Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

сборник учебно-методических материалов

для специальности 24.05.01 – Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов
и
направления подготовки: 24.03.01 – Ракетные комплексы и космонавтика

Благовещенск, 2017

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
университета

Составитель: *Труфанов В.А.*

Теория вероятностей и математическая статистика: сборник учебно-методических материалов для специальности 24.05.01 и направления подготовки 24.03.01 – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2017.

Рассмотрен на заседании кафедры МАиМ 30.11.2017, протокол № 4.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности в явлениях и опытах, результаты которых не могут быть заранее предсказаны.

Возникновение теории вероятностей (ТВ) как науки относят к средним векам. Первоначальным толчком к развитию теории вероятностей послужили задачи, относящиеся к азартным играм, таким, как орлянка, кости, карты, рулетка, когда в них начали применять количественные подсчеты и прогнозирование шансов на успех. В переводе с французского «азарт» (le hazard) означает случай. Такого рода задачи неоднократно ставились в средневековой литературе, в том числе, и художественной, и решались иногда верно, а иногда неверно. Мощным стимулом развития теории явились запросы страхового дела, которое зародилось еще в XIV веке, а также, начиная с XVII века, демографии или, как тогда говорили, политической арифметики.

Зарождение теории вероятностей началось с того, что придворный французского короля, шевалье (кавалер) де Мере (1607-1648), сам азартный игрок, обратился к французскому физику, математику и философу Блезу Паскалю (1607-1648) с вопросами к задаче об очках. В 1654 г. Паскаль обратился к математику Пьеру Ферма (1601-1665) и переписывался с ним по поводу этих задач. Они вдвоем установили некоторые исходные положения ТВ, в частности пришли к понятию математического ожидания и теоремам сложения и умножения вероятностей. Далее голландский ученый Х.Гюйгенс (1629-1695) в книге «О расчетах при азартных играх» (1657 г.) попытался дать собственное решение вопросов, затронутых в этой переписке.

Другим толчком для развития теории вероятностей послужило страховое дело, а именно с конца XVII века на научной основе стало производиться страхование от несчастных случаев и стихийных бедствий. В XVI-XVII веках во всех странах Западной Европы получило распространение страхование судов и страхование от пожара. В XVIII веке были созданы многочисленные страховые компании и лотереи в Италии, Фландрии, Нидерландах. Затем методы ТВ стали широко применять в демографии, например, при ведении статистики рождения и смерти. Важную роль для развития математической статистики сыграли работы Э. Галлея по демографии. Заметим, что «по основной специальности» этот ученый был астрономом, и его именем названа знаменитая комета.

Стала зарождаться новая наука, вырисовываться ее специфика и методология: определения, теоремы, методы.

Становление ТВ связано с именем известного швейцарского математика Якоба Бернулли (1654-1705). В его трактате «Искусство предположений» (1713), над которым он работал 20 лет и который был издан уже после смерти автора, впервые введено и широко использовалось классическое определение вероятности, а также применялась статистическая концепция вероятности.

Следующий важный этап в развитии ТВ связан с именами Муавра (1667-1754), Лапласа (1749-1827), Гаусса (1777-1855), Пуассона (1781-1840). Далее, в XIX веке, большую роль сыграли представители Петербургской математической школы В.Я. Буняковский (1804-1889), П.Л. Чебышёв (1821-1894), А.А. Марков (1856-1922), А.А. Ляпунов (1857-1918).

Большой вклад в последующее развитие ТВ и математической статистики внесли российские математики С.Н. Бернштейн (1880-1968), В.И. Романовский (1879-1954), А.Н. Колмогоров (1903-1987), А.Я. Хинчин (1894-1959), Ю.В. Линник (1914-1972), Б.В. Гнеденко (1912-1995), Н.В. Смирнов (1900-1966) и др., а также ученые англо-американской школы Стьюдент (псевдоним В. Госсета (1876-1937)), Р. Фишер (1890-1962), Э. Пирсон (1895-1980), Е. Нейман (1903-1957), А. Вальд(1902-1950) и др. Особо следует отметить неоценимый вклад академика А.Н. Колмогорова в становлении теории вероятностей как математической науки. Фундаментом современного здания теории вероятностей является аксиоматический подход, предложенный А.Н. Колмогоровым в книге «Основные понятия теории вероятностей» (1933 г.), изданную на немецком языке. Эта работа представляла собой точную аксиоматику теории вероятности, над которой ведущие умы думали ещё с начала века. В настоящее время аксиоматический подход является общепринятым. Следует отметить, что в других разделах математики аксиоматический подход был принят значительно раньше, чем в теории вероятностей.

ТВ и математическая статистика и в настоящее время развиваются и применяются на практике: при организации производства, анализе экономических процессов, контроле качества продукции, маркетинговых и социологических исследованиях, страховом деле и т.д.

Цель данного сборника УМОД:

- дать студентам некоторые методические рекомендации, разъясняющие подход к изучению ТВиМС и решению задач;
- активизировать самостоятельную работу студентов, предложив им контрольные вопросы.

При использовании сборника в самостоятельной работе студентов сначала рекомендуется изучить теоретический материал, затем проверить уровень понимания данного материала с помощью контрольных вопросов, приведенных в сборнике, а затем приступить к решению задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ
О: — определение
Т: ... ■ — теорема

I. СОДЕРЖАНИЕ ЛЕКЦИЙ

Курс теории вероятностей и математической статистики является базовым при подготовке специалистов 24.05.01 и направления подготовки: 24.03.01. Владение основами теории вероятностей и математической статистики необходимо при изучении ряда прикладных дисциплин – статис-тического анализа временных рядов, статистического моделирования систем и пр.

Тема 1. *Элементарная теория вероятностей*

Лекции 1-3. Случайные события.

В лекциях рассматриваются основные понятия теории вероятностей: вероятность и случайные события. Приведены различные варианты определений вероятности, отражающие историческое развитие теории вероятностей, изложены основные теоремы, применяемые при построении математических моделей случайных событий.

1.1. Введение.
1.2. Основные понятия.
1.3. Вероятность. Варианты определения.
  1.3.1. Относительная частота события, статистическое определение вероятности.
  1.3.2. Классическое определение вероятности.
  1.3.3. Геометрическое определение вероятности.
  1.3.4. Аксиоматическое определение вероятности.
2.1. Теорема сложения вероятностей.
2.2. Условная вероятность события. Теорема умножения вероятностей.
2.3. Вероятность появления хотя бы одного события.
2.4. Формула полной вероятности. Формула Байеса (теорема гипотез).
2.6. Повторение опытов. Формула Бернулли.
3.1. Повторение опытов. Формула Бернулли.
  3.1.1. Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа.
  3.1.2. Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа.
  3.1.3. Формула Пуассона.

Контрольные вопросы и задачи по темам лекций 1-3.

Понятие случайного события

1. Дайте определения достоверного, невозможного и случайного событий.
2. Приведите примеры достоверного, невозможного и случайного событий.
3. Дайте определение и поясните на примере понятие статистического эксперимента.
4. Какими свойствами обладают элементарные события, образующие пространство элементарных событий?
5. Одновременно бросаются две игральные кости. Рассматриваются различные события, связанные с суммой чисел на выпавших гранях. Опишите пространство элементарных событий.
6. Какие элементарные события, определенные в задаче 5, образуют следующее событие A: сумма чисел на выпавших гранях не более 4?
7. Монета случайно бросается до выпадения решки два раза подряд, но производится не более трех бросаний. Опишите пространство элементарных событий.
8. В условиях задачи 7 с использованием предложенного пространства элементарных событий опишите событие A, состоящее в выпадении орла не менее двух раз.

Теоретико-множественные операции над событиями

1. Что означает запись: $A \subset B$?
2. Приведите пример событий A и B, связанных отношением $\subset$.
3. Рассматриваются события A, B, C, D, связанные с испытанием случайного бросания игральной кости:
   A – выпала грань с номером 1;
   B – выпала грань с номером 2;
   C – выпала грань с нечетным номером;
   D - выпала грань с простым числом.
   Являются ли события $C\bar{A}$ и $(D - B)$ эквивалентными?
4. Дайте определение суммы (или объединения) событий.
5. Как на диаграмме Венна (эйлеровых кругах) геометрически представляется сумма событий?
6. Чему равна сумма событий $\Omega + \emptyset$?
7. Справедливо ли утверждение: $A + A = A$?
8. Дайте определение произведения (или пересечения) событий.
9. Как на диаграмме Венна (эйлеровых кругах) геометрически представляется произведение событий?
10. Чему равно произведение событий $\Omega\,\emptyset$?
11. Справедливо ли утверждение: $A\,A = A$?
12. События A и B являются эквивалентными. Укажите, какие из приведенных ниже утверждений Вы считаете справедливыми:
    1) $A - B = A$, 2) $A\bar{B} = \emptyset$, 3) $\bar{A} - B = \Omega$, 4) $\bar{A} - B = \bar{A}$.
13. Дайте определение полной группы событий.

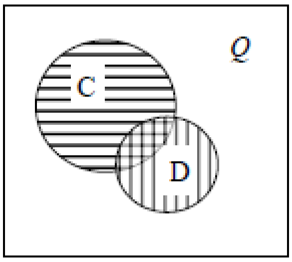


Рис. 1.

14. Приведите пример полной группы, состоящей из трех событий, в испытании бросания точки в квадрат (см. рис. .1).
15. Приведите пример полной группы, состоящей из четырех попарно несовместных событий, в испытании бросания точки в квадрат (см. рис. 2).
16. Докажите справедливость дистрибутивного закона умножения событий относительно сложения.
    $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
17. Программа состоит из четырех блоков, в каждом из которых может содержаться ошибка. Обозначим A_i, i = 1, 2, 3, 4, события, состоящие в корректности программного кода блока i. Напишите алгебраические выражения, соответствующие следующим событиям: B – хотя бы в одном программном блоке есть ошибка; C – ошибка содержится по крайней мере в двух блоках.
18. В условиях предыдущей задачи дайте словесное описание событий, представленных следующими алгебраическими выражениями: $\bar{B}, \bar{C}, BC, \bar{B}C, B - C$.

Вероятность случайного события. Различные подходы к определению вероятности

1. Что называется частотой события A в n испытаниях?
2. В чем состоит свойство устойчивости частоты события A при многократном повторении испытания?
3. Каким свойством должны обладать элементарные события пространства Ω, чтобы могла быть применена классическая схема расчета вероятности?
4. Как вычисляется вероятность случайного события в классической схеме?
5. Производится испытание, состоящее в случайном расположении трех шаров в трех урнах (см. рис 1). Рассматриваются два события: A – в первую и вторую урны попало одинаковое число шаров и B – в первую урну попало больше шаров, чем во вторую. Объясните возможность применения классического подхода для расчета вероятностей $P(A)$ и $P(B)$. Рассчитайте значения $P(A)$ и $P(B)$.

