

Министерство образования и науки Российской Федерации

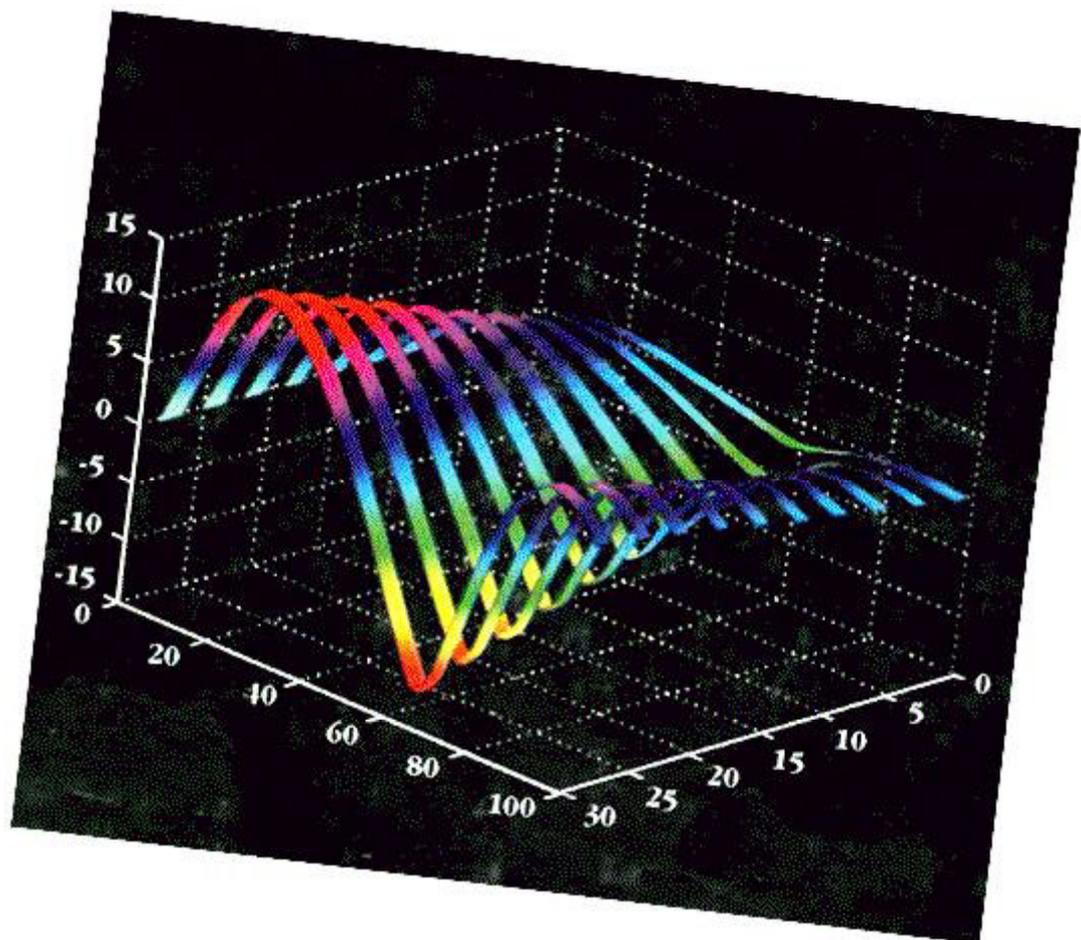
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
кафедра информационных и управляющих систем

Е.Л. Еремин, И.Е. Еремин

СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Лабораторный практикум (MatLab-Simulink)



Благовещенск
2017

ББК 32
Е 70

Печатается по решению
редакционно-издательских советов
факультета математики и информатики
и инженерно-физического факультета
Амурского государственного университета

Еремин Е.Л., Еремин И.Е. Системы автоматического управления: Лабораторный практикум (MatLab-Simulink). Учебное пособие по дисциплине «Теория автоматического управления» для бакалавров направления подготовки 09.03.01 – «Информатика и вычислительная техника» и по программе специалитета 24.05.01 – «Пилотируемые и автоматические космические аппараты и системы» в пределах специальности «Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов», а также по учебной дисциплине «Основы теории управления» по направлению подготовки 24.03.01 – «Ракетные комплексы и космонавтика»; Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2017.

Практикум содержит краткие теоретические сведения по ряду разделов учебных дисциплин «Теория автоматического управления» и "Основы теории управления", а также перечень вопросов текущего контроля знаний и учебных лабораторных заданий по основным разделам учебных дисциплин «Теория автоматического управления» и "Основы теории автоматического управления"

Практикум ориентирован на студентов и аспирантов, интересующихся проблемами теории автоматического управления и имитационного моделирования.

Рецензент: Чье Ен Ун – профессор, д-р техн. наук,
зав. кафедрой автоматики и системотехники
Тихоокеанского государственного университета, Хабаровск.

