Министерство образования и науки Российской Федерации

Амурский государственный университет

А.Г. Масловская

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ: МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Благовещенск

2017

ББК 22.18 я73

М 31

Рекомендовано

учебно-методическим советом университета

Рецензент:

Т.А. Юрьева, зав. общей математики и информатики АмГУ, канд. пед. наук, доцент

Масловская А.Г.

М31 Математическое и компьютерное моделирование сложных систем: методические рекомендации к выполнению курсовой работы / А.Г. Масловская – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2017.

В издании приведены методические рекомендации и методические указания для выполнения курсовой работы по дисциплине «Математическое и компьютерное моделирование сложных систем». Перечислены основные требования к содержанию, структуре и оформлению курсовой работы. Представлены варианты заданий с комментариями относительно выбора метода и среды реализации модели. Изложен порядок выполнения и защиты курсовой работы, а также описаны критерии дифференцированной оценки за курсовую работу.

Учебно-методическое издание предназначено для студентов направления подготовки 01.04.02 – «Прикладная математика и информатика» и может быть использовано студентами других направлений подготовки, применяющими методы и средства математического и компьютерного моделирования для решения прикладных задач.

ББК 22.18 я73

© Амурский государственный университет, 2017

© Масловская А.Г., 2017

1 ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Курсовая работа по дисциплине «Математическое и компьютерное моделирование сложных систем» выполняется студентами, обучающимися по направлению магистратуры 01.04.02 – «Прикладная математика и информатика» (направленность образовательной программы: «Математическое и программное обеспечение вычислительных систем»), в третьем учебном семестре. Курсовая работа выполняется в рамках времени, выделенного на самостоятельную работу студента по дисциплине (всего 90 час.).

1.1 Выбор темы

Общее направление и тематика курсовой работы определяется индивидуально для каждого студента. Курсовая работа выполняется по теме, предложенной преподавателем. Предложенная тема может быть заменена на другую тему или модифицирована только по согласованию с преподавателем, ведущим дисциплину.

При предложении студентом собственной тематики он предъявляет не только формулировку, но и математическую постановку задачи, отвечающую требованию корректности и соответствующую по сложности приведенным ниже вариантам заданий. Тема курсовой работы может быть косвенным или прямым образом связана с тематикой магистерской диссертации. Конкретная тема курсовой работы формулируется студентом индивидуально и утверждается в срок до 15 сентября текущего учебного семестра. Далее, как правило, тема изменению не подлежит.

Тема курсовой работы должна отражать специфику: постановки прикладной задачи, метода ее решения и реализации математической модели с использованием инструментальных средств математических пакетов.

Исходя из целей и задач курсового проектирования по дисциплине «Математическое и компьютерное моделирование сложных систем» рекомендуются следующие формулировки тем курсовых работ: «Решение задачи двумерной стационарной теплопроводности для криволинейных областей: моделирование в средах Matlab-COMSOL», «Моделирование нестационарной теплопроводности для сред с нелинейными теплофизическими характеристиками: реализация в пакетах Matlab-FlexPDE», «Конечно-элементное моделирование электромагнитных полей в … : реализация в ППП Matlab», «Использование инструментария пакета COMSOL Multiphysics… для моделирования процесса …», «Проектирование и реализация модели электростатического поля… в среде …», «Сеточное решение задачи моделирования кручения упругих стержней в среде …», «Моделирование электрических характеристик процесса … на основе сеточных методов», «Решение задачи электростатики с использованием программных инструментов» и т.п.

1.2 Содержание курсовой работы

Курсовая работа в части контента должна содержать следующие тематические разделы.

1. *Обзор предметной области*, в котором формулируются содержательная и концептуальная постановки задачи моделирования, раскрывается физическая суть моделируемого явления или процесса, приводятся: физическая модель, основные переменные и параметры модели, вывод базовых соотношений, обзор и сравнительная характеристика используемых методов и сред реализации модели. Указанная часть работы соответствует необходимому уровню освоения дисциплины.

2. *Математическая постановка задачи*, формулируемая в виде краевой или начально-граничной для уравнения с частными производными. Здесь приводятся: результат контрольных проверок (контроль размерностей обязателен); анализ и классификация модели по известным классификационным признакам (необходимый уровень).

3. *Сведения о теоретической базе, используемой для численной реализации математической модели.* В этой части проводится анализ возможных методов реализации данной модели. Выбор и обоснование выбора метода (метод конечных разностей, метод взвешенных невязок (ожидаемый уровень освоения дисциплины), метод конечных элементов, метод граничных элементов, метод конечных объемов (высокий уровень освоения дисциплины). Построение вычислительной схемы для выбранного метода (ожидаемый уровень освоения дисциплины).

4. *Формализация алгоритма* (ожидаемый уровень). *Программная реализация* в среде Matlab (ожидаемый уровень освоения дисциплины). Разработка интерфейса пользователя приветствуется (высокий уровень освоения дисциплины).

5. *Реализация модели* в среде PDE Matlab (необходимый уровень освоения дисциплины) или COMSOL, FlexPDE, ANSYS или Nastran (ожидаемый уровень освоения дисциплины) с подробными комментариями и скриншотами общения с интерфейсом среды.

6. *Постановка и проведения вычислительного эксперимента*, анализ результатов моделирования (необходимый уровень освоения дисциплины). Сравнение результатов моделирования, полученных на основе собственной реализации модели и с использованием пакетов прикладных программ (высокий уровень освоения дисциплины).

1.3 Материально-техническая база и условия в вузе для выполнения курсовой работы

Для проведения курсового проектирования используются лаборатории (329 ауд., 327 ауд.), оснащенных компьютерной техникой (10 посадочных рабочих мест пользователей) с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета. В лабораториях (компьютерных классах) установлены и применяются пакеты прикладных программ Matlab и COMSOL MULTIPHYSICS.

1.4 Оформление и структура курсовой работы

Оформление курсовой работы должно строго соответствовать действующему на момент написания работы стандарту Амурского государственного университета («Стандарт организации. Оформление выпускных квалификационных и курсовых работ (проектов)», доступ по адресу: https://www.amursu.ru/nauchnaya-biblioteka, раздел «Библиотека», панель «Научная библиотека», раздел «Полезная информация», документ «СТО оформления выпускных работ 2011 г.»).

Стандартом регламентируется и структура курсовой работы. Курсовая работа начинается с титульного листа, за которым следуют: лист задания, реферат, содержание работы, введение, основная часть, состоящая из нескольких разделов, заключение, библиографический список, приложения.

Общий вид формы *задания* к курсовой работе представлен в стандарте АмГУ (примерная структура показана в Приложении 1). *Реферат* представляет краткую аннотацию работы, в котором в сжатой форме излагается направление исследований, используемый методы и средства, основной результат. При написании реферата рекомендуется использовать краткие и емкие фразы: «Предложено….», «Проведено…», «Представлено…», «Использовано …», «Установлено….», «Анализ показал ….», «Приведены результаты ….» и т.п.