Комбинаторный метод вычисления вероятностей случайных событий в классической схеме.

1. Какие условия должны быть выполнены для расчета вероятности случайного события комбинаторным методом в классической схеме?
2. Что называется сочетанием из n элементов по m?
3. Одновременно производится выбор трех цветных карандашей из пяти, условно обозначенных *К, С, З, Ч, Б*. Приведите два примера сочетаний в рассматриваемой схеме выбора.
4. Напишите формулу, определяющую число сочетаний из n элементов по m.
5. Что называется размещением из n элементов по m?
6. В условии испытания, описанного в вопросе 22, являются ли размещения (*К, С, Б*) и (*Б, К, С*) различными?
7. Напишите формулу, определяющую число размещений из n элементов по m.
8. Какое из значений C_n^m или A_n^m больше другого? Во сколько раз?
9. Что называется размещением из n элементов по m с повторениями?
10. Приведите пример испытания и опишите в нем несколько примеров размещений из n элементов по m с повторениями.
11. Напишите формулу, определяющую число размещений из n элементов по m с повторениями.
12. Что называется сочетанием из n элементов по m с повторениями?
13. Приведите пример испытания и опишите в нем несколько примеров сочетаний из n элементов по m с повторениями.
14. Напишите формулу, определяющую число сочетаний из n элементов по m с повторениями.
15. Объясните принцип вывода формулы для числа сочетаний из n элементов по m с повторениями.
16. Для выполнения лабораторных работ преподаватель случайно разбивает группу студентов на две подгруппы. Какова вероятность того, что два студента Иванов и Петров окажутся в разных подгруппах?
17. Из чисел 1, 2, …, 10 случайно выбираются два числа. Найти вероятность того, что оба выбранных числа будут четными.
18. Пятитомное собрание сочинений поставлено на книжную полку в случайном порядке. Какова вероятность того, что том 3 окажется точно на своем месте?
19. Известно, что в программе, состоящей из четырех модулей, в одном модуле содержится ошибка. Программист тестирует последовательно один модуль за другим в случайном порядке. Какова вероятность того, что ошибка будет найдена в третьем тестируемом модуле?
20. Из 10 белых и 5 черных шаров случайно отбираются и кладутся в урну 9 шаров, а далее из нее случайно извлекается один шар. Какова вероятность того, что выбранный шар будет белым?

Геометрические вероятности

1. При каких условиях применим способ геометрического расчета вероятности случайного события?
2. Рассмотрим следующие условия проведения испытаний. Спортсмен целится и стреляет в круглую мишень, радиус которой равен r. Известно, что у спортсмена не случается промахов мимо мишени. Требуется оценить вероятность попадания в круг, центр которого совпадает с центром мишени, а радиус равен $r/2$.
3. Почему полученный результат нельзя считать корректным? Какое из требований к испытаниям не соблюдено для применения геометрического подхода к расчету искомой вероятности?
4. В чем состоит способ расчета геометрических вероятностей? Напишите расчетную формулу и объясните содержание всех используемых в ней переменных.
5. Объясните содержание "задачи о встрече". Почему в этой задаче возможен расчет геометрических вероятностей?
6. Решите "задачу о встрече" при некотором изменении условий встречи: если первым к месту встречи приходит лицо *А*, то оно ждет *В* не более 10 мин; если первым к месту встречи приходит лицо *В*, то оно ждет *А* не более 20 мин.

Аксиоматическое построение теории вероятностей

1. Сформулируйте первую аксиому теории вероятностей.
2. Почему вторую аксиому называют аксиомой нормировки?
3. Приведите пример, в котором для расчета вероятности случайного события может быть применена третья аксиома (аксиома сложения).

4. Бросаются две игральные кости и считается сумма чисел на выпавших гранях. Рассматриваются два события: A – сумма делится на три без остатка и B – сумма делится на пять без остатка. Можно ли применить аксиому сложения для расчета вероятности события $A + B$?
5. Покажите, что при классическом подходе к определению вероятности случайного события не нарушаются аксиомы теории вероятностей и следствия из них.
6. Покажите, что при экспериментальном подходе к определению вероятности случайного события не нарушаются аксиомы теории вероятностей и следствия из них.
7. Как рассчитываются вероятности случайных событий в случае, когда пространство элементарных событий конечно?
8. Ответьте на вопрос 7 при дополнительном условии, что элементарные события равновероятны.

Условные вероятности. Независимость случайных событий

1. Что называется условной вероятностью события A относительно B?
2. Почему безусловная вероятность события A называется априорной, а условная – апостериорной?
3. Опишите пространство элементарных событий при расчете условной вероятности случайного события.
4. Напишите формулу умножения вероятностей двух событий.
5. Дайте определение независимости события A от события B.
6. Как записывается формула умножения вероятностей для независимых событий?
7. Дайте определение независимости n событий в совокупности.
8. Приведите пример, в котором события попарно независимы, но зависимы в совокупности.
9. Абсолютно симметричная монета подбрасывается до тех пор, пока не выпадет герб. Какова вероятность того, что монету придется подбрасывать ровно 5 раз?
10. Для событий A и B известны следующие вероятности: $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}2$; $P(AB) = 0{,}14$. Являются ли события A и B несовместными?
11. Для событий A и B известны следующие вероятности: $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}05$; $P(A + B) = 0{,}75$. Являются ли события A и B независимыми?

    Являются ли противоположные события зависимыми? Являются ли они совместными?

Формула полной вероятности

6. Сформулируйте условия, при которых справедлива формула полной вероятности.
7. Напишите формулу полной вероятности и объясните содержание всех входящих в нее переменных.
8. Приведите вывод формулы полной вероятности.
9. Где в выводе формулы полной вероятности используется несовместность гипотез?
10. Являются ли гипотезы независимыми?
11. Являются ли несовместными события AH_i, $i = 1, 2, \dots, n$? Дайте объяснение к ответу.
12. Пусть событие B может произойти с любым из событий H_i, $i = 1, 2, \dots, n$, которые образуют полную группу попарно несовместных событий. Укажите, какие из приведенных ниже равенств являются верными.

    (1) $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|H_i)$;   (3) $B = \bigcup_{i=1}^{n} BH_i$;
    (2) $B = \bigcup_{i=1}^{n} B|H_i$;   (4) $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BH_i)$;

Формула Байеса (теорема гипотез)

13. В чем состоит задача расчета апостериорных вероятностей гипотез?
14. Какие данные необходимы для расчета апостериорных вероятностей гипотез?
15. Напишите формулу Байеса.
16. Приведите доказательство формулы Байеса.
17. В партии, состоящей из пяти изделий, с равной вероятностью может быть 1, 2 или 3 бракованных изделия. Из партии случайно выбрано одно изделие, которое оказалось бракованным. Какова вероятность того, что в партии было два бракованных изделия?
18. Чему равна сумма апостериорных вероятностей всех гипотез $\sum_{i=1}^{n} P(H_i|A)$; ?

Повторение опытов. Формулы Бернулли, Пуассона и Муавра-Лапласа

1. В каких опытах для определения вероятности используется формула Бернулли? Поясните смысл формулы и смысл входящих в них величин.
2. Выпишите формулы Муавра-Лапласа и Пуассона. Поясните их смысл и смысл входящих величин.
3. В чем отличие в использовании формул Бернулли, Пуассона и Муавра-Лапласа для решения задач теории вероятностей и в чем их сходство?

Лекции 4-6. Случайные величины.

В лекциях рассматривается одно из важнейших понятий теории вероятностей – случайные величины. Рассмотрены различные виды случайных величин, способы их описания, различные числовые характеристики. Обсуждаются наиболее часто встречающиеся законы распределения случайных величин.

Контрольные вопросы и задачи по темам лекций 5-6.

Понятие случайной величины

1. Дайте определение случайной величины.
2. Наложены ли на функцию $\xi(\omega)$ какие-либо ограничения? Реализует ли она взаимно-однозначное соответствие между элементарными событиями $\omega \in \Omega$ и значениями случайной величины ξ ?
3. Что означает понятие закона распределения вероятностей случайной величины?
4. На какие типы подразделяется все множество случайных величин?
5. Дайте определение дискретной случайной величины.
6. Приведите пример дискретной случайной величины. Укажите множество ее возможных значений.
7. Приведите пример случайной величины, не относящейся к дискретному типу. Укажите множество ее возможных значений.

Функция распределения вероятностей случайной величины

8. Дайте определение функции распределения вероятностей случайной величины.
9. Испытание состоит в случайном бросании монеты. Случайная величина X принимает значение 1 при выпадении герба и 0 – при выпадении решетки. Постройте функцию распределения вероятностей F_X (x).
10. К какому типу относится случайная величина X, рассмотренная в предыдущем вопросе?
11. Чему равны значения функции F_X (x) для случайной величины X, описанной в вопросе 9, при аргументах x = 0; 0,5; 1; 1,5?
12. Какова область возможных значений функции распределения вероятностей F_X (x)? Дайте объяснение к своему ответу.
13. Как с помощью функции распределения вероятностей рассчитать вероятность попадания случайной величины на интервал?
14. В ответе на вопрос 13 каким предполагается интервал: закрытым, открытым или полуоткрытым?
15. Почему функция распределения вероятностей является неубывающей?
16. Допустим, функция распределения вероятностей изменяется скачком при $x = x_0$. Чему равна величина скачка?
17. Почему функцию распределения вероятностей случайной величины называют функцией накопленных вероятностей?
18. Какими свойствами должна обладать функция, чтобы ее можно было интерпретировать как функцию распределения вероятностей некоторой случайной величины?
19. Чему равна функция FX (x) равномерно распределенной случайной величины на отрезке [a, b]?
20. Чему для случайной величины, равномерно распределенной на отрезке [-10; 10], равна вероятность попадания в интервал [–1; 3); [–1; 3]?

Дискретное распределение вероятностей

21. В форме какой таблицы может быть представлен закон распределения вероятностей дискретной случайной величины с конечным множеством возможных значений?
22. Чему равна величина скачка в точках разрыва функции распределения вероятностей дискретной случайной величины?
23. Запишите условие нормировки для дискретного распределения вероятностей.
24. В чем состоит схема испытаний Бернулли?
25. Какое распределение вероятностей называется биномиальным?
26. Приведите пример случайной величины, распределенной по биномиальному закону.
27. Какое распределение вероятностей называется геометрическим?
28. Какое распределение вероятностей называется гипергеометрическим?
29. Покажите на примере, почему случайная величина, распределенная по гипергеометрическому закону, связана с зависимыми испытаниями в отличие от схемы Бернулли.

