 4 + R_A + R_B = 0,$$

$$-10 - 6 \cdot 4 + 21 + 13 = 0,$$

$$-34 + 34 = 0.$$

### Задача 2

Вычислить опорные реакции для рамы (рис. 7).

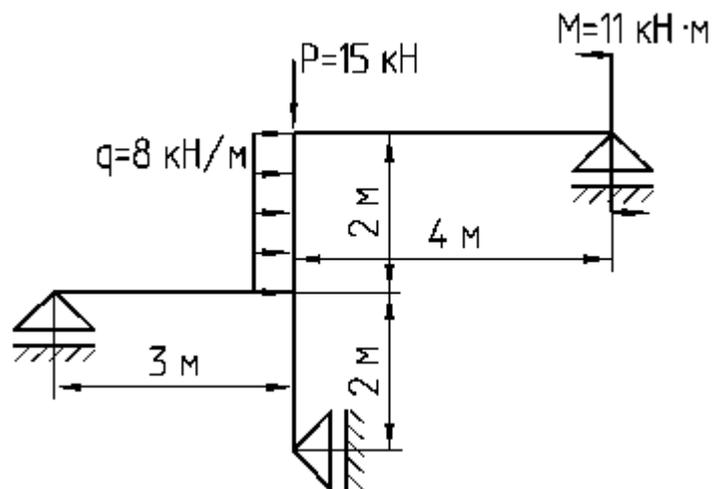


Рис. 7

### Решение

1. Опоры обозначаем буквами А, В и С, выбираем направление реакций и изображаем их на рисунке (рис. 8).

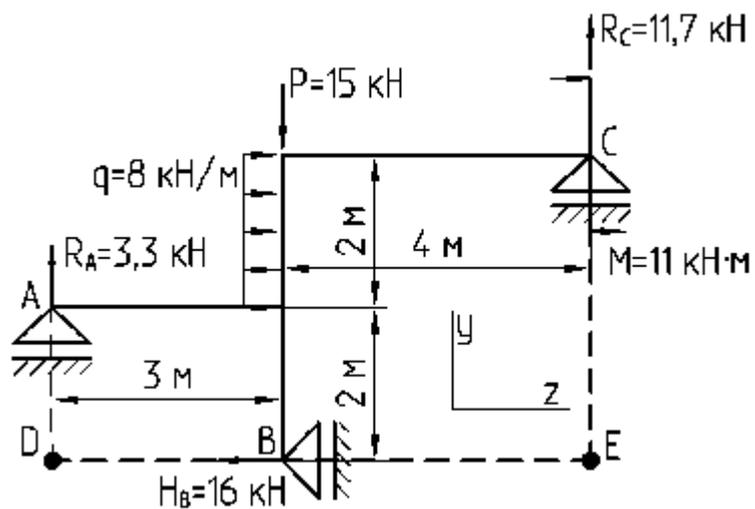


Рис. 8

2. Неизвестные реакции опор находим из уравнений равновесия:

$$\sum P_z = 0,$$

$$q \cdot 2 - H_B = 0,$$

$$H_B = q \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16 \text{ кН}.$$

$$\sum M_D = 0,$$

$$M - P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 3 + R_C \cdot 7 = 0,$$

$$R_C = \frac{-M + P \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 3}{7} = \frac{-11 + 15 \cdot 3 + 8 \cdot 2 \cdot 3}{7} = 11,7 \text{ кН}.$$

$$\sum M_E = 0,$$

$$M + P \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 3 - R_A \cdot 7 = 0,$$

$$R_A = \frac{M + P \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 3}{7} = \frac{11 + 15 \cdot 4 - 8 \cdot 2 \cdot 3}{7} = 3,3 \text{ кН}.$$

3. Для контроля используем условия равенства нулю суммы проекций на вертикаль:

$$\sum P_y = 0,$$

$$-P + R_A + R_C = 0,$$

$$-15 + 3,3 + 11,7 = 0,$$

$$-15 + 15 = 0.$$

## 2. РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

При работе стержня на растяжение-сжатие в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор – продольная сила  $N$ .

Продольная сила в произвольном поперечном сечении стержня численно равна алгебраической сумме проекций на его продольную ось всех внешних сил, приложенных с одной стороны от рассматриваемого сечения.

При растяжении продольную силу принято считать положительной.

Закон изменения продольной силы по длине стержня представляют в виде графика – эпюры продольных сил.

В поперечных сечениях стержня возникают только нормальные напряжения, определяемые по формуле

$$\sigma = \frac{N}{F}$$

где  $N$  – продольная сила;  $F$  – площадь поперечного сечения.

Удлинение или укорочение стержня определяется по формуле

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF},$$

где  $l$  – длина стержня;  $E$  – модуль упругости первого рода (модуль Юнга), для стали  $E = (2,0 \dots 2,1) \times 10^5$  МПа.

В случае, если стержень имеет ступенчато-переменное сечение, то для определения изменения его длины формулу надо применять отдельно к каждому из участков, в пределах которого площадь и продольная сила постоянны, и результаты просуммировать:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{EF_i}.$$

При решении многих практических задач возникает необходимость наряду с удлинениями, обусловленными напряжениями, учитывать также удлинения, связанные с температурными воздействиями. В этом случае полную абсолютную деформацию рассматривают как сумму силовой деформации и чисто температурной:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} + \alpha l \Delta t,$$

где  $\alpha$  – температурный коэффициент линейного расширения материала, для стали  $\alpha = 1,25 \times 10^{-5}$ ;  $\Delta t$  – разность температур до и после нагревания.

Условие прочности для растянутого или сжатого стержня записывается следующим образом:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma],$$

где  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение.

### *Расчеты на растяжение-сжатие статически определимых систем*

#### Задача 1

Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений по длине ступенчатого стержня, нагруженного, как показано на рис. 1. Определить удлинение стержня. Материал стержня – Ст.3,  $E = (2,0 \dots 2,1) \times 10^5$  МПа.

#### Решение

1. Разобьем стержень на отдельные участки, начиная от свободного конца. Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние силы, и место изменения размеров поперечного сечения. Таким образом, заданный стержень имеет четыре участка (AB, BC, CD, DE).

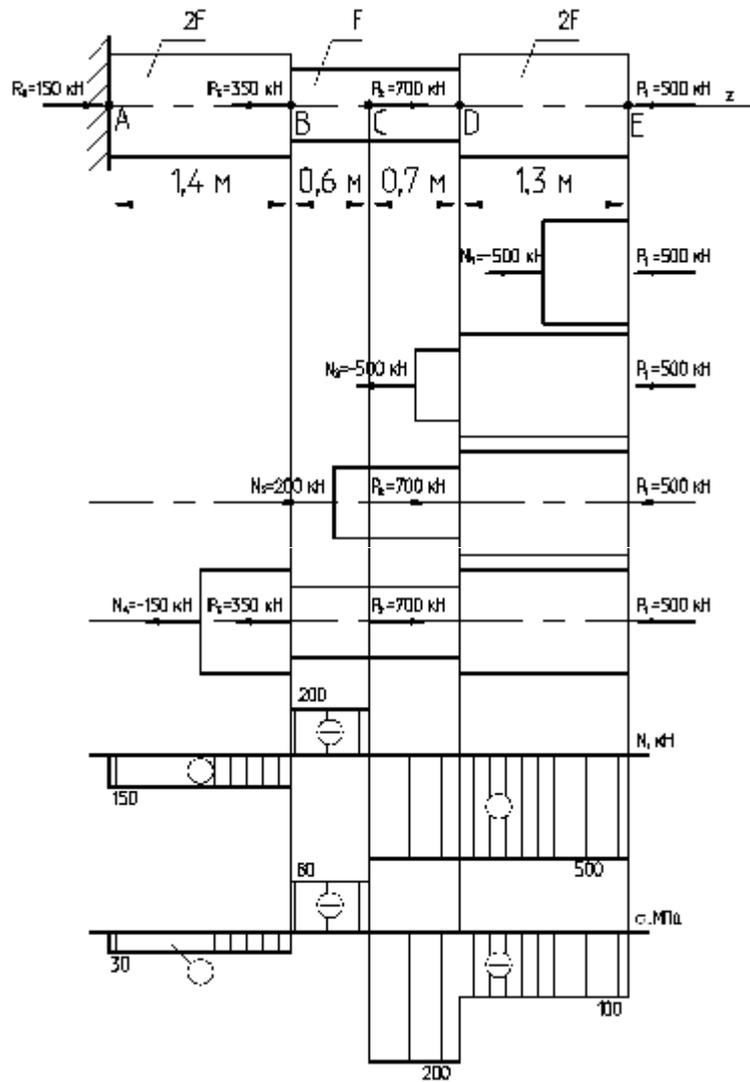


Рис. 1

2. Определим реакцию заделки  $R_A$ .

$$\sum P_z = 0, \quad R_A - P_1 + P_2 - P_3 = 0,$$

$$R_A = P_1 - P_2 + P_3 = 500 - 700 + 350 = 150 \text{ кН}.$$

3. Применяем метод сечений, при этом оставляем правую и отбрасываем левую отсеченные части стержня. Проведем произвольное сечение на участке DE и рассмотрим равновесие оставленной части.

$$-N_1 - P_1 = 0,$$

$$N_1 = -P_1 = -500 \text{ кН}.$$

Знак «-» говорит о том, что участок DE сжат.

Легко заметить, что то же значение продольной силы сохраняется для любого сечения на участке CD.

$$N_2 = N_1 = -500 \text{ кН}.$$

Участок CD сжат.

Проведем произвольное сечение на участке ВС и рассмотрим равновесие оставленной части

$$-N_3 - P_1 + P_2 = 0,$$

$$N_3 = -P_1 + P_2 = -500 + 700 = 200 \text{ кН}.$$

Участок ВС растянут.

Проведем произвольное сечение на участке АВ и рассмотрим равновесие оставленной части

$$-N_4 - P_1 + P_2 - P_3 = 0,$$

$$N_4 = -P_1 + P_2 - P_3 = -500 + 700 - 350 = -150 \text{ кН}.$$

Участок АВ сжат.

Строим эпюру продольных сил.

4. Эпюру нормальных напряжений получим, определив нормальные напряжения на каждом из участков:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{-500 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = -100 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{-500 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-4}} = -200 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-4}} = 80 \text{ МПа}, \quad \sigma_4 = \frac{N_4}{F_4} = \frac{-150 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = -30 \text{ МПа}.$$

Строим эпюру нормальных напряжений.

5. Определяем абсолютное удлинение стержня:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \ell_i}{EF_i} = \frac{N_1 \ell_1}{EF_1} + \frac{N_2 \ell_2}{EF_2} + \frac{N_3 \ell_3}{EF_3} + \frac{N_4 \ell_4}{EF_4} = \frac{-500 \cdot 10^{-3} \cdot 1.3}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} +$$

$$+ \frac{-500 \cdot 10^{-3} \cdot 0.7}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + \frac{200 \cdot 10^{-3} \cdot 0.6}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + \frac{-150 \cdot 10^{-3} \cdot 1.4}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = -13,2 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -1,3 \text{ мм}.$$

## Задача 2

Из расчета на прочность подобрать размеры поперечных сечений стержней: стержень 1 – круглого поперечного сечения, стержень 2 состоит из двух равнобоких уголков, стержень 3 – двутаврового поперечного сечения (рис. 2). Определить абсолютное удлинение (укорочение) стержней, если  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

Решение

1. В рассматриваемом примере в равновесии находится одно тело недеформируемая пластина. Нагрузками, приложенными к ней, являются: сосредоточенная сила  $P$ , равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $q$ , пара сил с моментом  $M$  и усилия в стержнях  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$ . При решении задачи предполагается, что стержни 1, 2 и 3 растянуты, т. е. усилия направлены к точкам подвеса стержней (рис. 3).

2. Длина второго стержня равна:

$$\ell_2 = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4,5 \text{ м}.$$

Определим синус и косинус угла  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{2}{4,5} = 0,444, \quad \cos \alpha = \frac{4}{4,5} = 0,889.$$

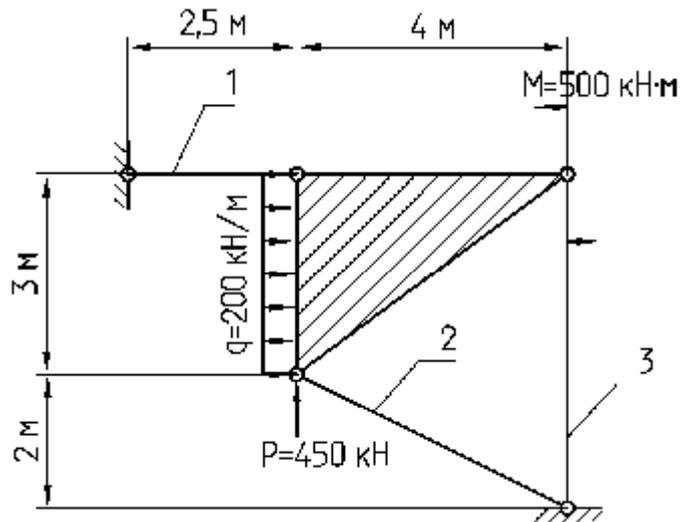


Рис. 2

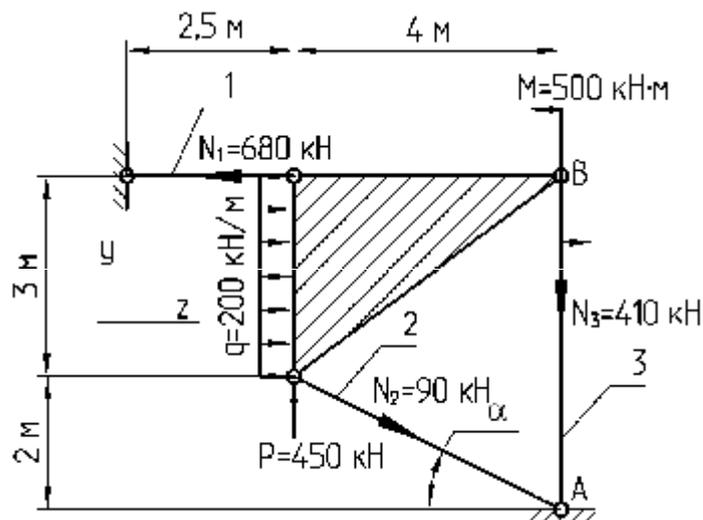


Рис. 3

3. Балка находится в равновесии под действием плоской произвольной системы сил. Такая система сил имеет три условия равновесия.

Из уравнения  $\Sigma M_A = 0$  определим  $N_1$ :

$$M - P \cdot 4 - q \cdot 3 \cdot 3,5 + N_1 \cdot 5 = 0,$$

$$N_1 = \frac{-M + P \cdot 4 + q \cdot 3 \cdot 3,5}{5} = \frac{-500 + 450 \cdot 4 + 200 \cdot 3 \cdot 3,5}{5} = 680 \text{ кН}$$

Из уравнения  $\Sigma M_B = 0$  определим  $N_2$ :

$$M - P \cdot 4 + q \cdot 3 \cdot 1,5 + N_2 \cos \alpha \cdot 5 = 0,$$

$$N_2 = \frac{-M + P \cdot 4 - q \cdot 3 \cdot 1,5}{\cos \alpha \cdot 5} = \frac{-500 + 450 \cdot 4 - 200 \cdot 3 \cdot 1,5}{0,889 \cdot 5} = 90 \text{ кН}$$

Усилие  $N_3$  определим из уравнения равновесия  $\Sigma P_y = 0$ :

$$P - N_2 \sin \alpha - N_3 = 0,$$

$$N_3 = P - N_2 \sin \alpha = 450 - 90 \cdot 0,444 = 410 \text{ кН.}$$

Проверка:  $\Sigma P_z = 0$ ,

$$q \cdot 3 + N_2 \cos \alpha - N_1 = 0,$$

$$200 \cdot 3 + 90 \cdot 0,889 - 680 = 0,$$

$$600 + 80 - 680 = 0,$$

$$680 - 680 = 0.$$

4. Площади поперечных сечений стержней определяются из условия прочности на растяжение (сжатие)

$$\sigma_i = \frac{N_i}{F_i} \leq [\sigma], \Rightarrow F_i \geq \frac{N_i}{[\sigma]}:$$

Стержень № 1

$$F_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{680 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 42,5 \text{ см}^2$$

Так как площадь круга равна

$$F_1 = \frac{\pi D^2}{4}, \text{ то } D = \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 42,5}{3,14}} = 7,4 \text{ см.}$$

Принимаем

$$D = 7,5 \text{ см} \Rightarrow F_1 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 7,5^2}{4} = 44,2 \text{ см}^2.$$

Стержень № 2

$$F_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{90 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 5,6 \text{ см}^2.$$

Так как площадь одного уголка равна

$$F_L = \frac{F_2}{2}, \text{ то } F_L = \frac{F_2}{2} = \frac{5,6}{2} = 2,8 \text{ см}^2$$

Принимаем уголок 50x50x3

$$(F_L = 2,96 \text{ см}^2) \Rightarrow F_2 = 2F_L = 2 \cdot 2,96 = 5,92 \text{ см}^2.$$

Стержень № 3

$$F_3 \geq \frac{N_3}{[\sigma]} = \frac{410 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^4 = 25,6 \text{ см}^2.$$

Принимаем двутавр № 20а

$$(F_3 = 28,9 \text{ см}^2).$$

5. Определим абсолютные удлинения (укорочения) стержней:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{680 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5}{2 \cdot 10^5 \cdot 44,2 \cdot 10^{-4}} = 19,2 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 1,92 \text{ мм},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{90 \cdot 10^{-3} \cdot 4,5}{2 \cdot 10^5 \cdot 5,92 \cdot 10^{-4}} = 34,0 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 3,4 \text{ мм},$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EF} = \frac{410 \cdot 10^{-3} \cdot 5}{2 \cdot 10^5 \cdot 28,8 \cdot 10^{-4}} = 35,6 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 3,56 \text{ мм}.$$

### *Расчеты на растяжение-сжатие статически неопределимых систем*

Системы (конструкции) называются статически неопределимыми, если количество неизвестных реакций связей в них превышает количество уравнений равновесия, которые можно записать для данной системы сил.

Разница между числом неизвестных усилий и количеством уравнений статики, которое можно составить для данной конструкции, определяет число “лишних” неизвестных или степень статической неопределимости конструкции.

Статически неопределимые системы рассчитывают путем совместного решения уравнений, полученных в результате рассмотрения статической, геометрической и физической сторон задачи.

Статическая сторона задачи. Составляем уравнения равновесия отсеченных элементов конструкции, содержащих неизвестные усилия.

Геометрическая сторона задачи. Изображаем конструкцию в двух положениях (до и после деформации) и устанавливаем связь между перемещениями или деформациями отдельных элементов конструкции. Полученные уравнения называются уравнениями совместности деформаций.

Физическая сторона задачи. На основании закона Гука, записанного в абсолютной форме, выражаем деформации элементов конструкции через действующие в них неизвестные усилия. В случае изменения температуры к деформациям, которые вызваны внешними усилиями, необходимо добавить деформации, вызванные температурным удлинением. Подставляем полученные выражения деформации в уравнения совместности, после чего последние будут содержать неизвестные усилия.

Синтез. Решаем уравнения статики совместно с уравнениями совместности деформаций, записанными в усилиях, и находим неизвестные усилия.

### Задача 3

Стальной брус жестко закреплен обоими концами в неподвижных опорах и нагружен вдоль оси силами  $P_1$  и  $P_2$ , приложенными в его промежуточных сечениях, (рис. 4). Брус нагревается на 500С по сравнению с температу-

рой, при которой брус был закреплен. Построить эпюру продольных сил по длине ступенчатого стержня.

Решение

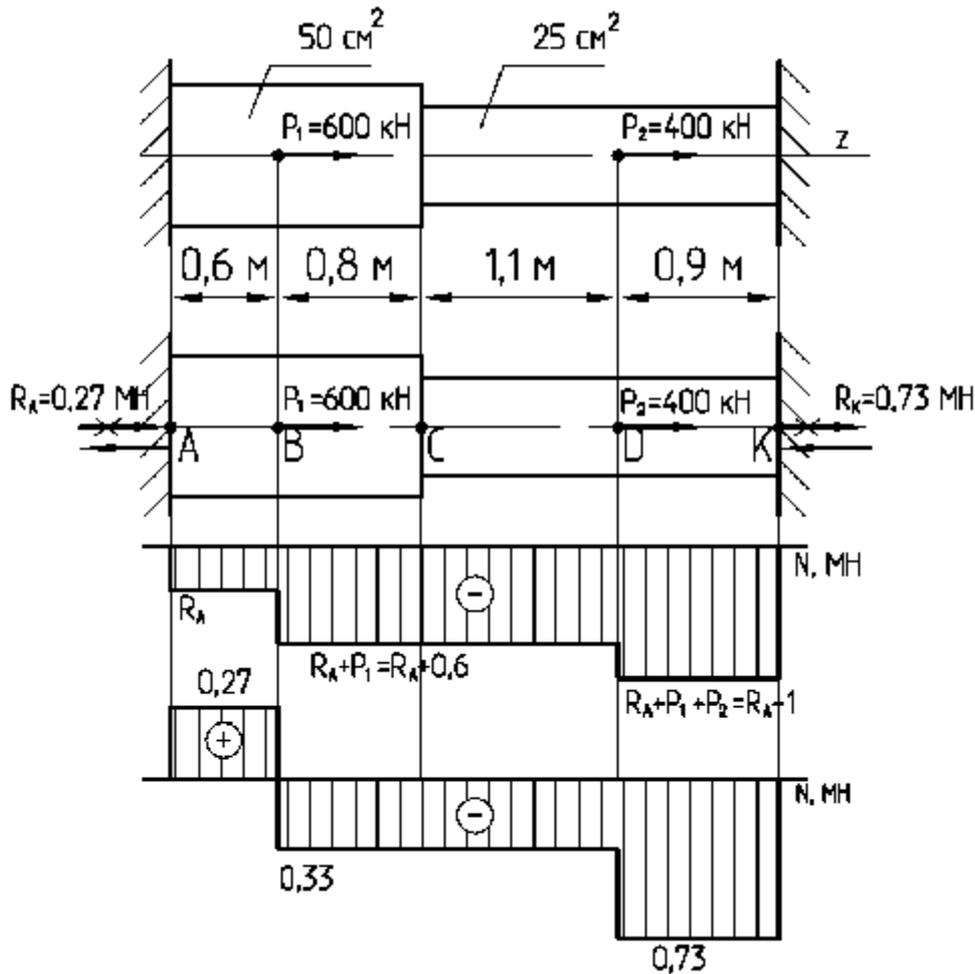


Рис. 4

1. Статическая сторона задачи. Под действием внешних сил и при нагреве бруса в его креплениях возникают реакции  $R_A$  и  $R_K$ , для определения которых статика дает лишь одно уравнение равновесия:

$$\sum P_z = 0,$$

$$P_1 + P_2 + R_A + R_K = 0,$$

$$R_A + R_K = -P_1 - P_2 = -600 - 400 = -1000 \text{ кН} = -1 \text{ МН}.$$

Следовательно, задача статически неопределима.

2. Геометрическая сторона задачи. Из условия деформации бруса очевидно, что перемещения сечений A и K равны нулю (так как они закреплены), т.е.  $\Delta l = 0$ .

3. Отбросим правое закрепление и заменим действие правого закрепления неизвестной пока реакцией  $R_K$ . Таким образом, получим статически определимый брус, нагруженный силами  $P_1$ ,  $P_2$  и  $R_K$ .

Строим эпюру продольных сил.

4. Физическая сторона задачи. Определяем перемещение сечения К от действия всех сил и от нагрева:

$$\Delta l = -\frac{R_A \cdot 0,6}{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} - \frac{(R_A + 0,6) \cdot 0,8}{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} - \frac{(R_A + 0,6) \cdot 1,1}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} - \frac{(R_A + 1) \cdot 0,9}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 3,4 \cdot 50.$$

6. Синтез. Так как  $\Delta l = 0$ , то

$$-\frac{R_A \cdot 0,6}{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} - \frac{(R_A + 0,6) \cdot 0,8}{2 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} - \frac{(R_A + 0,6) \cdot 1,1}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} - \frac{(R_A + 1) \cdot 0,9}{2 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 3,4 \cdot 50 = 0$$

Отсюда  $R_A = -0,27 \text{ МН}$ .

Следовательно,  $R_K = -1 - R_A = -1 + 0,27 = -0,73 \text{ МН}$ .

6. Окончательно строим эпюры продольных сил.

#### Задача 4

Абсолютно твердое тело (заштриховано) имеет шарнирно-неподвижную опору и подвешено на двух стержнях (рис. 5). Определить диаметры поперечных сечений стержней. Материал стержней – сталь 3,  $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$ ,  $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$ .

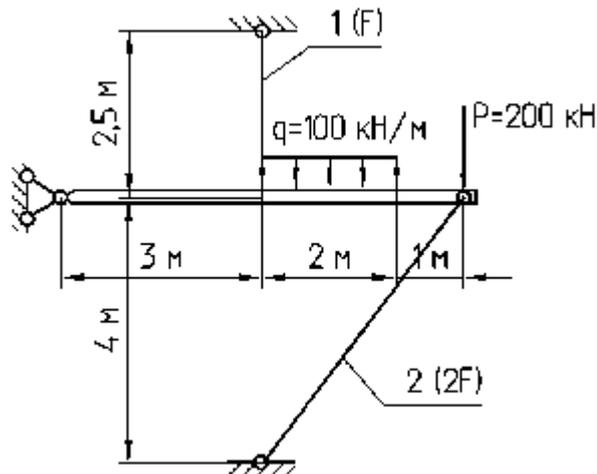


Рис. 5

#### Решение

1. Определяем степень статической неопределимости задачи, для чего освобождаем балку от связей и заменяем их реакциями (рис. 6).

Реакции в неподвижном шарнире А –  $R_A$ ,  $H_A$ , усилия в стержнях –  $N_1$ ,  $N_2$ . При решении задачи предполагаем, что усилия в стержнях растягивающие, т.е. направлены к точкам их подвеса.

Степень статической неопределимости определяется как разность между числом неизвестных и числом уравнений равновесия системы сил, действующих на конструкцию.

Неизвестными в задаче являются  $R_A$ ,  $H_A$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ , а система приложенных к балке сил – плоская произвольная, которая имеет три условия равновесия. Таким образом, задача является один раз статически неопределимой.

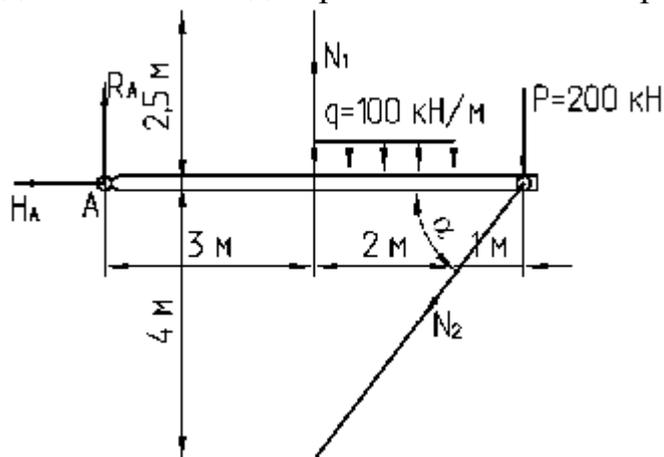


Рис. 6

2. Длина второго стержня равна:

$$l_2 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ м.}$$

Определим синус и косинус угла  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} = 0,8, \quad \cos \alpha = \frac{3}{5} = 0,6.$$

3. Рассмотрим статическую сторону задачи, для чего составим такое уравнение равновесия, которое содержало бы неизвестные  $N_1$  и  $N_2$ , подлежащие определению. Таким уравнением равновесия является  $\Sigma M_A = 0$ .

$$-P \cdot 6 - q \cdot 2 \cdot 4 + N_1 \cdot 3 - N_2 \sin \alpha \cdot 6 = 0,$$

$$-200 \cdot 6 - 100 \cdot 2 \cdot 4 + N_1 \cdot 3 - N_2 \cdot 0,8 \cdot 6 = 0,$$

$$-1200 - 800 + N_1 \cdot 3 - N_2 \cdot 4,8 = 0,$$

$$3N_1 - 4,8N_2 = 2000.$$

4. Чтобы получить второе уравнение, связывающее неизвестные  $N_1$  и  $N_2$ , рассмотрим геометрическую сторону задачи. Для этого представим систему в деформированном состоянии (рис. 7). Под действием приложенных сил балка повернется вокруг шарнира А, при этом первый стержень растянется, второй укоротится. Точки С и В при повороте балки опишут дуги окружностей, но из-за малости угла поворота балки можно принять за прямые отрезки  $ВВ'$  и  $СС'$ , перпендикулярные АВ и АС.