Содержание должны быть четко структурированным. Рекомендуется: для заголовков использовать конкретизированные названия не более чем из 13 слов; в главе должно быть не менее двух разделов (1.1, 1.2, 1.3) и желательно не более 5; разделы могут быть разделены на несколько подразделов (1.1.1, 1.1.2); названия должны исключать дублирование информации.

Введение содержит формулировку актуальности направления исследований работы, которая позволит составить общее представление об исследуемой проблеме, анализ современного состояния исследований, разработок в данной области, применяемых средствах и технологиях математического моделирования, полученных результатах. Далее обозначается конкретная область исследования и цель, конкретизирующая тематику

исследования. Для достижения цели выделяется ряд задач (не менее трех). Во введении может быть предложена краткая аннотация отдельных разделов работы (с указанием взаимосвязи), выделен объект и предмет исследования, приведены ссылки на базовые обзоры по данной теме и используемый программный ресурс (указаны версии и используемые права доступа).

Первая глава посвящена результатам обследования объекта моделирования и предметной области. Она должна содержать концептуальную постановку задачи. К курсовой работе не предъявляются дополнительные строгие требования относительно методики описания предметной области – студентам рекомендуется проявить индивидуально-творческий и проблемно-ориентированный подходы при изложении и систематизации исследованного материала.

Вторая глава является методической, в ней излагается используемый метод решения задачи, приводятся сведения относительно других методов, потенциально пригодных для решения задачи, указываются важные теоретические аспекты (устойчивость, порядок аппроксимации, сходимость и т.п.). Здесь же можно привести сведения об используемых

Третья глава предусматривает проведение вычислительных экспериментов, анализ и интерпретацию результатов моделирования.

Заключение содержит перечень основных результатов, полученных в работе, и сделанных выводов. В него могут включаться рекомендации и замечания относительно применяемых подходов, используемых программных средствах и перспектив продолжения данной работы.

В тексте курсовой работы должны присутствовать корректные ссылки на все литературные источники и электронные ресурсы, указанные в *библиографическом списке.* Рекомендуемое количество источников – не менее 15, причем не менее 30 % должны быть изданы за последние 5 лет.

Материалы *приложений* (при необходимости) могут включать дополнительные сопутствующие изложению текста пояснительной записки данные: рисунки, скриншоты, листинги программ.

1.5 Представление и защита курсовых работ

Курсовая работа представляется в полностью готовом виде: печатном (сшитом на скоросшиватель, в обложке) и электронном. Дополнительно с работой прилагаются специальные носители информации, содержащие программный продукт (тексты и исполняемые файлы) и презентацию, предназначенную для защиты курсовой работы.

Курсовая работа проходит две контрольные точки. Требования к текущему графику выполнения работ, контрольным срокам, представлению отдельных этапов и допуску к защите озвучиваются руководителем курсовой работы в рабочем порядке. Нормоконтролером по курсовой работе назначается руководитель курсовой работы, имя которого также указывается на титульном листе.

В окончательном виде (с подписью нормоконтролера на титульном листе) работа предоставляется руководителю в строго установленные деканатом сроки.

Срок сдачи работы на нормоконтроль: 15 учебная неделя семестра (ориентировочно – первая неделя декабря).

Сроки устной защиты: 17 учебная неделя семестра (ориентировочно – третья неделя декабря).

Курсовая работа проходит обязательную проверку в системе «Антиплагиат» на предмет некорректных заимствований. Уровень оригинальности – не менее 50 %. Отчет с результатами проверки преподаватель предъявляет студенту до защиты. Студент считается допущенным к устной защите курсовой работы, если он успешно прошел контрольные точки, имеет неотрицательную рецензию на курсовую работу и прошел проверку системой «Антиплагиат».

После допуска к защите руководитель курсовой работы доводит до сведения студентов график защиты проектов (с размещением информации на стенде кафедры). Доклад, представленный к защите, должен занимать 5-7 минут. Доклад начинается с представления докладчика, названия курсовой

работы и, как правило, включает в себя: изложение актуальности и цели проведения исследований, поставленных задач, краткое изложение концептуальной поставки задач, проведенных этапов моделирования, анализ полученных результатов и выводы по работе в целом. Заканчивается доклад фразой: «Спасибо за внимание» или любой другой, обозначающей окончание выступления. Защита курсовой работы должна сопровождаться презентацией (не более 15 слайдов) и демонстрацией результатов. На каждую курсовую работу преподаватель оформляет рецензию, с которой знакомит студента на этапе выставления оценки. Форма рецензии представлена в Приложении 2.

Критерии оценки курсовой работы, которыми руководствуется преподаватель при составлении рецензии и при оценке работы в целом, указаны в таблице 1.

Таблица 1 – Структура балльной оценки за курсовую работу

№ п/п	**Критерии оценки по разделам и этапам курсовой работы**	**Оценка в баллах**
	1. Качество содержательной части	
1.1	Исследование предметной области (полнота изложения, корректность и непротиворечивость информации, оригинальность изложения, систематизация информации, оформление справочника задач)	10
1.2	Этапы проектирования (функциональное наполнение, потенциальность модели, соответствие методологии моделирования, включение в курсовую работу альтернативных подходов и расширение диапазона использования инструментальных средств)	20
1.3	Представление результатов (соответствие результатов поставленным задачам, качество и многоаспектность исследования, оригинальность)	20

№ п/п	Критерии оценки по разделам и этапам курсовой работы	Оценка в баллах
	Оценка в баллах	50
	2. Качество представления результатов и оформления пояснительной записки	
2.1	Предметная область	5
2.2	Этапы проектирования	10
2.3	Анализ результатов	10
	Оценка в баллах	25
	3. Факт выполнения календарного плана – предоставление курсовой работы для промежуточного контроля	
3.1	Первая контрольная точка (конец октября)	5
3.2	Вторая контрольная точка (конец ноября)	5
	Оценка в баллах	10
	4. Устный доклад и презентация	
4.1	Уровень представления результатов работы	5
4.2	Качество оформления презентационного материала	5
4.3	Ответы на дополнительные вопросы	5
	Оценка в баллах	15
	Итого	100

Студентам рекомендуется заблаговременно ознакомиться с этим перечнем. Используется балльная система оценки по четырем основным направлениям: качество содержательной части курсовой работы, качество представления результатов и оформления пояснительной записки, факт выполнения календарного плана – предоставление курсовой работы для промежуточного контроля, устный доклад и презентация. Схема перевода баллов в дифференцированную оценку по курсовой работе представлена в таблице 2.