Непрерывное распределение вероятностей

30. Дайте определение случайной величины непрерывного типа.
31. Как связаны плотность вероятности и функция распределения вероятностей случайной величины непрерывного типа?
32. Объясните происхождение названия "плотность распределения вероятностей"?
33. Является ли непрерывность обязательным свойством функции плотности распределения вероятностей для случайной величины непрерывного типа?
34. Напишите выражение для функции плотности вероятности равномерно распределенной на отрезке [a, b] случайной величины.
35. Может ли плотность распределения вероятностей принимать значения больше единицы?
36. Может ли плотность распределения вероятностей принимать отрицательные значения? Дайте обоснование ответа.
37. Как можно рассчитать вероятность попадания непрерывной случайной величины на произвольный интервал [a, b), если известна ее плотность распределения вероятностей?
38. Зависит ли вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал от того, является он открытым, закрытым или полуоткрытым? Дайте обоснование ответа.
39. Как можно приближенно оценить вероятность попадания непрерывной случайной величины в малый интервал, если известна ее плотность распределения вероятностей?

40. В чем состоит свойство нормировки функции плотности вероятности?
41. Какую плотность вероятности имеет показательное (экспоненциальное) распределение?
42. Чему равна функция распределения вероятностей показательного закона?

Числовые характеристики случайных величин

43. Напишите выражение для математического ожидания (среднего значения) дискретной случайной величины.
44. Напишите выражение для дисперсии дискретной случайной величины.
45. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по биномиальному закону?
46. Дискретная случайная величина распределена по геометрическому закону с параметром p. Чему равно ее математическое ожидание?
47. Рассчитайте математическое ожидание и дисперсию случайной величины, распределение вероятностей которой представлено таблицей:

x_k	–1	0	1
p_k	0,3	0,4	0,3

48. Рассматривается "индикаторная" случайная величина, которая принимает значение 1 с вероятностью p и 0 – с вероятностью $(1 - p)$. Чему равны ее математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратичное отклонение?

Нормальный закон распределения вероятностей (закон Гаусса)

49. Чему равна плотность вероятности нормально распределенной случайной величины?
50. Покажите, что плотность вероятности нормального закона удовлетворяет условию нормировки.
51. Какова область возможных значений нормально распределенной случайной величины?
52. От каких параметров зависит нормальный закон распределения вероятностей?
53. Объясните, почему начальные и центральные моменты произвольного порядка нормально распределенной случайной величины выражаются через математическое ожидание и стандартное отклонение.
54. Чем различаются графики плотности вероятности нормального распределения случайных величин, характеризующихся разными математическими ожиданиями и одинаковыми стандартными отклонениями?
55. Как изменится форма графика плотности вероятности нормально распределенной случайной величины, если увеличить ее стандартное отклонение?
56. Напишите выражение для функции распределения вероятностей закона Гаусса.
57. Дайте определение функции Лапласа.
58. Какими свойствами обладает функция Лапласа? Нарисуйте ее график.
59. Напишите выражение для вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в произвольный интервал $[\alpha, \beta)$. Зависит ли эта вероятность от включения или исключения из интервала граничных точек?
60. Укажите для нормально распределенной случайной величины интервал, расположенный симметрично относительно центра распределения вероятностей, в который она попадает с вероятностью, превышающей 0,95.
61. Чему равны центральные моменты нечетного порядка для нормально распределенной случайной величины?
62. Чему равны центральные моменты четного порядка для нормально распределенной случайной величины?
63. Чему равен эксцесс нормального распределения вероятностей? Дайте обоснование к своему ответу.
64. Как изменяется закон распределения вероятностей при линейном преобразовании нормально распределенной случайной величины?

Лекции 7-8. Многомерные случайные величины.

В лекциях рассматриваются задачи, возникающие при измерении в одном эксперименте не одной, а несколько случайных величин. Материал предыдущих лекций обобщается на этот случай, приводятся соответствующие способы описания и различные числовые характеристики.

7.1. Многомерные случайные величины.
 7.1.1. Функция распределения многомерной случайной величины.
 7.1.2. Дискретные многомерные случайные величины.
 7.1.3. Непрерывные многомерные случайные величины.
7.2. Зависимые и независимые случайные величины.
 7.2.1. Условные законы распределения.
8.1. Числовые характеристики двумерной случайной величины.
 8.1.1. Корреляционный момент и коэффициент корреляции.
 8.1.2. Числовые характеристики условных распределений.
 8.1.3. Линейная регрессия. Прямые линии среднеквадратической регрессии.
 8.1.4. Линейная корреляция. Двумерный нормальный закон распределения.

Контрольные вопросы и задачи по темам лекций 7-8.

1. Что называется случайным вектором?
2. Дайте определение функции распределения вероятностей случайного вектора.
3. Приведите геометрическую иллюстрацию события, вероятность которого представляет собой значение функции распределения вероятностей двумерного случайного вектора.
4. Почему функция распределения вероятностей является ограниченной функцией?
5. Чему равны значения функции распределения вероятностей при значениях всех аргументов $+\infty$ и $-\infty$?
6. Напишите выражение, определяющее вероятность попадания координаты X_k n-мерного случайного вектора **X** в интервал $[a_k, b_k)$ и одновременном выполнении неравенств $(X_i < x_i)$, $i \neq k$, для всех других координат.
7. Ответьте на предыдущий вопрос при условии $n = 2$ и дайте геометрическую иллюстрацию к ответу.
8. Как выразить с помощью функции распределения вероятностей двумерного случайного вектора **X** вероятность его попадания в прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям координат? Докажите справедливость приведенного равенства.
9. Как можно получить функцию распределения вероятностей одной координаты X_k n-мерного случайного вектора, если известна его функция распределения вероятностей?
10. Известна функция распределения вероятностей случайного вектора размерности 3. Напишите равенство, позволяющее определить совместную функцию распределения вероятностей координат X_1 и X_3.
11. Что называется случайным вектором дискретного типа? Дайте определение.
12. Какая система обозначений используется для возможных значений координат случайного вектора дискретного типа?
13. Как в принятой системе обозначений записывается одно произвольное значение случайного вектора из множества возможных значений?
14. Укажите условия, при которых n-мерный случайный вектор относится к непрерывному типу.
15. Что называется условным распределением вероятностей случайной величины X относительно события A?
16. Дайте определение условной функции распределения вероятностей случайной величины X_1 относительно X_2.
17. Что называется математическим ожиданием случайного вектора?
18. Как выполняется операция центрирования случайного вектора?
19. Что называется ковариационным моментом случайных величин X_l и X_m?
20. В каких единицах измеряется ковариационный момент случайных величин X_l и X_m?
21. По каким формулам производится расчет ковариационного момента случайных величин X_l и X_m в случаях распределений непрерывного и дискретного типов?
22. Дайте определение нормально распределенного случайного вектора. Поясните все использованные в определении обозначения.
23. От каких параметров зависит многомерный нормальный закон распределения вероятностей?

Лекция 9. Предельные теоремы теории вероятностей.

В лекции рассматриваются теоретические обоснования основных положений теории вероятностей (закон больших чисел) и объясняется широкое распространение нормального закона распределения (центральная предельная теорема).

9.1. Закон больших чисел (предельные теоремы теории вероятностей).
 9.1.1. Неравенство Чебышева.
 9.1.2. Теоремы Чебышева.
 9.1.3. Теорема Маркова.
 9.1.4. Теорема Бернулли.
9.2. Центральная предельная теорема.
 9.2.1. Формула Муавра-Лапласа как частный случай центральная предельная теорема.

Контрольные вопросы и задачи по темам лекций 9.

Предельные теоремы

1. В чем заключается суть закона больших чисел?
2. Сформулируйте теорему Чебышева.
3. Поясните смысл величин, входящих в неравенство Чебышева.
4. В чем суть теоремы Бернулли о средних значениях случайной величины?
5. Формулировка центральной предельной теоремы.
6. Какие преимущества имеет нормальное распределение перед другими законами распределения случайных величин?

Тема 2. ***Элементы математической статистики.***

Лекция 10-13. Выборки. Статистические оценки параметров распределения.

В лекциях рассматриваются основные понятия математической статистики, описываются ее основные задачи, разбираются способы предварительной обработки данных для представления их в обозримом виде. Рассматривается одна из основных задач математической статистики – оценка неизвестных параметров выбранной параметрической модели. Обсуждаются виды оценок (точечные и интервальные), необходимые характеристики оценок, методы их получения, решаются типичные задачи.

10.1. Задачи математической статистики.
10.2. Генеральная и выборочная совокупности. Способы отбора.
10.3. Статистическое распределение выборки.
10.4. Полигон и гистограмма.
10.5. Эмпирическая функция распределения.
11.1. Числовые характеристики статистического распределения выборки.
11.2. Числовые характеристики генеральной совокупности.
11.3. Статистические оценки параметров распределения.
11.4. Точечные и интервальные оценки. Доверительный интервал, точность оценки, доверительная вероятность (надежность).
12.1. Несмещенные, эффективные и состоятельные оценки.
12.2. Точечная оценка генерального среднего по выборочному среднему.
12.3. Точечная оценка генеральной дисперсии по исправленной выборочной дисперсии.
11.4. Метод моментов для точечной оценки параметров распределения.
12.5. Метод максимального правдоподобия для точечной оценки параметров распределения.
13.1. Интервальные оценки.

13.2. Интервальная оценка математического ожидания нормально распределенной случайной величины при известной дисперсии.
13.3. Интервальная оценка математического ожидания нормально распределенной случайной величины при неизвестной дисперсии.
13.4. Интервальная оценка дисперсии нормального распределения.

Контрольные вопросы по темам лекций 10-13.

1. Перечислите основные задачи математической статистики.
2. Что такое генеральная совокупность?
3. Что такое выборка из генеральной совокупности? Какие требования к ней предъявляются? Что такое объем выборки?
4. Что собой представляет статистический ряд распределения случайной величины (СВ)?
5. Что собой представляет частота варианты, частость (вес) варианты?
6. Что такое эмпирическая функция распределения? Каково ее значение для статистики?
7. Что представляет собой гистограмма, полигон частот?
8. Что такое выборочное среднее, выборочная дисперсия?
9. Определение статистической оценки неизвестного параметра.
10. Какая оценка называется точечной.
11. Что такое несмещенность оценки, состоятельность, эффективность?
12. Записать выражение для вычисления выборочной средней, выборочной дисперсии и исправленной дисперсии. Какая из этих оценок является смещенной?
13. В чем состоит сущность метода моментов точечного оценивания параметров?
14. В чем состоит сущность метода максимального правдоподобия точечной оценки параметров?
15. Что такое доверительный интервал (ДИ) и в чем его преимущество?
16. Что такое доверительная вероятность (надежность)?
17. Что происходит с длиной ДИ при увеличении объема выборки? Увеличение доверительной вероятности?
18. Методика вычисления границ ДИ для оценки математического ожидания нормально распределенной СВ при известном и неизвестном σ.