© Амурский государственный университет

СОДЕРЖАНИЕ

1. МОДЕЛИ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ	5
1.1. Модели непрерывных систем	5
1.1.1. Линеаризация дифференциальных уравнений	5
1.1.2. Первая форма записи линеаризованных уравнений	8
1.1.3. Операционное исчисление и преобразования Лапласа	9
1.1.4. Вторая форма записи уравнений на основе $W(s)$	13
1.2. Временные и частотные характеристики непрерывных систем ...	14
1.2.1. Временные характеристики	14
1.2.2. Частотные характеристики	16
2. МОДЕЛИ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ	18
2.1. Состояние динамической системы	18
2.1.1. Вход, состояние и выход	18
2.1.2. Пространство состояний	20
2.2. Описание динамической системы в нормальной форме	20
2.2.1. Уравнения линейных систем в пространстве состояний	20
2.2.2. Способы программирования в переменных состояниях	22
2.2.2.1. Прямое программирование	22
2.2.2.2. Параллельное программирование	24
2.2.2.3. Последовательное программирование	26
2.2.2.4. Программирование по структурной схеме	28
2.2.3. Примеры уравнений состояния систем	29
2.2.4. Передаточные функции нормальных систем	31
2.2.5. Уравнения состояний при типовом соединении систем ..	32
3. ВИЗУАЛЬНОЕ S-МОДЕЛИРОВАНИЕ	34
3.1. Общая характеристика задачи имитационного моделирования ...	34
3.2. Работа с simulink-моделью	37
3.2.1. Создание и правка модели	37
3.2.2. Основные схемы моделирования	42
3.2.3. Публикация результатов моделирования	46
3.3. Инструмент LTI Viewer	47
4. ЛАБОРАТОРНАЯ ЧАСТЬ ПРАКТИКУМА	52
4.1. Исследование временных и частотных характеристик динами- ческих систем 1-го порядка	52
4.2. Исследование временных и частотных характеристик динами- ческих систем 2-го порядка	58
4.3. Исследование устойчивости систем управления с обратной свя- зью	61
4.4. Исследование статических и скоростных ошибок замкнутых систем	66
4.5. Исследование нелинейных систем 1-го типа	69
Приложение 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ	74
П.1.1. Манипулятор	74
П.1.2. Центробежный маятник	78

П.1.3. Ресивер	81
П.1.4. Гидравлический сервомотор	84
П.1.5. Длинный бьеф	87
П.1.6. Печь сжигания (окисления) серы	89
П.1.7. Двигатель постоянного тока с независимым возбуждением	92
П.1.8. Асинхронный двухфазный двигатель	93
П.1.9. Электронная упругая поляризация диэлектрика	94
ЛИТЕРАТУРА	99

1. МОДЕЛИ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Динамические системы разнообразны по своему назначению, принципу действия и конструктивному исполнению. Поведение систем может описываться обыкновенными дифференциальными уравнениями, дифференциальными уравнениями в частных производных, уравнениями в прямых или обратных разностях и т.д. Рассмотрим методику составления уравнений непрерывных динамических систем с сосредоточенными параметрами, динамика которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями.

1.1. Модели непрерывных систем

Большинство динамических систем – это совокупность взаимодействующих между собой подсистем (фрагментов) и отдельных элементов, определенным образом соединенных друг с другом. Начальным этапом при составлении дифференциальных уравнений является *разделение (декомпозиция) системы* на отдельные элементы и составление их дифференциальных уравнений.

Математические модели элементов системы в виде дифференциальных уравнений и уравнений связей между ними описывают процессы в динамической системе, т.е. изменение во времени всех ее физических координат. Зная уравнения элементов и уравнения связей динамической системы, можно построить ее структурную схему.

Структурная схема динамической системы отражает геометрию системы и характеризует как состав ее элементов, так и связи между ними. На структурной схеме системы указывают пути и направления передачи информации (сигналов). Состояние системы, а также входящих в нее элементов описывается определенным числом независимых координат, часть которых доступна измерению: например, для электрических систем – это ток, напряжение, мощность; для механических систем – угол поворота, перемещение, скорость и т.д. Для описания взаимодействия системы с внешней средой, а также подсистемы с другими подсистемами на входе и выходе выбирают соответствующие векторные координаты (входные и выходные). Будем пока полагать, что координаты, или переменные динамической системы – скалярные функции времени, пусть входная величина $g(t)$, а выходная $z(t)$.

1.1.1. Линеаризация дифференциальных уравнений

При составлении математического описания динамической системы основной задачей является получение дифференциальных уравнений ее отдельных элементов. На рис. 1 показан общий вид произвольного элемента динамической системы, на входе которого выделено два типа внешних воздействий, один из

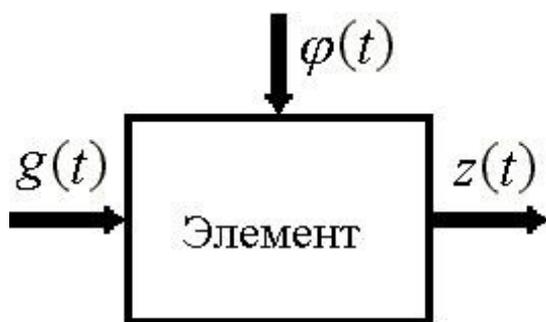


Рис. 1.1. Элемент динамической системы.