Таблица 2 – Схема перевода баллов в дифференцированную оценку по курсовой работе

Кол-во набранных баллов	Оценка по пятибалльной шкале
90-100	5
75-89	4
60-74	3
<60	2

2 ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

Вариант 1. Моделирование стационарной теплопроводности в условиях конвективного теплообмена

Концептуальная постановка задачи. Провести моделирование установившегося температурного поля в поперечном сечении бесконечно длинного свинцового бруска, представляющего собой прямоугольник *ABCD*, в объеме которого выделяется тепло, его верхняя и боковые поверхности обмениваются теплом с окружающей средой посредством конвекции, нижняя поверхность заготовки теплоизолирована. Геометрия модели представлена на рисунке 1.

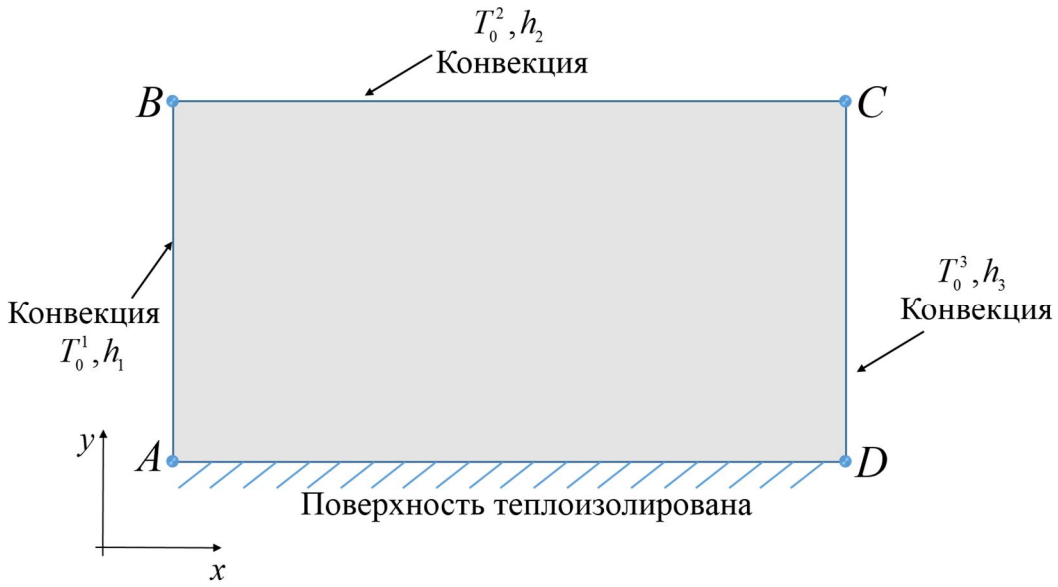

Рис. 1 – Геометрия модельной задачи.

Геометрические размеры сечения: *AB*=0.4 м, *BC*=0.7 м. Коэффициент теплопроводности материала *k*=35 Вт/(м·К), в бруске удельная объемная мощность тепловыделения равномерно распределена и составляет величину *Q*=10 Вт/м^3.

Конвективные коэффициент теплоотдачи с поверхностей бруска: h_1=30 Вт/(м^2·К), h_2=320 Вт/(м^2·К), h_3=45 Вт/(м^2·К). Значения температур окружающей среды: $T_0^1 = 300$ К, $T_0^2 = 320$ К, $T_0^3 = 340$ К – на внешней левой

(AB), верхней (BC) и правой (CD) поверхностях бруска соответственно. Нижняя поверхность бруска теплоизолирована.

Комментарии к математической постановке задачи. Для формализации математической модели использовать двумерное стационарное уравнение теплопроводности:

$$k \cdot \Delta T(x, y) = -Q,$$

где k – коэффициент теплопроводности материала, Вт/(м·К); Q – удельная объемная мощность тепловыделения, Вт/м^3.

Согласно закону Фурье плотность теплового потока задается выражением:

$$\mathbf{q} = -k\nabla T = -k\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}.$$

Таким образом, в направлении оси x плотность теплового потока будет определена соотношением направлений внешней нормали к границе и оси x, а также направлением самого потока:

1) нормаль к границе сонаправлена оси ox, тепловой поток через границу направлен внутрь области:

$$q_x = k\frac{\partial T}{\partial x};$$

2) нормаль к границе направлена противоположно оси ox, тепловой поток через границу направлен внутрь области:

$$q_x = k\frac{\partial T}{\partial x};$$

3) нормаль к границе сонаправлена оси ox, тепловой поток через границу направлен наружу:

$$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x};$$

4) нормаль к границе направлена противоположно оси ox, тепловой поток через границу направлен наружу:

$$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x}.$$

Аналогично в направлении оси y: $q_y = \pm k\frac{\partial T}{\partial y}$. Теплоизоляция одной из поверхностей заготовки означает равенство нулю нормальной составляющей плотности теплового потока: q=0 Вт/м^2, что означает $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ или $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$.

Согласно закону Ньютона-Рихмана количество тепла, отдаваемое единицей поверхности тела в единицу времени, пропорционально разности температур поверхности тела T и окружающей среды T_0:

$$q = h(T - T_0),$$

где T_0 – значения температуры окружающей среды, h – конвективный коэффициент теплоотдачи.

Внешние поверхности обмениваются теплом с окружающей средой посредством конвекции, учитывая, что $\mathbf{q} = -k\nabla T$, запишем граничное условие третьего рода в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{h}{k}(T_0 - T)$$

или в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{h}{k}(T_0 - T).$$

Это означает, что (при h>0):

1) если температура T на границе выше температуры окружающей среды на границе T_0, то тепло вытекает из области;

2) если T меньше температуры T_0, то тепло втекает в область.

Комментарии к построению вычислительной схемы. При реализации модели на основе сеточного подхода рекомендуется использовать конечно-разностный метод установления или метод конечных элементов. Программную реализацию провести в Matlab.

Метод установления детально описан, например, в [5] или в [15].

Необходимый уровень выполнения работы – построение вычислительной схемы (без программной реализации). Достаточный уровень (ожидаемый и высокий) – программная реализация. Разработка интерфейса пользователя приветствуется.

Комментарии к выбору среды имитационного моделирования. Модель реализуется во всех указанных выше пакетах конечно-элементного моделирования. Привести подробное описание задания геометрии, модели, граничных и начальных условий, построения сетки, запуска решения.

Вариант 2. Моделирование стационарной теплопроводности при воздействии на объект источника специального вида

Концептуальная постановка задачи. Провести моделирование установившегося температурного поля в поперечном сечении бесконечно длинного оловянного бруска, представляющего собой квадрат *ABCD*, в объеме которого выделяется тепло, его нижняя поверхность теплоизолирована, на других боковых поверхностях поддерживается постоянная температура (рисунок 2).