Лекция 14-16. Проверка статистических гипотез.

Задача проверки гипотезы в известном смысле напоминает задачу оценки параметров генеральной совокупности по данным выборки: высказывается некоторое утверждение и на основании данных выборки выносится суждение о справедливости этого утверждения.

14.1. Статистическая гипотеза. Параметрическая и непараметрическая, нулевая и конкурирующая, простая и сложная гипотезы.
14.2. Ошибки первого и второго рода.
14.3. Статистический критерий. Критическая область. Область принятия гипотезы. Критические точки.
15.1 Уровень значимости и мощность критерия.
15.2. Виды критических областей.
15.3. Методика проверки гипотез.
16.1. Непараметрические гипотезы. Критерии согласия Пирсона и Колмогорова.
16.1.1. Критерий Пирсона.
16.1.2. Критерий Колмогорова.

Лекция 17-18. Статистическое исследование зависимостей. Корреляционный анализ.

В рассматриваемых задачах требуется установить и оценить зависимость между переменными величинами, которые могут быть и случайными.

17. Основы корреляционного анализа.
    17.1. Основные понятия.
    17.2. Элементы теории корреляции. Анализ парных связей.
    17.3. Оценка показателей связей по выборочным данным. Корреляционное поле.
18.1. Анализ коэффициента корреляции.
    18.1.1. Точечная оценка коэффициента корреляции.
    18.1.2. Интервальная оценка коэффициента корреляции и проверка значимости.

Использовать учебную литературу:

1. Горлач, Б.А. Теория вероятностей и математическая статистика. [Электронный ресурс]: Учебно-методические пособия — Электрон. дан. — СПб.: Лань, 2013. — 320 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/4864 — Загл. с экрана.
2. Буре, В.М. Теория вероятностей и математическая статистика. [Электронный ресурс] / В.М. Буре, Е.М. Парилина. — Электрон. дан. — СПб.: Лань, 2013. — 416 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/10249 — Загл. с экрана.

II. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

1. Основные понятия теории вероятностей

Опорный конспект для практических занятий 1-6

1.1. Понятие пространства элементарных событий Ω и случайного события (с.с.). Основные формулы комбинаторики

О: $\Omega = \{\omega\}$ — множество всевозможных исходов опыта, ω — элементарное событие

О: С.с. $A \Leftrightarrow A \subset \Omega$. Ω — достоверное событие, $\varnothing$ — невозможное событие

Формулы комбинаторики:

$P_n = n!$ — число перестановок из n элементов, $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ — число размещений из n по m, $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!m!}$ — число сочетаний из n по m

1.2. Действия над с.с.

Сумма $A \cup B = \{\omega\colon \omega \in A \vee \omega \in B\}$

Произведение $AB = \{\omega\colon \omega \in A \wedge \omega \in B\}$

Разность $A \backslash B = \{\omega\colon \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$

$\overline{A} = \Omega \backslash A$ — дополнение A до Ω

A, B несовместны $\Leftrightarrow AB = \varnothing \Rightarrow A \cup B = A + B$

О: $S = \{A_i\}$, $A_i \subset \Omega$, $i \in N$ — полная группа событий $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum\limits_i A_i = \Omega$

1.3. Различные определения вероятности

1. Статистическое определение

О: $P(A) \approx P^*(A) = m/n$ — относительная частота; m — число наступлений A при повторении эксперимента n раз

2. Классическое определение

$\Omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, ω_i, $i = \overline{1, n}$, — равновозможны, m эл. событий $\omega_i \in A \Rightarrow P(A) = m/n$

3. Геометрическое определение

О: E^*, E — измеримые множества из $\mathbf{R}^n$, $E^* \subset E$, A — попадание т. $a \in E$ в $E^* \Rightarrow P(A) = \mu(E^*)/\mu(E)$, $\mu(E)$ — мера E

4. Аксиоматическое и классическое определения

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$

О: Вероятность $P(\omega_i) \Leftrightarrow P(\omega_i) \in \mathbf{R}$:

1) $P(\omega_i) \geq 0 \ \forall\ i$, 2) $\sum\limits_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) = 1$;

$P(\omega_i)$ — мера наступления ω_i

О: Вероятность $P(A) = \sum\limits_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i)$, $A \models \Omega$

$P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$, $0 < P(A) < 1$

1.4. Сложение и умножение вероятностей. Формула полной вероятности

Т: $AB = \varnothing \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$

$AB \neq \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$A + \overline{A} = \Omega \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ ■

О: $P(A/B)$ — условная вероятность (наступления A при условии, что B произошло). A, B — независимы $\Leftrightarrow P(A/B) = P(A)$, $P(B/A) = P(B)$

Т: $P(AB) = P(A/B)P(B)$; A, B — независимы $\Rightarrow P(AB) = P(A)P(B)$ ■

Т: $S = \{H_i\}$: $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega \Rightarrow P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i), \forall A \subset \Omega$ ■

1.5. Схема испытаний Бернулли

Вероятность появления с.с. A в n независимых испытаниях m раз:

$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, $P(A) = p$, $P(\overline{A}) = 1 - p = q$

Темы практических занятий

1. Стохастический эксперимент. Случайные события. Пространство элементарных событий. Операции над событиями.
2. Классическое вероятностное пространство.
3. Геометрическая вероятность.
4. Условная вероятность. Независимые случайные события. Сложные события.
5. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
6. Повторение испытаний. Формула Бернулли. Полиномиальная схема.

Задачи к разд. 1.1, 1.2

Задача 1. В теннисном турнире участвуют 10 мужчин и 6 женщин. Сколькими способами можно составить четыре смешанные пары?

Решение: Четырех мужчин из десяти можно выбрать A_{10}^4 способами, так как соединения из 10 мужчин по четыре в этом случае могут отличаться и самими элементами, и их порядком, т.е. являются размещениями. Аналогично, четырех женщин из шести можно выбрать A_6^4 способами, причем каждому способу выбора четырех мужчин соответствует A_6^4 способов выбора женщин. Следовательно, общее число способов $A_{10}^4 \cdot A_6^4 = \frac{10!}{6!}\frac{6!}{2!} = \frac{10!}{2!}$.

Задача 2. Бросают три монеты одновременно. Случайное событие A состоит в появлении герба только на одной монете. Описать пространство элементарных событий Ω и определить, сколько элементарных событий содержится в Ω и входит в случайное событие A.

Решение: Обозначим через r выпадение герба, а через p — выпадение решки на одной монете. Пространство элементарных событий Ω включает следующие события: (r, r, r), (r, r, p), (r, p, r), (p, r, r), (r, p, p), (p, r, p), (p, p, r), (p, p, p), т.е. включает восемь элементарных событий. Случайное событие A включает элементарные события (r, p, p), (p, r, p), (p, p, r), т.е. содержит три события.

Задача 3. В урне 5 черных и 6 белых шаров. Из нее случайным образом вынимают 4 шара. Случайное событие A состоит в том, что из четырех шаров два — белые. Описать пространство элементарных событий, определить их число и число элементарных событий, входящих в A.

Решение: Пространство элементарных событий Ω состоит из ω_i, каждое из которых есть выбор четырех шаров из 11, их число $n = C_{11}^4 = \frac{11!}{4!7!} = 330$. Случайное событие A включает те ω_i, для которых два шара белые. Это значит, что из четырех вынутых шаров — 2 белых и 2 черных. Два белых шара из шести белых в урне выбираем C^2_6 способами, два черных — C_5^2 способами. Тогда в событие A входит $m = C_6^2 C_5^2 = \frac{6!}{2!4!}\frac{5!}{2!3!} = \frac{6\cdot 5}{2}\frac{5\cdot 4}{2} = 150$ элементарных событий.

Задача 4. Из таблицы случайных чисел наугад выбраны два числа. Событие A — выбрано хотя бы одно простое число, событие B — выбрано хотя бы одно четное число. Что означают события AB и $A \cup B$?

Решение: Событие AB означает наступление и события A, и события B, т.е. из двух выбранных чисел одно — простое, другое — четное. Событие $A \cup B$ означает наступление или события A, или события B, т.е. или хотя бы одно из двух выбранных чисел простое, или хотя бы одно из них — четное. В последнем случае оба числа могут быть простыми или четными, или одно — простое, другое — четное.

Задачи к разд. 1.3

Задача 1. В урне 4 белых и 6 черных шаров. Выбрали наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

Решение: Пространство элементарных событий Ω содержит 10 равновозможных элементарных событий ω_i (выбор одного шара). Случайное событие A — выбор белого шара, т.е. A содержит 4 элементарных события. Вероятность $P(A)$ события A определяется по формуле определения вероятности: $P(A) = m/n$, где $m = 4$, а $n = 10$. Имеем $P(A) = 4/10 = 2/5$.

Задача 2. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня, что они различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение: Пространство элементарных событий Ω содержит элементарные события $\omega_i = (n_i,\ m_i)$, $n_i, m_i \in 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ 9$, $n_i \neq m_i$. Их число N есть число размещений из 10 по 2, т.е. по формуле ОК, разд. 34.1, $N = 10!/8! = 90$. Событие A содержит только одно элементарное событие; таким образом, искомая вероятность $P(A) =$ $= 1/90$.

Задача 3. В партии из 10 деталей семь деталей — стандартных. Найти вероятность того, что среди взятых наугад пяти деталей три детали стандартные.

Решение: Пространство элементарных событий Ω содержит элементарные события ω_i (выбор пяти деталей из десяти), число которых N определяется как число сочетаний из 10 по 5, т.е. $N =$ $= C_{10}^5 = \dfrac{10!}{5!5!} = 252$. Случайное событие A включает такие ω_i, для которых из этих пяти деталей три — стандартные. Их число M есть произведение числа способов, которыми можно из имеющихся 7 деталей выбрать 3 (число сочетаний из 7 по 3, C_7^3), на число способов, которыми можно выбрать оставшиеся $5 - 3 = 2$ детали и $10 - 7 = 3$ имеющиеся нестандартные детали (число сочетаний из 3 по 2, C_3^2). Следовательно, $M = C_7^3 \cdot C_3^2 = \dfrac{7!}{4!3!}\dfrac{3!}{2!1!} = 105$. Таким образом, находим вероятность $P(A) = M/N = 105/252 = 5/12$.