Перемещение точки В по вертикали будет равно удлинению первого стержня  $ВВ' = \Delta l_1$ , перемещение точки С по вертикали  $СС'$  связано с укорочением второго стержня  $СС' = \Delta l_2 / \sin \alpha$  (рис. 7, б). Это соотношение следует из треугольника  $СС'С''$ , в котором угол  $СС'С'' = \alpha$ .

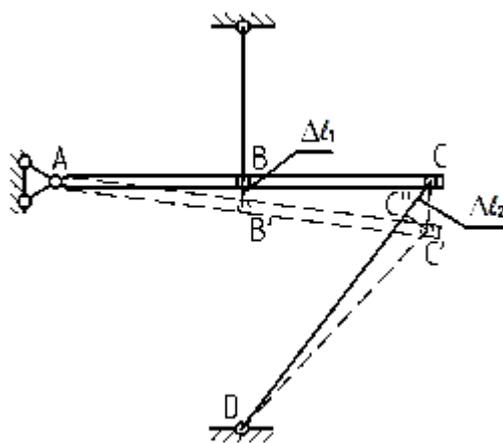
Геометрическое соотношение между  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  можно установить, рассмотрев подобие треугольников  $АВВ'$  и  $АСС'$  (рис. 7, а). Из их подобия следует:

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{AB}{AC},$$

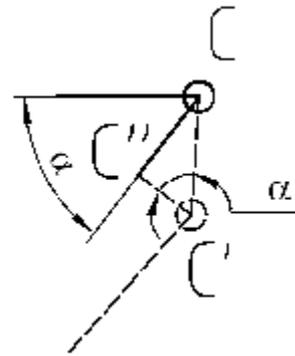
$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2 / \sin \alpha} = \frac{AB}{AC},$$

$$\Delta l_1 = \frac{AB}{AC \sin \alpha} \Delta l_2 = \frac{3}{6 \cdot 0,8} \Delta l_2,$$

$$\Delta l_1 = 0,625 \Delta l_2.$$



а



б

Рис. 7

5. С помощью закона Гука выразим абсолютные удлинения стержней  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  через действующие в них усилия  $N_1$  и  $N_2$  (физическая сторона задачи). Если характер предполагаемого усилия при рассмотрении статической стороны задачи не отвечает деформированному состоянию стержня, то это несоответствие должно быть учтено знаком “минус” в законе Гука.

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{2,5N_1}{EF}.$$

Для второго стержня предполагаемое усилие (растягивающее) не соответствует предполагаемой деформации стержня (сжимающей), поэтому

$$\Delta l_2 = -\frac{N_2 l_2}{EF_2} = -\frac{5N_2}{2EF} = -\frac{2,5N_2}{EF}.$$

6. Решая совместно уравнения, полученные при рассмотрении трех сторон задачи (статической, геометрической и физической), определяем искомые усилия в стержнях.

Подставляем найденные  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$

$$\frac{2,5N_1}{EF} = -0,625 \cdot \frac{2,5N_2}{EF},$$

$$N_1 = -0,625N_2.$$

Таким образом, получено второе уравнение, определяющее зависимость между  $N_1$  и  $N_2$ . Записав оба уравнения, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3N_1 - 4,8N_2 = 2000, \\ N_1 = -0,625N_2; \end{cases} \begin{cases} 3 \cdot (-0,625)N_2 - 4,8N_2 = 2000, \\ N_1 = -0,625N_2; \end{cases} \begin{cases} -1,857N_2 - 4,8N_2 = 2000, \\ N_1 = -0,625N_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6,675N_2 = 2000, \\ N_1 = -0,625N_2; \end{cases} \begin{cases} N_2 = -300 \text{ кН}, \\ N_1 = 187,5 \text{ кН}. \end{cases}$$

7. Размеры поперечных сечений стержней определяем из условия прочности на растяжение (сжатие):

$$\sigma_i = \frac{N_i}{F_i} \leq [\sigma],$$

Рассчитываем по  $N_1$ :

$$F_{1N_1} \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{187,5 \cdot 10^{-3}}{120} \cdot 10^4 = 15,6 \text{ см}^2,$$

$$F_{2N_1} = 2F_{1N_1} = 2 \cdot 15,6 = 31,2 \text{ см}^2.$$

Рассчитываем по  $N_2$ :

$$F_{2N_2} \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{300 \cdot 10^{-3}}{120} \cdot 10^4 = 25 \text{ см}^2,$$

$$F_{1N_2} = \frac{F_{2N_2}}{2} = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ см}^2.$$

Так как требуемая площадь  $F_{1N_1} > F_{1N_2}$  и  $F_{2N_1} > F_{2N_2}$ , то дальнейшие расчеты ведем по продольной силе  $N_1$ .

Следовательно, принимаем:

$$F_1 = 15,6 \text{ мм}^2, F_2 = 31,2 \text{ мм}^2.$$

Так как площадь круга равна:

$$F_2 = \frac{\pi D_2^2}{4},$$

то 
$$D_2 = \sqrt{\frac{4F_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 31,2}{3,14}} = 6,30 \text{ см}.$$

Принимаем:

$$D_2 = 6,5 \text{ см} \Rightarrow F_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 6,5^2}{4} = 33,2 \text{ см}^2$$

### 3. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ ДЛЯ БАЛОК И ПЛОСКИХ РАМ

Продольная сила  $N$  в сечении равна алгебраической сумме проекций на продольную ось стержня всех внешних сил, приложенных к рассматриваемой отсеченной части рамы. Продольная сила, возникающая при растяжении стержня, считается положительной, при сжатии – отрицательной.

Поперечная сила  $Q$  равна сумме проекций на ось, перпендикулярную оси балки, всех внешних сил, приложенных с одной стороны от рассматриваемого сечения.

Изгибающий момент  $M$  равен сумме моментов всех внешних сил с одной стороны от рассматриваемого сечения относительно центра тяжести этого сечения.

Установим следующие правила знаков для поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  в балках при изгибе.

Поперечная сила  $Q$  в сечении считается положительной, если внешняя сила стремится повернуть отсеченную часть балки по ходу часовой стрелки (рис. 8).

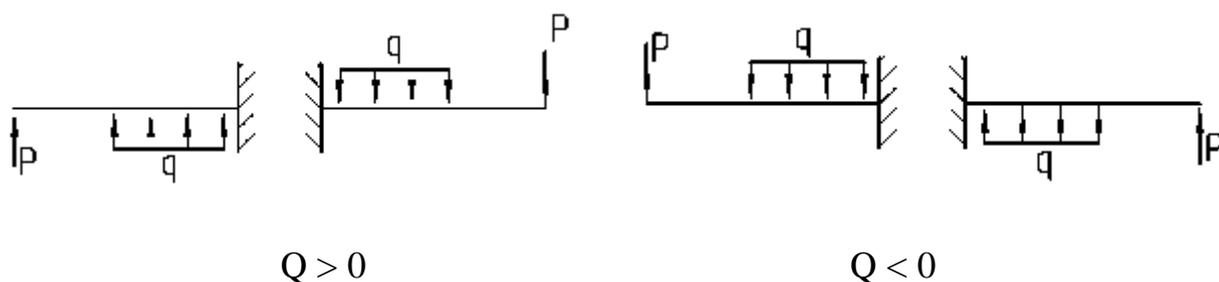


Рис. 8

Изгибающий момент  $M$  в сечении считается положительным, если он вызывает сжатие верхних волокон балки (рис. 9).

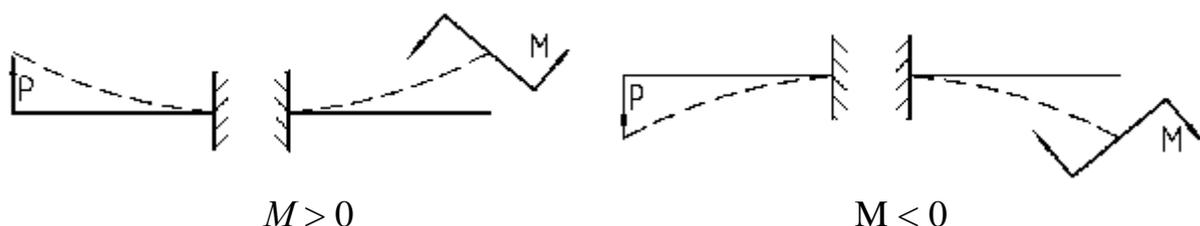


Рис. 9

Учитывая правила знаков для изгибающих моментов  $M$ , следует подчеркнуть, что эпюру изгибающих моментов строят на сжатых волокнах.

### Задача 5

Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, изображенной на рис 10.

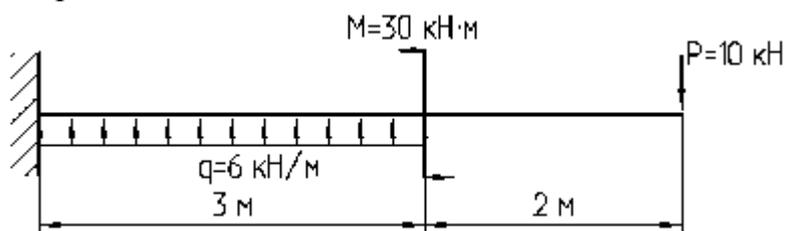


Рис. 10

## Решение

1. Расставляем характерные сечения (рис. 11). Построение начинаем с правого (свободного) конца, при этом нет необходимости в определении опорных реакций.

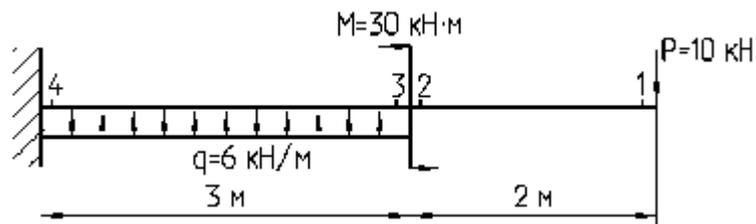


Рис. 11

2. Вычисляем значения поперечных сил в характерных сечениях (рис. 12, а-в):

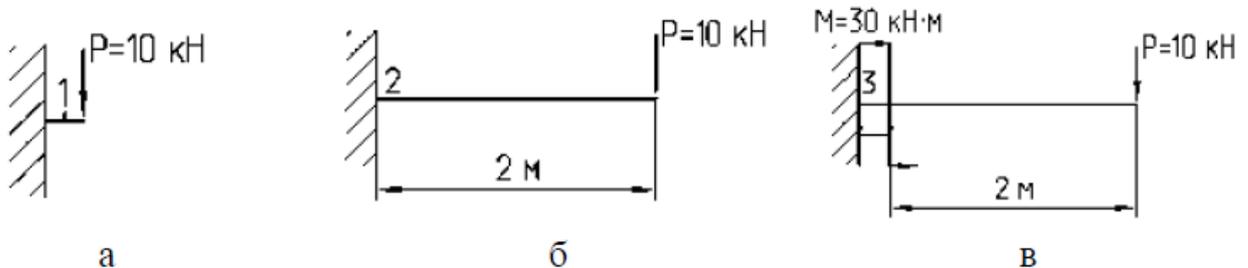


Рис. 12

$$Q_1 = P = 10 \text{ кН} ,$$

$$Q_2 = P = 10 \text{ кН} ,$$

$$Q_3 = P = 10 \text{ кН} ,$$

$$Q_4 = P - q \cdot 3 = 10 - 6 \cdot 3 = -8 \text{ кН} .$$

4. Вычисляем значения изгибающих моментов в характерных сечениях:

$$M_1 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м} ,$$

$$M_2 = -P \cdot 2 = -10 \cdot 2 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м} ,$$

$$M_3 = -P \cdot 2 + M = -10 \cdot 2 + 30 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м} ,$$

$$M_4 = -P \cdot 5 + M + q \cdot 3 \cdot 1,5 = -10 \cdot 5 + 30 + 6 \cdot 3 \cdot 1,5 = 7 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

4. Производим построение эпюр по характерным сечениям (рис. 13).

5. Так как эпюра поперечных сил пересекает базовую линию и меняет знак с «-» на «+», то в этой точке находится минимальное значение изгибающего момента. Находим положение этого сечения (рис. 14).

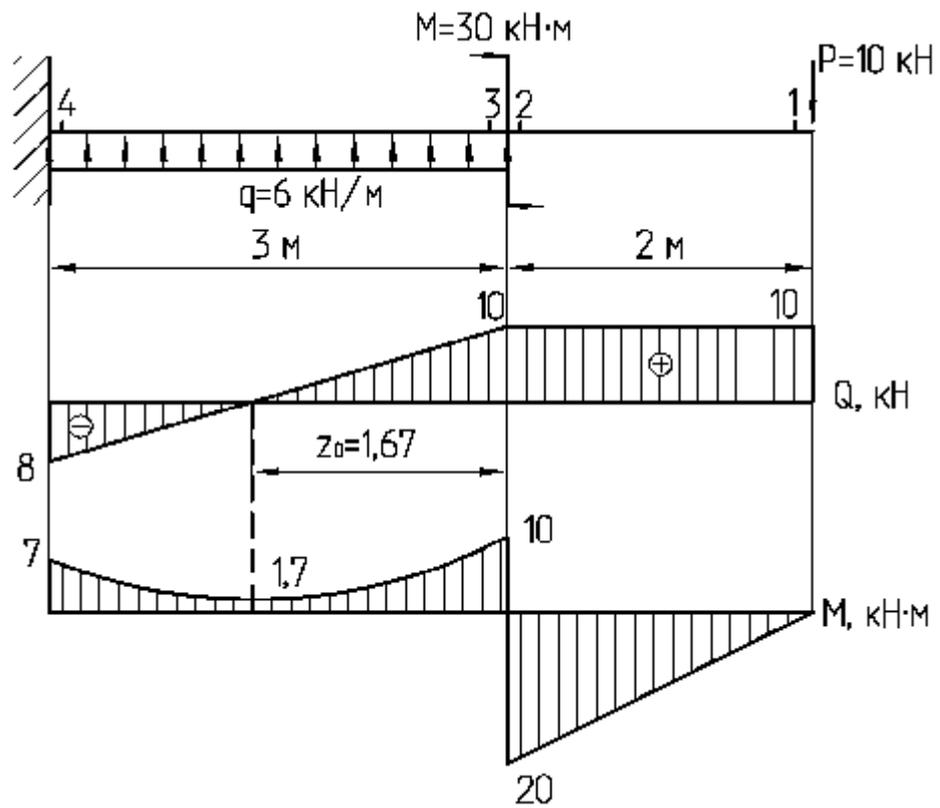


Рис. 13

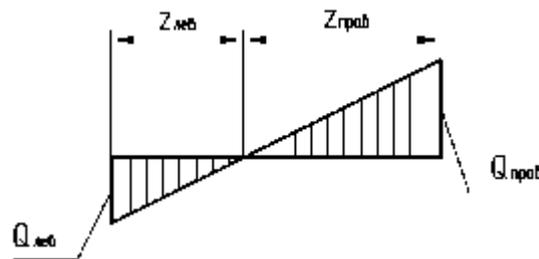


Рис. 14

$$z_{\text{лев}} = \frac{Q_{\text{лев}}}{q};$$

$$z_{\text{прав}} = \frac{Q_{\text{прав}}}{q};$$

$$z_{\text{прав}} = z_0 = \frac{10}{6} = 1,67 \text{ м},$$

$$M_{z_0} = -P \cdot (2 + z_0) + M + q \cdot z_0 \cdot \frac{z_0}{2} =$$

$$= -10 \cdot (2 + 1,67) + 30 + 6 \cdot 1,67 \cdot \frac{1,67}{2} = 1,7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

## Задача 6

Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, изображенной на рис 15.

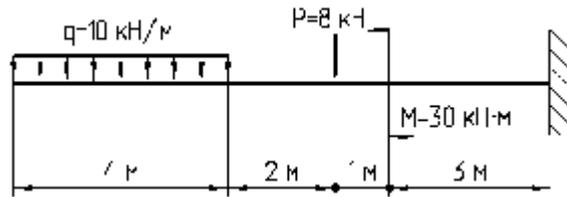


Рис. 15

Решение

1. Расставляем характерные сечения (рис. 16). Построение начинаем с левого (свободного) конца.

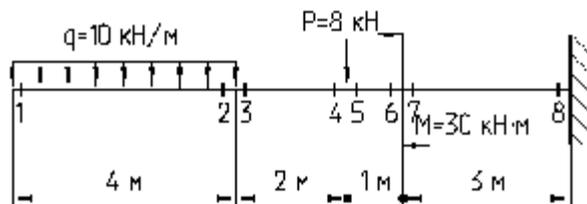


Рис. 16

2. Вычисляем значения поперечных сил в характерных сечениях:

$$Q_1 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_2 = -q \cdot 4 = -10 \cdot 4 = -40 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = Q_2 = -q \cdot 4 = -10 \cdot 4 = -40 \text{ кН},$$

$$Q_5 = -q \cdot 4 - P = -10 \cdot 4 - 8 = -48 \text{ кН},$$

$$Q_6 = Q_7 = Q_8 = Q_5 = -48 \text{ кН}.$$

3. Вычисляем значения изгибающих моментов в характерных сечениях.

$$M_1 = 0 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_2 = -q \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = -10 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = -80 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_3 = M_2 = -80 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_4 = -q \cdot 4 \cdot \left(2 + \frac{4}{2}\right) = -10 \cdot 4 \cdot \left(2 + \frac{4}{2}\right) = -160 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_5 = M_4 = -160 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_6 = -q \cdot 4 \cdot \left(3 + \frac{4}{2}\right) - P \cdot 1 = -10 \cdot 4 \cdot \left(3 + \frac{4}{2}\right) - 8 \cdot 1 = -208 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_7 = -q \cdot 4 \cdot \left(3 + \frac{4}{2}\right) - P \cdot 1 - M = -10 \cdot 4 \cdot \left(3 + \frac{4}{2}\right) - 8 \cdot 1 - 15 = -223 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8 = -q \cdot 4 \cdot \left(6 + \frac{4}{2}\right) - P \cdot 4 - M = -10 \cdot 4 \cdot \left(6 + \frac{4}{2}\right) - 8 \cdot 4 - 15 = -367 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4. Производим построение эпюр по характерным сечениям (рис. 17).

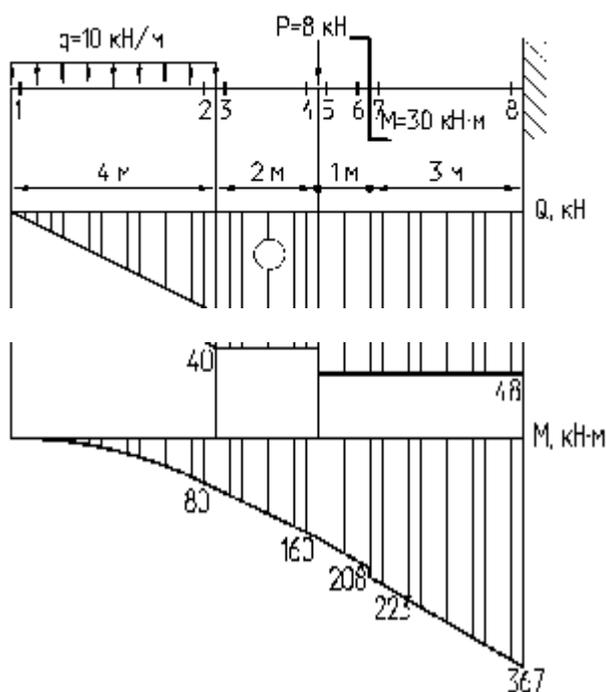


Рис. 17

### *Построение эпюр внутренних усилий для рам*

#### Задача 7

Построить эпюры продольных и поперечных сил, а также изгибающих моментов для рамы, изображенной на рис. 18.

Решение

1. Расставляем характерные сечения (рис. 19). Построение начинаем со свободного конца.

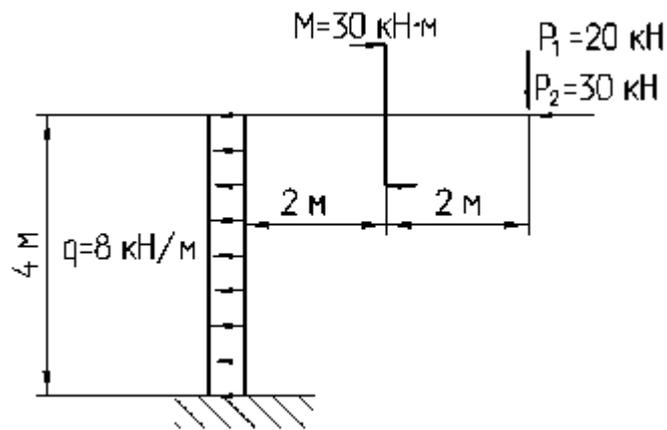


Рис. 18

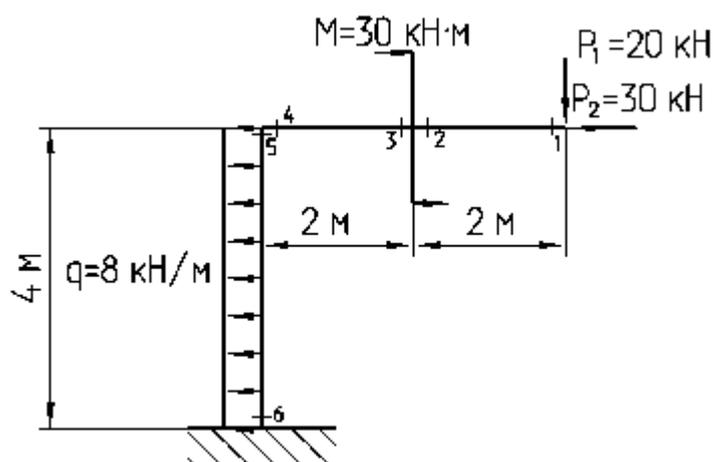


Рис. 19

2. Вычисляем значения продольных сил в характерных сечениях:

$$N_1 = -P_2 = -30 \text{ кН},$$

$$N_2 = -P_2 = -30 \text{ кН},$$

$$N_3 = -P_2 = -30 \text{ кН},$$

$$N_4 = -P_2 = -30 \text{ кН},$$

$$N_5 = -P_1 = -20 \text{ кН},$$

$$N_6 = -P_1 = -20 \text{ кН}.$$

3. Вычисляем значения поперечных сил в характерных сечениях:

$$Q_1 = P_1 = 20 \text{ кН},$$

$$Q_2 = P_1 = 20 \text{ кН},$$

$$Q_3 = P_1 = 20 \text{ кН},$$

$$Q_4 = P_1 = 20 \text{ кН},$$

$$Q_5 = -P_2 = -30 \text{ кН},$$

$$Q_6 = -P_2 - q \cdot 4 = -30 - 8 \cdot 4 = -62 \text{ кН}.$$

4. Вычисляем значения изгибающих моментов в характерных сечениях:

$$M_1 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = -P_1 \cdot 2 = -20 \cdot 2 = -40 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_3 = -P_1 \cdot 2 + M = -20 \cdot 2 + 30 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = M_5 = -P_1 \cdot 4 + M = -20 \cdot 4 + 30 = -50 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = -P_1 \cdot 4 + M + P_2 \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 = -20 \cdot 4 + 30 + 30 \cdot 4 + 8 \cdot 4 \cdot 2 = 134 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5. Производим построение эпюр продольных сил  $N$  (рис. 20, а), поперечных сил  $Q$  (рис. 20, б), а также изгибающих моментов  $M$  (рис. 20, в) по характерным сечениям.

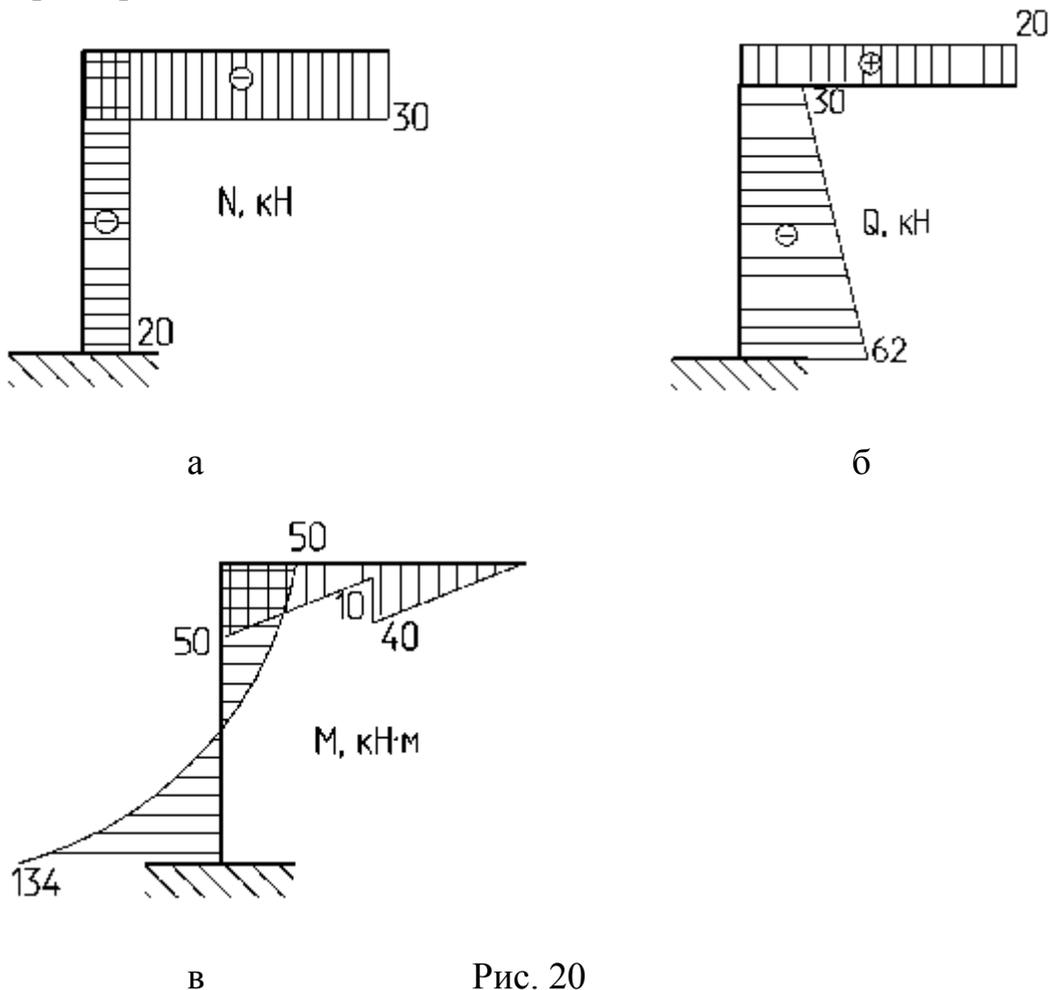


Рис. 20

### Задача 8

Построить эпюры продольных и поперечных сил, а также изгибающих моментов для рамы, изображенной на рис 21.

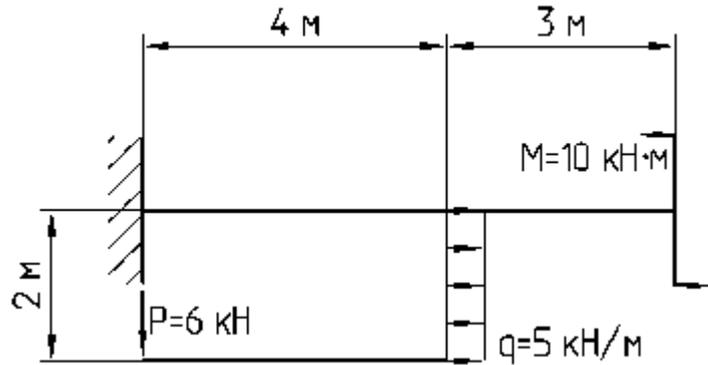


Рис. 21

### Решение

1. Расставляем характерные сечения (рис. 22). Построение начинаем со свободного конца.