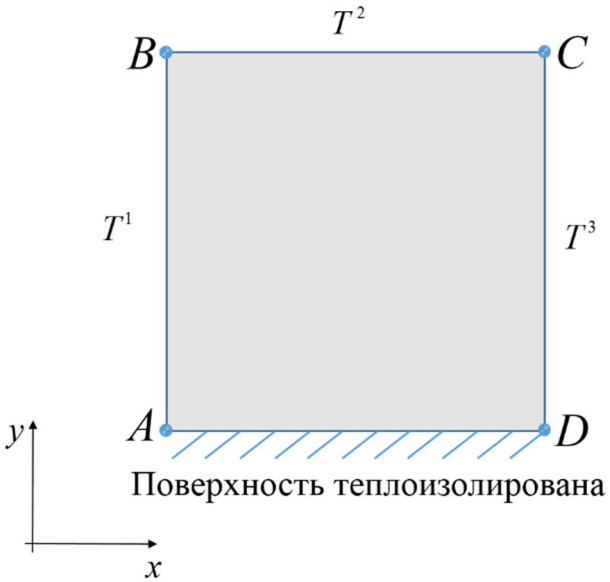

Рис. 2 – Геометрия модельной задачи.

Геометрический размер сечения: AB=0.5 м. Коэффициент теплопроводности материала k=67 Вт/(м·К). Удельная объемная мощность тепловыделения определяется функциональной зависимостью – распределением Гаусса:

$$Q(x,y)=25\exp\left(-\frac{(x-0.25)^2+(y-0.25)^2}{0.2}\right),\ \text{Вт/м}^3.$$

Значения поддерживаемой температуры на поверхностях бруска: $T_0^1=304$ К, $T_0^2=320$ К, $T_0^3=304$ К – на внешней левой (AB), верхней (BC) и правой (CD) поверхностях бруска соответственно. Нижняя поверхность бруска теплоизолирована.

Комментарии к математической постановке задачи. Для формализации математической модели использовать двумерное стационарное уравнение теплопроводности:

$$k\cdot\Delta T(x,y)=-Q(x,y),$$

где k – коэффициент теплопроводности материала, Вт/(м·К); Q – удельная объемная мощность тепловыделения, Вт/м^3.

Согласно закону Фурье плотность теплового потока задается выражением:

$$\mathbf{q}=-k\nabla T=-k\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}.$$

Таким образом, в направлении оси x плотность теплового потока будет определена соотношением направлений внешней нормали к границе и оси x, а также направлением самого потока. Теплоизоляция одной из поверхностей заготовки означает равенство нулю нормальной составляющей плотности теплового потока: q=0 Вт/м^2, что означает $\frac{\partial T}{\partial x}=0$ или $\frac{\partial T}{\partial y}=0$.

Комментарии к построению вычислительной схемы. При реализации модели на основе сеточного подхода рекомендуется использовать конечно-

разностный метод установления или метод конечных элементов. Программную реализацию провести в ППП Matlab.

Метод установления детально описан, например, в [5] или в [15].

Необходимый уровень выполнения работы – построение вычислительной схемы (без программной реализации). Достаточный уровень (ожидаемый и высокий) – программная реализация. Разработка интерфейса пользователя приветствуется.

Комментарии к выбору среды имитационного моделирования. Модель реализуется во всех указанных выше пакетах конечно-элементного моделирования. Привести подробное описание задания геометрии, модели, граничных и начальных условий, построения сетки, запуска решения.

Вариант 3. Моделирование стационарной теплопроводности для сред с нелинейными теплофизическими характеристиками

Концептуальная постановка задачи. Провести моделирование установившейся теплопередачи в латунном стержне длиной 30 см, диаметром 1 см, боковая поверхность которого теплоизолирована. На одном конце стержня поддерживается температура 50° С, на другом конце поддерживается температура 35° С (рисунок 3).

Рис. 3 – Геометрия модельной задачи.

Коэффициент теплопроводности материала линейно зависит от температуры: k=0.05·T +100, Вт/(м·К). Тепло генерируется в стержне со скоростью 150·T Вт/м^2 на единицу длины.

Комментарии к математической постановке задачи. Для формализации математической модели использовать одномерное стационарное уравнение теплопроводности:

$$\nabla\left(-k(T)\cdot\nabla T(x)\right)=Q,$$

где $k(T)$ – коэффициент теплопроводности материала, Вт/(м·К); Q – удельная объемная мощность тепловыделения, Вт/м^3.

Комментарии к построению вычислительной схемы. При реализации модели на основе сеточного подхода рекомендуется использовать метод конечных разностей. Программную реализацию провести в ППП Matlab.

Метод конечных разностей для решения нелинейных задач детально описан, например, в источнике [3].

Необходимый уровень выполнения работы – построение вычислительной схемы (без программной реализации). Достаточный уровень (ожидаемый и высокий) – программная реализация. Разработка интерфейса пользователя приветствуется.

Комментарии к выбору среды имитационного моделирования. Модель реализуется во всех указанных выше пакетах конечно-элементного моделирования. Привести подробное описание задания геометрии, модели, граничных и начальных условий, построения сетки, запуска решения (рекомендуется перейти к двумерной модели или трехмерной модели).

Вариант 4. Моделирование стационарной теплопроводности при условии сопряжения сред

Концептуальная постановка задачи. Провести моделирование установившегося температурного поля в поперечном сечении стены, в которой между двумя слоями кирпича (ABB_1A_1, D_1C_1CD) толщиной по 300 мм установлена прокладка из пенопласта ($A_1B_1C_1D_1$) толщиной 50 мм (рисунок 4).

Верхняя и нижняя поверхности стены теплоизолированы, на боковых поверхностях задан постоянный температурный режим $T_0^1 = 20$ °С, $T_0^2 = -10$ °С.

Моделирование провести в пренебрежении пористостью сред. Предполагается, что между областями осуществляется идеальный контакт (температуры соприкасающихся поверхностей одинаковы). Тепловые источники в объекте отсутствуют.

Теплопроводность кирпича равна k_1=0.7 Вт/(м·К), пенопласта – k_2=0.05 Вт/(м·К).