которых будем называть задающим воздействием $g(t)$, а другой – возмущающим $\varphi(t)$.

Составление уравнений отдельных элементов системы опирается на те физические законы, которые характеризуют их природу и поведение.

Для технических систем – это законы механики, электротехники, гидравлики, теплотехники и т.п. Уравнения динамики каждого элемента и всей системы в целом являются дифференциальными, при составлении которых стремятся, с одной стороны,

наиболее точно, полно и подробно описать поведение, а с другой, учитывая сложность таких уравнений, – найти компромисс между усложнением дифференциальных уравнений и упрощением исследования свойств системы при решении этих уравнений.

Если в динамической системе возникает *установившийся режим (стабилизация)*, то это ее состояние характеризуется зависимостью значений выходной величины от входной в виде так называемой *статической характеристики*.

Эти характеристики могут быть получены из дифференциальных уравнений при $t \rightarrow \infty$. Для примера рассмотрим дифференциальное уравнение элемента системы (см. рис. 1.1), динамику которого опишем выражением

$$F\left(\frac{d^2 z(t)}{dt^2}, \frac{dz(t)}{dt}, z(t), g(t)\right) = \phi\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}, \varphi(t)\right), \quad (1.1)$$

где $F(\cdot)$, $\phi(\cdot)$ – некоторые функции переменных $g(t)$, $z(t)$ и $\varphi(t)$, а также производных от $z(t)$ и $\varphi(t)$. В этом случае статическая характеристика (здесь в неявном виде) будет описываться уравнением

$$F(0, 0, z_0, g_0) = \phi(0, \varphi_0), \quad z_0, g_0, \varphi_0 = const. \quad (1.2)$$

Если функции $F(\cdot)$, $\phi(\cdot)$ нелинейные, в частном случае – линейные, то и элемент (1.1) соответственно – *нелинейный* или *линейный*. Из-за нелинейности большинства статических характеристик уравнения динамических систем являются нелинейными.

Упрощение анализа динамической системы чаще всего состоит в приближенной замене нелинейных дифференциальных уравнений на линейные уравнения, решения которых с достаточной степенью точности совпадают с решениями нелинейных уравнений. Такая *линеаризация* нелинейного уравнения производится относительно некоторого установившегося состояния.

Если нелинейность элемента системы вызвана его статической характеристикой, пусть для примера $z = \psi(g)$, то линеаризация характеристики сводится к ее замене на линейную функцию $z = ag + b$. Аналитически такая замена осуществляется за счет разложения в ряд Тейлора функции $z = \psi(g)$ в окрестности *стационарной точки*, соответствующей установившемуся состоянию при отбрасывании всех членов ряда, содержащих отклонения входной величины Δg в сте-

пени выше первой. Геометрически это означает замену кривой $z = \psi(g)$ касательной, проведенной к кривой в стационарной точке (z_0, g_0) , как это показано на рис. 1.2, т.е. в точке установившегося режима.

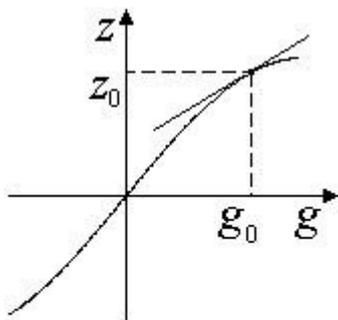


Рис. 1.2. Пример линейризации $z = \psi(g)$.

В других случаях линейризацию можно осуществить путем проведения секущей, мало отличающейся от функции $z = \psi(g)$ в заданном диапазоне изменения входной величины.

Такие нелинейные характеристики, т.е. линейризуемые в любой стационарной точке с требуемым диапазоном изменения входной величины в ее окрестности, называют *несущественными нелинейностями*; наряду с ними имеются нелинейные статические характеристики, которые такой линейризации не поддаются – *существенные нелинейности*. На рис. 1.3 изображены примеры некоторых существенных нелинейностей: а) – элемент с зоной нечувствительности; б) – релейный элемент с гистерезисом; с) – элемент с люфтом.

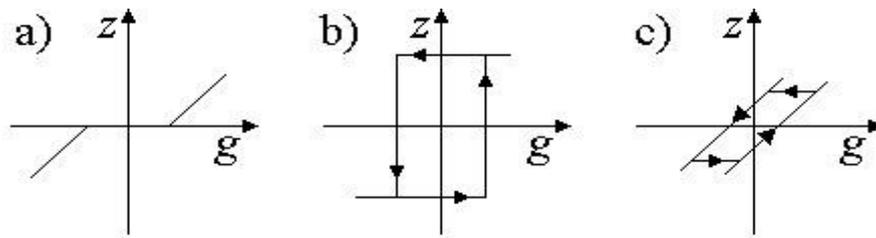


Рис. 1.3. Статические характеристики существенно нелинейных элементов.