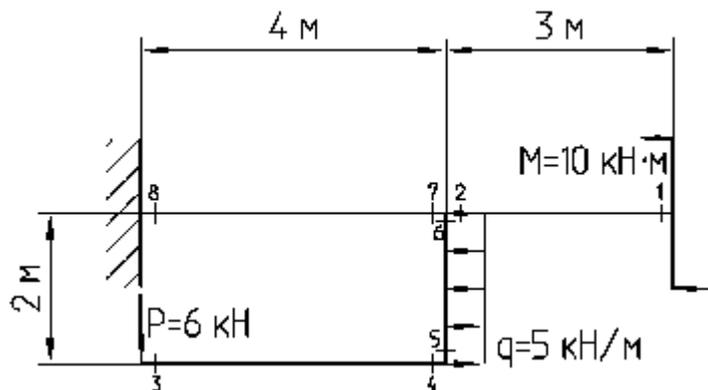


Рис. 22

2. Вычисляем значения продольных сил в характерных сечениях:

$$N_1 = N_2 = 0 \text{ кН},$$

$$N_3 = N_4 = 0 \text{ кН},$$

$$N_5 = N_6 = P = 6 \text{ кН},$$

$$N_7 = N_8 = q \cdot 2 = 10 \text{ кН}.$$

3. Вычисляем значения поперечных сил в характерных сечениях:

$$Q_1 = Q_2 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_3 = Q_4 = -P = -6 \text{ кН},$$

$$Q_5 = 0 \text{ кН},$$

$$Q_6 = -q \cdot 2 = -10 \text{ кН},$$

$$Q_7 = Q_8 = P = 6 \text{ кН}.$$

4. Вычисляем значения изгибающих моментов в характерных сечениях:

$$M_1 = M_2 = M = 10 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_3 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = M_5 = P \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_6 = P \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \cdot 1 = 34 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_7 = P \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 1 + M = 6 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \cdot 1 + 10 = 44 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8 = q \cdot 2 \cdot 1 + M = 5 \cdot 2 \cdot 1 + 10 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5. Производим построение эпюр продольных сил  $N$  (рис. 23, а), поперечных сил  $Q$  (рис. 23, б), а также изгибающих моментов  $M$  (рис. 23, в) по характерным сечениям.

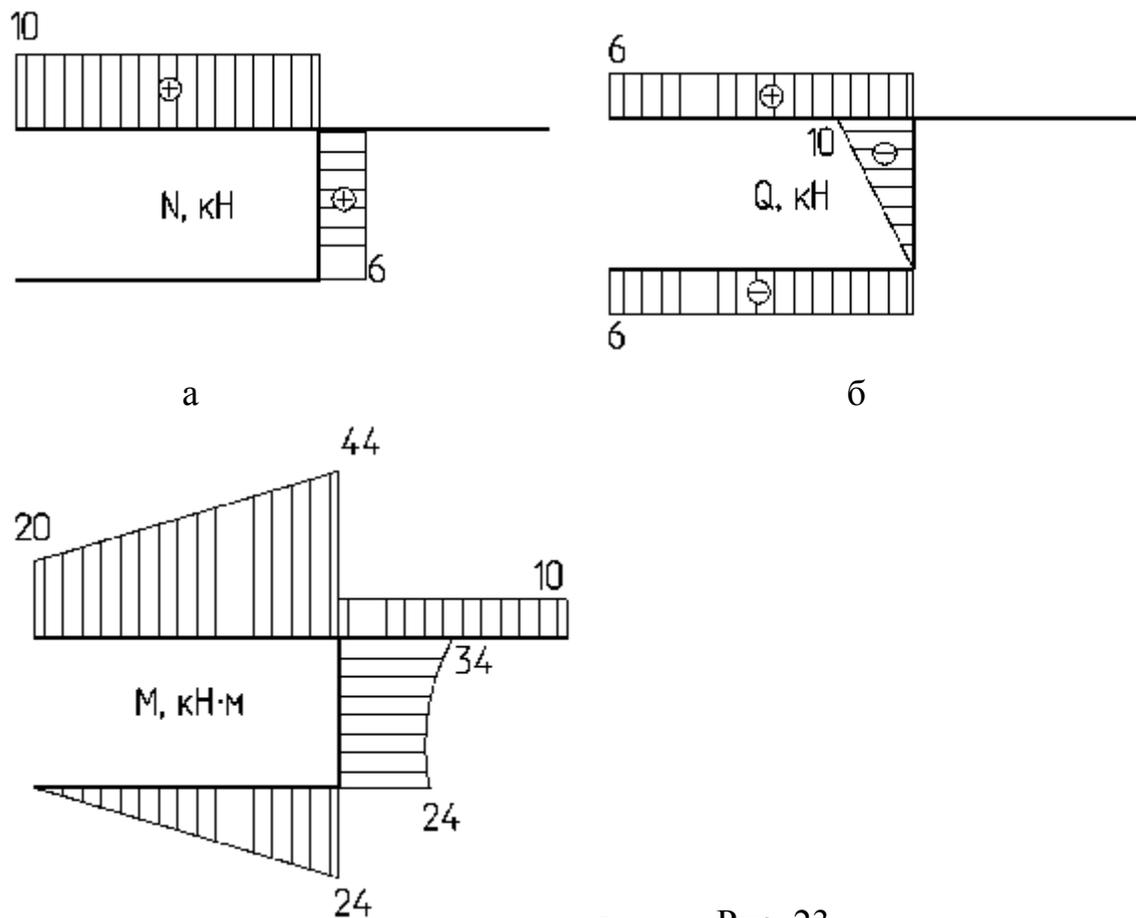


Рис. 23

#### 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

При решении задач возникает необходимость оперировать некоторыми геометрическими характеристиками поперечных сечений.

К геометрическим характеристикам относятся площади поперечных сечений, моменты инерции, моменты сопротивления, радиусы инерции.

Статический момент сечения – сумма произведений площадей элементарных площадок на их расстояния до данной оси, взятая по всей площади сечения:

$$S_x = \int_F y dF, \quad S_y = \int_F x dF.$$

При параллельном переносе осей статический момент меняется на величину, равную произведению площади на расстояние между осями (рис. 24):

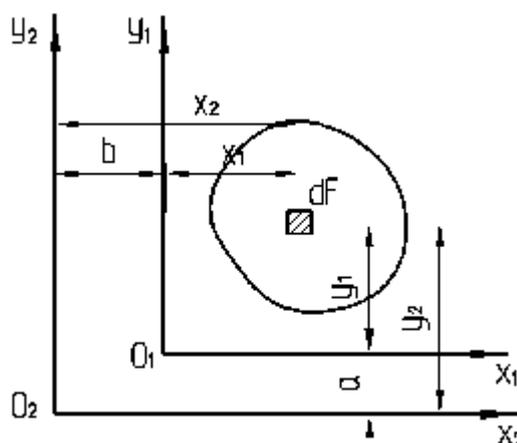


Рис. 24

$$S_{x_2} = S_{x_1} + aF; \quad S_{y_2} = S_{y_1} + bF.$$

Ось, относительно которой статический момент равен нулю, называется центральной. Точка пересечения центральных осей называется центром тяжести сечения.

Координаты центра тяжести сложного сечения определяются следующим образом:

$$x_c = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_c = \frac{S_x}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n F_i},$$

где  $x_c, y_c$  – координаты центра тяжести сложного сечения, которые ищем, относительно начальной системы осей;

$x_i, y_i$  – координаты центра тяжести  $i$ -й фигуры, которые ищем, относительно начальной системы осей;

$F_i$  – площадь  $i$ -й фигуры.

Осевым (или экваториальным) моментом инерции площади сечения называется интеграл по площади произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний до данной оси.

Так, осевые моменты инерции произвольного сечения (рис. 25) соответственно равны:

$$J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F x^2 dF.$$

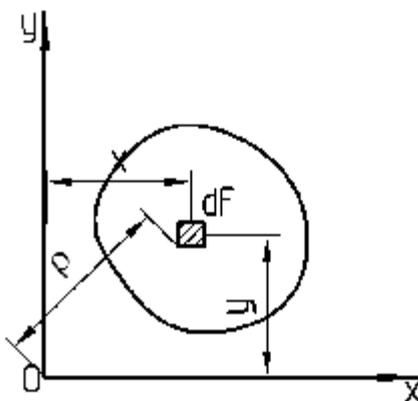


Рис. 25

Полярным моментом инерции площади сечения относительно данной точки (полюса) называется интеграл по площади произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний до полюса (см. рис. 25):

$$J_\rho = \int_F \rho^2 dF, \quad J_\rho = J_y + J_x.$$

Величины осевых и полярных моментов инерции всегда положительны.

Центробежным моментом инерции называется интеграл по площади произведений элементарных площадок на их расстояния от координатных осей x, y:

$$J_{xy} = \int_F xy dF.$$

В зависимости от положения осей центробежный момент инерции может быть положительным или отрицательным, а также равен нулю.

Единица измерения моментов инерции – метр, дециметр или сантиметр в четвертой степени.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются главными. Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются главными центральными осями.

При вычислении моментов инерции сечений, составленных из простейших геометрических фигур или стандартных прокатных профилей, широко применяются формулы преобразования моментов инерции при параллельном переносе осей (рис. 26).

Момент инерции сечения относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между этими осями:

$$J_{x_1} = J_x + a^2 F, \quad J_{y_1} = J_y + b^2 F.$$

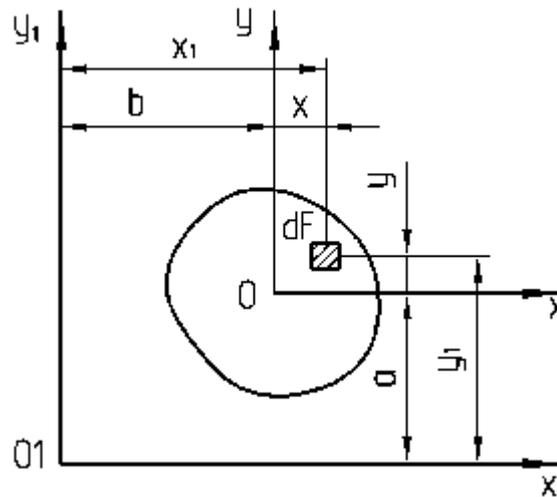


Рис. 26

Центробежный момент инерции относительно любой системы прямоугольных осей равен центробежному моменту относительно системы центральных осей, параллельных данным, плюс произведение площади фигуры на координаты её центра тяжести в новых осях:

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} + abF, \quad J_{x_c y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_i y_i} + a_i b_i F_i).$$

Осевые моменты инерции всего сечения относительно главных центральных осей фигуры определяют по формулам:

$$J_{x_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_i} + a_i^2 F_i), \quad J_{y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{y_i} + b_i^2 F_i),$$

где  $J_{x_i}$ ,  $J_{y_i}$  – осевые моменты инерции составляющих фигур относительно собственных центральных осей;  $a_i$  – расстояние между центральной осью  $X_c$  составного сечения и собственной центральной осью  $X_i$   $i$ -й составляющей фигуры;  $b_i$  – расстояние между центральной осью  $Y_c$  составного сечения и собственной центральной осью  $Y_i$   $i$ -й составляющей фигуры.

Центробежный момент инерции всего сечения относительно главных центральных осей фигуры определяют следующим образом:

$$J_{x_c y_c} = \sum_{i=1}^n (J_{x_i y_i} + a_i b_i F_i),$$

где  $J_{x_i y_i}$  – центробежный момент инерции составляющих фигур относительно собственных центральных осей.

Значения моментов инерции наиболее употребительных сечений относительно центральных осей приведены в таблице 1.

Положение главных осей инерции находят из следующей зависимости (рис. 27):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_{x_c}},$$

где  $\alpha_0$  – угол поворота главных центральных осей несимметричной фигуры относительно начальной системы центральных осей;  $J_{x_c y_c}$  – центробежный момент инерции относительно центральных осей  $X_c$  и  $Y_c$ ;  $J_{x_c}$ ,  $J_{y_c}$  – осевые моменты инерции относительно центральных осей  $X_c$  и  $Y_c$ .

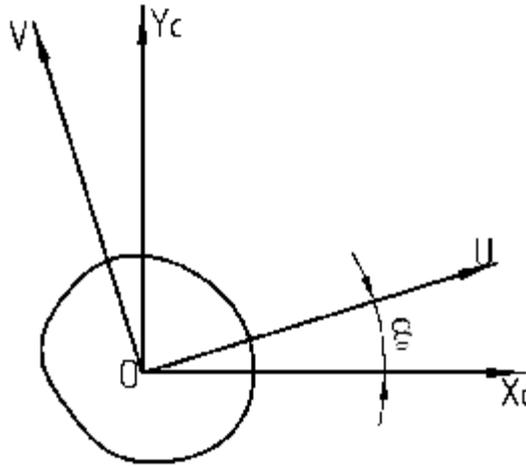


Рис. 27

Положительный угол  $\alpha_0$  следует откладывать от оси  $X_c$  против хода часовой стрелки.

При вычислении моментов инерции относительно главных центральных осей используют следующие формулы:

$$J_U = J_{x_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{y_c} \sin^2 \alpha_0 - J_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0,$$

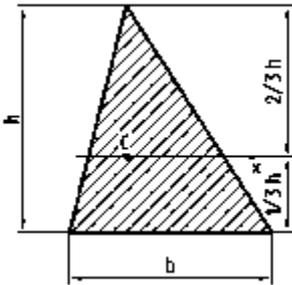
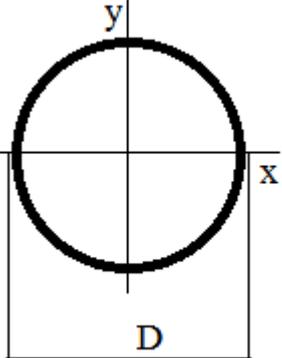
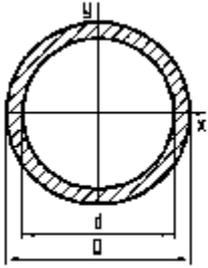
$$J_V = J_{x_c} \sin^2 \alpha_0 + J_{y_c} \cos^2 \alpha_0 + J_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0.$$

Центробежный момент инерции относительно главных центральных осей равен нулю:

$$J_{UV} = J_{x_c y_c} \cos 2\alpha_0 + \frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2} \cdot \sin 2\alpha_0 = 0.$$

Таблица 1 – Значения моментов инерции наиболее употребительных сечений относительно центральных осей

Вид сечения		Моменты инерции	
		$J_x$	$J_y$
Прямоугольник		$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$

Вид сечения	Моменты инерции		
	$J_x$	$J_y$	
Треугольник		$\frac{bh^3}{36}$	-
Круг		$\frac{\pi D^4}{64}$	
Кольцо		$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4),$ $\alpha = \frac{d}{D}$	

*Вычисление геометрических характеристик плоских сечений*

Определить положение центра тяжести данного сечения (рис. 28) и вычислить осевые моменты инерции всего сечения относительно главных центральных осей сечения.

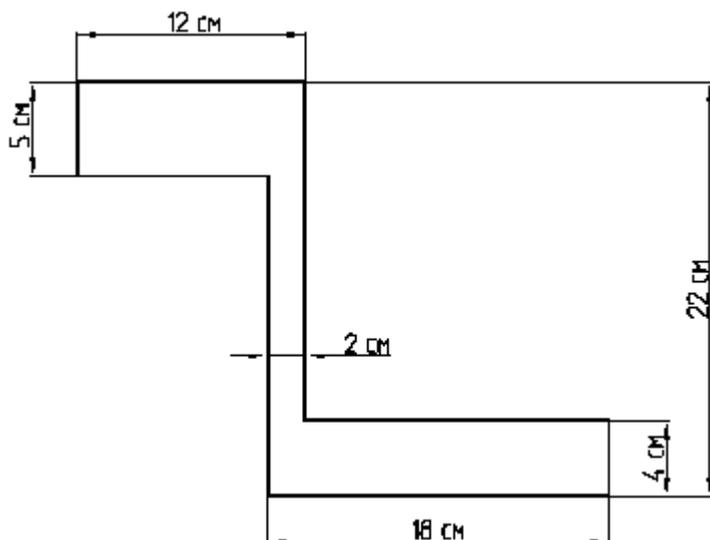


Рис. 28

## Решение

1. Изображаем сечение в масштабе с указанием размеров фигур. Определяем положение центра тяжести каждой из фигур. Наносим на рисунок центральные оси каждой фигуры (рис. 29).

Определяем площади каждой из фигур:

$$F_1 = 12 \cdot 5 = 60 \text{ см}^2,$$

$$F_2 = 2 \cdot 13 = 26 \text{ см}^2,$$

$$F_3 = 18 \cdot 4 = 72 \text{ см}^2.$$

Выбираем для сечения произвольную систему прямоугольных координат (оси  $x$ ,  $y$ ), относительно выбранных начальных осей  $x$  и  $y$  находим координаты центра тяжести сложного сечения.

Находим координаты центра тяжести  $i$ -й фигуры относительно начальной системы осей:

$$x_1 = -\frac{12}{2} + \frac{2}{2} = -5 \text{ см},$$

$$y_1 = \frac{4}{2} + 13 + \frac{5}{2} = 17,5 \text{ см},$$

$$x_2 = 0 \text{ см},$$

$$y_2 = \frac{4}{2} + \frac{13}{2} = 8,5 \text{ см},$$

$$x_3 = \frac{18}{2} - \frac{2}{2} = 8 \text{ см},$$

$$y_3 = 0 \text{ см}.$$

Подставляя полученные значения  $x_i$ ,  $y_i$  в формулы, имеем:

$$x_c = \frac{-5 \cdot 60 + 0 \cdot 26 + 8 \cdot 72}{60 + 26 + 72} = 1,75 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{17,5 \cdot 60 + 8,5 \cdot 26 + 0 \cdot 72}{60 + 26 + 72} = 8,04 \text{ см}.$$

По найденным координатам  $x_c$ ,  $y_c$  наносим положение центра тяжести составного сечения. Через центр тяжести составного сечения проводим центральные оси всего сечения, направляя их параллельно центральным осям составляющих фигур (рис. 30).

3. Определяем осевые моменты инерции всего сечения относительно главных центральных осей сечения.

Вычисляем осевые моменты инерции составляющих фигур относительно собственных центральных осей:

$$J_{x_1} = \frac{12 \cdot 5^3}{12} = 125 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_1} = \frac{5 \cdot 12^3}{12} = 720 \text{ см}^4,$$

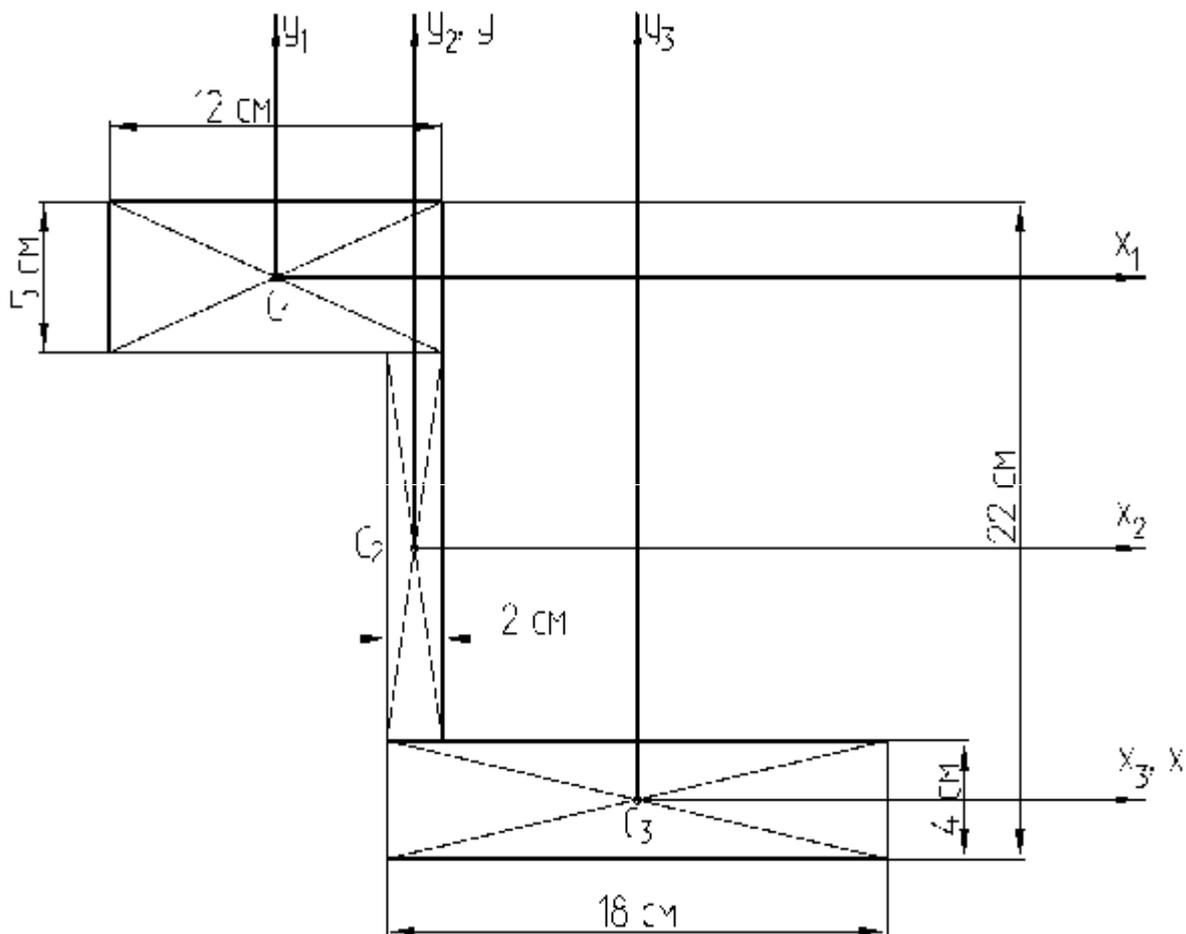


Рис. 29

$$J_{x_2} = \frac{2 \cdot 13^3}{12} = 366,2 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_2} = \frac{13 \cdot 2^3}{12} = 8,7 \text{ см}^4,$$

$$J_{x_3} = \frac{18 \cdot 4^3}{12} = 96 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_3} = \frac{4 \cdot 18^3}{12} = 1944 \text{ см}^4.$$

Находим расстояние между центральной осью  $X_c$  составного сечения и собственной центральной осью  $x_i$   $i$ -й составляющей фигуры:

$$a_1 = y_1 - y_c = 17,5 - 8,04 = 9,46 \text{ см},$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 8,5 - 8,04 = 0,46 \text{ см},$$

$$a_3 = y_3 - y_c = 0 - 8,04 = -8,04 \text{ см}.$$

Находим расстояние между центральной осью  $Y_c$  составного сечения и собственной центральной осью  $y_i$   $i$ -й составляющей фигуры:

$$b_1 = x_1 - x_c = -5 - 1,75 = 6,75 \text{ см},$$

$$b_2 = x_2 - x_c = 0 - 1,75 = -1,75 \text{ см},$$

$$b_3 = x_3 - x_c = 8 - 1,75 = 6,25 \text{ см}.$$

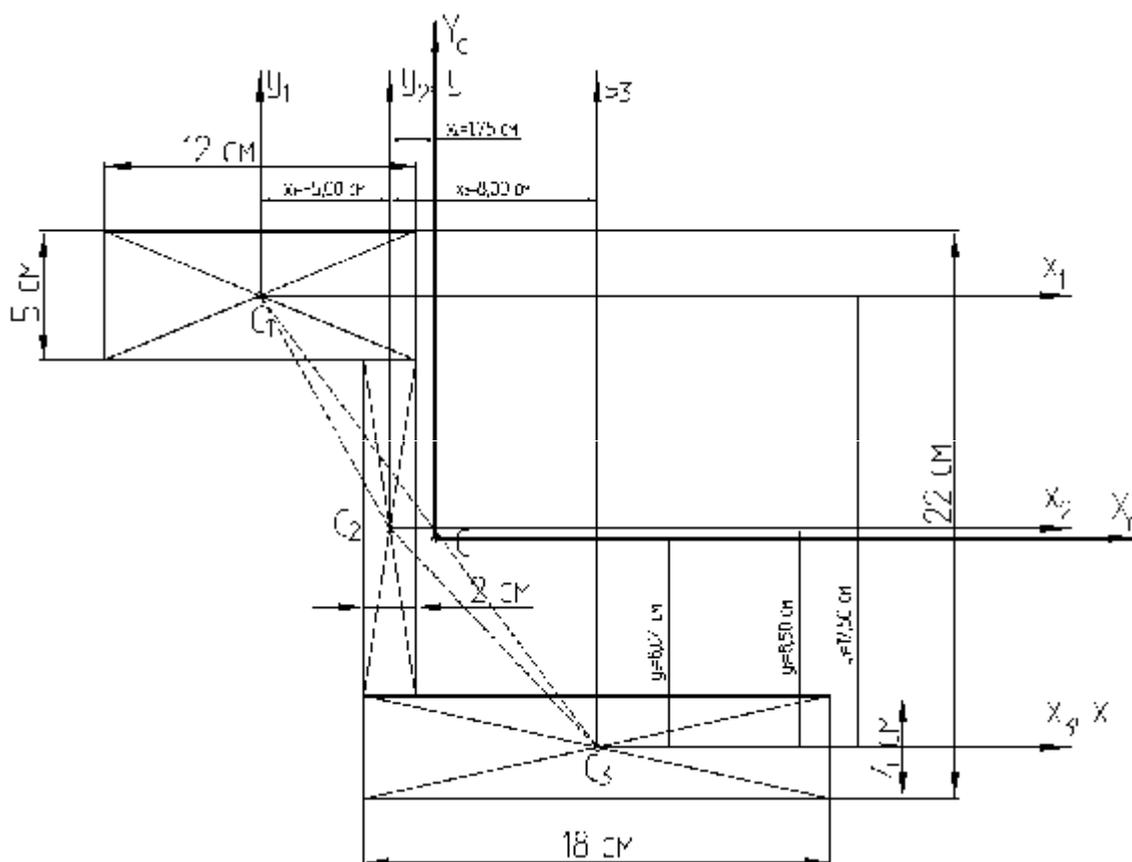


Рис. 30

Подставляя полученные значения  $J_{x_i}$ ,  $J_{y_i}$ ,  $a_i$ ,  $b_i$  в формулы, имеем:

$$J_{x_c} = 125 + 9,46^2 \cdot 60 + 366,2 + 0,46^2 \cdot 26 + 96 + 8,04^2 \cdot 72 = 10616,4 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c} = 720 + 6,75^2 \cdot 60 + 8,7 + 1,75^2 \cdot 26 + 1944 + 6,25^2 \cdot 72 = 8298,6 \text{ см}^4.$$

### Задача 10

Определить положение центра тяжести данного сечения (рис. 31) и вычислить осевые моменты инерции сечения относительно главных центральных осей сечения.

#### Решение

1. Изображаем сечение в масштабе с указанием размеров фигур. Так как в сечении есть отверстие, его удобно считать частью фигуры с отрицательной площадью. Рассматриваемое сечение разбиваем на две простые части – прямоугольник и отверстие отрицательной площади.

Определяем положение центра тяжести каждой из фигур. Наносим на рисунок центральные оси каждой фигуры (рис. 32).

Определяем площади каждой из фигур:

$$F_1 = 30 \cdot 14 = 420 \text{ см}^2,$$

$$F_2 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 8^2}{4} = 50,24 \text{ см}^2.$$

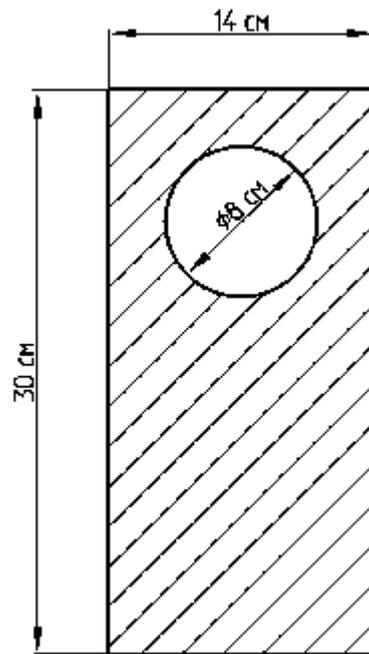


Рис. 31

2. Относительно выбранных начальных осей находим координаты центра тяжести сложного сечения.

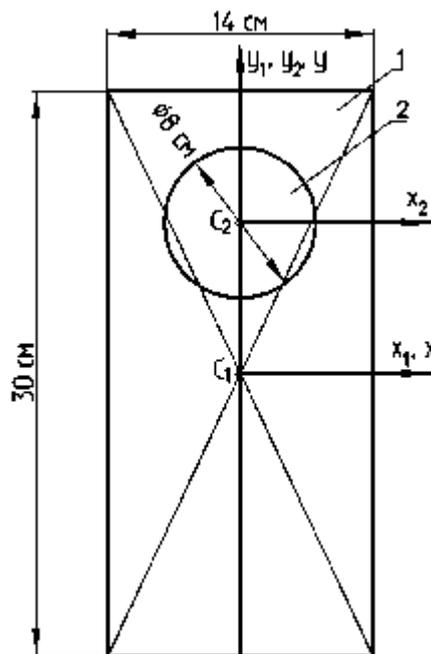


Рис. 32

Так как сечение симметрично относительно оси Y, то центр тяжести лежит на ней.