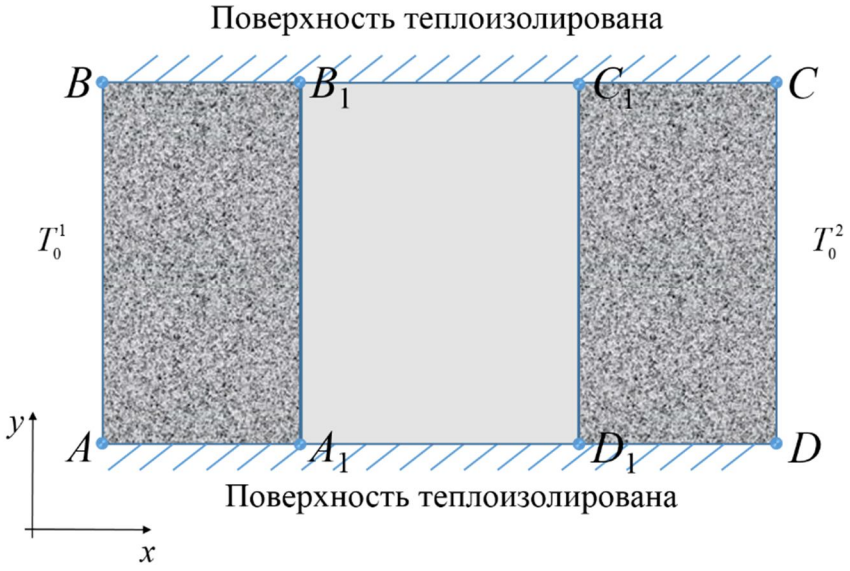

Рис. 4 – Геометрия модельной задачи.

Комментарии к математической постановке задачи. Для формализации математической модели использовать двумерное стационарное уравнение теплопроводности:

$$k \cdot \Delta T(x, y) = -Q,$$

где k – коэффициент теплопроводности материала, Вт/(м·К); Q – удельная объемная мощность тепловыделения, Вт/м^3.

Уравнение теплопроводности записать для трех частей объекта с разными значениями коэффициента теплопроводности.

Согласно закону Фурье плотность теплового потока задается выражением:

$$\mathbf{q} = -k\nabla T = -k\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}.$$

Таким образом, в направлении оси x плотность теплового потока будет определена соотношением направлений внешней нормали к границе и оси x, а также направлением самого потока. Теплоизоляция одной из поверхностей заготовки означает равенство нулю нормальной составляющей плотности теплового потока: q=0 Вт/м^2, что означает

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ или } \frac{\partial T}{\partial y} = 0 .$$

В рассматриваемых условиях имеет место равенство тепловых потоков, проходящих через поверхность соприкосновения. Непрерывность температуры и теплового потока на границе сопряжения сред означает выполнение условий:

$$T_1(x,y)\big|_{A1B1} = T_2(x,y)\big|_{A1B1},\ T_2(x,y)\big|_{D1C1} = T_3(x,y)\big|_{D1C1},$$

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{A1B1} = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{A1B1},\ k_2 \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{D1C1} = k_1 \frac{\partial T_3}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{D1C1},$$

где $T_1(x,y), T_2(x,y), T_3(x,y)$ – распределения температуры в частях стены: кирпич-пенопласт-кирпич.

Комментарии к построению вычислительной схемы. При реализации модели на основе сеточного подхода рекомендуется использовать конечно-разностный метод установления или метод конечных элементов. Программную реализацию провести в ППП Matlab.

Метод установления детально описан, например, в [5] или в [15].

Необходимый уровень выполнения работы – построение вычислительной схемы (без программной реализации). Достаточный уровень (ожидаемый и высокий) – программная реализация. Разработка интерфейса пользователя приветствуется.

Комментарии к выбору среды имитационного моделирования. Модель реализуется во всех указанных выше пакетах конечно-элементного моделирования. Привести подробное описание задания геометрии, модели, граничных и начальных условий, построения сетки, запуска решения.

Вариант 5. Моделирование процесса нестационарной теплопроводности

Концептуальная постановка задачи. Провести моделирование нестационарной теплопроводности в бронзовом бруске длиной 50 см, диаметром 0.5 см, боковая поверхность которого теплоизолирована (рисунок 5). На одном конце стержня поддерживается температура T^1=30° С, на другом конце поступает тепловая энергия со скоростью $2 \cdot 10^6$ Вт/м^2. Начальная температура равна температуре окружающей среды 22 °С.

Рис. 5 – Геометрия модельной задачи.

Теплофизические параметры приведены в таблице.

Параметр	Ед. измерения	Значение
удельная теплоемкость материала, c	Дж/(кг·К)	0.343
плотность, ρ	кг/м^3	8660
коэффициент теплопроводности, k_T	Вт/(К·м)	26

Комментарии к математической постановке задачи и к выбору параметров процесса. Для формализации математической модели использовать одномерное (по координате) нестационарное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

где $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$ – коэффициент температуропроводности материала, м^2/с; c – удельная теплоемкость материала, Дж/(кг·К); ρ – плотность, кг/м^3; k –

коэффициент теплопроводности, Вт/(К·м); с начальным условием: $T(x,t_0)=T_0$, К.

Согласно закону Фурье плотность теплового потока задается выражением:

$$\mathbf{q}=-k\nabla T=-k\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}.$$

Таким образом, в направлении оси x плотность теплового потока будет определена соотношением направлений внешней нормали к границе и оси x, а также направлением самого потока:

1) нормаль к границе сонаправлена оси ox, тепловой поток через границу направлен внутрь области:

$$q_x=k\frac{\partial T}{\partial x};$$

2) нормаль к границе направлена противоположно оси ox, тепловой поток через границу направлен внутрь области:

$$q_x=k\frac{\partial T}{\partial x};$$

3) нормаль к границе сонаправлена оси ox, тепловой поток через границу направлен наружу:

$$q_x=-k\frac{\partial T}{\partial x};$$

4) нормаль к границе направлена противоположно оси ox, тепловой поток через границу направлен наружу:

$$q_x=-k\frac{\partial T}{\partial x}.$$

Самостоятельно выбрать период времени наблюдения процесса. Проанализировать, сколько времени потребуется для установления стационарного распределения температуры в объекте.

Комментарии к построению вычислительной схемы. При реализации модели на основе сеточного подхода рекомендуется использовать метод

конечных разностей (рекомендуется схема Кранка-Николсона) или метод конечных элементов. Программную реализацию провести в ППП Matlab.

Метод конечных разностей для решения одномерных (по координате) нестационарных задач широко представлен в литературе.

Необходимый уровень выполнения работы – построение вычислительной схемы (без программной реализации). Достаточный уровень (ожидаемый и высокий) – программная реализация. Разработка интерфейса пользователя приветствуется.

Комментарии к выбору среды имитационного моделирования. Модель реализуется во всех указанных выше пакетах конечно-элементного моделирования. Привести подробное описание задания геометрии, модели, граничных и начальных условий, построения сетки, запуска решения.

Вариант 6. Моделирование процесса нестационарной теплопроводности

Концептуальная постановка задачи. Провести моделирование нестационарной теплопроводности в стержне (материал – константан) длиной 100 см, диаметром 1.5 см, боковая поверхность которого теплоизолирована (рисунок 6). На одном конце стержня поддерживается температура 45° С, на другом конце условия соответствуют тепловой изоляции. Начальная температура равна температуре окружающей среды – 23 °С.