В общем виде задача формулируется следующим образом. В партии из n изделий k стандартных. Определить вероятность P того, что среди выбранных наудачу m изделий ($m < n$) l изделий окажутся стандартными. Формула для определения вероятности P события A: «l изделий из выбранных m стандарные» запишется в виде $P(A) = \dfrac{C_k^l C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m}$. В случае $l = m$ формула упрощается: $P(A) = \dfrac{C_k^m}{C_n^m}$.

Задача 4. Слово МАТЕМАТИКА составлено из карточек, на которых написано по одной букве. Карточки перемешивают и берут безвозвратно по одной. Найти вероятность того, что буквы будут взяты в нужном порядке.

Решение: Пространство элементарных событий Ω содержит элементарные события $\{\omega_i\}$, где $\{\omega_i\}$ — некоторая последовательность букв. Число элементарных событий N определяется числом перестановок из 10 букв, так как в данном слове 10 букв. Тогда по формуле ОК, разд. 34.1, $N = 10!$ Событие A состоит в получении слова МАТЕМАТИКА. Так как буква «М» встречается в слове 2 раза, буква «А» — три раза, буква «Т» — 2 раза, то возможны перестановки, при которых слово не меняется. Число этих перестановок $M = 2!3!2!$ и составляет число элементарных событий, входящих в событие A. Окончательно получим вероятность $P(A) = M/N = \dfrac{2!3!2!}{10!} = 1/151\,200$.

Задача 5. Два игрока по очереди бросают игральную кость, каждый по одному разу. Выигрывает тот, кто получит большее число очков. Найти вероятность выигрыша первого игрока.

Решение: Пространство элементарных событий Ω содержит элементарные события $\omega_i = (n_i, m_i)$, $n_i, m_i \in 0, 1, 2, ..., 6$. Его можно изобразить в виде матрицы

$$\Omega = \begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \ldots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \ldots & (2,6) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & \ldots & (6,6) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что число элементарных событий N равно $N = 36$. Событие A включает те, для которых $n_i > m_i$, их число M легко можно определить из матрицы: $M = 15$. Отсюда вероятность $P(A) = M/N = 15/36 = 5/12$.

Задача 6. На отрезке AB длиной 20 см помещен меньший отрезок CD длиной 10 см. Найти вероятность того, что наугад брошенная на отрезок AB точка попадет внутрь отрезка CD.

Решение: Необходимо использовать геометрическое определение вероятности, причем в данном случае $P(A) = L_{AB}/L_{CD} = 10/20 = 1/2$.

Задачи к разд. 1.4

Задача 1. В денежно-вещевой лотерее на серию 1000 билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей. Найти вероятность какого-либо выигрыша на один лотерейный билет.

Решение: Пространство элементарных событий Ω содержит элементарные события ω_i, состоящие в приобретении i-го билета, $i \in \overline{1,1000}$. Случайное событие A состоит в денежном выигрыше на купленный билет, случайное событие B — в вещевом выигрыше, случайное событие C — в любом выигрыше. Тогда $C = A + B$ ($AB = \varnothing$, т.е. A и B — несовместные события). По теореме сложения вероятностей $P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B)$. Так как $P(A) = 120/1000 = 0{,}12$, $P(B) = 80/1000 = 0{,}08$, то $P(C) = 0{,}12 + 0{,}08 = 0{,}2$.

Задача 2. Для двух химических реакторов вероятности бесперебойной работы на протяжении одного часа $p_1 = 0{,}75$ и $p_2 = 0{,}8$. Определить вероятность того, что:

а) оба реактора выйдут из строя в течение часа;

б) оба реактора будут работать бесперебойно в течение часа, в течение трех часов;

в) будет работать бесперебойно в течение часа хотя бы один реактор;

г) будет работать бесперебойно в течение часа только один реактор.

Решение: Пространство элементарных событий не рассматриваем, так как заданы вероятности событий.

а) Введем случайные события: A_1 — бесперебойная работа 1-го реактора в течение часа, A_2 — бесперебойная работа 2-го реактора в течение часа, $\overline{A}_1, \overline{A}_2$ — события, противоположные событиям A_1 и A_2, соответствующие выходу реакторов из строя в течение часа, $\overline{B}$ — оба реактора вышли из строя в течение часа.

Так как $P(A_1) = p_1 = 0{,}75$ и $P(A_2) = p_2 = 0{,}8$, имеем (см. ОК, разд. 34.4) $P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$, $P(\overline{A}_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. События $\overline{A}_1, \overline{A}_2$ — независимые, при этом $\overline{B} = \overline{A}_1\overline{A}_2$. Тогда по теореме об умножении вероятностей $P(\overline{B}) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1) \times P(\overline{A}_2) = 0{,}25 \cdot 0{,}2 = 0{,}05$.

б) Пусть случайное событие C — бесперебойная работа обоих реакторов в течение часа, D — бесперебойная работа обоих реакторов в течение трех часов. Тогда $C = AB$, $D = CCC$ и имеем $P(C) = P(A)P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}75 = 0{,}6$; $P(D) = (P(C))^3 = (0{,}6)^3 = 0{,}216$.

в) Событие B — работает хотя бы один реактор — противоположно событию $\overline{B}$, поэтому $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$ (вероятность $P(\overline{B})$ найдена в а)). Вероятность события C может быть найдена и другим образом, если учесть, что $C = A \cup B$, и тогда $P(C) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}75 + 0{,}8 - 0{,}6 = 0{,}95$.

г) Событие E — бесперебойная работа только одного реактора в течение часа — записывается в виде $E = A\overline{B} + \overline{A}B$, тогда

$$P(E) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}25 + 0{,}2 \cdot 0{,}75 = 0{,}35.$$

Задача 3. Вероятность попадания в цель при одном выстреле $p = 0{,}2$. Какова вероятность поразить цель, если 2% взрывателей дают отказы?

Решение: Пусть случайное событие A — попадание в цель при сделанном выстреле, событие B — взрыватель не дал отказа, событие C — поражение цели. Тогда $C = AB$, условная вероятность $P(A/B) = p = 0{,}2$, $P(\overline{B}) = 0{,}02$, $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 0{,}98$. Следовательно, $P(C) = P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}98 \cdot 0{,}2 = 0{,}196$.

Задача 4. В пирамиде 19 винтовок, из них 3 с оптическим прицелом. Стрелок, стреляя из винтовки с оптическим прицелом, может поразить мишень с вероятностью 0,81, без оптического прицела — с вероятностью 0,46. Найти вероятность того, что стрелок поразит мишень, стреляя из винтовки, взятой наугад из пирамиды.

Решение: Введем случайные события: H_1 — взята винтовка с оптическим прицелом, H_2 — взята винтовка без оптического прицела, A — стрелок поразит мишень. События H_1 и H_2 — несовместные, $H_1 + H_2 = \Omega$, т.е. H_1 и H_2 образуют полную группу событий, причем $P(H_1) = 3/19$, а $P(H_2) = 16/19$. Из условия задачи известны условные вероятности $P(A/H_1) = 0{,}81$, $P(H_2) = 0{,}46$. Воспользуемся формулой полной вероятности $A \in \Omega$: $P(A) = P(H_1) \times P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = (3/19) \cdot 0{,}81 + (16/19) \cdot 0{,}46 = 0{,}515$.

Задачи к разд. 1.5.

Задача 1. В урне 20 белых шаров и 10 черных. Вынули подряд 4 шара, причем каждый раз вынутый шар возвращали в урну. Какова вероятность того, что два раза были вынуты белые шары?

Решение: Введем случайное событие A — вынут белый шар, тогда $P(A) = p = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$, $P(\overline{A}) = q = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$, причем событие A должно появиться при четырех независимых испытаниях два раза. По формуле Бернулли (см. ОК, разд. 34.5) искомая вероятность $P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = C_4^2 (2/3)^2 (1/3)^2 = \frac{4!}{2!2!}\frac{4}{9}\frac{1}{9} = \frac{8}{27}$.

Задача 2. Определить вероятность того, что в семье из пяти детей три девочки. Вероятности рождения мальчика и девочки одинаковы.

Решение: Введем случайное событие A — рождение девочки, тогда $P(A) = p = 1/2$, $P(\overline{A}) = q = 1/2$. Имеем схему испытаний Бернулли, где $n = 5$, $m = 3$, т.е. искомая вероятность $P_5(3) = C_5^3 (1/2)^3 (1/2)^2 = \frac{5!}{3!2!}\frac{1}{8}\frac{1}{4} = \frac{5}{16}$.

2. Случайные величины

Опорный конспект для практических занятий 7-10

2.1. Дискретные и непрерывные случайные величины (СВ). Закон распределения

О: СВ $\xi \Leftrightarrow \xi = \xi(\omega), \omega \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}$. Дискретная СВ $\Leftrightarrow$ $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Непрерывная СВ $\Leftrightarrow \xi \in (a, b)$

О: Ряд распределения СВ — таблица

ξ	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

$\sum_i p_i = 1$

О: Функция распределения СВ ξ: $F(x) = P(\xi < x)$, $x \in \mathbf{R}$
О: Плотность распределения непр. СВ $\Leftrightarrow$ $\varphi(x)$: $F'(x) = \varphi(x)$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x = 1.$$

$$P(x_1 \le \xi \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\mathrm{d}x$$

2.2. Числовые характеристики СВ

О: Математическое ожидание дискретной СВ

$\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $P(\xi = x_i) = p_i \Leftrightarrow M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

Математическое ожидание непр. СВ ξ с плотностью вероятности $\varphi(x)$ $\Leftrightarrow$ $M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\mathrm{d}x$

Дисперсия СВ ξ $\Leftrightarrow$ $D(\xi) = M((\xi - M(\xi))^2)$. Среднее квадратическое отклонение СВ ξ $\Leftrightarrow$ $\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}$

2.3. Примеры распределений дискретных и непрерывных СВ

О: Равномерное распределение дискретной СВ
$\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow P(\xi = x_i) = 1/n, i = \overline{1, n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow M(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \; D(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

О: Биномиальное распределение
СВ $\xi = (1, 2, \ldots, n) \Leftrightarrow P(\xi = i) = C_n^i p^i q^{n-i}$,
$i = \overline{1, n}$; p, q определены в разд. 34.5 $\Rightarrow M(\xi) = np$, $D(\xi) = npq$
О: Распределение Пуассона СВ $\xi = (1, 2, \ldots, n) \Leftrightarrow P(\xi = i) =$
$= (\lambda^i/i!)\mathrm{e}^{-\lambda}$, $\lambda = np$; p определено в разд. 34.5 $\Rightarrow M(\xi) = D(\xi) = \lambda$
О: Равномерное распределение непрерывной СВ $\xi \in [a, b] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \varphi(x) = c$, $c = \mathrm{const}$, $x \in [a, b] \Rightarrow c = 1/(b - a)$,
$M(\xi) = (a + b)/2$, $D(\xi) = (b - a)^2/12$
О: Нормальное распределение

$$\text{СВ } \xi \Leftrightarrow \varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \; x \in (-\infty, +\infty);$$

$m = M(\xi)$, $\sigma = \sqrt{D(\xi)}$

Темы практических занятий.