Находим координаты центра тяжести  $i$ -й фигуры относительно начальной системы осей:

$$y_1 = 0 \text{ см}, \quad y_2 = \frac{30}{2} - 7 = 8 \text{ см}.$$

Подставляя полученные значения  $x_i$ ,  $y_i$  в формулы, имеем:

$$y_c = \frac{0 \cdot 420 - 8 \cdot 50,24}{420 - 50,24} = -1,1 \text{ см}.$$

По найденной координате  $y_c$  наносим положение центра тяжести составного сечения (рис 33).

3. Определяем осевые моменты инерции всего сечения относительно главных центральных осей сечения:

$$J_{x_1} = \frac{14 \cdot 30^3}{12} = 31500 \text{ см}^4, \quad J_{y_1} = \frac{30 \cdot 14^3}{12} = 6860 \text{ см}^4,$$

$$J_{x_2} = J_{y_2} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 8^4}{64} = 201 \text{ см}^4.$$

$$a_1 = y_1 - y_c = 0 + 1,1 = 1,1 \text{ см}, \quad a_2 = y_2 - y_c = 8 - 1,1 = 6,9 \text{ см}.$$

$$b_1 = 0 \text{ см}, \quad b_2 = 0 \text{ см}.$$

$$J_{x_c} = 31500 + 1,1^2 \cdot 420 - 201 - 6,9^2 \cdot 50 = 29426,7 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c} = 6860 - 201 = 6659 \text{ см}^4.$$

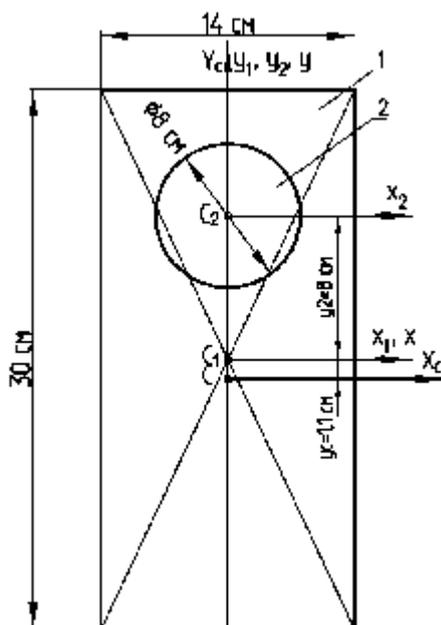


Рис. 33

## 5. ИЗГИБ

Различают чистый и поперечный изгиб. Под чистым изгибом понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникают только изгибающие моменты, а поперечные силы равны нулю. В случае поперечного изгиба в сечениях бруса возникает не только изгибающий момент  $M$ , но и поперечная сила  $Q$ .

При поперечном изгибе возникают нормальные и касательные напряжения (рис 34).

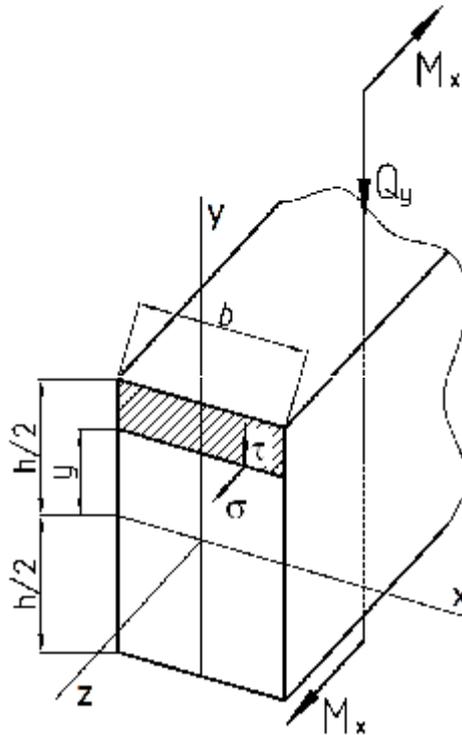


Рис. 34

Величина нормального напряжения в произвольной точке сечения, расположенной на высоте  $y$  определяется по формуле

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y,$$

где  $M_x$  – изгибающий момент вокруг главной оси  $x$  поперечного сечения;  $J_x$  – осевой момент инерции поперечного сечения относительно главной оси  $x$ ;  $y$  – расстояние от нейтральной линии до точки, в которой определяется напряжение.

Нормальные напряжения при изгибе меняются по высоте сечения по линейному закону и достигают наибольших значений в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси. Наибольшие нормальные напряжения возникают в поперечном сечении, где изгибающий момент максимален, и определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{J_x} y_{\max}.$$

Для сечений, симметричных относительно нейтральной оси,

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_x},$$

где  $W_x = J_x / (h/2)$  – момент сопротивления сечения при изгибе или осевой момент сопротивления, см<sup>3</sup>.

Моменты сопротивления простейших сечений вычисляют по следующим формулам:

Прямоугольник

$$W_x = \frac{bh^2}{6},$$

где  $b$  – сторона сечения, параллельная нейтральной оси;

Кольцо

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1d^3 (1 - \alpha^4),$$

Условие прочности при изгибе балки с симметричным сечением имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Касательные напряжения в произвольной точке поперечного сечения определяются по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{QS_x^*}{bJ_x},$$

где  $Q$  – поперечная сила в рассматриваемом сечении;

$S_x^*$  – статический момент относительно нейтральной оси той части сечения, которая расположена по одну сторону от прямой, проведенной через данную точку, т.е. статический момент площади отсеченной части (прямая проводится параллельно нейтральной оси);

$b$  – ширина сечения на уровне рассматриваемой точки;

$J_x$  – момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси.

Условие прочности по касательным напряжениям имеет вид

$$\tau_{\max} \leq [\tau].$$

Обычно для стальных балок принимают:  $[\tau] \approx 0,6[\sigma]$ .

*Определение нормальных и касательных напряжений при изгибе*

### Задача 11

Вычислить наибольшие нормальные напряжения, возникающие в поперечном сечении балки (рис. 34, а), рассмотрев сечение, представленное на рисунке 5.2, б. Определить нормальные напряжения в точке D (см. рис.34, б). Построить эпюру нормальных напряжений.

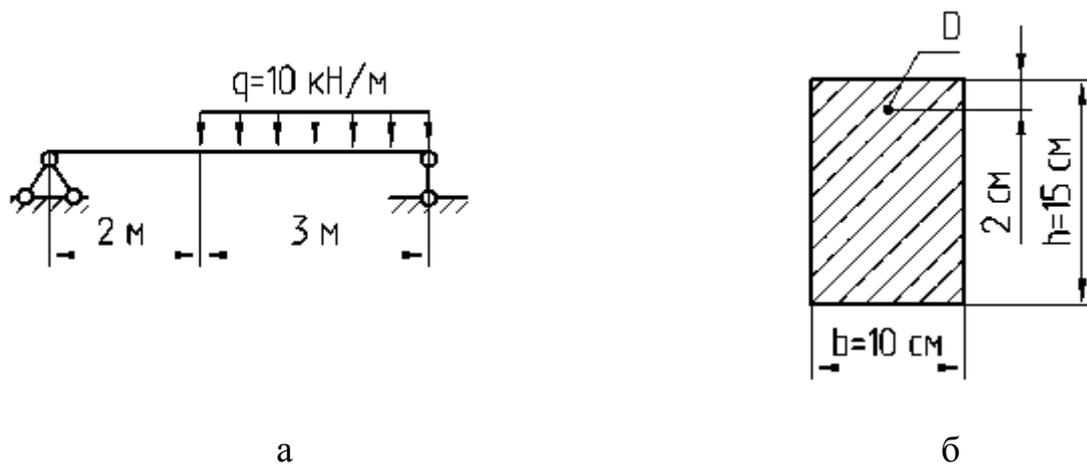


Рис. 34

Решение

1. Определим максимальные нормальные напряжения
2. Определяем опорные реакции, приравнявая к нулю суммы моментов всех внешних сил относительно точек А и В (рис. 34):

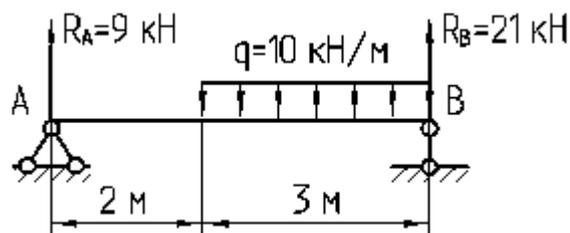


Рис. 34

$$\sum M_A = 0,$$

$$-q \cdot 3 \cdot 3,5 + 5R_B = 0,$$

$$R_B = \frac{q \cdot 3 \cdot 3,5}{5} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 3,5}{5} = 21 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$q \cdot 3 \cdot 1,5 - 5R_A = 0,$$

$$R_A = \frac{q \cdot 3 \cdot 1,5}{5} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 1,5}{5} = 9 \text{ кН}.$$

Для проверки используем уравнение  $\sum P_y = 0$ .

$$R_A - q \cdot 3 + R_B = 0,$$

$$9 - 10 \cdot 3 + 21 = 0,$$

$$30 - 30 = 0,$$

$$0 = 0.$$

3. Вычисляем значения поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях (рис. 35):

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = R_A = 9 \text{ кН},$$

$$Q_4 = -R_B = -21 \text{ кН}.$$

$$M_1 = M_4 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = R_A \cdot 2 = 9 \cdot 2 = 18 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

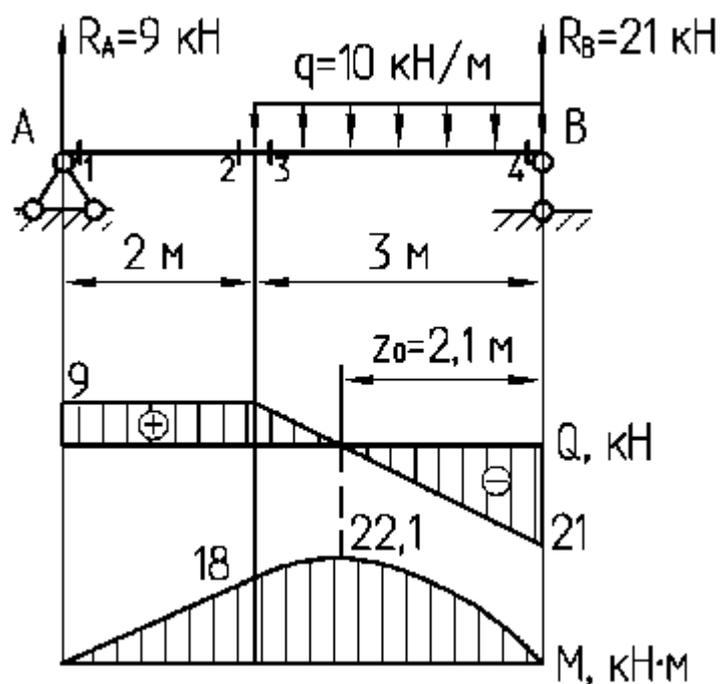


Рис. 35

Производим построение эпюр по характерным сечениям (см. рис. 35).

Так как эпюра поперечных сил пересекает базовую линию и меняет знак с «+» на «-», то в этой точке находится максимальное значение изгибающего момента. Находим положение этого сечения.

$$z_0 = \frac{21}{10} = 2,1 \text{ м},$$

$$M_{z_0} = R_b z_0 - q z_0 \frac{z_0}{2} = 21 \cdot 2,1 - 10 \cdot 2,1 \cdot \frac{2,1}{2} = 22,1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Очевидно, что при указанном нагружении балки  $M_{\max} = 22,1 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

4. Определяем геометрические характеристики данного сечения:

- осевой момент инерции сечения относительно главной оси x

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 \cdot 15^3}{12} = 2813 \text{ см}^4,$$

- осевой момент сопротивления сечения относительно главной оси x

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{10 \cdot 15^2}{6} = 275 \text{ см}^3 .$$

5. Определяем максимальное нормальное напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x}, \quad \sigma_{\max} = \frac{22,1 \cdot 10^{-3}}{275 \cdot 10^{-6}} = 59 \text{ МПа} .$$

6. Определяем нормальное напряжение в точке D:

$$\sigma_D = \frac{M_{\max}}{J_x} y_D ,$$

7. Строим эпюру нормальных напряжений (рис. 36).

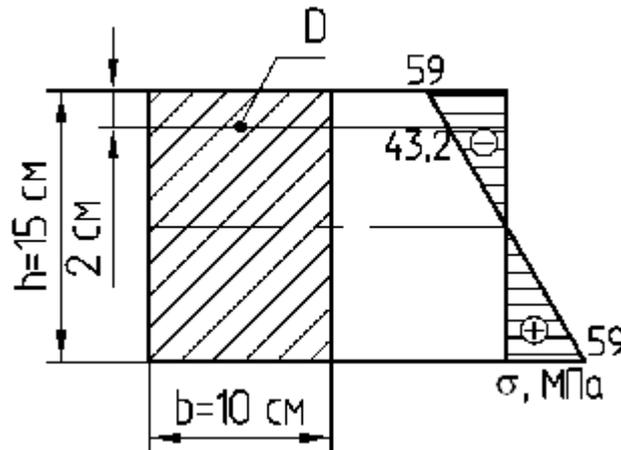


Рис. 36

### *Полная проверка прочности при изгибе*

Полученные формулы для нормальных и касательных напряжений при плоском изгибе дают возможность записать условия прочности, необходимые для проверки прочности и подбора сечений деталей, работающих на изгиб.

Условие прочности должно быть записано для так называемой опасной точки балки, то есть той точки, где материал находится в наиболее напряженном состоянии.

Опасной точкой будет одна из следующих трех точек:

- а) точка, где нормальное  $s$  напряжение достигает наибольшей величины;
- б) точка, где касательное  $t$  напряжение достигает наибольшей величины;
- в) точка, где  $s$  и  $t$ , хотя и не принимают наибольших значений, но в своей комбинации создают наиболее невыгодное сочетание, т.е. создают наибольшее эквивалентное напряжение по принятой для расчета теории прочности. При этом такая точка может быть не одна.

Первая опасная точка будет расположена в крайних волокнах того сечения, где изгибающий момент имеет наибольшее значение. Условие прочности запишется в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Вторая опасная точка находится на нейтральной линии того сечения, где поперечная сила имеет наибольшее значение (любая точка на участке нейтрального слоя, где  $Q = Q_{\max}$ ). В такой точке будет чистый сдвиг, и условие прочности запишется в виде

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\max}}{bJ_x} \leq [\tau].$$

Положение третьей опасной точки не столь определенное. Но где бы она ни была выбрана, в ней будет плоское напряженное состояние.

Эквивалентное напряжение в такой точке может быть рассчитано по различным теориям прочности.

Для расчета балок из пластичных материалов рекомендуется пользоваться условиями прочности, полученными по III и IV теориям:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma],$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{VI}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

В подавляющем большинстве случаев опасной точкой является крайняя точка того опасного сечения, где  $M = M_{\max}$ .

## Задача 12

Для стальной балки (рис. 37) подобрать размеры двутаврового, круглого и прямоугольного ( $h = 2b$ ) сечений, выбрать оптимальный вариант и произвести полную проверку на прочность по четвертой теории прочности. Допускаемое нормальное напряжение  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

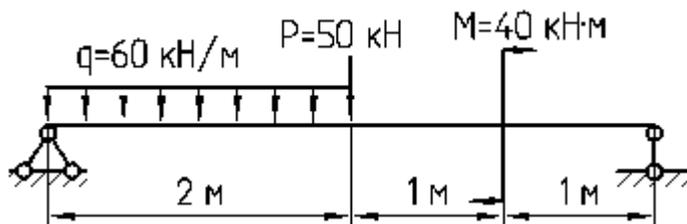


Рис. 37

### Решение

1. Определяем опорные реакции, приравнивая к нулю суммы моментов всех внешних сил относительно точек А и В (рис. 38).

$$M_A = 0,$$

$$-M - P \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 + R_B \cdot 4 = 0,$$

$$R_B = \frac{M + P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1}{4} = \frac{40 + 50 \cdot 2 + 60 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 65 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$-M + P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 3 - R_A \cdot 4 = 0,$$

$$R_A = \frac{-M + P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 3}{4} = \frac{-40 + 50 \cdot 2 + 60 \cdot 2 \cdot 3}{4} = 105 \text{ кН}.$$

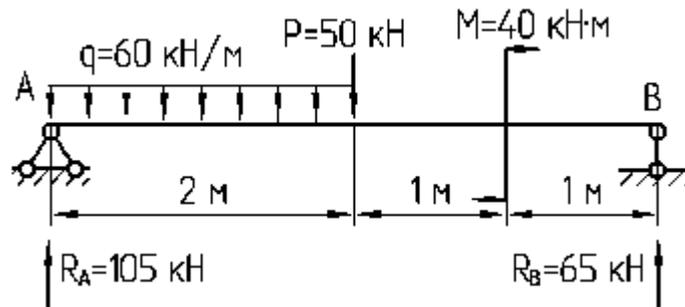


Рис. 38

Для проверки используем уравнение  $\sum P_y = 0$ .

$$-P - q \cdot 2 + R_A + R_B = 0,$$

$$-50 - 60 \cdot 2 + 105 + 65 = 0,$$

$$-170 + 170 = 0,$$

$$0 = 0.$$

2. Вычисляем значения поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях (рис. 39):

$$Q_1 = R_A = 105 \text{ кН},$$

$$Q_2 = R_A - q \cdot 2 = 105 - 60 \cdot 2 = -15 \text{ кН},$$

$$Q_3 = R_A - q \cdot 2 - P = 105 - 60 \cdot 2 - 50 = -65 \text{ кН},$$

$$Q_6 = Q_5 = Q_4 = Q_3 = -R_B = -65 \text{ кН}.$$

$$M_1 = M_6 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_3 = R_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 105 \cdot 2 - 60 \cdot 2 \cdot 1 = 90 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_5 = R_B \cdot 1 = 65 \cdot 1 = 65 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = R_B \cdot 1 - M = 65 \cdot 1 - 40 = 25 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_3 = M_2 = R_B \cdot 2 - M = 65 \cdot 2 - 40 = 90 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Производим построение эпюр по характерным сечениям (см. рис. 39).

Так как эпюра поперечных сил пересекает базовую линию и меняет знак с «+» на «-», то в этой точке находится максимальное значение изгибающего момента. Находим положение этого сечения.

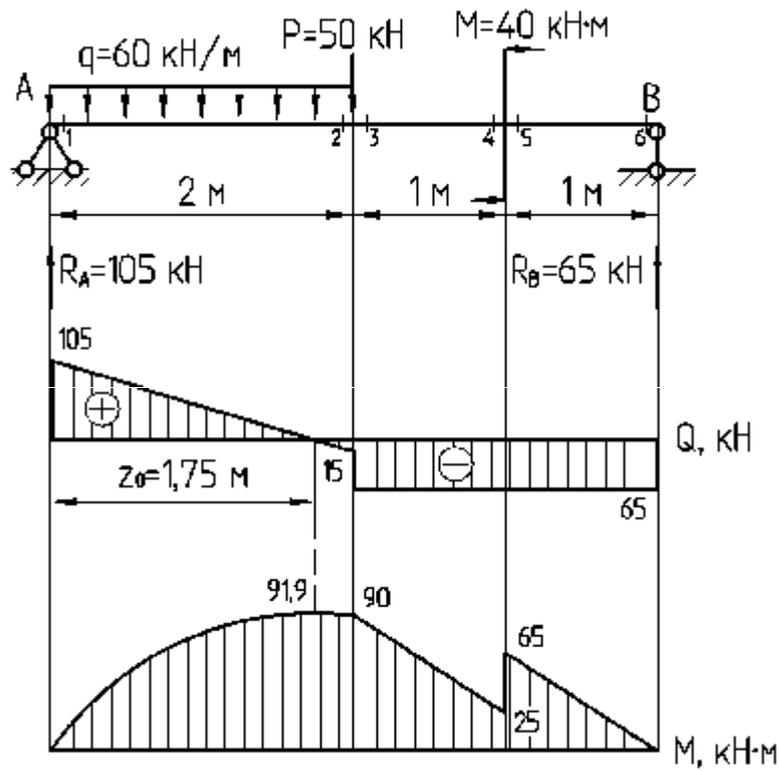


Рис. 39

$$z_0 = \frac{105}{60} = 1,75$$

$$M_{z_0} = R_A z_0 - q z_0 \frac{z_0}{2} = 105 \cdot 1,75 - 60 \cdot 1,75 \cdot \frac{1,75}{2} = 91,9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для указанного вида нагружения  $Q_{\max} = 105 \text{ кН}$ ,  $M_{\max} = 91,9 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

2. Подбираем сечение. Из условия прочности определим требуемый момент сопротивления сечения:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]},$$

$$W_x \geq \frac{91,9 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^6 = 574,4 \text{ см}^3.$$

Для круглого поперечного сечения момент сопротивления равен:

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3,$$

где  $d$  – диаметр сечения.

Отсюда получаем:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{W_x}{0,1}} = \sqrt[3]{\frac{574,4}{0,1}} = 17,9 \text{ см.}$$

Принимаем диаметр, кратный 5 мм, т.е  $d = 180 \text{ мм} = 18,0 \text{ см}$ .

Площадь круга

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 18,0^2}{4} = 254,3 \text{ см}^2.$$

Для прямоугольного поперечного сечения момент сопротивления равен:

$$W_x = \frac{bh^2}{6}.$$

Так как  $h = 2b$ , то

$$W_x = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{4b^3}{6} = \frac{2b^3}{3}.$$

Отсюда получаем:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3W_x}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 574,4}{2}} = 9,5 \text{ см.}$$

Принимаем:  $b = 9,5 \text{ см}$ ,  $h = 19,0 \text{ см}$ .

Площадь прямоугольника

$$F = bh = 9,5 \times 19,0 = 180,5 \text{ см}^2.$$

Номер двутавра находим по расчетному значению момента сопротивления  $W_x > 574,4 \text{ см}^3$ . По таблице сортамента (ГОСТ 8239-72) выбираем двутавр № 33, для которого  $W_x = 597 \text{ см}^3$ . Его площадь  $F = 53,8 \text{ см}^2$ .

Сечение считается рациональным, если оно обеспечивает прочность балки при минимальном ее весе, т.е. при минимальной площади поперечного сечения. Так как площадь поперечного сечения меньше у двутаврового сечения, то принимаем двутавровое сечение.

Для двутавра № 33 выписываем из сортамента необходимые геометрические характеристики:

$$H = 33 \text{ см}, B = 14 \text{ см},$$

$$J_x = 9840 \text{ см}^4, S_x^* = 339 \text{ см}^3.$$

$$d = 0,7 \text{ см}, t = 1,12 \text{ см},$$

4 Проверяем прочность по нормальным напряжениям.

Опасным будет сечение, в котором действует наибольший изгибающий момент (сечение  $z$ ,  $M_{\max} = M_{z0} = 91,9 \text{ кН} \times \text{м}$ ). В самом сечении наибольшие напряжения будут в наиболее отдаленных от нейтральной линии точках, т.е. в точках 1 и 7 (рис. 40).

Условие прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma],$$

$$\sigma_{\max} = \frac{91,9 \cdot 10^{-3}}{597 \cdot 10^{-6}} = 153,9 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по нормальным напряжениям выполняется.

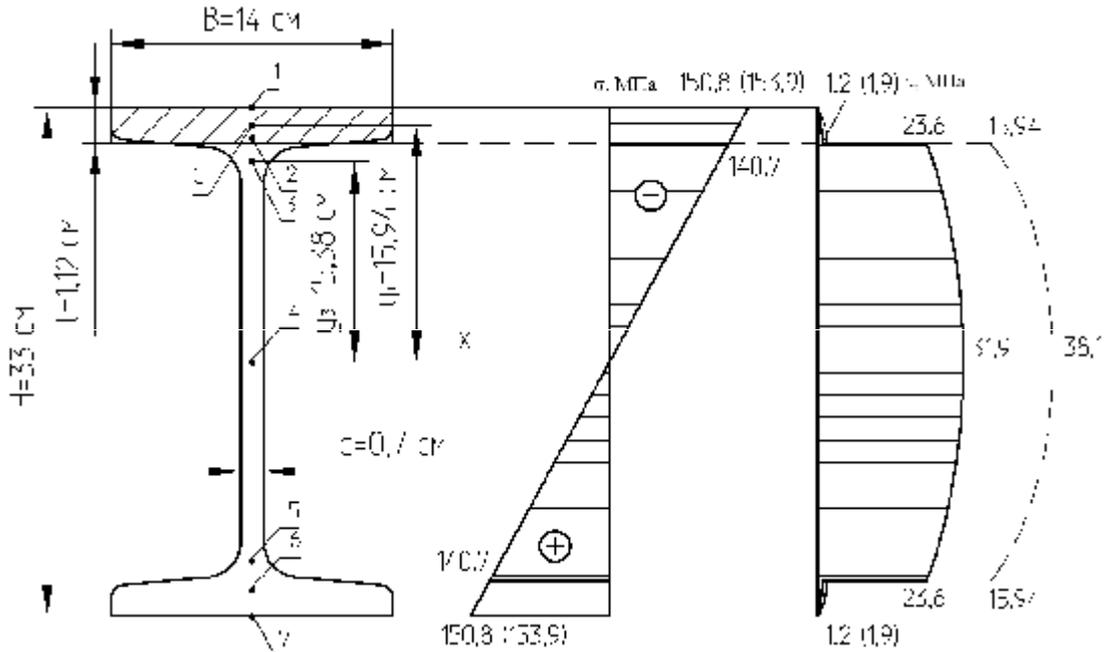


Рис. 40

5. Проверяем прочность по касательным напряжениям.

Опасным будет сечение, в котором действует наибольшая поперечная сила (сечение 1,  $Q_{\max} = Q_1 = 105 \text{ кН}$ ). В самом сечении наибольшие напряжения будут в точке на главной оси  $X$ , т.е. в точке 4 (см. рис. 40).

Условие прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^*}{b J_x} \leq [\tau],$$

$$\tau_{\max} = \frac{105 \cdot 10^{-3} \cdot 339 \cdot 10^{-6}}{0,7 \cdot 10^{-2} \cdot 9840 \cdot 10^{-8}} = 51,7.$$

Для стальных балок принимают:  $[\tau] \approx 0,6[\sigma] = 0,6 \cdot 160 = 96 \text{ МПа}$ .

$$\tau_{\max} = 51,7 \text{ МПа} \leq [\tau] = 96 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

Для построения эпюры касательных напряжений при наибольшей поперечной силе ( $Q_{\max} = 105 \text{ кН}$ ) определим касательные напряжения в точках 2 и 3, 5 и 6.

Для точек 2 и 6 ширина сечения  $b = B = 14 \text{ см}$ , статический момент площади отсеченной части равен статическому моменту полочки, т.е. прямоугольника  $B \times t = 14 \times 1,12 \text{ см}$ .

Тогда

$$S_{x2,6}^* = Bty_c = 14 \cdot 1,12 \cdot 15,94 = 249,9 \text{ см}^3,$$

где  $y_c = \frac{H}{2} - \frac{t}{2} = \frac{33 - 1,12}{2} = 15,94 \text{ см}.$

Следовательно, касательное напряжение в точках 2 и 6:

$$\tau_{2,6} = \frac{105 \cdot 10^{-3} \cdot 249,9 \cdot 10^{-6}}{14 \cdot 10^{-2} \cdot 9840 \cdot 10^{-8}} = 1,9 \text{ МПа}.$$

Для точек 3 и 5 статический момент площади отсеченной части остается практически тем же, т.е.  $S_{x3,5}^* = S_{x2,6}^* = 249,9 \text{ см}^3$ , но ширина сечения  $b = d = 0,7 \text{ см}$ . Поэтому касательные напряжения в точках 3 и 5

$$\tau_{3,5} = \frac{105 \cdot 10^{-3} \cdot 249,9 \cdot 10^{-6}}{0,7 \cdot 10^{-2} \cdot 9840 \cdot 10^{-8}} = 38,1 \text{ МПа}.$$

Следовательно, при переходе от точки 2 (6) к точке 3 (5) касательное напряжение резко возрастает.

6. Проверяем сечение на совместное действие нормальных и касательных напряжений по четвертой теории прочности:

$$\sigma^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

Проверка делается в сечении, где изгибающий момент и поперечная сила близки к наибольшим значениям, т.е. в сечении 3 ( $Q_3 = 65 \text{ кН}$ ,  $M_3 = 90 \text{ кН}\times\text{м}$ ), а в самом сечении – в точке, где соединяется полочка и стенка двутавра, а касательное напряжение максимально, т.е. в точке 3 (см. рис. 40).