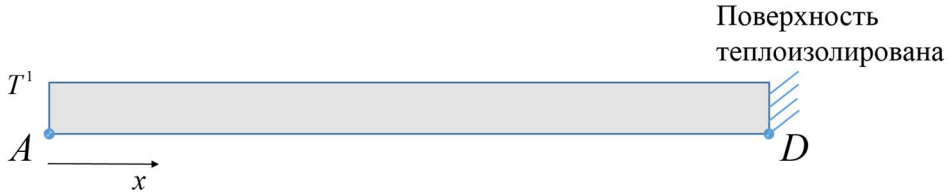

Рис. 6 – Геометрия модельной задачи.

Теплофизические параметры приведены в таблице.

Параметр	Ед. измерения	Значение
удельная теплоемкость материала, c	Дж/(кг·К)	0.41
плотность, ρ	кг/м^3	8820
коэффициент теплопроводности, k_T	Вт/(К·м)	22.7

Комментарии к математической постановке задачи и к выбору параметров процесса. Для формализации математической модели использовать одномерное (по координате) нестационарное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ – коэффициент температуропроводности материала, м^2/с; c – удельная теплоемкость материала, Дж/(кг·К); ρ – плотность, кг/м^3; k – коэффициент теплопроводности, Вт/(К·м); с начальным условием: $T(x, t_0) = T_0$, К.

Согласно закону Фурье плотность теплового потока задается выражением:

$$\mathbf{q} = -k\nabla T = -k\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}.$$

Поэтому в направлении оси x плотность теплового потока будет равна $q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x}$. Теплоизоляция одной из поверхностей объекта означает равенство нулю нормальной составляющей плотности теплового потока: q=0 Вт/м^2.

Самостоятельно выбрать период времени наблюдения процесса. Проанализировать, сколько времени потребуется для установления стационарного распределения температуры в объекте.

Комментарии к построению вычислительной схемы. При реализации модели на основе сеточного подхода рекомендуется использовать метод конечных разностей (рекомендуется схема Кранка-Николсона) или метод конечных элементов. Программную реализацию провести в ППП Matlab.

Метод конечных разностей для решения нестационарных задач широко представлен в литературе.

Необходимый уровень выполнения работы – построение вычислительной схемы (без программной реализации). Достаточный уровень (ожидаемый и высокий) – программная реализация. Разработка интерфейса пользователя приветствуется.

Комментарии к выбору среды имитационного моделирования. Модель реализуется во всех указанных выше пакетах конечно-элементного моделирования. Привести подробное описание задания геометрии, модели, граничных и начальных условий, построения сетки, запуска решения.

Вариант 7. Решение модельной задачи теории упругости (задача кручения призматических стержней)

Концептуальная постановка задачи. Провести моделирования характеристик процесса кручения стального призматического стержня, закрепленного неподвижно в некоторой точке *A*, который скручивается касательными усилиями, распределенными по нижнему концевому сечению (как показано на рисунке 7).

В решении рассмотреть плоскость сечения *oxy*, считая при этом, что значение функции напряжений на границах соответствуют величине 10^7 Н/м. Провести расчет касательных напряжений в сечении стержня и крутящего момента сил. Геометрические размеры сечения: 5 см × 5 см. Значение модуля упругого сдвига принять равным $8 \cdot 10^{10}$ Па на 1 радиан, значение относительного угла закручивания стержня – 0.15 рад./мм. Определить максимальное значение касательных напряжений в объекте, вычислить значение момента силы.

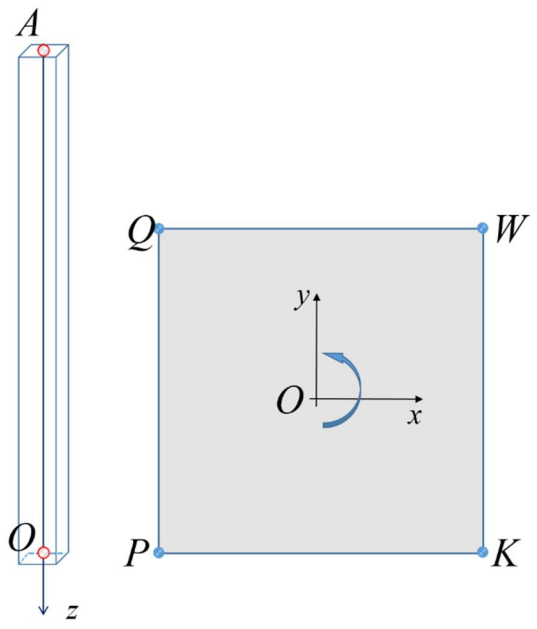

Рис. 7 – Геометрия модельной задачи.

Комментарии к математической постановке задачи. Для формализации математической модели использовать двумерное стационарное уравнение

$$\Delta\varphi(x, y) = -2G \cdot \theta,$$

где φ – функция напряжений, Н/м; G – модуль упругого сдвига на один радиан Па/(м^2·рад.); θ – относительный угол закручивания стержня для каждого сечения, рад./м.

Значение касательного напряжения по направлению **n** можно вычислить по формуле: $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}$, Н/м^2.

Для вычисления значения момента силы можно воспользоваться численным расчетом интеграла:

$$M = 2\iint_{\Omega} \varphi(x, y)\,dxdy,$$

где Ω – расчетная область.

Комментарии к построению вычислительной схемы. При реализации модели на основе сеточного подхода рекомендуется использовать конечно-разностный метод релаксации, метод установления или метод конечных элементов. Программную реализацию провести в ППП Matlab.

Метод установления детально описан, например, в [5] или в [15].

Необходимый уровень выполнения работы – построение вычислительной схемы (без программной реализации). Достаточный уровень (ожидаемый и высокий) – программная реализация. Разработка интерфейса пользователя приветствуется.

Комментарии к выбору среды имитационного моделирования. Модель реализуется во всех указанных выше пакетах конечно-элементного моделирования. Привести подробное описание задания геометрии, модели, граничных и начальных условий, построения сетки, запуска решения.

Вариант 8. Решение задачи электростатики (моделирование распределения потенциала поля, созданного системой зарядов)

Концептуальная постановка задачи. Провести моделирование стационарного распределения потенциала, созданного системой зарядов, находящихся в двумерной области, представляющей собой квадрат *ABCD* (рисунок 8). Материал – оксид алюминия Al_2O_3. Считать, что на двух сторонах квадрата (*AB*, *BC*) поток потенциала нулевой, а на двух других – задан нулевой потенциал поля зарядов.

Геометрический размер области: *AB*=4 мм. Диэлектрическую проницаемость оксида алюминия ε принять равной 9.7.