Введем в рассмотрение отклонения входной и выходной переменных от установившегося состояния:

$$\Delta g(t) = g(t) - g_0, \Delta z(t) = z(t) - z_0, \quad (1.3)$$

$$\frac{d\Delta z(t)}{dt} = \frac{dz(t)}{dt} = z'(t), \frac{d^2\Delta z(t)}{dt^2} = \frac{d^2z(t)}{dt^2} = z''(t).$$

Разложим левую часть выражения (1.1) в ряд Тейлора относительно состояния $(0, 0, z_0, g_0)$:

$$F\left(\frac{d^2z(t)}{dt^2}, \frac{dz(t)}{dt}, z(t), g(t)\right) = F(0, 0, z_0, g_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)_0 \Delta g(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \Delta z(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)_0 \Delta z'(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right)_0 \Delta z''(t) + ВЧР, \quad (1.4)$$

где аббревиатура ВЧР (*высшие члены разложения*) обозначает слагаемые, содержащие отклонения $\Delta z(t)$, $\Delta g(t)$ и производные от $\Delta z(t)$ в степени выше первой. Частные производные в правой части уравнения (1.4) являются постоянными величинами, значения которых зависят от вида функций $F(z''(t), z'(t), z(t), g(t))$ и координат стационарной точки (z_0, g_0) . Вычитая из уравнения (1.1) уравнение (1.2), с учетом равенства (1.4), можно записать следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)_0 \Delta g(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \Delta z(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)_0 \Delta z'(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right)_0 \Delta z''(t) + \\ & + \text{ВЧР} = \phi\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}, \varphi(t)\right) - \phi(0, \varphi_0). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Предполагая, что отклонения (1.3) малы по величине, а функция $F(z'(t), z'(t), z(t), g(t))$ в окрестности стационарной точки достаточно гладкая по всем аргументам, и отбрасывая в левой части уравнения (1.5) слагаемые ВЧР в силу их малости, получим уравнение вида

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)_0 \Delta g(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \Delta z(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)_0 \Delta z'(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right)_0 \Delta z''(t) = \\ & = \phi\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}, \varphi(t)\right) - \phi(0, \varphi_0). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Таким образом, уравнение (1.6) – это *линейная модель* нелинейного уравнения (1.1), записанная в малых отклонениях относительно заданного установившегося состояния динамической системы.

Процедура линеаризации уравнения (1.1) может геометрически быть интерпретирована следующим образом. В пространстве переменных $z''(t), z'(t), z(t), g(t)$ уравнение (1.1) задает некоторую поверхность. Переход от уравнения (1.1) к уравнению (1.6) означает приближенную замену поверхности на касательную плоскость, проведенную к поверхности в стационарной точке.

Как правило, с помощью уравнения (1.6) можно исследовать поведение динамической системы лишь при малых отклонениях координат от установившегося состояния. В общем случае это ограничивает применение математических моделей типа (1.6), но, для замкнутых систем автоматического управления эти ограничения весьма условны, поскольку для большинства систем управления стремление отклонений к нулю лежит в основе их рабочего функционирования.

1.1.2. Первая форма записи линеаризованных уравнений

В стандартной *первой форме записи* принято дифференциальное уравнение элемента системы представлять так, чтобы выходная координата и все ее производные находились в левой части уравнения (причем сама выходная переменная входила бы в уравнение с коэффициентом, равным единице), а все входные переменные располагались в правой части уравнения. В соответствии с этим правилом уравнение (1.6) переписывается следующим образом:

$$\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right)_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0} \frac{d^2 \Delta z(t)}{dt^2} + \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0} \frac{d \Delta z(t)}{dt} + \Delta z(t) = - \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0} \Delta g(t) + f(t), \quad (1.7)$$

где

$$f(t) = \frac{\phi\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}, \varphi(t)\right) - \phi(0, \varphi_0)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0} - \text{переобозначение некоторого выражения от}$$

внешнего возмущения $\varphi(t)$.

Если для уравнения (1.7) ввести обозначения постоянных коэффициентов и отклонения переменных следующего вида:

$$T_1 = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right)_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0}, T_2 = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0}, K = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0}, x(t) = \Delta z(t), u(t) = \Delta g(t), \quad (1.8)$$

то оно будет иметь более компактное описание:

$$T_1 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = Ku(t) + f(t). \quad (1.9)$$

Достоинством первой формы записи является удобная размерность коэффициентов в уравнении (1.9). Так, положительные коэффициенты при производных T_1 и T_2 , с учетом явного вида соотношений (1.8), имеют соответственно размерность (сек)² и (сек) и называются *постоянными времени*. В свою очередь K – это *коэффициент передачи*, который является безразмерным только тогда, когда размерности входа $u(t)$ и выхода $x(t)$ совпадают. Если $K > 0$, то это означает, что при увеличении величины $u(t)$ происходит рост значений $x(t)$, если же $K < 0$, то с ростом $u(t)$ происходит уменьшение $x(t)$.