Определяем нормальное напряжение в точках 2 (3) и 5 (6):

$$\sigma_{2,3,5,6} = \frac{M_3}{J_x} y_3.$$

Для рассматриваемого сечения  $y_3 = (H/2) - t = 15,38 \text{ см}$

Отсюда получаем:

$$\sigma_{2,3,5,6} = \frac{90 \cdot 10^{-3}}{9840 \cdot 10^{-8}} \cdot 15,38 \cdot 10^{-2} = 140,7 \text{ МПа}.$$

Для построения эпюры нормальных напряжений при изгибающем моменте  $M_3 = 90 \text{ кН}\times\text{м}$  определим наибольшие нормальные напряжения, которые возникают в точках 1 и 7 (см. рис. 40):

$$\sigma_{1,7} = \frac{M_3}{W_x} = \frac{90 \cdot 10^{-3}}{597 \cdot 10^{-6}} = 150,8 \text{ МПа}$$

Определяем касательные напряжения в точке 3:

$$\tau_3 = \frac{Q_3 S_{x3}^*}{b J_x}.$$

Для точки 3 ширина сечения  $b = d = 0,7 \text{ см}$ , статический момент площади отсеченной части равен статическому моменту полочки, т.е. прямоугольника  $B \times t = 14 \times 1,12 \text{ см}$ .

Тогда

$$S_{x3}^* = B t y_c = 14 \cdot 1,12 \cdot 15,94 = 249,9 \text{ см}^3,$$

где  $y_c = \frac{H}{2} - \frac{t}{2} = \frac{33 - 1,12}{2} = 15,94 \text{ см}.$

Следовательно, касательное напряжение в точке 3

$$\tau_3 = \frac{65 \cdot 10^{-3} \cdot 249,9 \cdot 10^{-6}}{0,7 \cdot 10^{-2} \cdot 9840 \cdot 10^{-8}} = 23,6 \text{ МПа}.$$

Для точки 2 статический момент площади отсеченной части остается практически тем же, т.е.  $S^*_{x2} = S^*_{x3} = 249,9 \text{ см}^3$ , но ширина сечения  $b = B = 14 \text{ см}$ . Поэтому касательные напряжения в точке 2

$$\tau_2 = \frac{65 \cdot 10^{-3} \cdot 249,9 \cdot 10^{-6}}{14 \cdot 10^{-2} \cdot 9840 \cdot 10^{-8}} = 1,2 \text{ МПа}.$$

Для точки нейтральной линии (точка 4) ширина сечения  $b = d = 0,7 \text{ см}$ , а статический момент площади отсеченной части следует взять для половины сечения:  $S^*_{x \max} = S^*_x = 339 \text{ см}^3$ .

Следовательно, касательное напряжение в точке 4

$$\tau_4 = \frac{65 \cdot 10^{-3} \cdot 339 \cdot 10^{-6}}{0,7 \cdot 10^{-2} \cdot 9840 \cdot 10^{-8}} = 31,9 \text{ МПа}.$$

Для нижней половины сечения в силу симметрии сечения относительно оси X  $\tau_5 = \tau_3 = 23,6 \text{ МПа}$ ,  $\tau_6 = \tau_2 = 1,2 \text{ МПа}$ .

Рассчитываем эквивалентное напряжение в точке 3 по четвертой теории прочности:

$$\sigma_{\text{экв}}^{IV} = \sqrt{140,7^2 + 3 \cdot 23,6^2} = 146,5 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

## 6. КРУЧЕНИЕ

Кручение – вид деформации, характеризующийся взаимным поворотом поперечных сечений бруса под влиянием моментов (пары сил), действующих в этих сечениях (рис. 41).

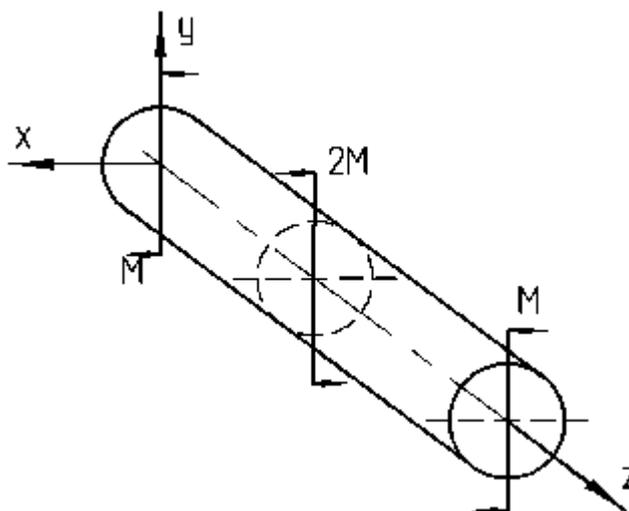


Рис. 41

При кручении в каждом сечении бруса действует только один внутренний силовой фактор – крутящий момент  $M_z$  ( $M_{кр}$ ).

Крутящий момент равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных по одну сторону от сечения.

Крутящий момент считается положительным, если при взгляде со стороны внешней нормали к сечению он будет направлен против часовой стрелки.

При расчете валов часто бывает задана передаваемая мощность  $N$  в киловаттах и частота вращения  $n$  в оборотах в минуту. При этом крутящий момент может быть определен следующим образом:

$$\tau = \frac{M_{кр}}{J_{\rho}} \rho,$$

При кручении в каждом сечении возникают внутренние касательные напряжения, которые в произвольной точке сечения определяются по формуле

$$\tau = \frac{M_{кр}}{J_{\rho}} \rho,$$

где  $M_{кр}$  – крутящий момент в сечении бруса;

$\rho$  – расстояние от центра сечения до точки, в которой определяется напряжение;

$J_{\rho}$  – полярный момент инерции сечения.

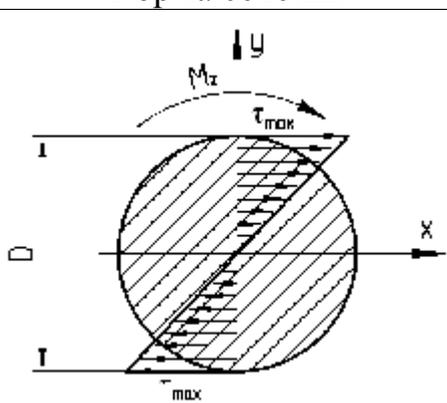
Максимальные касательные напряжения возникают на контуре сечения:

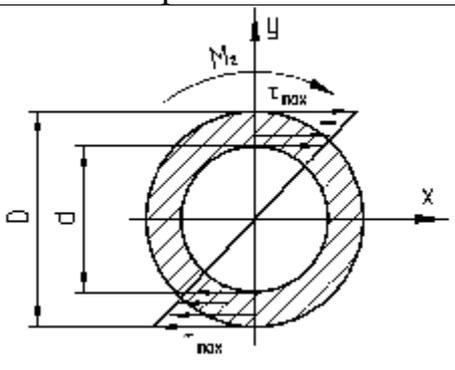
$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}},$$

где  $W_{\rho}$  – полярный момент сопротивления сечения.

Формулы для определения полярного момента инерции и полярного момента сопротивления для круглого и кольцевого сечений, приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Характеристики сечений при кручении

Форма сечения	$J_{\rho}$	$W_{\rho}$
	$\frac{\pi D^4}{32} \cong 0.1 D^4$	$\frac{\pi D^3}{16} \cong 0.2 D^3$

Форма сечения	$J_p$	$W_p$
	$\frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$	$\frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$
$\alpha = \frac{d}{D}$		

Если крутящий момент и диаметр сечения на участке бруса длиной  $l$  являются постоянными величинами, то угол закручивания

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GJ_p},$$

где  $GJ_p$  – жесткость стержня при кручении.

В случае постоянства крутящего момента лишь в пределах отдельных участков бруса или ступенчатого изменения его поперечного сечения формулу для определения угла закручивания, можно применять только по участкам.

Прочность бруса, работающего на кручение, считают обеспеченной, если наибольшие касательные напряжения, возникающие в его опасном поперечном сечении, не превышают допускаемых. Таким образом, условие прочности имеет следующий вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} \leq [\tau],$$

где  $[\tau]$  – допускаемое напряжение при кручении.

Помимо расчета на прочность валы рассчитывают и на жесткость, ограничивая погонные углы закручивания некоторой допускаемой величиной  $[\theta]$ :

$$\theta_{\max} = \frac{M_{кр}}{GJ_p} \leq [\theta].$$

### *Расчеты на кручение статически определимых систем*

#### Задача 13

Ступенчатый стальной брус круглого поперечного сечения жестко заделан одним концом и нагружен, как показано на рисунке 42. Построить эпюры крутящих моментов, максимальных касательных напряжений. Определить углы поворота поперечных сечений. Проверить прочность бруса при  $[\tau] = 60$  МПа.

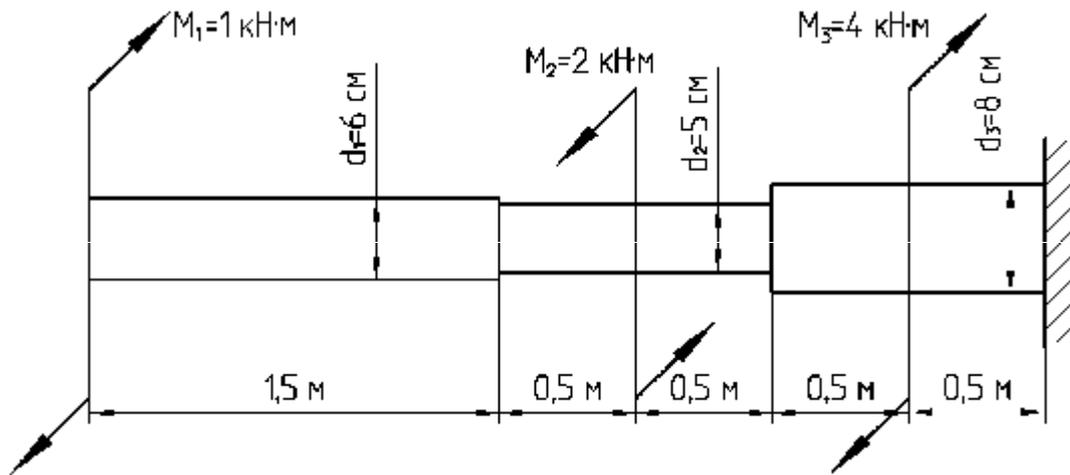


Рис. 42

### Решение

1. Эпюру крутящих моментов строим, начиная от свободного (левого) конца, что позволяет не определять реактивный момент в заделке.

Сечениями, где приложены внешние моменты, стержень разбивается на три участка: I, II, III (рис. 43, а).

Проведя произвольное сечение а-а на участке I и составляя для оставленной части (рис. 43, б) уравнение равновесия  $M_z = 0$ , получаем:

$$M_{кр I} = -M_1 = -1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Крутящий момент  $M_{кр I}$  сохраняет постоянное значение во всех сечениях участка I.

Для остальных участков находим крутящие моменты как алгебраические суммы внешних моментов, приложенных по одну сторону (в нашем случае – левую) от сечения. Отсеченные части отдельно не изображаем.

Участок II –

$$M_{кр II} = -M_1 + M_2 = -1 + 2 = 1 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

участок III –

$$M_{кр III} = -M_1 + M_2 - M_3 = -1 + 2 - 4 = -3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По полученным данным строим эпюру крутящих моментов. Эпюра представлена на рисунке 43, в.

2. Для нахождения опасного сечения строим эпюру максимальных касательных напряжений, пользуясь формулой

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}}.$$

Определим полярные моменты сопротивления для каждого диаметра:

$$W_{\rho 1} = \frac{\pi d_1^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 6^3}{16} = 42,4 \text{ см}^3,$$

$$W_{\rho 2} = \frac{\pi d_2^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 5^3}{16} = 24,5 \text{ см}^3,$$

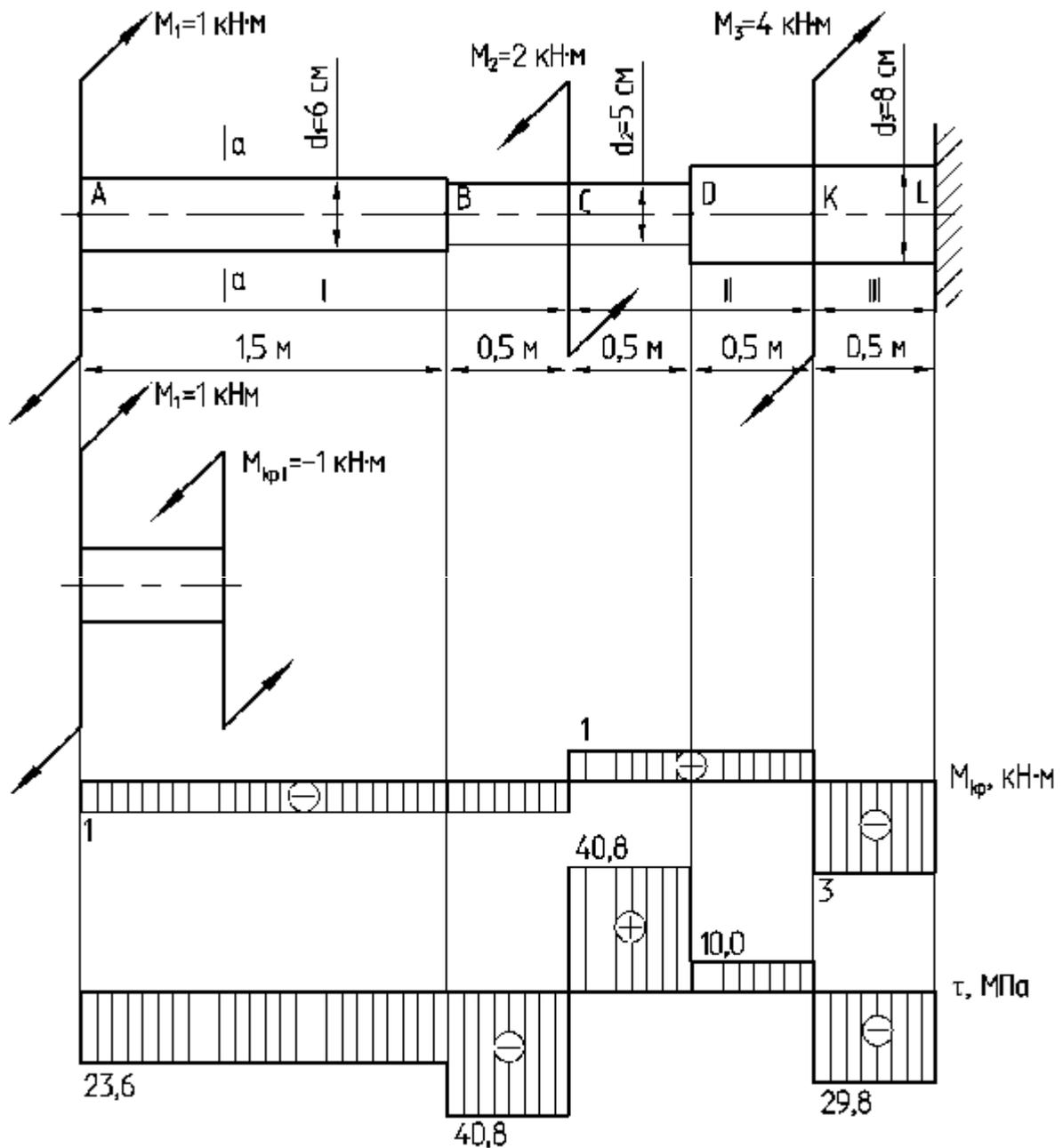


Рис. 43

$$W_{\rho 3} = \frac{\pi d_3^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 8^3}{16} = 100,5 \text{ см}^3.$$

Определим касательные напряжения для каждого участка:

– участок АВ ( $M_{kpI} = -1 \text{ кН} \times \text{м}$ ,  $W_{\rho 1} = 42,4 \text{ см}^3$ ) –

$$\tau_{\max AB} = \frac{M_{kpI}}{W_{\rho 1}} = \frac{-1 \cdot 10^{-3}}{42,4 \cdot 10^{-6}} = -23,6 \text{ МПа};$$

– участок ВС ( $M_{kpI} = -1 \text{ кН} \times \text{м}$ ,  $W_{\rho 1} = 24,5 \text{ см}^3$ ) –

$$\tau_{\max BC} = \frac{M_{kpI}}{W_{\rho 2}} = \frac{-1 \cdot 10^{-3}}{24,5 \cdot 10^{-6}} = -40,8 \text{ МПа};$$

– участок CD ( $M_{кр II} = 1 \text{ кН} \times \text{м}$ ,  $W_{\rho 2} = 24,5 \text{ см}^3$ ) –

$$\tau_{\max CD} = \frac{M_{кр II}}{W_{\rho 2}} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{24,5 \cdot 10^{-6}} = 40,8 \text{ МПа};$$

– участок DK ( $M_{кр II} = 1 \text{ кН} \times \text{м}$ ,  $W_{\rho 3} = 100,5 \text{ см}^3$ ) –

$$\tau_{\max DK} = \frac{M_{кр II}}{W_{\rho 3}} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{100,5 \cdot 10^{-6}} = 10 \text{ МПа};$$

– участок KL ( $M_{кр III} = -3 \text{ кН} \times \text{м}$ ,  $W_{\rho 3} = 100,5 \text{ см}^3$ ) –

$$\tau_{\max KL} = \frac{M_{кр III}}{W_{\rho 3}} = \frac{-3 \cdot 10^{-3}}{100,5 \cdot 10^{-6}} = -29,8 \text{ МПа}.$$

По найденным значениям касательных напряжений строим эпюру максимальных касательных напряжений (рис. 43, г).

Опасными оказались поперечные сечения участков ВС и CD. Таким образом, опасными оказались не те сечения, в которых крутящий момент максимален. Условие прочности  $\tau_{\max} \leq [\tau]$  выполняется.

3. Определим углы поворота поперечных сечений, используя формулу

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GJ_{\rho}}.$$

Определим полярные моменты инерции для каждого диаметра:

$$J_{\rho 1} = \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 6^4}{32} = 127 \text{ см}^4,$$

$$J_{\rho 2} = \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 5^4}{32} = 61,3 \text{ см}^4,$$

$$J_{\rho 3} = \frac{\pi d_3^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 8^4}{32} = 402 \text{ см}^4.$$

Определяем углы поворота, начиная с заземленного конца.

Определяем угол поворота сечения К, равный углу закручивания участка KL:

$$\varphi_{KL} = \frac{M_{кр III} \cdot 0,5}{GJ_{\rho 3}} = \frac{-3 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5}{8 \cdot 10^4 \cdot 402 \cdot 10^{-8}} = -4,66 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Определяем угол поворота сечения D относительно сечения К:

$$\varphi_{DK} = \frac{M_{кр II} \cdot 0,5}{GJ_{\rho 3}} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5}{8 \cdot 10^4 \cdot 402 \cdot 10^{-8}} = 1,55 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Абсолютный угол поворота сечения D (относительно заделки) равен алгебраической сумме углов закручивания участков KL и DK:

$$\varphi_D = \varphi_{KL} + \varphi_{DK} = (-4,66 + 1,55) \cdot 10^{-3} = -3,11 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Определяем угол поворота сечения В относительно сечения С:

$$\varphi_{BC} = \frac{M_{кр I} \cdot 0,5}{GJ_{\rho 2}} = \frac{-1 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5}{8 \cdot 10^4 \cdot 61,3 \cdot 10^{-8}} = -10,20 \cdot 10^{-3} \text{ рад} .$$

Абсолютный угол поворота сечения В (относительно заделки) равен алгебраической сумме углов закручивания участков KL, DK, CD и BC:

$$\begin{aligned} \varphi_B &= \varphi_{KL} + \varphi_{DK} + \varphi_{CD} + \varphi_{BC} = (-4,66 + 1,55 + 10,20 - 10,20) \cdot 10^{-3} = \\ &= -3,11 \cdot 10^{-3} \text{ рад} . \end{aligned}$$

Определяем угол поворота сечения А относительно сечения В:

$$\varphi_{AB} = \frac{M_{кр I} \cdot 1,5}{GJ_{\rho 1}} = \frac{-1 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5}{8 \cdot 10^4 \cdot 127 \cdot 10^{-8}} = -14,76 \cdot 10^{-3} \text{ рад} .$$

Абсолютный угол поворота сечения А (относительно заделки) равен алгебраической сумме углов закручивания участков KL, DK, CD, BC и АВ:

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \varphi_{KL} + \varphi_{DK} + \varphi_{CD} + \varphi_{BC} + \varphi_{AB} = (-4,66 + 1,55 + 10,20 - 10,20 - 14,76) \cdot 10^{-3} = \\ &= -17,87 \cdot 10^{-3} \text{ рад} . \end{aligned}$$

*Расчеты на кручение статически неопределимых систем*

#### Задача 14

Стальной стержень круглого поперечного сечения нагружен парами сил (рис 44). Определить диаметр поперечного сечения стержня, построить эпюру максимальных касательных напряжений, приняв допускаемое напряжение  $[\tau] = 80 \text{ МПа}$  .

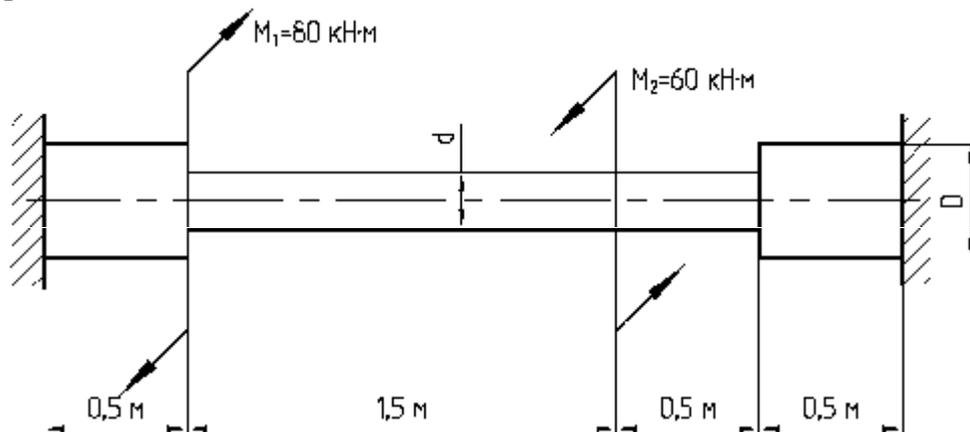


Рис. 44

Решение

1. Определяем степень статической неопределённости системы. Освобождаем стержень от связей, заменяем их реактивными моментами в заделках – А М и В М (рис. 45, б).

Условием равновесия стержня является только одно уравнение крутящих моментов  $\sum M_z = 0$ . Составляем уравнения равновесия стержня, взяв сумму моментов, приложенных к стержню относительно его оси:

$$M_A + M_1 - M_2 + M_B = 0,$$

$$M_A + 80 - 60 + M_B = 0,$$

$$M_A + M_B = -20.$$

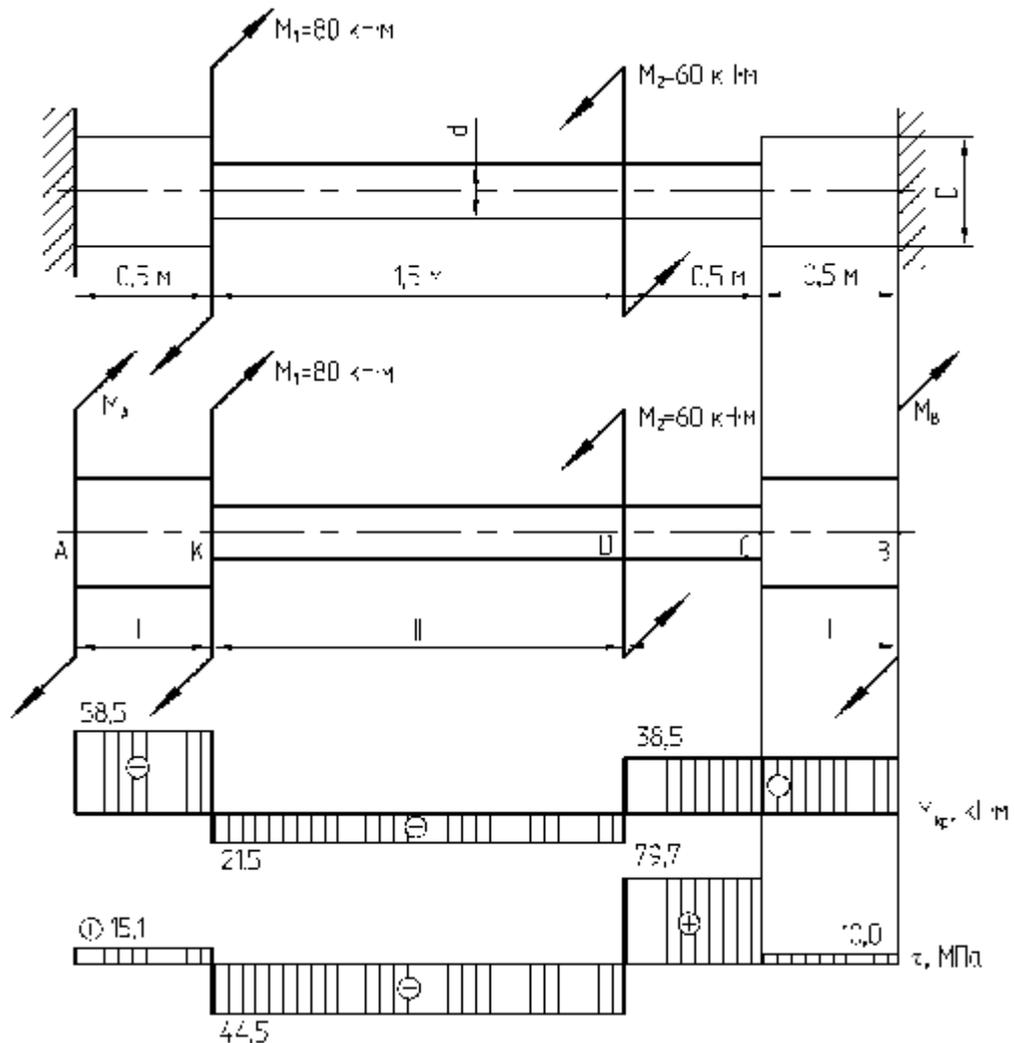


Рис. 45

Как видно, уравнение содержит два неизвестных момента. Задача является один раз статически неопределимой.

2. Сечениями, где приложены внешние моменты, стержень разбивается на три участка: I, II, III. Определим значения крутящих моментов в сечениях стержня, рассматривая отсеченные правые части:

участок I –

$$M_{кр I} = M_B ;$$

участок II –

$$M_{кр II} = M_B - M_2 = M_B - 60 ;$$

участок III –

$$M_{кр III} = M_B - M_2 + M_1 = M_B - 60 + 80 = M_B + 20.$$

3. Рассмотрим геометрическую сторону задачи.

Условия деформации стержня состоят в том, что угол закручивания концевых сечений А и В равен нулю, т.е.  $\varphi_A = \varphi_B = 0$ .

4. Рассмотрим физическую сторону задачи.

Угол закручивания сечения А или сечения В определяется как сумма углов закручивания отдельных участков стержня. Выразим в уравнении совместности деформации абсолютные углы закручивания участков стержня по формуле закона Гука при кручении:

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GJ_{\rho}}$$

Вычисляем углы закручивания на каждом участке:

участок ВС –

$$\varphi_{BC} = \frac{M_B \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}};$$

участок CD –

$$\varphi_{CD} = \frac{(M_B - M_2) \cdot 1,5}{GJ_{\rho 2}} = \frac{(M_B - 60) \cdot 1,5}{GJ_{\rho 2}};$$

участок DK –

$$\varphi_{DK} = \frac{(M_B - M_2 + M_1) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 2}} = \frac{(M_B - 60 + 80) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 2}} = \frac{(M_B + 20) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 2}};$$

участок АК –

$$\varphi_{AK} = \frac{(M_B - M_2 + M_1) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}} = \frac{(M_B - 60 + 80) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}} = \frac{(M_B + 20) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}}.$$

Здесь  $J_{\rho 1}$ ,  $J_{\rho 2}$  – полярные моменты инерции поперечных сечений вала диаметром  $D$  и  $d$  соответственно.