7. Законы и функции распределения дискретной случайной величины (с.в.).
8. Числовые характеристики дискретной с.в.
9. Законы и функции распределения непрерывной с.в. и их числовые характеристики.
10. Предельные теоремы теории вероятностей.

Задачи к разд. 2.1

Задача 1. Из партии, содержащей 100 изделий, среди которых 10 дефектных, выбраны случайным образом 5 изделий для проверки их качества. Построить многоугольник распределения, ряд распределений, найти функцию распределения случайной величины ξ — числа дефектных изделий в выборке. Построить график функции распределения.

Решение: В выборке из пяти деталей число дефектных изделий — случайная величина $\xi = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. Вероятность $P(\xi = k)$ того, что в выборке окажется k дефектных изделий, определяется по формуле (см. задачу 3 к разд. 34.3)

$$P_k = P(\xi = k) = \frac{C_{10}^k C_{10}^{5-k}}{C_{100}^5},\ k = \overline{0,5}.$$

Ряд распределений при вычислении с точностью до 0,001 имеет вид

ξ	0	1	2	3	4	5
P	0,583	0,340	0,070	0,007	0	0

$\sum\limits_{i=0}^{5} p_i = 1$. Функция распределения определяется как $F(x) = P(\xi < x)$, т.е.

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ x \le 0, \\ 0{,}583,\ 0 \le x \le 1, \\ 0{,}923,\ 1 \le x \le 2, \\ 0{,}993,\ 2 \le x \le 3, \\ 1,\ x > 3. \end{cases}$$

На рис. 35.1 изображен многоугольник распределения, а на рис. 35.2 — график функции распределения.

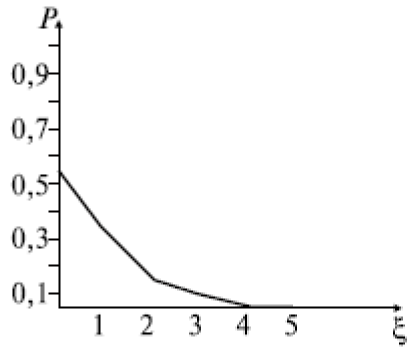


Рис. 35.1

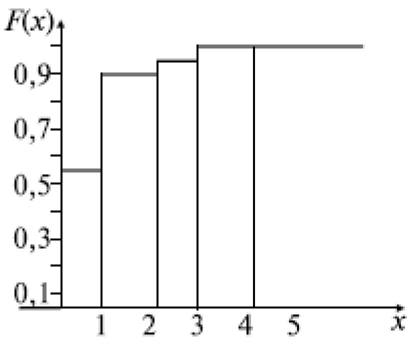


Рис. 35.2

Задача 2. Непрерывная случайная величина ξ имеет следующую плотность распределения: $\varphi(x) = \begin{cases} a\sin x, & 0 \le x \le \pi, \\ 0, & x < 0 \cup x > \pi. \end{cases}$

а) Найти величину коэффициента a; б) найти функцию распределения $F(x)$; в) построить графики $\varphi(x)$, $F(x)$; г) определить вероятность попадания случайной величины ξ в интервал от 0 до $\pi/4$ ($P(0 \le \xi \le \pi/4)$).

Решение: а) для определения величины коэффициента a воспользуемся свойством $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1$, т.е. $a\int_0^{\pi}\sin x\,dx = 1 \Rightarrow a(-\cos x|_0^{\pi}) = 1 \Rightarrow a = 0{,}5$;

б) используем формулу $F(x) = \int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt \Rightarrow$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0, \\ \frac{1}{2}\int_0^x \sin x\,dx, \ 0 \le x < \pi, \\ \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin x\,dx, \ x \ge \pi, \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x, \ 0 \le x < \pi, \\ 1, \ x \ge \pi; \end{cases}$$

в) графики $\varphi(x)$, $F(x)$ изображены на рис. 35.3 и 35.4 соответственно;

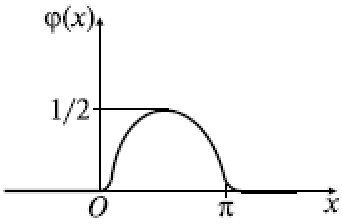


Рис. 35.3

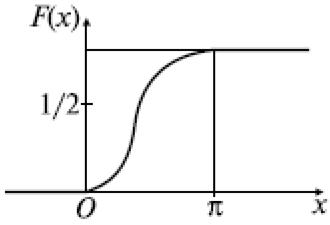


Рис. 35.4

г) находим $P(0 \le \xi \le \pi/4)$ по формуле

$$P(0 \le \xi \le \pi/4) = \frac{1}{2}\int_0^{x/4}\varphi(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sin x\,dx = -\frac{1}{2}\cos x|_0^{\pi/4} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \approx 0{,}15.$$

Можно также получить вероятность $P(0 \le \xi \le \pi/4)$ как $F(\pi/4) = 1/2 - \cos(\pi/4) = 0{,}15$.

Задачи к разд. 2.2.

Задача 1. Случайная величина задана рядом распределения

ξ	3	5	7	11
P	0,14	0,20	0,49	0,17

Найти математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$.

Решение: Математическое ожидание $M(\xi)$ дискретной случайной величины ξ определяется по формуле $M(\xi) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 3 \cdot 0{,}14 + 5 \cdot 0{,}20 + 7 \cdot 0{,}49 + 11 \cdot 0{,}17 = 6{,}72$.

Дисперсия

$D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2 = 9 \cdot 14 + 25 \cdot 0{,}20 + 49 \cdot 0{,}49 + 121 \cdot 0{,}17 - (6{,}72)^2 \approx 5{,}682$.

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{5{,}682}$.

Задача 2. Найти математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$ для непрерывной случайной величины ξ из задачи 2 к разд. 2.1.

Решение: Математическое ожидание $M(\xi)$ непрерывной случайной величины ξ вычисляется по формуле

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left\{\begin{matrix} x = u, & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, \\ \sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v, & v = \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x\right) = \frac{\pi}{2} + \sin x\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Дисперсия $D(\xi)$ определяется по формуле

$$D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2\sin x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi^2}{4} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} x^2 = u, & \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x, \\ \sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v, & v = \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x \end{matrix}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi^2}{4} = \left\{\begin{matrix} x = u, & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v, & v = \sin x \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + x\sin x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_0^{\pi} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi) = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}$.

Задачи к разд. 2.2.

Задача 1. По цели производится три независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле $p = 0{,}4$. Построить ряд распределения случайного числа попаданий в цель, найти $M(\xi)$, $D(\xi)$ и $\sigma(\xi)$.

Решение: Случайная величина ξ числа попаданий в цель: $\xi = \{0, 1, 2, 3\}$, причем $P(\xi = i) = C_3^i \cdot (0{,}4)^i \cdot (0{,}6)^{3-i}$, т.е. ряд распределения имеет вид

ξ	0	1	2	3
P	0,216	0,432	0,288	0,064

Так как имеем биномиальный закон распределения, то $M(\xi) = np = 3 \cdot 0{,}4 = 1{,}2$, $D(\xi) = npq = 3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}72$ и $\sigma(\xi) = \sqrt{0{,}72} = 0{,}85$.

Задача 2. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа двух и не менее двух электроэлементов в течение года?

Решение: Считаем случайную величину ξ — число отказавших в течение года элементов — подчиняющейся закону Пуассона. Тогда

$$p_i = p(\xi = i) = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda},\ \lambda = np = 1000 \cdot 0{,}001 = 1.$$

Вероятность отказа в течение года двух элементов равна: $p_2 = p(\xi = 2) = \frac{1}{2e} \approx 0{,}184.$

Вероятность отказа не менее двух элементов равна

$$p(\xi \geq 2) = \sum_{i=2}^{1000} p_i = 1 - p_0 - p_1 = 1 - \frac{2}{e} \approx 0{,}264.$$

Задача 3. Определить среднее квадратическое отклонение σ случайных ошибок прибора, если они подчиняются нормальному

закону. Систематических ошибок прибор не имеет ($m = 0$), а случайные с вероятностью 0,8 не выходят за пределы ±20(м).

Решение: Из условия задачи следует, что $P(|x| \leq 20) = 0{,}8$. Известно, что для нормального распределения $P(\alpha \leq \xi \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right)$, где $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^u e^{-\frac{u^2}{2}}du$ — функция Лапласа, значения которой находим в таблице (Приложение 1). Так как $P(|x| \leq 20) = \Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{20}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right) = 0{,}8$, то по таблице находим, что $20/\sigma = 1{,}90$, т.е. $\sigma = 10{,}5$ (м).