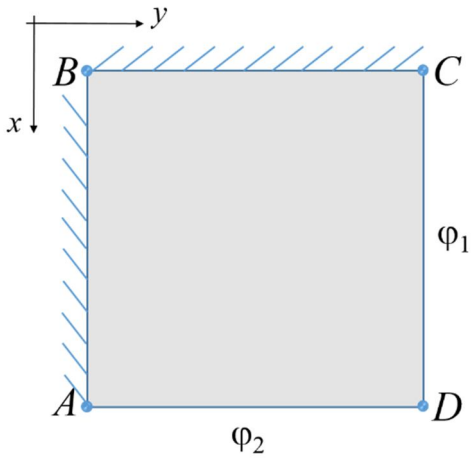

Рис. 8 – Геометрия модельной задачи.

Диэлектрическая постоянная – ε_0= $8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Объемная плотность распределения зарядов задана функциональной зависимостью – распределением Гаусса:

$$\rho(x, y) = 3 \cdot 10^6 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{0.0001}\right), \text{ Кл/м}^3.$$

Значения потенциала, устанавливающиеся на границах области: $\varphi_1 = 0$ В, $\varphi_2 = 0$ В.

Комментарии к математической постановке задачи. Для формализации математической модели использовать двумерное стационарное уравнение электростатики:

$$\Delta\varphi(x, y) = -\frac{\rho(x, y)}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость материала; ε_0 – диэлектрическая постоянная, Ф/м; ρ –объемная плотность зарядов, Кл/м^3.

Если нормальная составляющая потока потенциала через границу равна нулю, то граничные условия примут вид:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{AB} = 0 \text{ и } \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{BC} = 0.$$

Комментарии к построению вычислительной схемы. При реализации модели на основе сеточного подхода рекомендуется использовать конечно-разностный метод установления или метод конечных элементов. Программную реализацию провести в ППП Matlab. Метод установления детально описан, например, в [5] или [15].

Необходимый уровень выполнения работы – построение вычислительной схемы (без программной реализации). Достаточный уровень (ожидаемый и высокий) – программная реализация. Разработка интерфейса пользователя приветствуется.

Комментарии к выбору среды имитационного моделирования. Модель реализуется во всех указанных выше пакетах конечно-элементного

моделирования. Привести подробное описание задания геометрии, модели, граничных и начальных условий, построения сетки, запуска решения.

Вариант 9. Решение задачи электростатики (моделирование распределения потенциала поля, созданного системой зарядов)

Концептуальная постановка задачи. Провести моделирование стационарного распределения потенциала, созданного системой зарядов, находящихся в двумерной области, представляющей собой квадрат *ABCD* (рисунок 9). Материал – оксид кремния SiO_2. Считать, что на двух сторонах квадрата (*AB*, *BC*) поток потенциала нулевой, а на двух других – задан нулевой потенциал поля зарядов.

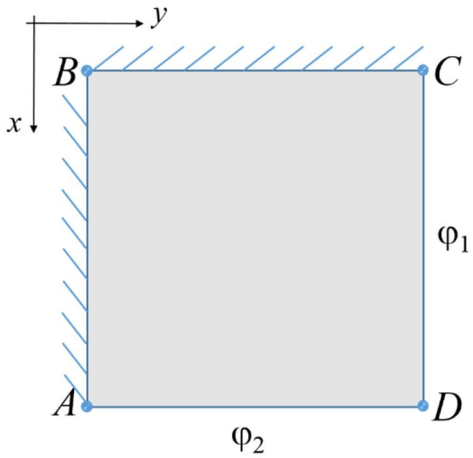

Рис. 9 – Геометрия модельной задачи.

Геометрический размер области: *AB*=4 мм. Диэлектрическую проницаемость оксида кремния ε принять равной 3.9. Диэлектрическая постоянная – ε_0= $8.85\cdot10^{-12}$ Ф/м. Объемная плотность распределения зарядов задана функциональной зависимостью – распределением Релея:

$$\rho(x,y)=3\cdot10^{6}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{0.0004\cdot e^{-0.5}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{0.00025}\right),\ \text{Кл/м}^3.$$

Значения потенциала, устанавливающиеся на границах области: $\varphi_1=0$ В, $\varphi_2=0$ В.

Комментарии к математической постановке задачи. Для формализации математической модели использовать двумерное стационарное уравнение электростатики:

$$\Delta\varphi(x,y) = -\frac{\rho(x,y)}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость материала; ε_0 – диэлектрическая постоянная, Ф/м; ρ –объемная плотность зарядов, Кл/м^3.

Если нормальная составляющая потока потенциала через границу равна нулю, то граничные условия примут вид:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{AB} = 0 \text{ и } \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{BC} = 0.$$

Комментарии к построению вычислительной схемы. При реализации модели на основе сеточного подхода рекомендуется использовать конечно-разностный метод установления или метод конечных элементов. Программную реализацию провести в ППП Matlab.

Метод установления детально описан, например, в [5] или [15].

Необходимый уровень выполнения работы – построение вычислительной схемы (без программной реализации). Достаточный уровень (ожидаемый и высокий) – программная реализация. Разработка интерфейса пользователя приветствуется.

Комментарии к выбору среды имитационного моделирования. Модель реализуется во всех указанных выше пакетах конечно-элементного моделирования. Привести подробное описание задания геометрии, модели, граничных и начальных условий, построения сетки, запуска решения.

Вариант 10. Решение задачи электростатики (моделирование распределения потенциала поля, созданного системой зарядов)

Концептуальная постановка задачи. Провести моделирование стационарного распределения потенциала, созданного системой зарядов,

находящихся в двумерной области, представляющей собой квадрат *ABCD* (рисунок 10).

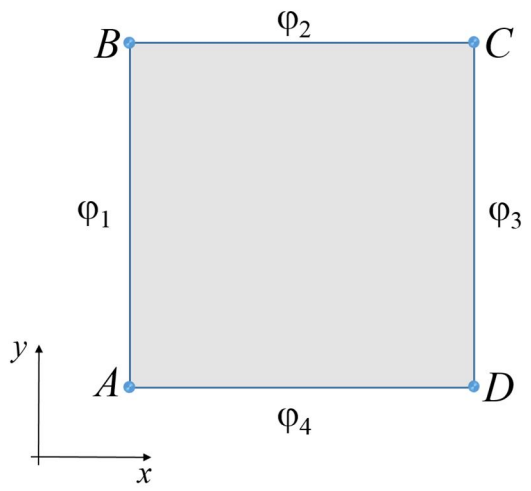

Рис. 10 – Геометрическая схема модели.

Материал – образец ПММА (полиметилметакрилат):

$(–CH_2–C(CH_3)–)_2COOCH_3$.