Для линейных динамических систем, описываемых уравнениями типа (1.9), справедлив *принцип суперпозиции*, согласно которому реакция системы на линейную комбинацию воздействий совпадает с той же линейной комбинацией реакций на каждое воздействие в отдельности. Например, для системы (1.9) это означает, что ее реакция $x(t)$ является суперпозицией решений $x_u(t)$ и $x_f(t)$ в виде алгебраической суммы откликов на входные воздействия $u(t)$ и $f(t)$.

В задачах анализа линейных систем, подверженных действию нескольких входных воздействий, благодаря принципу суперпозиции решений всегда существует возможность исследовать сложную многосвязную задачу как суммы независимых и более простых задач. Поэтому в дальнейшем, как правило, будем рассматривать линейные динамические системы с одним входом, в частности уравнение (1.9) в следующем виде:

$$T_1 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = Ku(t). \quad (1.10)$$

1.1.3. Операционное исчисление и преобразование Лапласа

Под операционным исчислением понимается один из методов математического анализа, позволяющий в ряде случаев сводить исследование и решение некоторых типов интегро-дифференциальных уравнений к рассмотрению более

простых алгебраических задач.

Операционное исчисление нашло широкое применение при исследовании динамических систем, поскольку с его помощью осуществляется анализ переходных и установившихся процессов.

Рассмотрим основной способ применения операционного метода. Пусть имеется некоторая функция $f(t)$ действительной переменной t , причем такая, что для нее существует *прямое преобразование Лапласа* (L -преобразование)

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (1.11)$$

где интеграл в правой части равенства сходится. Используя L -преобразование, можно каждой *функции-оригиналу* $f(t)$ поставить в соответствие *функцию-изображение* $F(s)$, т.е. *изображение по Лапласу* относительно комплексной переменной $s = c + j\omega$.

Преобразование Лапласа имеет неоспоримые преимущества, например, – дифференцированию оригинала $f(t)$ по переменной t соответствует операция умножения изображения $F(s)$ на переменную s , а интегрированию оригинала $f(t)$ соответствует операция деления $F(s)$ на s .

Принципиально важным является то, что относительно сложные операции дифференцирования и интегрирования оригинала заменяются в пространстве изображений на более простые алгебраические – соответственно операции умножения и деления изображения $F(s)$ на s . Это позволяет дифференциальное уравнение относительно функции $f(t)$ заменить в пространстве изображений на алгебраическое уравнение, записанное относительно изображения $F(s)$, решив которое можно найти $F(s)$.

L -преобразование (1.11) обладает следующими свойствами:

Линейность:

$$L\left\{\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)\right\} = \sum_{k=1}^n a_k F_k(s). \quad (1.12)$$

Изображение производных:

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0), \dots, \quad (1.13)$$

$$L\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Изображение интеграла:

$$L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} F(s). \quad (1.14)$$

Смещение в действительной области:*

$$L\{f(t - \tau)\} = e^{-s\tau} F(s). \quad (1.15)$$

* Если смещение τ рассматривается относительно переменной времени t , то его называют *запаздыванием*.

Свертка функций в действительной области:

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right\}=F_1(s)F_2(s). \quad (1.16)$$

Свертка функций в комплексной области:

$$L\{f_1(t)f_2(t)\}=\frac{1}{j2\pi}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F_1(q)F_2(s-q)dq. \quad (1.17)$$

Начальное и предельное значение оригинала:

$$\lim_{s\rightarrow\infty}sF(s)=\lim_{t\rightarrow+0}f(t), \quad \lim_{s\rightarrow 0}sF(s)=\lim_{t\rightarrow\infty}f(t). \quad (1.18)$$

Результаты прямого интегрального преобразования Лапласа наиболее распространенных временных функций в силу их прикладной значимости сведены в таблицы в виде набора стандартных соответствий типа *оригинал-изображение*, часть из которых дана в табл. 1.1.

Таблица 1.1

№	Оригинал	Изображение
1.	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
2.	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
3.	$\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$
4.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
5.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
6.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
7.	$\frac{1}{\omega}e^{-\alpha t}\sin \omega t$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
8.	$e^{-\alpha t}\cos \omega t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
9.	$\frac{e^{-\alpha t}+\alpha t-1}{\alpha^2}$	$\frac{1}{s^2(s+\alpha)}$
10.	$[(a_0-\alpha)t+1]e^{-\alpha t}$	$\frac{s+a_0}{(s+\alpha)^2}$

Определение искомого решения $f(t)$ осуществляется с помощью *обратного преобразования Лапласа* (L^{-1} -преобразованием), устанавливающего связь между

изображением $F(s)$ и соответствующим ему оригиналом $f(t)$:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s)e^{st} ds, \quad t > 0, \quad c = \operatorname{Re} s. \quad (1.19)$$

Вычисление оригинала $f(t)$ по формуле (1.19) удобно производить с помощью вычетов, хотя можно и избежать непосредственного интегрирования – например, воспользовавшись набором стандартных соответствий типа *изображение-оригинал*, часть из которых представлена в табл. 1.2.