3. Элементы математической статистики

Опорный конспект для практических занятий 11-18

3.1. Основные понятия математической статистики

О: Выборка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — совокупность значений СВ ξ, полученных в результате n независимых экспериментов

О: Статистический ряд:

ξ	x_1^*	x_2^*	...	x_l^*
P^*	p_1^*	p_2^*	...	p_l^*

$x_i^* \in (x_1, x_2, \ldots, x_n), x_{i-1}^* < x_i^*, i = \overline{1, l}$,

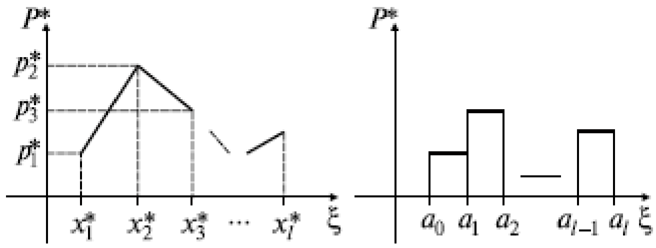
$p_i^* = m_i/n$ — относительная частота,

m_i — частота появления x_i

О: Статистический ряд по интервалам:

ξ	(a_0, a_1)	(a_1, a_2)	...	(a_{l-1}, a_l)
P^*	p_1^*	p_2^*	...	p_l^*

m_i — число значений СВ ξ, попавших в (a_{i-1}, a_i). Графическое изображение:



О: Эмпирическая функция распределения:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, x \le a_1; \\ \sum_{i=1}^{k} p_i^*,\ a_{k-1} < x \le a_k,\ k = \overline{1, l} \\ 1, x > a_n. \end{cases}$$

3.2. Определение неизвестных параметров распределения

О: Среднее арифметическое M^*, дисперсия D^* выборки:

$$M^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ D^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - M^*)^2;$$

статист. ряда:

$$M^* = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i^*,\ D^* = \sum_{i=1}^{l}(x_i - M^*)^2 p_i^*;$$

$M(\xi)$, $D(\xi)$ — числовые характеристики СВ ξ с выборкой $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow M(\xi) \approx M^*$, $D(\xi) \approx D^*$

О: Доверительный интервал

$(\Theta^* - \Delta, \Theta^* + \Delta) \Leftrightarrow P(|\Theta - \Theta^*| \le \Delta) = \gamma,$

Δ — точность оценки Θ^* параметра Θ в функции распределения $F(x, \Theta)$ СВ ξ, γ — коэффициент доверия

Для нормального распределения с параметрами m, σ при $m \approx M^* \Rightarrow P(m^* - \Delta \le m \le m^* + \Delta) = 2\Phi(\Delta\sqrt{n}/\sigma)$. Для двумерной СВ $\zeta = (\xi, \eta)$ с выборкой $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n))$ выборочный коэффициент корреляции

$$R^*(\xi, \eta) = \frac{M^*(\xi \cdot \eta) - M^*(\xi) \cdot M^*(\eta)}{\sqrt{D^*(\xi) \cdot D^*(\eta)}},$$

$$M^*(\xi \cdot \eta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

3.3. Проверка статистических гипотез

Выдвинуты гипотезы о параметрах распределения:

H_0: $M(\xi) = M(\eta)$; H_1: $M(\xi) > M(\eta)$, где ξ, η — нормальные генеральные совокупности, выборки из них объемами n и l имеют выборочные средние m_ξ^*, m_η^*, дисперсии $D^*(\xi)$, $D^*(\eta)$, $n \ge 30$, $l \ge 30$. В качестве критерия выбирается

$$Z = |m_\xi^* - m_\eta^*| / \sqrt{D^*(\xi)/n + D^*(\eta)/l},$$

строится правосторонняя критическая область $P(Z > Z_{\text{кр.пр}}) = \alpha$, α — уровень значимости (малая вероятность ошибочно отвергнуть H_0), $Z_{\text{кр.пр}} = \Phi^{-1}\left(\frac{1 - 2\alpha}{2}\right)$. При вычисленном по выборкам $Z_{\text{набл}} > Z_{\text{кр.пр}}$ гипотеза H_0 отвергается и принимается H_1.

Выдвинута гипотеза H_0 о функции распределения $F(x) = P(\xi < x)$ СВ ξ при выборке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и построенном статистическом ряде по интервалам (a_{i-1}, a_i), $i = \overline{1, l}$ — мера расхождения между m_i и np_i (p_i — теоретические вероятности):

$$\chi^{*2} = \sum_{i=1}^{l} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Т. (Пирсона): $P(\chi^{*2} < x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_0^x \varphi_k(x)dx,$

где $\varphi_k(x)$ — плотность распределения χ^2 с $k = l - 1$ степенями свободы ■

Критерий согласия Пирсона:

1) выбирается уровень значимости α, равный вероятности того, что H_0 будет ошибочно отвергнута;

2) из уравнения

$$P(\chi^2 > \chi_\alpha^2) = \int_{\chi_\alpha^2}^{\infty} \varphi_k(x)dx = \alpha$$

определяется χ_α^2 — предел значимости (для определения χ_α^2 пользуются таблицей);

3) при $\chi^{*2} > \chi_\alpha^2$ гипотеза H_0 отвергается, при $\chi^{*2} \le \chi_\alpha^2$ опытные данные совместимы с гипотезой H_0

Задачи к разд. 3.

Задача 1. Измерен диаметр у 270 валов хвостовика. Величины измеренных диаметров оказались в диапазоне 66–90 см. Разбив диапазон на интервалы длиной в 2 см, подсчитали частоту m_i попадания диаметра в данный интервал (см. таблицу):

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d, см	66–68	68–70	70–72	72–74	74–76	76–78	78–80	80–82	82–84	84–86	86–88	88–90
m_i	4	12	24	41	50	53	39	26	13	5	2	1

Построить гистограмму и эмпирическую функцию распределения.

Решение: Вычисляя относительные частоты по формуле $p_i^* = m_i/m$, получим статистический ряд по интервалам:

d, см	p^*	d, см	p^*
66–68	0,015	78–80	0,144
68–70	0,045	80–82	0,096
70–72	0,090	82–84	0,048
72–74	0,152	84–86	0,019
74–76	0,185	86–88	0,007
76–78	0,196	88–90	0,003

причем $\sum_{i=1}^{12} p_i^* = 1$. Эмпирическая функция распределения $F(x)$ определяется по формуле ОК разд. 3.1.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x \le 68,\\ 0{,}015, & 68 \le x \le 70,\\ 0{,}060, & 70 \le x \le 72,\\ 0{,}150, & 72 \le x \le 74,\\ 0{,}302, & 74 \le x \le 76,\\ 0{,}487, & 76 \le x \le 78,\\ 0{,}683, & 78 \le x \le 80,\\ 0{,}827, & 80 \le x \le 82,\\ 0{,}923, & 82 \le x \le 84,\\ 0{,}971, & 84 \le x \le 86,\\ 0{,}990, & 86 \le x \le 88,\\ 0{,}997, & 88 \le x \le 90,\\ 1, & x > 90.\end{cases}$$

Гистограмма и эмпирическая функция распределения изображены на рис. 36.1 и рис. 36.2 соответственно.

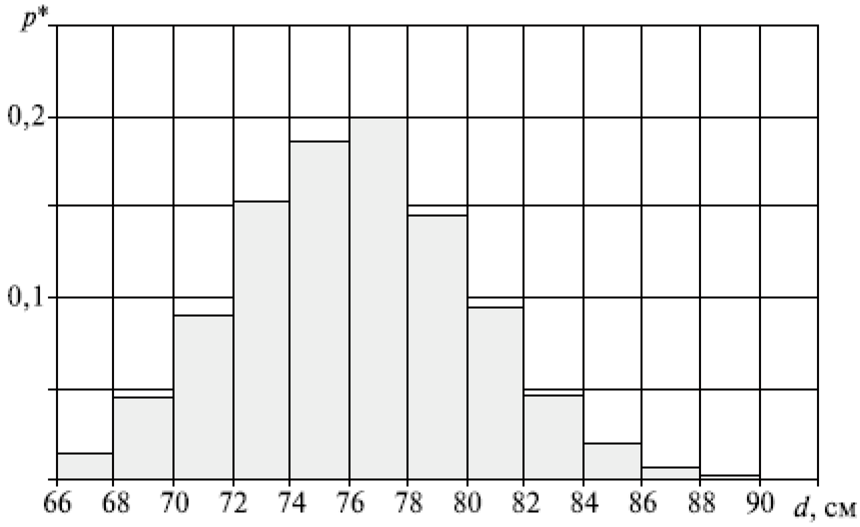


Рис. 36.1

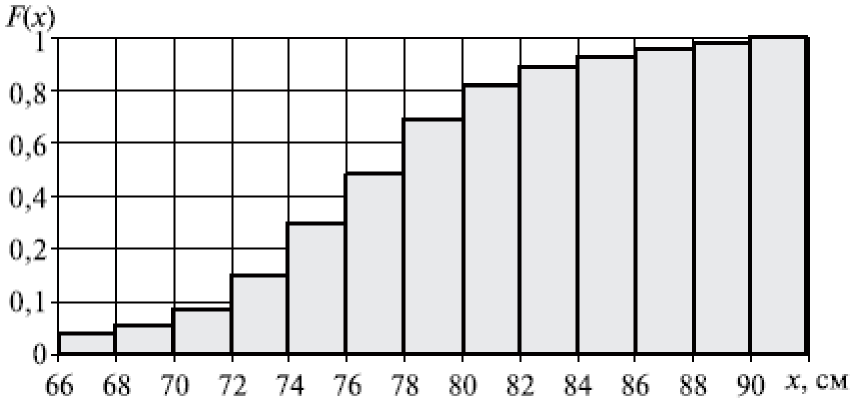


Рис. 36.2

Задача 2. Используя данные задачи 1 и гистограмму, делаем предположение о нормальном законе распределения значений диаметра. Найти параметры этого распределения.

Решение: Плотность вероятности нормального распределения задается формулой $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

По формулам ОК, разд. 36.2, имеем:

$$m \approx M^* = \sum_{i=1}^{12} x_i^* p_i^*;$$

$$\sigma^2 \approx D^* = \sum_{i=1}^{12} (x_i^* - M^*)^2 p_i^* = \sum_{i=1}^{12} x_i^{*2} p_i^* - (M^*)^2.$$

Выбирая в качестве x_i^* середины интервалов, получим

$m = 67 \cdot 0{,}015 + 69 \cdot 0{,}045 + 71 \cdot 0{,}090 + 73 \cdot 0{,}152 + 75 \cdot 0{,}185 + 77 \cdot 0{,}186 + 79 \cdot 0{,}144 + 81 \cdot 0{,}096 + 83 \cdot 0{,}048 + 85 \cdot 0{,}019 + 87 \cdot 0{,}007 + 89 \cdot 0{,}003 = 76{,}21;$

$\sigma^2 = (67)^2 \cdot 0{,}015 + (69)^2 \cdot 0{,}045 + ... + (89)^2 \cdot 0{,}003 - (76{,}21)^2 = 16{,}47, \sigma^2 \approx \sqrt{16{,}47} = 4{,}06.$

Задача 3. Среднее значение расстояния до ориентира, полученное по четырем независимым измерениям, равно 2250 м. Среднее квадратическое отклонение для измерительного прибора $\sigma = 40$ м. Систематическая ошибка отсутствует. Найти с надежностью 95% доверительный интервал для измеряемой величины.