Считать, что на двух сторонах квадрата заданы значения потенциал поля системы зарядов. Геометрический размер области: *AB*=2 мм. Диэлектрическую проницаемость ПММА ε принять равной 3.5. Диэлектрическая постоянная – $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Объемная плотность распределения зарядов задана функциональной зависимостью – распределением Гаусса:

$$\rho(x, y) = 5 \cdot 10^4 \exp\left(-\frac{(x - 0.001)^2 + (y - 0.001)^2}{0.0025} \right), \text{ Кл/м}^3.$$

Значения потенциала, устанавливающиеся на границах области: $\varphi_1 = 0$ В, $\varphi_2 = 0$ В, $\varphi_3 = 0$ В, $\varphi_4 = 0$ В.

Комментарии к математической постановке задачи.

Для формализации математической модели использовать двумерное стационарное уравнение электростатики:

$$\Delta\varphi(x, y) = -\frac{\rho(x, y)}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость материала; ε_0 – диэлектрическая постоянная, Ф/м; ρ –объемная плотность зарядов, Кл/м^3.

Комментарии к построению вычислительной схемы.

При реализации модели на основе сеточного подхода рекомендуется использовать конечно-разностный метод установления или метод конечных элементов. Программную реализацию провести в ППП Matlab.

Метод установления детально описан, например, в [5] или [15].

Необходимый уровень выполнения работы – построение вычислительной схемы (без программной реализации). Достаточный уровень (ожидаемый и высокий) – программная реализация. Разработка интерфейса пользователя приветствуется.

Комментарии к выбору среды имитационного моделирования. Модель реализуется во всех указанных выше пакетах конечно-элементного моделирования. Привести подробное описание задания геометрии, модели, граничных и начальных условий, построения сетки, запуска решения.

3 РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

1 Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы (введение в теорию). Учебное пособие – М.: Наука, 1977. – 440 с.

2. Егоров В.И. Применение ЭВМ для решения задач теплопроводности. Учебное пособие. – СПб: СПб ГУ ИТМО, 2006. – 77 с.

3. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган, Пер. с англ. Б.И. Квасова / Под ред. Н.С. Бахвалова. – М.: Мир, 1986. – 318 с.

4. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность теплых тел /– М.: Наука, 1964. – 488 с.

5. Кольцова Э.М., Гордеев Л.С., Скичко А.С., Женса А.В. Численные методы решения уравнений. [Электронный учебник]. Режим доступа: http://ikt.muctr.ru/html2/

6. Красников Г.Е., Нагорнов О.В., Старостин Н.В. Моделирование физических процессов с использованием пакета Comsol Multiphysics – М.: Изд-во МИФИ, 2012. – 184 с.

7. Лыков А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.

8. Масловская А.Г., Павельчук А.В. Численные методы: использование инструментальных средств и реализация алгоритмов на базе ППП MATLAB [Электронный ресурс]: учеб. пособие; АмГУ, ФМиИ. - Благовещенск : Изд-во Амур. гос. ун-та, 2016. - 212 с. Режим доступа: http://irbis.amursu.ru/DigitalLibrary/AmurSU_Edition/7430.pdf

9. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. – 368 с.

10. Присекин В.Л. Основы метода конечных элементов в механике деформируемых тел [Электронный ресурс]: учебник/ Присекин В.Л.,

Расторгуев Г.И. – Электрон. текстовые данные. – Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2010. – 238 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/45417 . – ЭБС «IPRbooks»

11. Румянцев А.В. Метод конечных элементов в задачах теплопроводности [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Румянцев А.В. – Электрон. текстовые данные. – Калининград: Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта, 2011. – 113 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/23800. – ЭБС «IPRbooks».

12. Рындин, Е.А. Методы решения задач математической физики: Учебное пособие – Таганрог: ТРТУ, 2003. – 119 с.

13. Рындин Е.А., Лысенко И.Е. Решение задач математической физики в системе Matlab – Таганрог: ТРТУ, 2005. – 62 с.

14. Самарский А.А. Теория разностных схем – М.: Наука, 1977. – 656 с.

15. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.

Приложение 1

ФОРМА ЗАДАНИЯ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

Факультет математики и информатики

Кафедра математического анализа и моделирования

З А Д А Н И Е

К курсовой работе студента Сергеева Андрея Ивановича

1. Тема курсовой работы:

«Численное моделирование (объекта, процесса, явление) с использованием программного приложения …»

2. Срок сдачи студентом законченной работы: __ декабря 20__ г.

3. Исходные данные к курсовой работе: содержательная постановка задачи моделирования, данные и эмпирические характеристики, определяющие исследуемую предметную область, справочная информация по ППП …

4. Содержание курсовой работы:

– …

– …

– … (*перечисляются главы или их краткая формулировка*)

В состав курсовой работы входят: пояснительная записка, файл реализации модели в ППП …, презентация.

5. Перечень материалов приложения (при наличии): дополнительные сопутствующие изложению текста пояснительной записки материалы: рисунки,

схемы, скриншоты диалоговых окон и пр.

6. Дата выдачи задания 15 сентября 20__ г.

Руководитель курсовой работы _____

(должность, ученая степень, ФИО руководителя)

Задание принял к исполнению: _____ ФИО студента

(подпись, дата)

Приложение 2

ФОРМА РЕЦЕНЗИИ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ

Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

РЕЦЕНЗИЯ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ

по дисциплине: «Математическое и компьютерное моделирование сложных систем»

Студента _____
(ФИО)

Курс ___, группа ____
Направление подготовки 01.04.02 – «Прикладная математика и информатика»
Факультет математики и информатики
Тема: «_____
_____»
Дата получения задания «15» сентября 20__ г.
Дата сдачи курсовой работы «__» декабря 20__ г.

Содержание рецензии

_____
_____
_____
_____
_____

Отметка о факте и результате проверки с использованием информационных ресурсов текста на предмет некорректных заимствований:

_____
_____

Допущен к защите «___» декабря 20__
Защита назначена на «___» декабря 20__
Курсовая работа защищена «___» декабря 20__ с оценкой «_____»

Рецензент (руководитель): _____ ФИО
(уч. ст., уч. звание, должность) (подпись, дата)

СОДЕРЖАНИЕ

1 Основные требования к выполнению курсовой работы 3
1.1 Выбор темы 3
1.2 Содержание курсовой работы 4
1.3 Материально-техническая база и условия в вузе для выполнения курсовой работы 5
1.4 Оформление и структура курсовой работы 6
1.5 Представление и защита курсовой работы 8
2 Варианты заданий к курсовой работе 12
3 Рекомендуемая литература для выполнения курсовой работы 33
Приложение 1. Форма задания к курсовой работе 35
Приложение 2. Форма рецензии на курсовую работу 37

Анна Геннадьевна Масловская,
проф. кафедры МАиМ АмГУ, д-р физ.-мат. наук

Математическое и компьютерное моделирование сложных систем: методические рекомендации к выполнению курсовой работы

Заказ 832