Таблица 1.2

№	$F(s)$	$f(t) (t > 0)$	
1.	$\frac{1}{s(s-a)}$	$Ae^{at} + B$	$A = \frac{1}{a}, B = -\frac{1}{a}$
2.	$\frac{s+d}{s(s-a)}$	$Ae^{at} + B$	$A = \left(1 + \frac{d}{a}\right), B = -\frac{d}{a}$
3.	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$Ae^{at} + Be^{bt}$	$A = \frac{1}{a-b}, B = \frac{1}{b-a}$
4.	$\frac{s+d}{(s-a)(s-b)}$	$Ae^{at} + Be^{bt}$	$A = \frac{a+d}{a-b}, B = \frac{b+d}{b-a}$
5.	$\frac{1}{s(s-a)(s-b)}$	$Ae^{at} + Be^{bt} + C$	$A = \frac{1}{a(a-b)}, B = \frac{1}{b(b-a)}, C = \frac{1}{ab}$
6.	$\frac{s+d}{s(s-a)(s-b)}$	$Ae^{at} + Be^{bt} + C$	$A = \frac{a+d}{a(a-b)}, B = \frac{b+d}{b(b-a)}, C = \frac{d}{ab}$
7.	$\frac{s^2 + qs + d}{s(s-a)(s-b)}$	$Ae^{at} + Be^{bt} + C$	$A = \frac{a^2 + qa + d}{a(a-b)}, B = \frac{b^2 + qb + d}{b(b-a)}, C = \frac{d}{ab}$

Метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью операционного исчисления, представленный графически в виде последовательности основных этапов, показан на рис. 1.4.



Рис. 1.4. Алгоритм решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.1.4. Вторая форма записи уравнений на основе $W(s)$

Передаточной функцией $W(s)$ называется отношение изображения выхода $x(s)$ к изображению входа $u(s)$:

$$W(s) = \frac{x(s)}{u(s)} \quad (1.20)$$

при нулевых начальных условиях.

Применение L -преобразования, в частности к уравнению (1.10), позволяет записать соотношение

$$T_1 s^2 x(s) + T_2 s x(s) + x(s) = K u(s),$$

преобразование которого согласно определению $W(s)$ дает следующий результат:

$$x(s) = W(s)u(s), \quad W(s) = \frac{K}{T_1 s^2 + T_2 s + 1}. \quad (1.21)$$

Если динамическая система подвержена действию нескольких входных сигналов – см. например, (1.9), то вторую форму записи такого уравнения можно представить в виде

$$x(s) = \frac{K}{T_1 s^2 + T_2 s + 1} u(s) + \frac{1}{T_1 s^2 + T_2 s + 1} f(s). \quad (1.22)$$

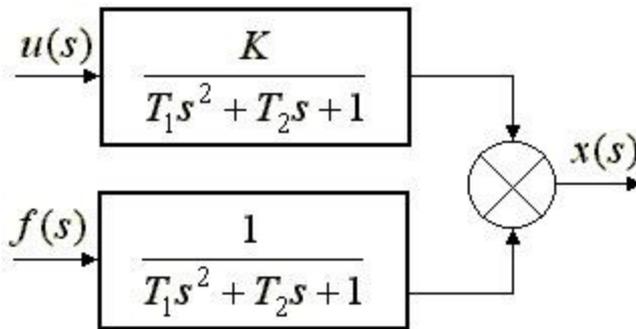


Рис. 1.5. Структурная схема динамической системы (1.22).

Понятие передаточной функции динамической системы весьма удобно при анализе так называемых *структурных схем* – например, уравнению (1.22) соответствует схема, показанная на рис. 1.5.