Так как по условию  $d/D = 0,5$ , то

$$J_{\rho 1} = \frac{\pi D^4}{32},$$

$$J_{\rho 2} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(0,5D)^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} \cdot 0,5^4 = 0,5^4 \cdot J_{\rho 1}.$$

$$\varphi_a = \frac{M_B \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}} + \frac{(M_B - 60) \cdot 1,5}{GJ_{\rho 2}} + \frac{(M_B + 20) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 2}} + \frac{(M_B + 20) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}} = 0.$$

С учетом соотношения между  $J_{\rho 1}$  и  $J_{\rho 2}$  выражение для  $\varphi_a$  запишется следующим образом:

$$\varphi_a = \frac{M_B \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}} + \frac{(M_B - 60) \cdot 1,5}{G \cdot 0,5^4 J_{\rho 1}} + \frac{(M_B + 20) \cdot 0,5}{G \cdot 0,5^4 J_{\rho 1}} + \frac{(M_B + 20) \cdot 0,5}{GJ_{\rho 1}} = 0.$$

Так как  $1/GJ_{\rho 1} \neq 0$ , этот множитель можно сократить и уравнение запишется следующим образом:

$$M_B \cdot 0,5 + \frac{(M_B - 60) \cdot 1,5}{0,5^4} + \frac{(M_B + 20) \cdot 0,5}{0,5^4} + (M_B + 20) \cdot 0,5 = 0,$$

$$0,5M_B + 24M_B - 1440 + 8M_B + 160 + 0,5M_B + 10 = 0,$$

$$33M_B = 1270,$$

$$M_B = 38,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Следовательно,

$$M_A = -20 - M_B = -20 - 38,5 = -58,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5. Определяем величины крутящих моментов на участках стержня:  
участок I –

$$M_{\text{кр I}} = M_B = 38,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

участок II –

$$M_{\text{кр II}} = M_B - M_2 = M_B - 60 = 38,5 - 60 = -21,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

участок III –

$$M_{\text{кр III}} = M_B - M_2 + M_1 = M_B - 60 + 80 = M_B + 20 = 38,5 + 20 = 58,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По полученным значениям строим эпюру крутящих моментов (рис. 45, в).

6. Диаметр стержня определим из условия прочности стержня при кручении:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{кр max}}}{W_{\rho}} \leq [\tau].$$

Наибольшая величина крутящего момента  $M_{\text{кр max}} = 58,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$  на участке стержня АЕ большего диаметра, для которого полярный момент инерции определяется по формуле

$$W_{\rho 1} = \frac{\pi D^3}{16}.$$

Отсюда

$$D = \sqrt[3]{\frac{16M_{\text{кр max}}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 58,5 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 80}} \cdot 10^2 = 15,5 \text{ см}.$$

Следовательно,

$$d = D \cdot 0,5 = 15,5 \cdot 0,5 = 7,8 \text{ см}.$$

Наибольшая величина крутящего момента  $M_{\text{кр max}} = 38,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$  на участке стержня CD меньшего диаметра, для которого полярный момент инерции определяется по формуле

$$W_{\rho 2} = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Отсюда

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_{кр \max}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 38,5 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 80}} \cdot 10^2 = 13,5 \text{ см}.$$

Следовательно,

$$D = \frac{d}{0,5} = \frac{13,5}{0,5} = 27,0 \text{ см}.$$

Принимаем:  $d = 13,5 \text{ см}$ ,  $D = 27,0 \text{ см}$ .

7. Строим эпюру максимальных касательных напряжений, пользуясь формулой

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}}.$$

Определим полярные моменты сопротивления для каждого диаметра:

$$W_{\rho 1} = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 27,0^3}{16} = 3863 \text{ см}^3,$$

$$W_{\rho 2} = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 13,5^3}{16} = 483 \text{ см}^3.$$

Определим касательные напряжения для каждого участка:

– участок BC ( $M_{кр I} = 38,5 \text{ кН} \times \text{м}$ ,  $W_{\rho 1} = 3863 \text{ см}^3$ ) –

$$\tau_{\max BC} = \frac{M_{кр I}}{W_{\rho 1}} = \frac{38,5 \cdot 10^{-3}}{3863 \cdot 10^{-6}} = 10,0 \text{ МПа};$$

– участок CD ( $M_{кр I} = 38,5 \text{ кН} \times \text{м}$ ,  $W_{\rho 2} = 483 \text{ см}^3$ ) –

$$\tau_{\max CD} = \frac{M_{кр I}}{W_{\rho 2}} = \frac{38,5 \cdot 10^{-3}}{483 \cdot 10^{-6}} = 79,7$$

– участок DK ( $M_{кр II} = -21,5 \text{ кН} \times \text{м}$ ,  $W_{\rho 2} = 483 \text{ см}^3$ ) –

$$\tau_{\max DK} = \frac{M_{кр II}}{W_{\rho 2}} = \frac{-21,5 \cdot 10^{-3}}{483 \cdot 10^{-6}} = -44,5 \text{ МПа};$$

– участок АК ( $M_{кр III} = 58,5 \text{ кН} \times \text{м}$ ,  $W_{\rho 1} = 3863 \text{ см}^3$ ) –

$$\tau_{\max AK} = \frac{M_{кр III}}{W_{\rho 1}} = \frac{58,5 \cdot 10^{-3}}{3863 \cdot 10^{-6}} = 15,1 \text{ МПа}.$$

По найденным значениям касательных напряжений строим эпюру максимальных касательных напряжений (рис. 45).

### 3. Методические рекомендации (указания) к лабораторным работам

#### 1. Общие сведения к проведению лабораторных работ

Лабораторные работы проводятся в соответствии с данными методическими материалами и руководством по эксплуатации МСМ-01- 00.000.000 РЭ

К выполнению лабораторных работ допускаются только обучающиеся, ознакомившиеся с указанными материалами.

#### 1.1 Состав и устройство стенда

1.1.1 Конструкция стенда представлена на рисунке 3.1. Сменные элементы для различных видов испытаний показаны на рисунке 3.2.

Стенд учебный МСМ-01-09 «Механические свойства материалов» включает в себя (рисунки 3.1 и 3.2):

- опоры 1, обеспечивающие устойчивость стенда при работе;
- рукоятку 2 ручного привода насоса;
- нижнюю опорную плиту 3;
- вентиль 4 для перепускания рабочей жидкости из поршневой полости гидроцилиндра в бак;
- гидроцилиндр 5, совмещенный с баком для рабочей жидкости и ручным насосом;
- стойки 6;
- нижнюю траверсу 7;
- направляющие 8;
- верхнюю опорную плиту 9;
- направляющие втулки 10 с пресс-масленками;
- манометр 11;
- переходник 12;
- верхнюю траверсу 13;
- измеритель перемещений 14 с цифровой индикацией;
- верхнюю опору 15 для испытаний на сжатие, ввинчиваемую в верхнюю опорную плиту;
- упор 16 для проведения испытаний на изгиб (радиус упора  $R=4$  мм);
- гайку-втулку 17 для фиксации упора 16 в верхней опорной плите;
- стопорные пальцы 18;

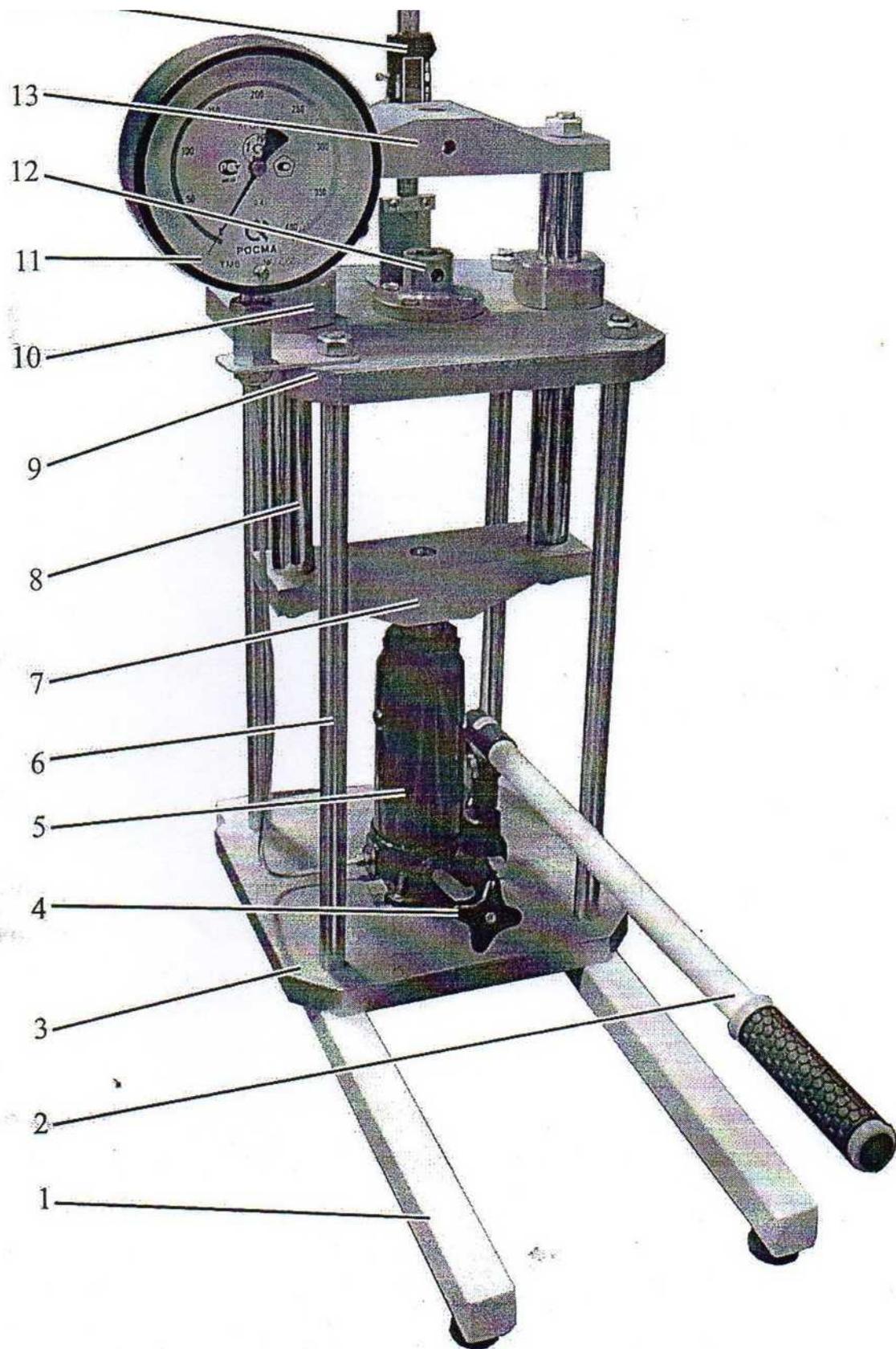


Рис. 3.1. Общий вид

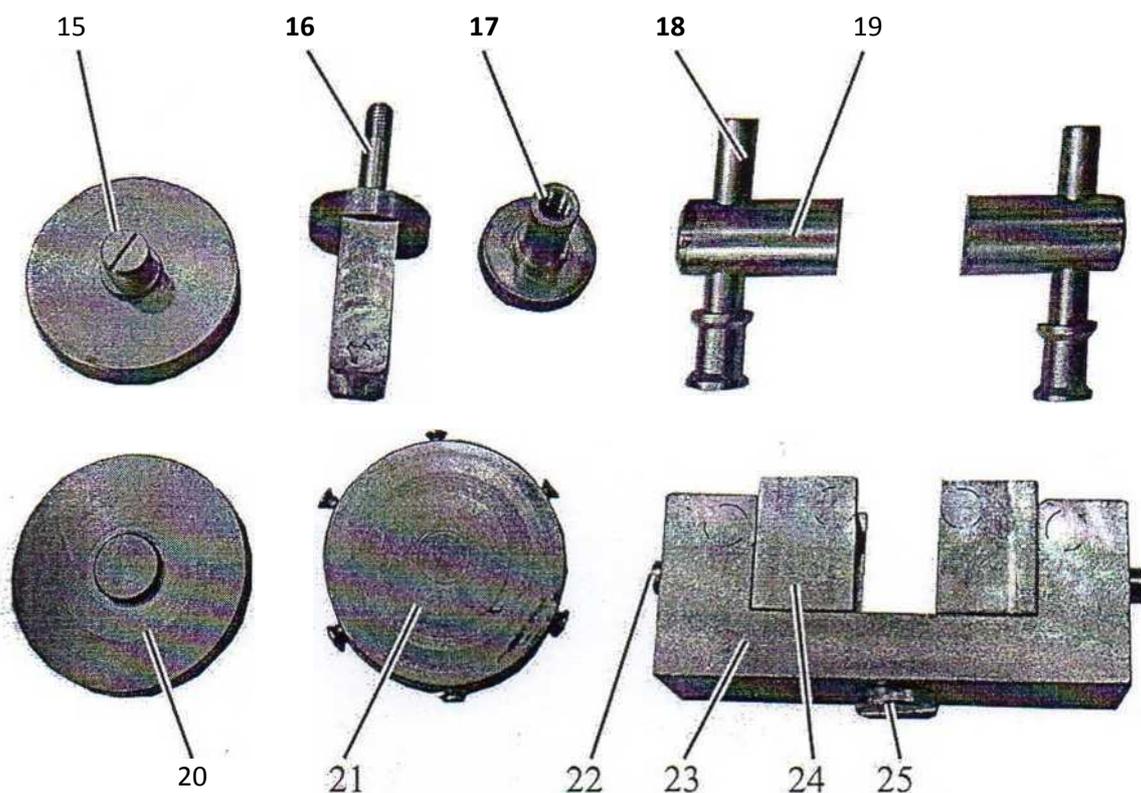


Рис. 3.2 Сменные элементы станда

- втулки-захваты 19 для фиксации резьбовых головок образцов (резьба на М10);
- нижнюю опору 20 для испытаний на сжатие;
- нижнюю сферическую опору 21 для испытаний на сжатие образцов с непараллельными гранями;
- нижнюю опору 23 для испытаний на изгиб с центрирующим винтом 25 и дополнительными опорными вставками 24, фиксируемыми винтами 22, для уменьшения расстояния между опорами;
- защитную сетку, устанавливаемую на нижнюю траверсу при испытаниях на изгиб образца из хрупкого материала.

Для предохранения измерителя от перегрузок, возникающих при разрушении образцов, его подвижная измерительная часть закреплена к верхней траверсе посредством магнитов. При плавном перемещении траверсы в ходе испытания магниту обеспечивают надежную фиксацию измерителя, а в момент разрушения образца допускают проскальзывание измерителя, ограничивая, таким образом, его ускорение.

Тарировочная зависимость:

Сила ( $H$ ) - давление (бар):  
 $F=100,3P-310$

## 2. Описание лабораторных работ

### 2.1. Лабораторная работа №1. Определение нагрузки разрушения образца из пластичного материала при растяжении.

Цель работы: испытание образца из пластичного материала на растяжение до разрушения, определение нагрузки разрушения, понятие о пределе прочности.

#### *Экспериментальная часть*

1. Измерить диаметр  $d$  образца, записать в таблицу 3.1.1.
2. Установить образец в захваты путем навинчивания (рисунок 3.1.1)



Рис. 3.1.1. Установка образца в захваты

3. Установить захваты в переходник и верхнюю траверсу, после чего установить стопорные пальцы (рисунок 3.1.2).

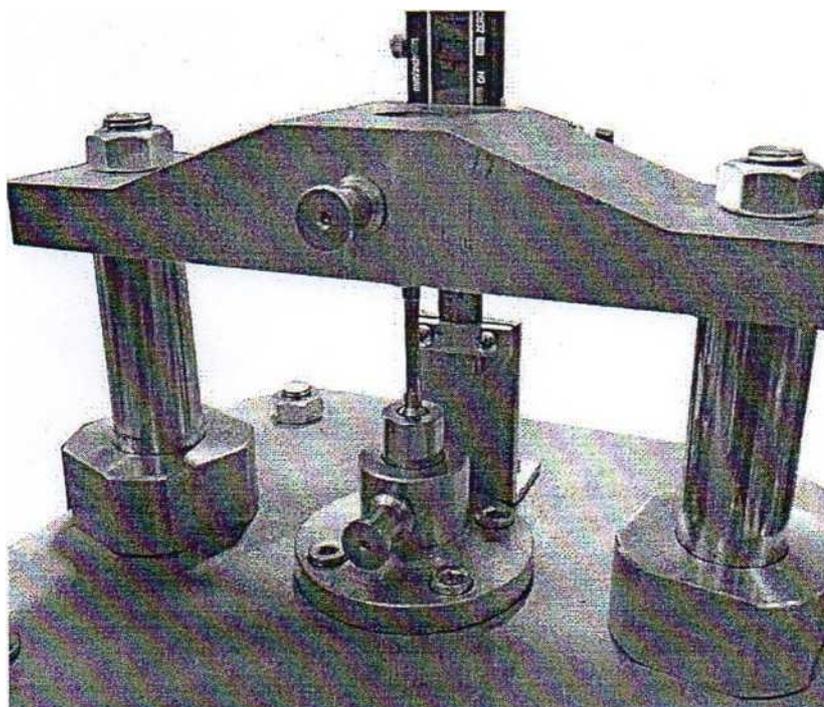


Рис. 3.1.2 Установка сменных элементов стенда для испытаний на растяжение.

4. Закрывать кран 4 (рисунок 3.1), вращая его рукоятку по ходу часовой стрелки.

5. Качая рукоятку 2 (рисунок 1.1), начать подъем подвижной траверсы. Давление в системе контролировать по манометру 11 (рисунок 1.1). Движения рукояткой необходимо осуществлять плавно.
6. Записать максимальное значение давления  $P_1$  в процессе испытаний и величину давления  $P_2$  непосредственно перед разрушением образца в таблицу 2.1.1
7. По тарировочной зависимости вычислить значения усилий, соответствующих записанным давлениям, и значения растягивающих напряжений.
8. Сделать выводы о характере изменения нагрузки при разрушении пластичного материала.

Таблица 3.1.1 Протокол испытаний

$d, мм$	$P_1, бар$		$F_1, кН$		$\sigma_1,$ МПа	
	$P_2, бар$		$F_2, кН$		$\sigma_2,$ МПа	

2.2. Лабораторная работа №2. Определение нагрузки разрушения образца из хрупкого материала при растяжении.

Цель работы: испытание образца из хрупкого материала на растяжение до разрушения, определение нагрузки разрушения, понятие о пределе прочности.

#### Экспериментальная часть

1. Измерить диаметр  $d$  образца, записать в таблицу 3.2.1.
2. Установить образец в захваты путем навинчивания (рисунок 3.1.1)
3. Установить захваты в переходник и верхнюю траверсу, после чего установить стопорные пальцы (рисунок 3.1.2).
4. Закрывать кран 4 (рисунок 1.1), вращая его рукоятку по ходу часовой стрелки.
5. Качая рукоятку 2 (рисунок 3.1), начать подъем подвижной траверсы. Давление в системе контролировать по манометру 11 (рисунок 3.1). Движения рукояткой необходимо осуществлять плавно.
6. Записать максимальное значение давления  $P_1$  в процессе испытаний в таблицу 3.2.1
7. По тарировочной зависимости вычислить значение усилия, соответствующего записанному давлению, и значение растягивающих напряжений.
8. Сделать выводы о характере изменения нагрузки при разрушении хрупкого материала.

Таблица 3.2.1 Протокол испытаний

$d, \text{ мм}$		$P_1, \text{ бар}$		$F_1, \text{ кН}$		$\sigma_1, \text{ МПа}$	
-----------------	--	--------------------	--	-------------------	--	-------------------------	--

2.3 Лабораторная работа №3. Определение нагрузки разрушения образца из хрупкого неоднородного материала на сжатие.

Цель работы: испытание образца из хрупкого материала на сжатие до разрушения, определение нагрузки разрушения, понятие о пределе прочности при сжатии.

#### Экспериментальная часть

1. При испытаниях следует использовать образцы в форме прямоугольного параллелепипеда из строительных смесей, либо цементно-песочного раствора. Рекомендуемые размеры образцов от  $25^{\wedge}25 \times 25$  мм до  $40 \times 40 \times 40$  мм.
2. Измерить размеры образца  $a, b, c$ , записать в таблицу 3.3.1.
3. Установить в верхнюю опорную плиту опору для испытаний на сжатие, путем ее ввинчивания в плиту до упора (рисунок 3.3.1)

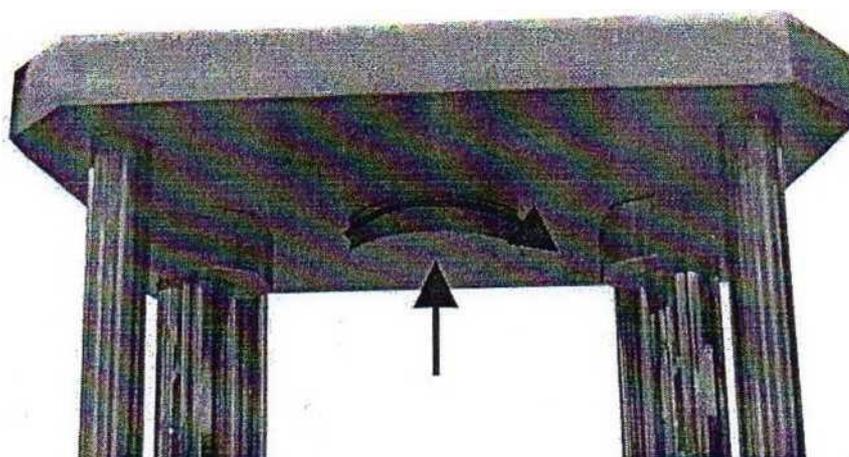


Рис. 2.3.1 Установка верхней опоры на сжатие

4. Установить на нижнюю траверсу сферическую опору, совместив центрирующий выступ в опоре с отверстием в траверсе (рисунок 3.3.2).

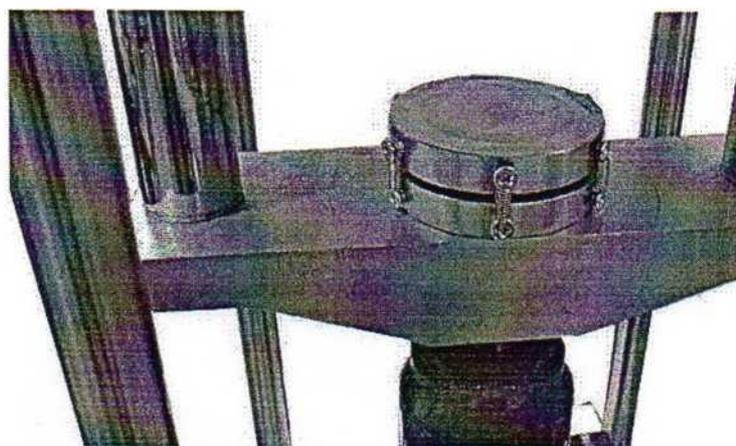


Рисунок 2.3.2 Установка нижней сферической опоры на сжатие.

Рис. 3.3.2 Установка нижней сферической опоры на сжатие

облегчения сбора обломков образца после разрушения.

6. Установить образец в центре опор.
7. Закрывать кран 4 (рисунок 3.1), вращая его рукоятку по ходу часовой стрелки.
8. Качая рукоятку 2 (рисунок 3.1), начать подъем подвижной траверсы. Давление в системе контролировать по манометру 11 (рисунок 3.1). Движения рукояткой необходимо осуществлять плавно.
9. Записать максимальное значение давления  $P_1$  в процессе испытаний в таблицу 3.3.1
10. По тарировочной зависимости вычислить значение усилия, соответствующего записанному давлению, и значение сжимающих напряжений.
11. Сделать выводы о характере изменения нагрузки при сжатии хрупкого материала до разрушения.
- 12.

Таблица 2.3.1 Протокол испытаний

$a, \text{ мм}$		$b, \text{ мм}$		$C, \text{ мм}$	
$P_1, \text{ бар}$		$F_1, \text{ кН}$		$\sigma_1, \text{ МПа}$	

2.4 Лабораторная работа №4. Построение диаграммы деформирования при растяжении пластичного материала.

Цель работы: изучение способа испытаний материалов на растяжение, изучение диаграммы деформирования стали и/или алюминиевого сплава при

растяжении, определение механических характеристик материалов при растяжении.

### *Экспериментальная часть*

1. Измерить диаметр  $d$  образца и его рабочую длину  $l$  (длину тонкой цилиндрической части), вычислить площадь поперечного сечения  $F_0$ , занести данные в таблицу 3.4.1. Тонким маркером (например, для CD дисков) нанести на тонкую цилиндрическую часть две метки на расстоянии  $l_0=5d$  (можно нанести метки разметочным штангенциркулем).
2. Установить образец в захваты путем навинчивания (рисунок 3.1.1)
3. Установить захваты в переходник и верхнюю траверсу, после чего установить стопорные пальцы (рисунок 3.1.2).
4. Закрыть кран 4 (рисунок 3.1), вращая его рукоятку по ходу часовой стрелки.
5. Качая рукоятку 2 (рисунок 3.1), начать подъем подвижной траверсы для выбора зазоров в соединениях. Давление в системе контролировать по манометру 11 (рисунок 3.1). Движения рукояткой необходимо осуществлять плавно. Увеличить давление до величины 20 бар.
6. Открыть кран 4 (рисунок 3.1), вращая его рукоятку против хода часовой стрелки на 1-2 оборота. При этом давление по манометру должно снизиться до 2-4 бар (1-2 деления).
7. Установить измеритель перемещения на 0, нажав кнопку «ZERO».
8. Закрыть кран 4 (рисунок 3.1), вращая его рукоятку по ходу часовой стрелки.
9. Качая рукоятку 2 (рисунок 3.1), начать подъем подвижной траверсы. Давление в системе контролировать по манометру 11 (рисунок 3.1). Движения рукояткой необходимо осуществлять плавно. Записывать текущее давление  $P$  и перемещение  $\Delta$  траверсы в таблицу 3.4.2, шаг записи точек по давлению - 10 бар, по перемещению - 0,1 мм. Испытание проводить до разрушения образца.
10. Вынуть стопорные пальцы, втулки-захваты и демонтировать из них части образца.
11. По тарировочной зависимости вычислить значение усилия, соответствующего записанным давлениям, значение растягивающих напряжений и деформаций.
12. Построить диаграммы зависимостей силы от перемещения и напряжения от деформации.
13. Все дальнейшие измерения и результаты вычислений следует заносить в таблицу 3.4.1.
14. Измерить диаметр  $d_K$  частей образца в самом тонком месте (шейке), вычислить площадь поперечного сечения  $F_K$ .
15. Сложить части образца вдоль его оси с минимально возможным зазором, измерить расстояние  $l_K$  между нанесенными метками.

16. Вычислить относительное удлинение после разрыва  $\delta=(l_K-l_0)/l_0$  и относительное сужение после разрыва  $\psi=(F_0-F_K)/F_0$ .

17. По диаграмме сила - перемещение определить усилие, действующее на образец в момент разрыва  $P_K$ . Рассчитать истинное сопротивление разрыву  $\sigma_{ист} = P_K/F_K$

18. По диаграмме напряжение - деформация определить временное сопротивление  $\sigma_B$  и предел текучести - физический  $\sigma_T$  или условный  $\sigma_{0,2}$

19. Сделать выводы о характере работы пластичных материалов при растяжении, об участках диаграммы деформирования, на которых деформации в материале обратимы, на которых возникают остаточные деформации, на которых начинается неустойчивое деформирование, ведущее к разрушению.

Таблица 2.4.1. Результаты испытаний

$l$ , мм				
$l_0$ , мм	$\delta=(l_K-l_0)/l_0$			
$l_K$ , мм				
$d$ , мм	$F_0=\pi*d^2/4$ , мм <sup>2</sup>		$\psi=(F_0-F_K)/F_0$ , %	
$d_K$ , мм				
$P_K, H$			$\sigma_{ист}=P_K/F_K$ МПа	
$\sigma_B$ , МПа				
$\sigma_T(\sigma_{0,2})$ , МПа				

Таблица 2.4.2. Протокол испытаний

$P$ , бар	$F$ , кН	$\Delta$ , мм	$\sigma$ , МПа	$\epsilon$ , %

## 2.5 Лабораторная работа № 5. Определение прочности хрупкого материала при испытаниях на изгиб.

Цель работы: испытание образца из хрупкого материала на изгиб до разрушения, определение нагрузки разрушения, понятие о пределе прочности при изгибе.

### *Экспериментальная часть*

1. Измерить высоту  $h$  и ширину  $b$  поперечного сечения образца, записать в таблицу 2.5.1.
2. Установить на нижнюю траверсу 7 (рисунок 1.1) опору 23 (рисунок 3.2) для испытаний на изгиб с базой 80 мм (демонтировать с опоры вставки 24)
3. Установить упор 16 (рисунок 3.2) в верхнюю опорную плиту 9 (рисунок 1.1) и зафиксировать его при помощи гайки втулки 17 (рисунок 3.2) переходник 12 (рисунок 3.1). Вид на устройство нагружения при испытаниях на изгиб показан на рисунке 3.5.1. Установка гайки-втулки показана на рисунке 3.5.2.