Решение: Так как случайные ошибки подчиняются нормальному закону распределения, воспользуемся формулой ОК, разд. 36.2:

$$p(m^* - \Delta \le m \le m^* + \Delta) = 2\Phi(\Delta\sqrt{n}/\sigma),$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа; Δ — точность оценки; m^* — среднее значение m. Из условий задачи известно, что $m^* = 2250$, $n = 4$, $2\Phi(\Delta\sqrt{n}/\sigma) = 0{,}95$. По таблице Приложения 1 имеем $(\Delta\sqrt{n}/\sigma) = 1{,}96$, т.е. $\Delta = 1{,}96 \cdot 40/2 = 39{,}2$ (м), $m^* - \Delta = 2250 - 39{,}2 = 2210{,}8$ (м), $m^* + \Delta = 2250 + 39{,}2 = 2289{,}2$ (м). Доверительный интервал (2210,8–2289,2) покрывает истинное значение расстояния до ориентира с точностью 0,95.

Задача 4. По выборке ξ объемом $n = 30$ найден средний вес $m_\xi^* = 130$ г изделий, изготовленных на первом станке; по выборке η объемом $l = 40$ найден средний вес $m_\eta^* = 125$ г изделий, изготовленных на втором станке, причем случайные величины ξ и η распределены нормально. Генеральные дисперсии этих величин известны: $D(\xi) = 60$ г^2, $D(\eta) = 80$ г^2. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $M(\xi) = M(\eta)$.

Решение: Найдем наблюдаемое значение критерия Z (ОК, разд. 3.3:

Критическая область в этом случае двусторонняя $(-Z_{кр}, Z_{кр})$.

При $Z_{набл} \in (-Z_{кр}, Z_{кр})$ принимается гипотеза H_0. Найдем $Z_{кр} = \Phi^{-1}((1 - 0{,}05)/2) = 1{,}96$ по таблице функции Лапласа $\Phi(x)$. Так как $Z_{набл} > Z_{кр}$, то H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1.

Задача 5. На автоматической линии, работающей 12 часов, проводились наблюдения над случайной величиной ξ — моментом отказа линии (500 наблюдений). Проверить согласованность теоретического и эмпирического законов распределения случайной величины по критерию χ^2 Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Решение: 1) Выдвигаем гипотезу: распределение случайной величины ξ является равномерным на интервале [0, 12].

2) Разбиваем [0, 12] на 12 интервалов и определяем частоту попадания ξ в эти интервалы:

ξ	(0, 1)	(1, 2)	(2, 3)	(3, 4)	(4, 5)	(5, 6)	(6, 7)	(7, 8)	(8, 9)	(9, 10)	(10, 11)	(11, 12)
m	41	34	54	39	49	45	41	33	37	41	47	49

3) Находим χ^{*2} по формуле ОК, разд. 36.3:

$$\chi^{*2} = \sum_{i=1}^{12} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i},$$

где $n = 500$, $p_i = 1/12$ по выдвинутой гипотезе о равномерном распределении. Тогда имеем $\chi^{*2} = [(41 - 500/12)^2 + (34 - - 500/12)^2 + \ldots + (49 - 500/12)^2] \approx 10$.

4) Находим число степеней свободы $k = 12 - 1 = 11$ и по таблице χ^{*2} (Приложение 2) при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ находим $\chi^2_\alpha = 19{,}67$.

5) Так как $\chi^{*2} < \chi^2_\alpha$, то гипотезу можно принять.

Приложение 1

Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,00000	0,85	0,30234	1,70	0,45543	2,55	0.49461
0,05	0,01994	0,90	0,31594	1,75	0,45994	2,60	0,49534
0,10	0,03983	0,95	0,32894	1,80	0,46407	2,65	0,49598
0,15	0,05962	1,00	0,34134	1,85	0,46784	2,70	0,49653
0,20	0,07926	1,05	0,35314	1,90	0,47128	2,75	0,49702
0,25	0,09871	1,10	0,36433	1,95	0,47441	2,80	0,49744
0,30	0,11791	1,15	0,37493	2,00	0,47725	2,85	0,49781
0,35	0,13683	1,20	0,38493	2,05	0,47982	2,90	0,49813
0,40	0,15542	1,25	0,39435	2,10	0,48214	2,95	0,49841
0,45	0,17364	1,30	0,40320	2,15	0,48422	3,00	0,49865
0,50	0,19146	1,35	0,41149	2,20	0,48610	3,20	0,49931
0,55	0,20884	1,40	0,41924	2,25	0,48778	3,40	0,49966
0,60	0,22575	1,45	0,42647	2,30	0,48928	3,60	0,499841
0,65	0,24215	1,50	0,43319	2,35	0,49061	3,80	0,4999963
0,70	0,25804	1,55	0,43943	2,40	0,49180	4,00	0,4999997
0,75	0,27337	1,60	0,44520	2,45	0,49286	4,50	0,4999999
0,8	0,28	1,65	0,45053	2,50	0,49379	5,00	0,5000000

Приложение 2

χ^2 — распределение. Значения χ^2 для $P(\chi^2 > \chi^2_\alpha) = \int\limits_{\chi^2_\alpha}^{\infty} \varphi_k(x)\mathrm{d}x = \alpha$

k \ α	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,0002	0,0063	0,393	0,0158	0,0642	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,115	0,185	0,357	0,584	1,005	4,642	6,251	7,815	9,837	11,341
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	5,989	7,779	9,488	11,608	13,277
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	13,442	15,987	18,307	21,161	13,209
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	7,015	7,909	9,390	10,865	12,857	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	10,856	11,998	13,848	15,659	18,062	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	32,912	36,741	40,112	44,140	46,963
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	34,029	37,916	41,337	45,419	48,278
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

Литература по сборникам задач:

1. Хуснутдинов, Р.Ш. Сборник задач по курсу теории вероятностей и математической статистики. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2014. — 320 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/53676 — Загл. с экрана.
2. Свешников, А.А. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2013. — 448 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/5711 — Загл. с экрана.
3. Семенчин Е.А. Теория вероятностей в примерах и задачах: учеб. пособие: рек. УМО/ Е.А. Семенчин. – СПб.: Лань, 2007. – 352 с.
4. Емельянов, Г.В. Задачник по теории вероятностей и математической статистике [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Г.В. Емельянов, В.П. Скитович. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2007. — 336 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/141. — Загл. с экрана.

III. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Одной из форм обучения студента является самостоятельная работа над учебным материалом; она складывается из изучения лекций, учебников, решения задач, выполнение контрольных заданий. Кроме того, студент может обращаться к преподавателю с вопросами устно и по Skype, e-mail, ISQ, вебинару. Однако студент должен помнить, что только при систематической и упорной самостоятельной работе обучение в университете будет достаточно эффективным.

Завершающим этапом изучения каждого из математических курсов является сдача зачетов и экзаменов в соответствии с учебным планом.

1. Изучение лекции

Для понимания материала и качественного его усвоения рекомендуется такая последовательность действий:

1. После прослушивания лекции и окончания учебных занятий, при подготовке к занятиям следующего дня, нужно сначала просмотреть и обдумать текст конспекта лекции, прослушанной сегодня (10-15 минут).

2. При подготовке к лекции следующего дня, нужно просмотреть текст предыдущей лекции, подумать о том, какая может быть тема следующей лекции (10-15 минут).

3. При изучении материала конспекта лекций полезно выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т.п. Такая запись не только помогает запомнить формулы, но и может служить постоянным справочником для студента. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные для письменной или устной консультации с преподавателем.

2. Чтение учебника.

В течение недели выбрать время (1-час) для работы с литературой (например, в библиотеке). Теоретический материал курса становится более понятным, когда дополнительно к прослушиванию лекции и изучению конспекта, изучаются и книги. Легче освоить курс придерживаясь одного учебника и конспекта. Рекомендуется, кроме «заучивания» материала, добиться состояния понимания изучаемой темы дисциплины. С этой целью рекомендуется после изучения очередного параграфа выполнить несколько простых упражнений на данную тему. Кроме того, очень полезно мысленно задать себе следующие вопросы (и попробовать ответить на них): о чем этот параграф?, какие новые понятия введены, каков их смысл?, что даст это на практике?.

При чтении учебника следует придерживаться следующих рекомендаций.

1. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления, доказательства (в том числе и те, которые по простоте опущены в учебнике).

2. Следует обращать внимание на определения основных понятий, которые также необходимо запоминать. Студент должен подробно разобрать примеры, которые поясняют такие определения.

3. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое предположение теоремы. Полезно составлять схемы сложных теорем. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем.

3. Решение задач

1. Чтение лекций, учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. При решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения.

3. Решения задач и примеров следует записывать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. ошибочные записи следует не стирать и замазывать, а зачеркивать. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями.

4. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие, и по возможности в общем виде с записью (выводом) формулы. Затем в формулу подставляют числовые значения (если таковые даны) входящих в нее величин.

5. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также, если возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученные результаты.

6. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

4. Самопроверка

1. После изучения определенной темы по учебнику и решения соответствующих задач студенту рекомендуется воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем, в случае необходимости сверяясь с источником. В случае необходимости надо еще раз внимательно разобраться в материале лекции, учебника, порешать задачи.

2. Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

3. Важным критерием усвоение теории является умение решать задачи на пройденный материал. Но часто правильное решение задачи получается в результате применения механически заученных форм, без понимания существа дела. Поэтому можно сказать, что умение решать задачи является необходимым, но недостаточным условием хорошего знания теории.

5. Консультации

1. Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), он может обратиться к преподавателю для получения от него указаний в виде письменной или устной консультации.

2. В своих запросах студент должен точно указать, в чем он испытывает затруднение. Если он не разобрался в теоретических объяснениях, или в доказательстве теоремы, или в выводе формулы по учебнику, то нужно указать, какой это учебник, год издания и страницу, где рассмотрен затрудняющий его вопрос, и что именно его затрудняет. Если студент испытывает затруднения при решении задачи, то следует указать характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения.

3. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы для самопроверки.

6. Зачет и экзамен

На экзаменах и зачетах выясняется прежде всего усвоение всех теоретических и прикладных вопросов программы и умение применять полученные знания к решению практических задач. Определения, теоремы, правила должны формулироваться точно и с пониманием существа дела; задачи в простейших случаях должны решаться без ошибок и уверенно; всякая письменная работа должна быть аккуратной и четкой. Только при выполнении этих условий знания могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявляемым программой.

При подготовке к зачету (экзамену) учебный материал рекомендуется повторять по конспекту лекций и рекомендуемому учебнику.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники: в теории надёжности, теории массового обслуживания, в теоретической физике, геодезии, астрономии, теории стрельбы, теории ошибок наблюдений, теории автоматического управления, общей теории связи и во многих других теоретических и прикладных науках. Все это предопределяет необходимость овладения методами теории вероятностей и математической статистики как инструментом статистического анализа и прогнозирования экономических и технологических явлений и процессов.

Электронная версия сборника может быть использована в системе дистанционного обучения.