В тех случаях, когда существует возможность вычисления значений полюсов $W(s)$ или корней знаменателя передаточной функции, называемого *характеристическим уравнением*, можно с помощью данных табл. 1.2

найти явный вид искомой функции. Действительно, пусть в динамической системе, описываемой уравнением (1.21), входной сигнал – единичная функция, т.е. $u(t) = 1(t)$ (изображение которой имеет вид $u(s) = 1/s$: см. данные табл. 1.1 в первой строке). Поскольку для передаточной функции (1.21) из $T_1 s^2 + T_2 s + 1 = 0$ следует, что

$$s_{1,2} = \frac{-T_2 \pm \sqrt{T_2^2 - 4T_1}}{2T_1}, \quad (1.23)$$

то, переписав сомножитель $W(s)u(s)$ эквивалентным образом, находим явный вид изображения выходного сигнала

$$x(s) = W(s)u(s) = \frac{K/T_1}{s(s-s_1)(s-s_2)}.$$

Тогда искомым оригинал, согласно данным табл. 1.2 (пятая строка), соответствующий изображению $x(s)$, будет описываться равенством

$$x(t) = \frac{K}{T_1} \left(\frac{1}{s_1(s_1 - s_2)} e^{s_1 t} + \frac{1}{s_2(s_2 - s_1)} e^{s_2 t} + \frac{1}{s_1 s_2} \right), \quad (1.24)$$

где вещественные или комплексные числа s_1 и s_2 , вычисляются по формулам (1.23). Кроме того, равенство (1.24) можно представить и следующим образом:

$$x(t) = K \left(-\frac{1}{T_2 s_1} e^{s_1 t} + \frac{1}{T_2 s_2} e^{s_2 t} + 1 \right). \quad (1.25)$$

1.2. Временные и частотные характеристики непрерывных систем

Как уже отмечалось, для анализа динамических систем их разбивают на отдельные элементы. Классификация динамических элементов обычно осуществляется по виду дифференциального уравнения.

Статическая характеристика любого элемента может быть изображена прямой линией (рис. 1.6), поскольку по-прежнему рассматриваются линейные, а точнее, – линеаризованные системы.

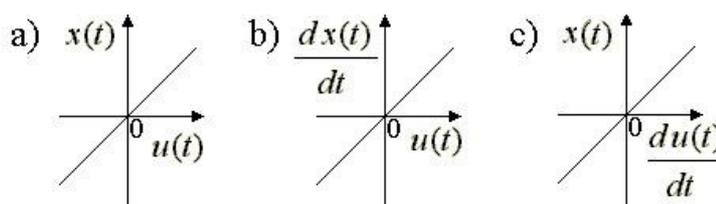


Рис. 1.6. Статические характеристики линейных элементов.

В элементах *позиционного (статического)* типа линейной зависимостью $x(t) = Ku(t)$ связаны выходная и входная координаты в установившемся режиме.

В элементах *интегрирующего* типа, при $t \rightarrow \infty$ выходная и входная переменные связаны линейным уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ku(t), \text{ или } x(t) = K \int_0^t u(q) dq.$$

В элементах *дифференцирующего* типа аналогичная линейная связь имеет вид

$$x(t) = K \frac{du(t)}{dt}.$$

1.2.1. Временные характеристики

Динамические свойства элемента могут быть определены по его *переходной функции* и *функции веса*. Переходная функция $h(t)$ (*переходная характеристика*) представляет собой временной отклик или реакцию выхода элемента, при подаче на его вход *единичного сигнала*

$$u(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, & \forall t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (1.26)$$

который часто называют *единичной ступенью*, или *единичным скачком*. Предполагается, что единица имеет размерность физической величины на входе элемента. Графические образы временных сигналов $1(t)$ и $h(t)$ показаны на рис. 1.7.

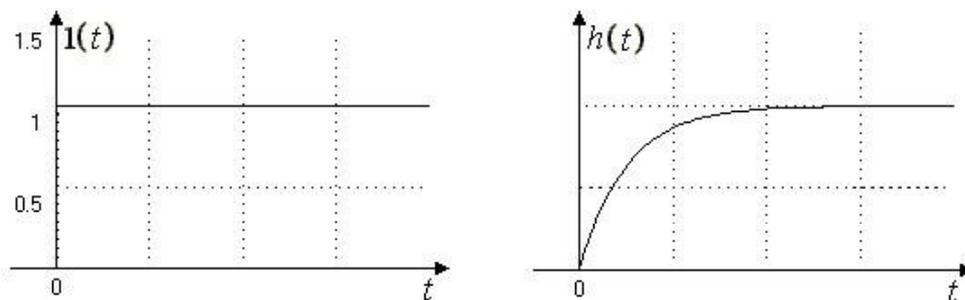


Рис. 1.7. Единичная ступень $1(t)$ и переходной процесс $h(t)$.

Функция $1(t)$ – весьма распространенный вид входного воздействия в динамических системах. К такому виду сводятся мгновенное изменение нагрузки электрического генератора, мгновенное возрастание момента нагрузки на валу двигателя, мгновенный поворот руля управления движущегося автомобиля и т.д.

Функция веса $\omega(t)$ (*импульсная переходная характеристика*) является временной реакцией выхода элемента при подаче на его вход *единичного импульсного сигнала*

$$u(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases} \quad (1.27)$$

Основное свойство дельта-функции $\delta(t)$ заключается в том, что она имеет единичную площадь:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1,$$

Характеристика $\omega(t)$ в динамических системах является распространенным видом входного воздействия. К такому виду можно отнести, например, кратковременный удар нагрузки на валу двигателя, кратковременный ток короткого замыкания генератора (отключаемый плавкими предохранителями) и т.п. Один из вариантов представления функций $\delta(t)$ и $\omega(t)$ показан рис. 1.8, где рассматривается динамический элемент при нулевых начальных условиях $\omega(0) = 0$.