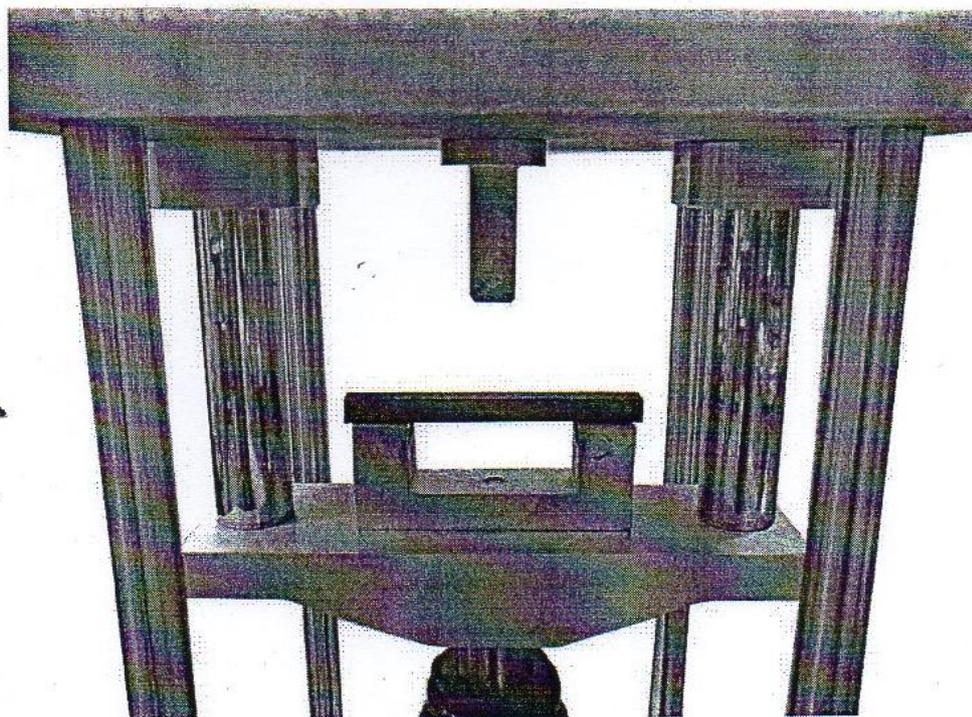


Рис. 3.5.1 Устройство нагружения для испытания на изгиб

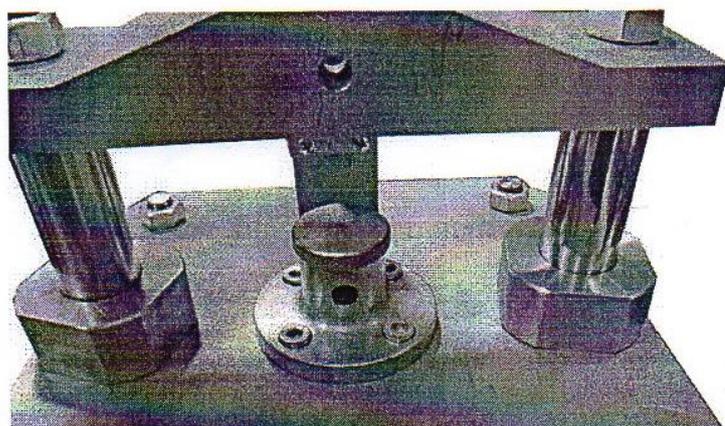


Рис. 3.5.2. Установка гайки-втулки

4. Установить образец посередине опоры.
5. Установить защитную сетку на опору и образец (рисунок 3.5.3).

**ВНИМАНИЕ! ИСПЫТАНИЕ ХРУПКОГО МАТЕРИАЛА НА ИЗГИБ БЕЗ ЗАЩИТНОЙ СЕТКИ СТРОГО ЗАПРЕЩЕНО.**

Поскольку в момент разрушения части образца приобретают значительную скорость.

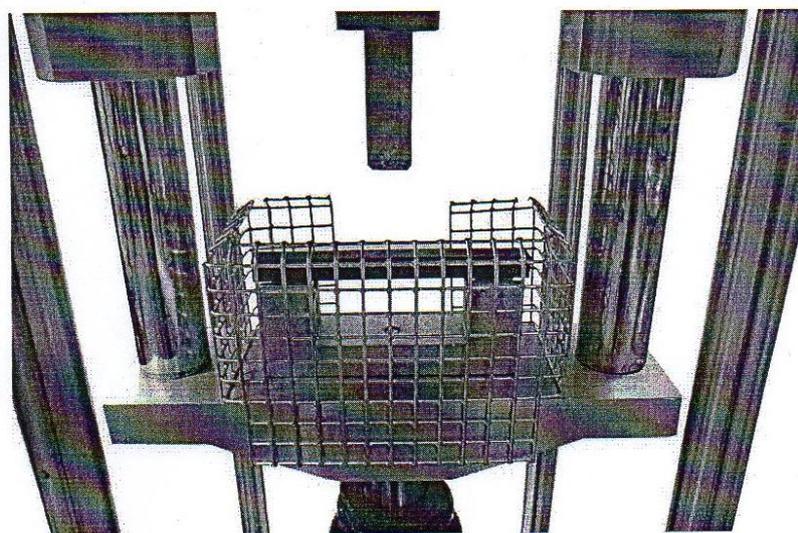


Рис. 3.5.3. Установка защитной сетки

6. Закрыть кран 4 (рисунок 3.1), вращая его рукоятку по ходу часовой стрелки.
7. Качая рукоятку 2 (рисунок 3.1), начать подъем подвижной траверсы. Давление в системе контролировать по манометру 11 (рисунок 3.1). Движения рукояткой необходимо осуществлять плавно.
8. Записать максимальное значение давления  $P_1$ , в процессе испытаний в таблицу 3.5.1

9. По тарировочной зависимости вычислить значение усилия, соответствующего записанному давлению, и значение максимальных растягивающих напряжений.

10. Сделать выводы о характере изменения нагрузки при разрушении хрупкого материала.

Таблица 2.5.1 Протокол испытаний

$b, \text{ мм}$	$h, \text{ мм}$	$P_1, \text{ бар}$		$F_1, \text{ кН}$		$\sigma_1, \text{ Мпа}$	
-----------------	-----------------	--------------------	--	-------------------	--	-------------------------	--

### 2.5 Лабораторная работа № 6. Проба пластичного материала на изгиб с заданным радиусом.

Цель работы: испытание образца из полосы пластичного материала на изгиб с заданным радиусом.

#### *Экспериментальная часть*

1. Измерить высоту  $h$  и ширину  $b$  поперечного сечения образца, записать в таблицу 3.6.1.

2. Установить на нижнюю траверсу 7 (рисунок 3.1) опору 23 (рисунок 3.2) для испытаний на изгиб с заданным радиусом  $R=4$  мм. (установить на опору вставки 24).

3. Установить упор 16 (рисунок 3.2) в верхнюю опорную плиту 9 (рисунок 3.1) и зафиксировать его при помощи гайки втулки 17 (рисунок 3.2) через переходник 12 (рисунок 3.1). Вид на устройство нагружения при испытаниях на изгиб показан на рисунке 3.6.1. Установка гайки-втулки показана на рисунке 3.6.2

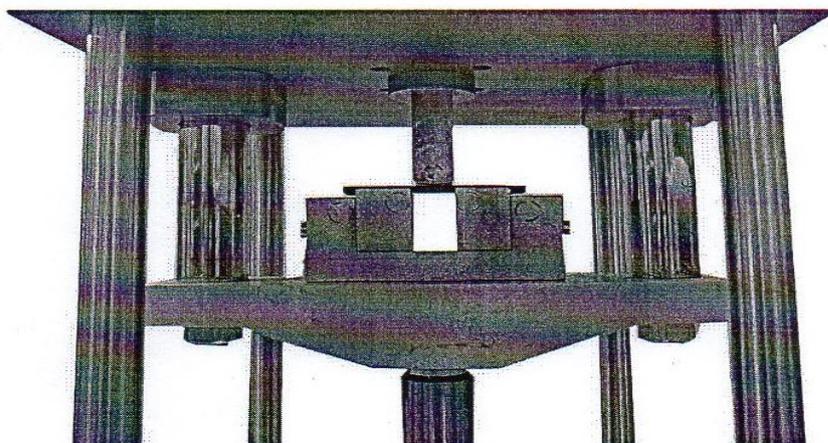


Рис. 3.6.1. Устройство нагружения для испытаний на изгиб с заданным радиусом

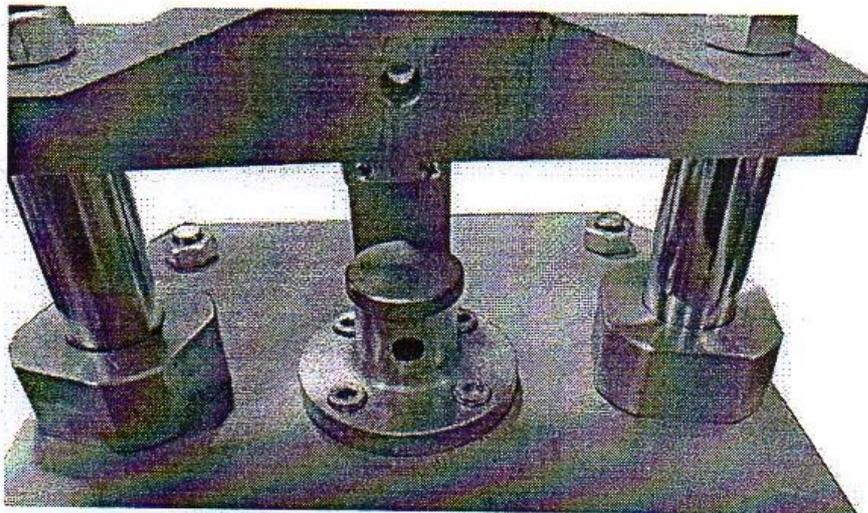


Рисунок 3.6.2. Установка гайки-втулки

4. Установить образец посередине опоры.
5. Закрывать кран 4 (рисунок 3.1), вращая его рукоятку по ходу часовой стрелки
6. Качая рукоятку 2 (рисунок 3.1), начать подъем подвижной траверсы. Подвести верхний упор к образцу
7. Включить измеритель перемещения, нажав кнопку «ON» и установить его на 0, нажав кнопку «ZERO».
8. Качая рукоятку 2 (рисунок 3.1), начать подъем подвижной траверсы. Подвести верхний упор к образцу. Давление в системе контролировать по манометру 11 (рисунок 3.1). Движения рукояткой необходимо осуществлять плавно. Подъем продолжать до перемещения траверсы на 20 - 25 мм.
9. Открыть кран 4 (рисунок 3.1), вращая его рукоятку против хода часовой стрелки.
10. Нажав руками на верхнюю траверсу отвести упор от образца, вынуть образец.
11. Осмотреть образец на наличие трещин в растянутой зоне. Сделать вывод о допустимости или не допустимости гибки данного материала, данной толщины заданным радиусом.

Таблица 3.6.1 Протокол испытаний

<i>b, мм</i>		<i>h, мм</i>	
--------------	--	--------------	--

#### 4.Методические указания для самостоятельной работы студентов

##### Задача 1

Консольный стержень (рис. 4.1) нагружен продольными равномерно распределенными нагрузками интенсивностью  $q_1$  и  $q_2$  (заданных в долях  $q$ ) и продольными сосредоточенными силами  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  (заданными в долях  $q_1$ ).

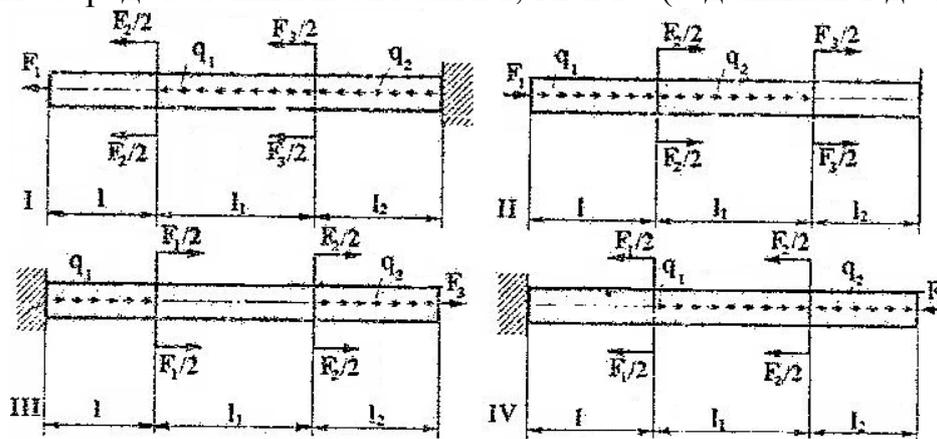


Таблица 4.1

Цифра варианта	Порядок номер цифры в варианте							
	1		2		3		4	
	12/1	11/1	F2/q1	F1/q1	F3/q1	q1/q	№ схемы	q2/q
1	1,5	1	1,5	1	-1	-2	I	1
2	2	1,5	2	-1	1,5	-2	II	2
3	1	2	-1,5	1,5	-2	1	III	-1
4	3	2,5	-2	2	1,5	-2	IV	-2
5	1	3	1	-2	1	-1	I	2
6	2	1	-1	-1,5	2	1	II	-1
7	1	1,5	2,5	2,5	-2,5	2	III	1
8	3	2	-2,5	-2,5	3	1	IV	-2
9	-1	2,5	1	3	-3	-1	I	2
0	2	1,5	-2	-3	2	2	II	-1

ПРИМЕЧАНИЕ. Здесь и в других таблицах знак минус показывает, что соответствующая нагрузка должна быть приложена на расчетной схеме в направлении, противоположном указанному на рисунке.

### Задача 2

Стержень (рис. 4.2) нагружен равномерно распределенным  $m_1$  и сосредоточенными  $M_1$  и  $M_2$  скручивающими моментами (величины моментов  $M_1$  и  $M_2$  заданных в долях  $m_1$ , где  $m$  – параметр интенсивности).

Построить эпюру крутящих моментов, используя значения табл.4.2.

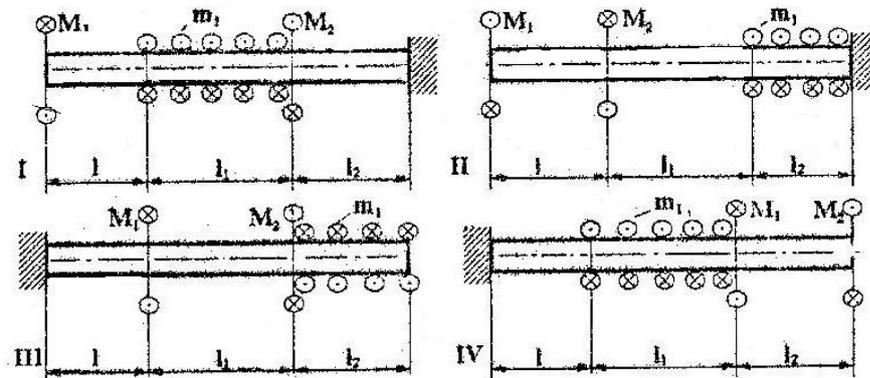


Рис. 4.2

Таблица 4.2

Цифра варианта	Порядок номер цифры в варианте					
	1	2	3	4		
	$m_1/m$	$M_1/ml$	$l_1/l$	№схемы	$M_2/ml$	$l_2/l$
1	1	-3	2	I	2	1,5
2	-1	3	1,5	II	1	2,5
3	2	-2	1	III	-2	2,5
4	-2	2	2,5	IV	-1	3
5	1,5	-1	3	I	1,5	1
6	-1,5	1	1	II	2	2

7	2	2	2,5	III	-1,5	2,5
8	-2	-2	2	IV	1	3
9	1	-3	3	I	-2	1,5
0	-1	3	1,5	IV	1,5	2,5

### Задача 3

Балка на двух опорах (рис. 4.3) нагружена сосредоточенными силами и сосредоточенным моментом (заданными, соответственно в долях  $P$  и  $P_1$ ).

Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Данные взять из таблицы 3.

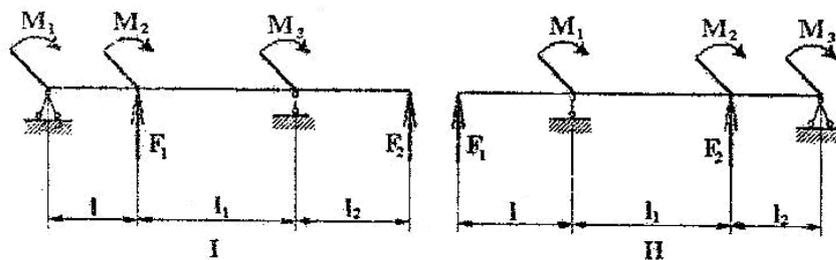


Рис. 4.3

Таблица 4.3

Цифра варианта	Порядок номер цифры в варианте							
	1	2		3		4		
	l2/1	F1/P	l1/1	F2/P	№ схе- мы	M1/P1	M2/P1	M3/P1
1	1	1	2	-2	I	2	0	0
2	2	-1	1	2	II	0	-3	0
3	2	1	2	1	I	0	0	2
4	1	-1	1	-1	II	1	0	0
5	1	1	2	2	I	0	-2	0

Цифра варианта	Порядок номер цифры в варианте							
	1	2		3		4		
	12/1	F1/P	11/1	F2/P	№ схе- мы	M1/P1	M2/P1	M3/P1
6	2	-1	1	-2	II	-1	0	0
7	2	1	2	-1	I	0	0	3
8	1	-1	1	1	II	2	0	0
9	2	1	2	2	I	0	1	0
0	2	-1	1	-2	II	0	0	-1

#### Задача 4

Консольная балка (рис. 4.4) нагружена распределенными и сосредоточенными нагрузками (заданными соответственно в долях  $q$  и  $q_1$  и  $ql^2$ ).

Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Данные взять из табл.4.

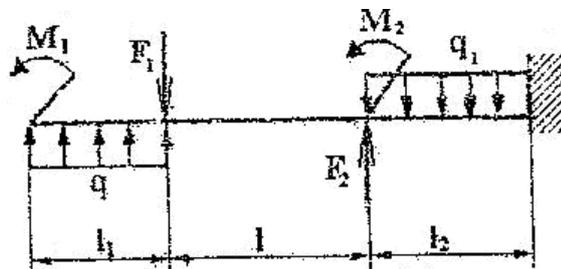


Рис. 4.4

Таблица 4.4

Цифра варианта	Порядок номер цифры в варианте						
	1		2	3		4	
	11/1	12/1	$q_1/q$	$F1/ql$	$M1/ql^2$	$F2/ql$	$M2/ql^2$
1	1	3	1	1	0	1	0
2	1,5	2,5	-1	0	-1	0	-2
3	2	2	1	-1	0	3	0

Цифра варианта	Порядок номер цифры в варианте						
	1		2	3		4	
	11/1	12/1	$q_1/q$	$F1/ql$	$M1/ql^2$	$F2/ql$	$M2/ql^2$
4	2,5	1,5	-2	2	0	0	-1
5	3	1	2	0	1	2	0
6	2,5	1,5	1	-2	0	0	-3
7	2	2	-1	1	0	-3	0
8	1,5	1,5	1	0	1	0	2
9	1	2	-2	-1	0	-2	0
0	2	1	2	0	-1	0	1

### Задача 5

Для балки изображенной на рис. 4.5, построить эпюры поперечных сил и изгибающего момента. При решении пользоваться табл.4.4.

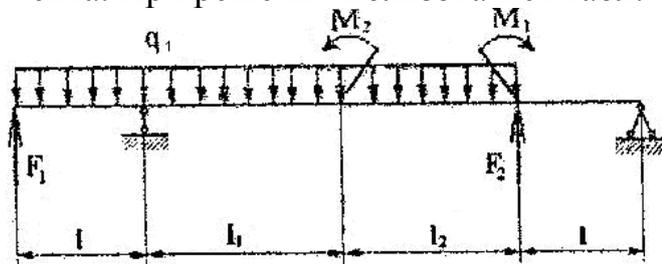


Рис. 4.5

### Задача 6

Плоская рама с шарнирными опорами (рис.6) нагружена сосредоточенными силами (заданными в долях  $P$ ).

Построить эпюры внутренних силовых факторов. Данные взять из табл.5.

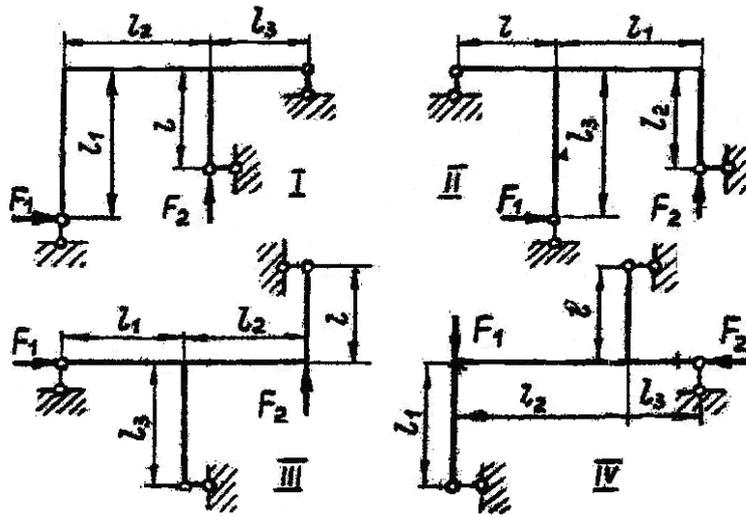


Рис. 4.6

Таблица 4.5

Цифра варианта	Порядок номер цифры в варианте					
	1	2	3		4	
	11/1	F1/P	F2/P	12/1	№схемы	13/1
1	2	1,5	1	1	I	2
2	1	1,5	-2	2	II	1
3	2	-1,5	3	2	III	1
4	1	-1,5	-1	1	IV	2
5	2	2,5	2	1	I	2
6	1	-2,5	-3	2	II	1
7	2	1,5	-2	2	III	1
8	1	-1,5	2	1	IV	2
9	2	2,5	1	1	I	2
0	1	-2,5	3	2	II	1

### Задача 7

Плоская консольная рама (рис. 4.7) нагружена сосредоточенными силами в долях  $P$ .

Построить эпюры внутренних силовых факторов. Данные взять из табл. 4.6.

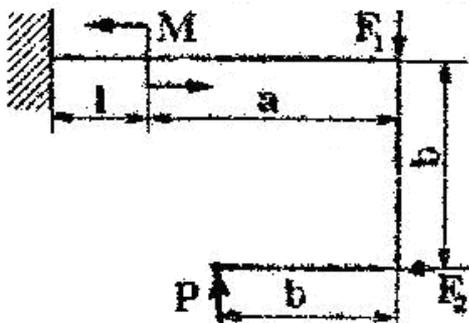


Рис. 4.7

Таблица 4.6

Цифра варианта	Порядок номер цифры в варианте				
	1	2	3	4	
	$b/l$	$a/l$	$M/P$	$F1/P$	$F2/P$
1	2	2	1	2	0
2	1	1	-2	0	-1
3	2	3	2	0	1
4	2	2	-1	-1	0
5	1	1	2	-2	0
6	1	1	3	0	-2
7	2	2	2	0	1
8	1	3	-2	-1	0
9	2	2	1	2	0
0	1	2	3	-1	-1

### Задача 8

Для плоско-пространственной рамы (рис.4.8), нагруженной сосредоточенными силами и парой сил, построить эпюры внутренних силовых факторов. Значения взять из табл. 4.6.

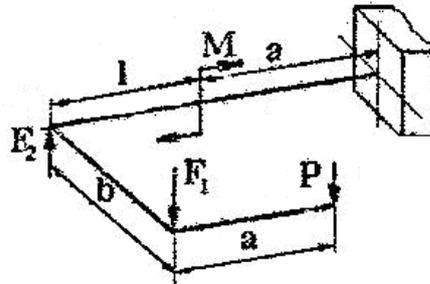


Рис. 4.8

### Задача 9

Для консольного стержня переменного сечений (рис. 4.9) построить эпюры продольных сил, наибольших нормальных напряжений и продольных перемещений. Определить из условия прочности допустимое значение нагрузки  $P$  и при найденном значении вычислить удлинение отрезка  $a$  и наибольшее перемещение поперечного сечения.

Принять:  $S = 2\text{см}^2$ ;  $l = 20\text{см}$ ; нормативный запас прочности  $[k] = 2$ ; остальные данные взять из табл. 4.7 и табл. 4.20.

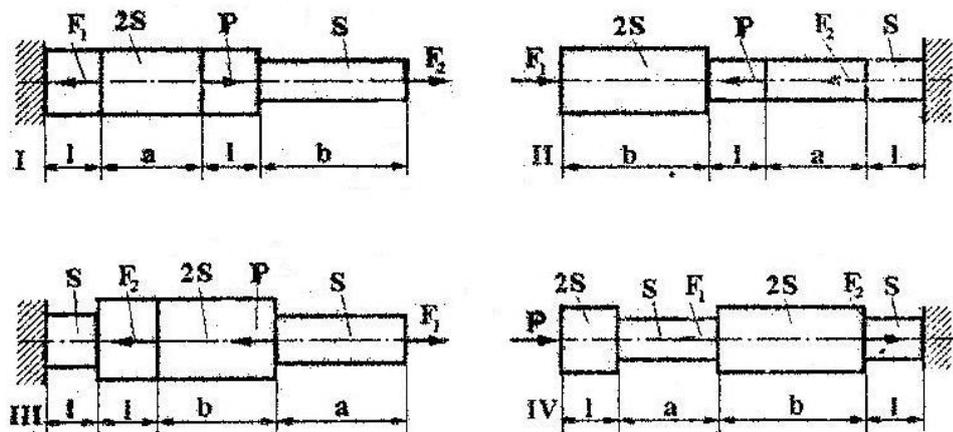


Рис. 4.9

Цифра варианта	Порядок номер цифры в варианте					
	1	2	3		4	
	a/l	b/l	F1/P	№схемы	F2/P	Материал
1	1	2,5	1	I	-1	Сталь 20
2	3	1	2	II	1	Ст. 3
3	2	1,5	-2	III	2	Сталь 45
4	1,5	2,5	3	IV	-2	Сталь 20ХН
5	1	3	3	I	3	Сталь 40Х
6	2	1	-3	II	-3	Алюм. спл.АЛ-4
7	2,5	1,5	-1	III	-2	Алюм. спл.АК-4
8	1,5	2,5	-2	IV	3	Титан. спл.ВТ-3
9	2	2	-1	III	-2	Магн.спл. МА-5
0	1	3	1	IV	-1	Латунь Л-68

### Задача 10

Для плоской стержневой системы (рис. 4.10), нагруженной сосредоточенными силами  $P$  и  $F$ , определить из условия прочности площади поперечных сечений стержней, испытывающих растяжение или сжатие, и подобрать для каждого из них номер равнобокового уголка. Принять: материал стержней Ст.5  $[K] = 1,6$ ,  $l = 0,5$  м. Остальные данные взять из табл. 4.8 и 4.20

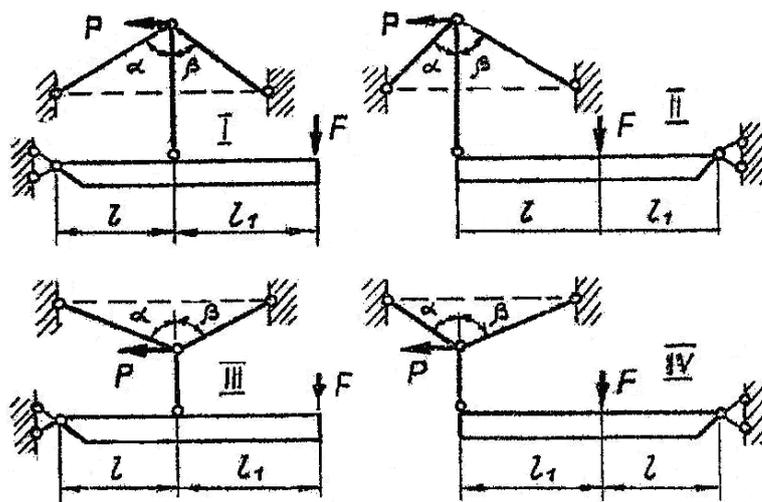


Рис. 4.10

Таблица 4.8

Цифра варианта	Порядок номер цифры в варианте					
	1	2	3	4		
	11/1	P, кН	F/P	№схемы	$\alpha$ , град	$\beta$ , град
1	2	100	1,2	I	60	40
2	2,5	150	1,5	II	45	50
3	3	120	1,1	III	30	40
4	1,5	130	1,8	IV	35	45
5	2	140	1,9	I	50	60
6	1,5	180	1,4	II	55	45
7	2	160	1,3	III	40	30
8	2,5	170	1,6	IV	45	35
9	3	190	1,7	I	60	35
0	1,5	200	2	II	45	50

### Задача 11

Для статически неопределимой стержневой системы (рис. 4.11, двойными линиями обозначены абсолютно жесткие стержни) требуется:

- 1) найти усилия и направления в деформируемых стержнях;
- 2) вычислить допустимое значение силы  $F$  из расчета на прочность по наибольшим напряжениям;
- 3) определить допустимую нагрузку из расчета на прочность по предельному равновесию;
- 4) сравнить величины допустимой нагрузки, полученные при расчете по наибольшим напряжениям (п.2) и по предельному равновесию (п.3).

Принять:  $S = 4 \text{ см}^2$ ;  $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$ ;  $[k] = 2$ ; остальные данные из табл. 4.9.

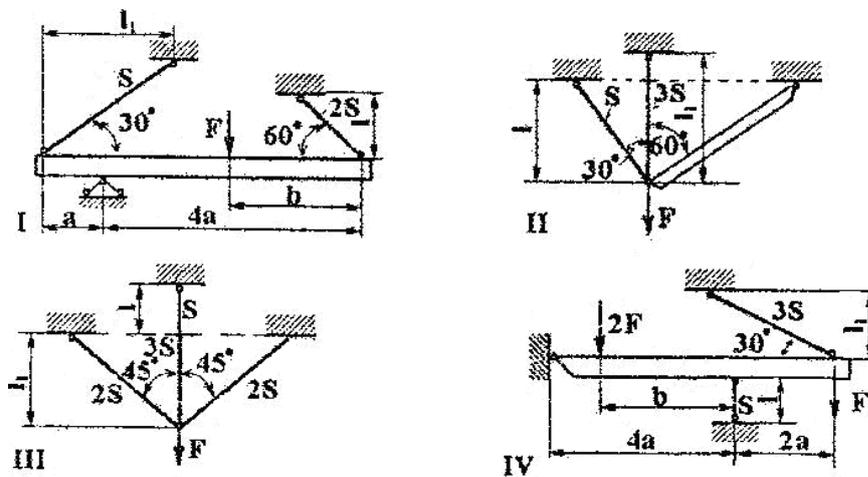


Рис. 4.11

Таблица 4.9

Цифра варианта	Порядок номер цифры в варианте		
	2	3	4
	b/a	№схемы	11/1
1	1	I	1,5
2	2	II	1

Цифра варианта	Порядок номер цифры в варианте		
	2	3	4
	b/a	№схемы	И/Л
3	3	III	2
4	1	IV	2
5	2	I	1
6	3	II	1,5
7	1	III	1
8	2	IV	2
9	3	I	1,5
0	1	II	2

### Задача 12

Для стальной балки (рис. 4.12, а) из расчета на прочность по наибольший напряжениям подобрать размеры трех типов поперечного сечения:

I тип — двутавровое сечение или сечение, состоящее из двух швеллеров или двутавров (рис. 4.12, б);

II тип — прямоугольное сечение с соотношением сторон  $b/h$ , равным отношению для сечения типа I;

III тип - круглое сечение.

Вычертить сечения в одном масштабе и подсчитать отношение весов соответствующих балок. Для трех типов сечения вычислить наибольшие касательные напряжения.

Принять:  $F = 10$  кН;  $l = 40$  см;  $[\sigma] = 160$  МПа; остальные величины взять из табл.10.

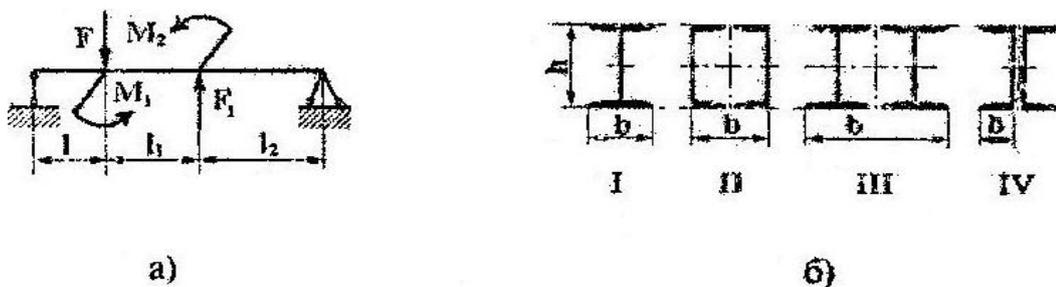


Рис. 4.12

Таблица 4.10

Цифра варианта	Порядок номер цифры в варианте					
	1	2	3		4	
	11/1	12/1	M1/F1	M2/F1	Тип сечения	F2/F
1	1	3	1	0	I	1
2	2	1	0	-1	II	-4
3	3	2	-1	0	III	2
4	3	1	0	1	IV	-3
5	2	2	2	0	I	3
6	1	3	0	2	II	-2
7	1	3	-2	0	III	4
8	2	2	0	-2	IV	-1
9	2	1	1	1	I	2
0	3	2	-1	1	II	-3

### Задача 13

Консольная балка (рис. 4.13, а), поперечное сечение которой изображено на рис. 4.13, б, выполнена из хрупкого материала с разными пределами прочности при растяжении и при сжатии.

Расположив сечение выгодным образом, из расчета на прочность определить допустимую нагрузку  $F$ .

Вычертить сечение в масштабе и при найденном значении силы  $F$ , построить эпюру нормальных напряжений  $\sigma$  в опасном сечении балки.

Принять:  $t = 20$  см;  $[k]$  - 2,0. Исходные данные использовать из табл. 4.11 и табл. 4.20.

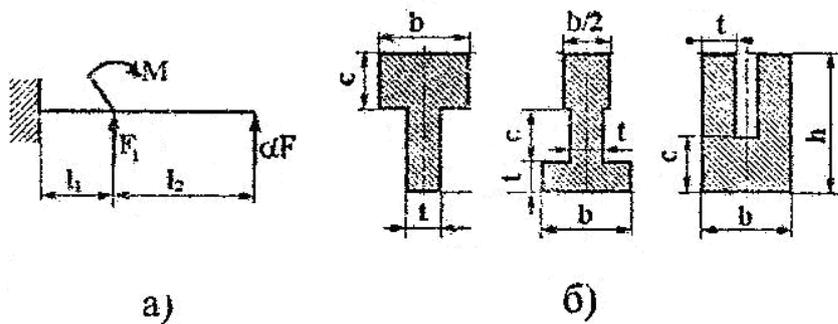


Рис. 4.13

Таблица 4.11

Цифра вариан- та	Порядок номер цифры в варианте										
	1		2		3			4			
	11/1	12/1	$\alpha$	№с х	M/F1	b/t	c/t	F1/F	h/t	t, мм	матери- ал
1	1	2	1	I	1	3	2	0	4	7	СЧ 15-32
2	1	1	-1	II	0	4	2	1	5	8	СЧ 12-28
3	2	1	1	III	2	5	1	0	6	9	СЧ 18-36
4	1	2	-1	III	0	6	1	-2	7	10	СЧ 24-44
5	1	1	2	II	2	7	2	0	8	11	СЧ 35-56
6	1	2	-1	I	0	7	3	1	8	12	СЧ 12-28
7	2	1	-2	I	-2	6	1	0	7	10	СЧ 35-56
8	2	1	-2	II	0	5	2	-2	6	8	СЧ 18-36

9	1	2	-1	III	1	4	3	2	5	7	СЧ 24-44
0	1	2	1	II	-1	3	2	-1	4	10	СЧ 15-32

### Задача 14

К стальному стержню переменного сечения (рис. 4.14) приложены скручивающие моменты  $M_1$  и  $M_2$ . Требуется:

1) определить размеры поперечных сечений стержня, исходя из того, что должны удовлетворяться условия прочности и жесткости;

2) при найденных размерах вычислить (в град.) максимальный угол поворота поперечных сечений.

Принять:  $l = 0,2$  м;  $M = 500$  нМ;  $[\tau] = 80$  МПа;  $[\theta] = 4,0$  град/м;  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа.

Остальные данные взять из табл. 4.12.

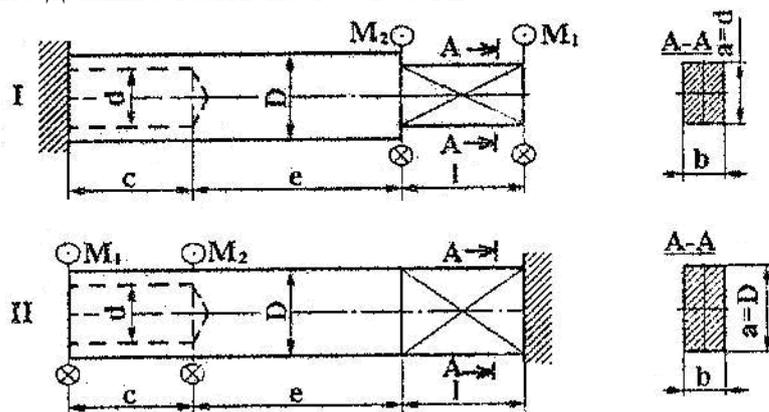


Рис. 4.14

Таблица 4.12

Цифра варианта	Порядок номер цифры в варианте						
	1	2	3			4	
	e/l	a/b	№схемы	c/l	M1/M	d/D	M2/M
1	4	1	I	1,5	1	0,65	-3
2	3,5	2	II	2	-1	0,85	-2,5
3	3	1,5	I	2	2	0,7	3

4	2,5	1,5	II	2	1	0,8	-1,5
5	2	1,75	I	2,5	-2	0,75	-2,7
6	1,5	1	II	3	-1	0,8	2,8
7	2	2	I	2,5	2	0,7	-3,2
8	2,5	1,5	II	2,5	-1	0,65	2,6
9	3	1,75	I	2	2	0,75	3,4
0	3	2	II	2	1	0,85	-2,2

### Задача 15

Стальная балка (рис. 4.15, а), поперечное сечение которой изображено на рис. 4.15, б, нагружена вертикальными  $F$  и  $F_1$  и горизонтальной  $F_2$  силами.

Определить запас прочности. Вычертить поперечное сечение в масштабе: для сечения балки, проведенного в т. А, показать положение нейтральной линии и построить эпюры нормальных напряжений от каждого изгибающего момента в отдельности, а также суммарную эпюру по контуру сечения.

Принять:  $\sigma_T = 420$  МПа;  $l = 0,2$  м; остальные значения – из табл. 4.13.

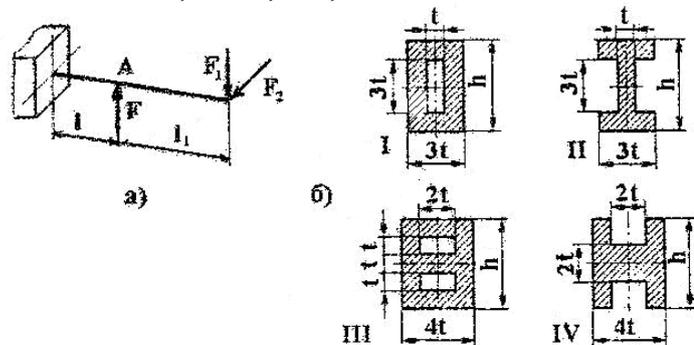


Рис. 4.15

Таблица 4.13

Цифра варианта	Порядок номер цифры в варианте						
	1		2	3		4	
	11/1	t, мм	F1/F	F2/F	b/t	Тип сечения	F, кН
1	0,5	10	1	2	4	I	0,85
2	1	12	-1	-1,5	5	II	0,6
3	1,5	14	2	1	6	III	1,2
4	2	16	-2	1,5	7	IV	0,75
5	1,5	15	1	-2	7	I	0,65
6	1	14	-2	1,5	6	III	1
7	0,5	16	2	-2	5	IV	0,8
8	1	12	1	1,5	4	III	0,95
9	2	10	1	1,5	6	II	0,5
0	1,5	15	2	-1	5	I	0,9

### Задача 16

Для стальной статически неопределимой балки (рис. 4.16) требуется построить эпюры изгибающего момента и из расчета на прочность по наибольшим напряжениям определить размеры кольцевого поперечного сечения с соотношением диаметров  $d/D = 0,8$ .

Найти прогиб в точке А и угол поворота в точке В и по эпюре изгибающего момента изобразить примерный вид упругой линии балки.

Принять:  $l=40\text{см}$ ;  $F=2\text{кН}$ ;  $[\sigma]=150\text{МПа}$ ;  $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ; остальные значения – из табл. 14.

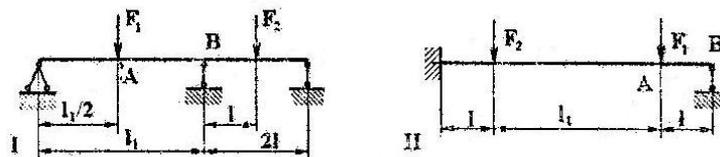


Рис. 4.16

Таблица 4.14

Цифра варианта	Порядок номер цифры в варианте			
	1	2	3	4
	11/1	№схемы	F2/F	F1/F
1	1	I	1	1
2	2	II	-1	-2
3	3	I	-1	2
4	4	II	1	2
5	2	I	2	3
6	3	II	1	-1
7	4	I	-1	1
8	1	II	-2	2
9	2	I	2	2
0	3	II	1	-3

### Задача 17

Из расчета на прочность по наибольшим напряжениям определить допустимую нагрузку  $q$ , приложенную к плоской статически неопределимой раме (рис. 4.17) квадратного поперечного сечения  $h \times h$ .

Принять  $[\sigma] = 200$  МПа. Остальные даны взять из таблицы 4.15.

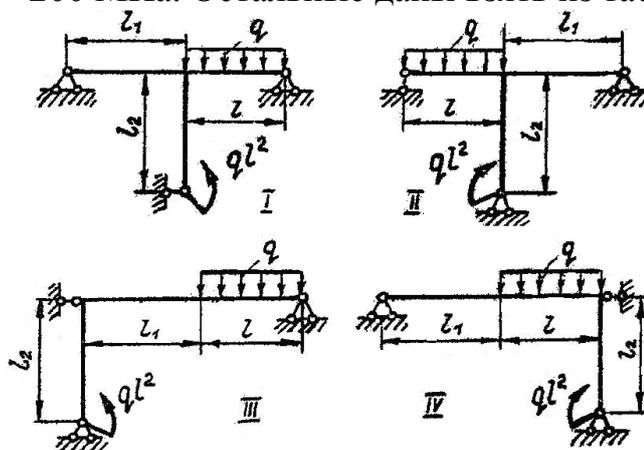


Рис. 4.17

Таблица 4.15

Цифра варианта	Порядок номер цифры в варианте				
	1	2	3		4
	11/1	12/1	l, м	h, мм	№схемы
1	1	2	0,75	40	I
2	2	2	0,6	30	II
3	1	1	0,55	30	III
4	3	1	0,8	50	IV
5	2	2	0,7	40	I
6	3	1	0,45	20	II
7	1	2	0,65	30	III
8	2	1	0,7	40	IV
9	3	1	0,5	30	I
0	2	2	0,85	50	II

### Задача 18

Для чугунного стержня круглого поперечного сечения (рис. 4.18) определить допускаемое значение параметра нагрузки  $F$ .

Принять:  $[k]=4$ , остальные данные взять из табл. 4.16 и 4.20.

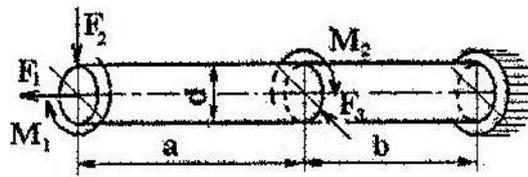


Рис. 4.18

Таблица 4.16

Цифра варианта	Порядок номер цифры в варианте								
	1	2	3		4				Материал
	F2/F	b/d	a/d	F3/F	d, мм	F1/F	M1/Fd	M2/Fd	
1	1	2	4	5	40	-16	8	12	СЧ 12-28
2	-1	3	5	-3	45	6	-7	3	СЧ 15-35
3	2	2,5	6	-4	70	-10	-9	14	СЧ 18-36
4	-2	1,5	4	5	75	-15	6	2	СЧ 35-56
5	1	2	5	3	50	8	7	3	СЧ 24-44
6	-1	1,5	6	4	65	-18	-8	2	СЧ 12-28
7	-2	2	5	-5	60	-12	8	-14	СЧ 15-32
8	2	2,5	6	3	50	7	-6	-3	СЧ 18-36
9	1	3	4	4	55	-14	-5	14	СЧ 35-56
0	-1	2	4	-4	80	-20	-9	2	СЧ 24-44

### Задача 19

Стальной вал постоянного поперечного сечения диаметром  $d$  (рис. 4.19;  $P$  и  $R=0,4P$  - окружное и радиальное усилия зубчатой передачи,  $2T$  и  $T$  - усилия в ведущей а ведомой ветвях ременной передачи) делает  $n$  оборотов в минуту и передает мощность  $N$  в киловаттах.

На валу закреплены шестерня диаметром  $D1$  и шкив ременной передачи диаметром  $D2$ .

Из расчета на прочность по наиболее опасной точке определить диаметр вала  $d$ .

Принять:  $\sigma_T = 320$  МПа;  $[k] = 2$ ; остальные величины – из табл. 4.17.

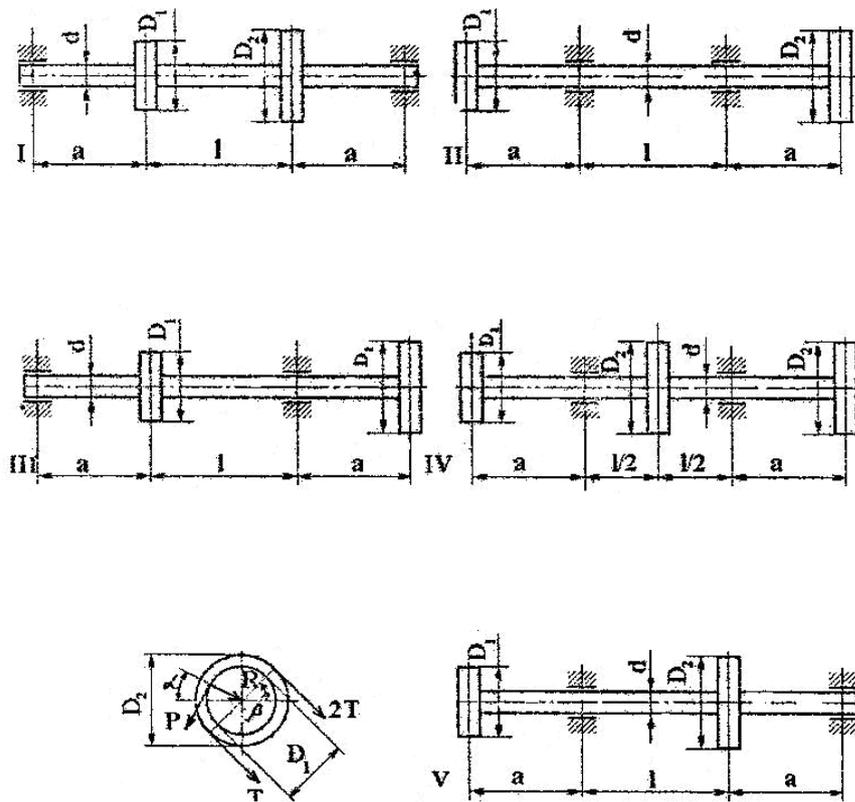


Рис. 4.19

Таблица 4.17

Цифра варианта	Порядок номер цифры в варианте								
	1	2		3		4			
	l, м	№схемы	$\alpha$ , град	$\beta$ , град	a/l	D2/D1	D1, мм	N, кВт	n, об/мин
1	0,4	I	0	60	0,3	2	120	10	100
2	0,5	II	90	120	0,4	2,5	130	15	150
3	0,6	III	0	135	0,5	1,5	140	20	200
4	0,7	IV	90	150	0,6	3	150	25	250
5	0,8	V	0	210	0,25	1,5	125	30	300
6	0,9	I	90	225	0,3	2	120	18	200
7	1	II	0	240	0,4	2,5	115	12	100

8	0,6	III	90	300	0,5	3	130	20	250
9	0,5	IV	0	30	0,6	2	160	22	300
0	0,4	V	90	45	0,4	1,5	155	15	100

### Задача 20

Стойка из стали Ст.3 (рис. 4.20, а) имеет в главных плоскостях  $zOx$  и  $zOy$  разные условия закрепления концов (рис. 4.20, б).

Для поперечного сечения стойки, составленного из двух швеллеров (рис. 4.20, в), определить допустимое значение силы  $F$  и для принятого значения вычислить запас устойчивости. Для стоек средней гибкости критическое напряжение вычислить по формуле Ясинского:  $\sigma_k = \alpha - b\lambda$ , где  $\alpha = 304$  МПа;  $b = 1,12$  МПа.

Принять:  $\sigma_t = 230$  МПа;  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $[\sigma] = 160$  МПа; исходные данные взять из табл. 4.18.

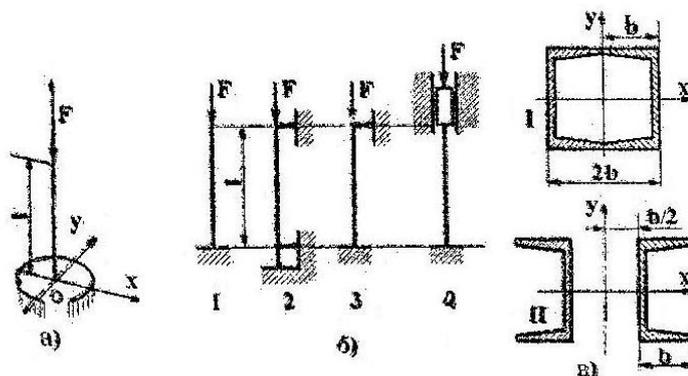


Рис. 4.20

Таблица 4.18

Цифра варианта	Порядок номер цифры в варианте				Швеллер, ГОСТ 8240-72	
	1	2	3			4
	l, м	Форма сечения	Схема закрепления в плоскости			
			ZOX	ZOY		
1	3	I	1	2	16	
2	3,5	II	2	3	18	
3	3,2	I	2	3	12	
4	4	II	4	2	16	
5	3,8	I	1	3	14	
6	4,2	II	3	4	14	

Цифра варианта	Порядок номер цифры в варианте				Швеллер, ГОСТ 8240-72
	1	2	3		
	l, м	Форма сечения	Схема закрепления в плоскости		
ZOX			ZOY		
7	4,5	I	3	1	16
8	5	II	1	4	12
9	4,8	I	4	3	18
0	5,2	II	3	1	20

### Задача 21

На стальную балку прямоугольного поперечного сечения  $b \times h$ , свободно лежащую на двух шарнирных опорах (рис. 4.21), с высоты  $H$  падает груз весом  $Q$ .

Требуется:

1) определить коэффициент запаса прочности балки и вычислить динамический прогиб в точке  $A$ ;

2) решить также задачу при условии, что правая опора заменена пружиной, коэффициент жесткости которой (т.е. сила, вызывающая осадку, составляющую 1 м) равен  $C$ ;

3) сравнит результаты, полученные в пунктах 1 и 2.

Принять:  $\sigma_t = 450$  МПа;  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $l = 1$  м. Остальные данные – из табл. 4.19.

ПРИМЕЧАНИЕ. При решении массой балки пренебречь.

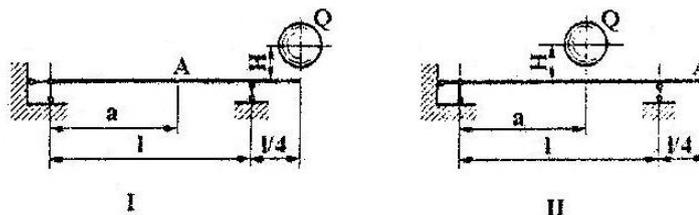


Рис. 4.21

Таблица 4.19

Цифра варианта	Порядок номер цифры в варианте						
	1	2	3	4			
	H, мм	$\alpha / l$	схема	Q, Н	b, мм	h, мм	c, кН/м

Цифра варианта	Порядок номер цифры в варианте						
	1	2	3	4			
	H, мм	$\alpha$ / l	схема	Q, Н	b, мм	h, мм	c, кН/м
1	45	1/4	I	80	18	10	20
2	48	3/4	II	250	30	18	25
3	50	1/3	I	100	20	12	30
4	52	2/3	II	200	26	15	35
5	55	1/2	I	150	24	14	40
6	60	1/2	II	160	24	14	50
7	63	2/3	I	220	26	15	60
8	65	1/3	II	120	20	12	70
9	70	3/4	I	240	30	18	75
0	75	1/4	II	90	18	10	45

*Механические характеристики материалов*

I. Пластичные материалы

Таблица 4.20

Материал	Марка	$\sigma_T$ , МПа	$\sigma_T$ , МПа	$\tau$ , МПа	$E \cdot 10^{-5}$ , МПА	$\mu$
1. Сталь углероди- стая	Ст. 3	230	380...470	160	2	0,28
	Ст. 4	240	430...550	170		
	Ст. 5	250	520...650	190		
	20	220	400...500	160		
	40	320	650	220		
	45	320	600...750	220		

2. Сталь легированная	20 ХН	600	800	350	2,1	0,3
	40Х	800	1000	440		
	12ХН3А	700	950	400		
3. Алюминиевые сплавы	АЛ-4	200	260	120	0,72	0,3
	АК-4	310	400	180		
	Д-16	330	470	200		
4. Титановый сплав	ВТ-3	950	1100	500	1,2	0,26
5. Медный сплав (латунь)	Л-68	330	450	200	1,2	0,36
6. Магниевого сплава	МА-5	220	300	160	0,72	0,27

Марка	$\sigma_{вр}$ , МПа	$\sigma_{вс}$ , МПа	$E \cdot 10^5$ , МПа	$\mu$
СЧ 12-28	120	500		
СЧ 15-35	150	600		
СЧ 18-36	180	670	1,2	0,25
СЧ 24-44	240	800		
СЧ 35-56	350	900		

II. Хрупкие материалы (чугун)

Таблица 4.21

Ra5	Ra10	Ra20	Ra40	Ra5	Ra10	Ra20	Ra40
1	1	1	1	2,5	3,2	3,2	3,2
			1,05				3,4
		1,1	1,1			3,6	3,3
			1,15				3,8
	1,2	1,2	1,2	4	4	4	4
			1,3				4,2
		1,4	1,4			4,5	4,5
			1,5				4,8
1,6	1,6	1,6	1,6		5	5	5
		1,8	1,8			5,6	5,6
			1,9				6
	2	2	2	6,3	6,3	6,3	6,3
			2,1				6,7
		2,2	2,2			7,1	7,1
			2,4				7,5
			2,5		8	8	8
			2,6				8,5
			2,8			9	9
			3			9	9
				10	10	10	10

*Примечание.* Цифры в других десятичных интервалах получают умножением или делением приведенных величин на 10, 100, 1000 и т. д.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

### Основной

1. Александров, А.В. Сопротивление материалов. / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин; Ред. А.В. Александров. Учебник – М.: Высшая школа, 2003. – 560 с.
2. Дарков, А.В. Сопротивление материалов. / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. Учеб. для студентов втузов – М.: Высшая школа, 1989. – 622 с.
3. Сопротивление материалов: лабораторный практикум: Учеб. пособие для вузов/ А.С. Вольмир, Ю.П. Григорьев, В.А. Марьин, А.И. Станкевич. – М.: Дрофа, 2004. – 352 с.
4. Ицкович, Г.М. Сопротивление материалов. / Г.М. Ицкович. Учебник. – М.: Высшая школа, 2001. – 368 с.
10. Ицкович, Г. М. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов. / Г. М. Ицкович, Л. С. Минин, А. И. Винокуров; ред.: Л. С. Минин. Учеб. пособие. – М.: Высшая школа, 2001. – 592 с. Долинский Ф.В., Михайлов М.Н. Краткий курс сопротивления материалов. – М.: Высш. шк., 1988. – 432 с.
5. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. - М.: Наука, 1986.- 512 с.
6. Сопротивление материалов: методические указания по подготовке к практическим занятиям (для студентов всех механических специальностей очной и заочной форм обучения). Ч. 1 / сост.: А.В.Овчаренко, С.В.Капорович. – Краматорск: ДГМА, 2008. – 172 с.
7. Б.П.Кузьменко, Сопротивление материалов: учебное пособие с контрольными заданиями. – Челябинск, ЮУрГУ, 2008. – 56 с.
8. Заславский Б.В. Краткий курс сопротивления материалов. – М.: Машиностроение, 1986. – 328 с.
9. Уманский А.А. Сборник задач по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1973. – 496 с.
10. Афанасьев А.М., Марьин В.А. Лабораторный практикум по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1975. – 387 с.

### Дополнительный

8. Писаренко Г.С. и др. Сопротивление материалов. – Киев: Наукова Думка, 1986. – 775 с. 4
9. Вольмир А.С. Сборник задач по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1984. – 407 с.