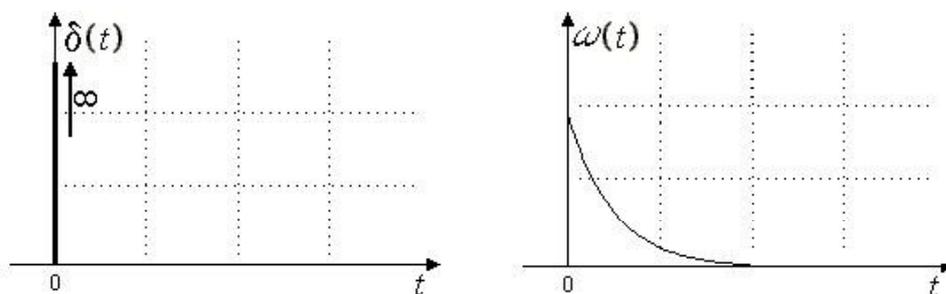


Рис. 1.8. Функция $\delta(t)$ и импульсная переходная функция $\omega(t)$.

Между функциями $h(t)$ и $\omega(t)$ существует связь вида $\omega(t) = \frac{dh(t)}{dt}$, а передаточная функция $W(s)$ связана с переходным процессом и импульсной переход-

ной функцией элемента – прямым интегральным преобразованием Лапласа

$$W(s) = \int_0^{\infty} \omega(t)e^{-st} dt = s \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt. \quad (1.28)$$

1.2.2. Частотные характеристики

Динамические свойства элемента в частотной области определяются его частотной передаточной функцией $W(j\omega)$, получаемой из функции $W(s)$ путем

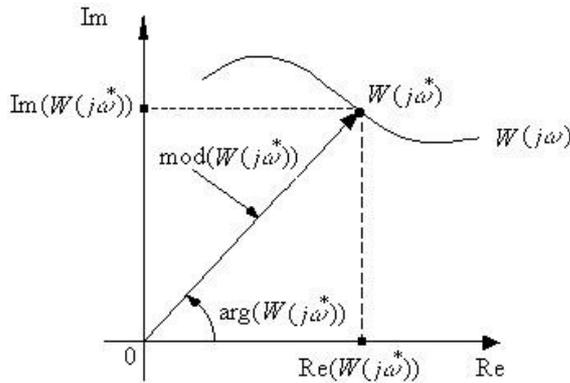


Рис. 1.9. Комплексная плоскость $W(j\omega)$.

замены s на $j\omega$, где $j^2 = -1$, $\omega \in R$, $-\infty \leq \omega \leq +\infty$. Часто $W(j\omega)$ называют амплитудно-фазовой частотной характеристикой, или комплексным коэффициентом усиления.

Поскольку в комплексной плоскости геометрический образ функции $W(j\omega)$ (рис. 1.9), может описываться как в прямоугольных, так и в полярных координатах, то частотную передаточную функцию будем рассматривать в виде

$$W(j\omega) = \text{Re}(W(j\omega)) + j\text{Im}(W(j\omega)) = \text{mod}(W(j\omega))e^{j\arg(W(j\omega))}, \quad (1.29)$$

где введены обозначения: $\text{Re}(W(j\omega)) = U(\omega)$ – вещественная частотная характеристика; $\text{Im}(W(j\omega)) = V(\omega)$ – мнимая частотная характеристика; $\text{mod}(W(j\omega)) = A(\omega)$ – амплитудная частотная характеристика; $\arg(W(j\omega)) = \varphi(\omega)$ – фазовая частотная характеристика.

В комплексной плоскости график векторной функции $W(j\omega)$ – это годограф (геометрическое место конца вектора).

Для пар характеристик $(U(\omega), V(\omega))$ и $(A(\omega), \varphi(\omega))$ в любой фиксированной точке $\omega = \omega^*$ (рис. 1.9) справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} A(\omega^*) &= \sqrt{U^2(\omega^*) + V^2(\omega^*)}, \\ \varphi(\omega^*) &= \text{arctg} \frac{V(\omega^*)}{U(\omega^*)}, \\ U(\omega^*) &= A(\omega^*) \cos \varphi(\omega^*), \\ V(\omega^*) &= A(\omega^*) \sin \varphi(\omega^*). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Поскольку передаточная функция $W(s)$ любой системы является дробно-рациональной функцией вида

$$W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)} = \frac{r_0 s^m + r_1 s^{m-1} + \dots + r_{m-1} s + r_m}{q_0 s^n + q_1 s^{n-1} + \dots + q_{n-1} s + q_n}, \quad (1.31)$$

то в частотной области для нее справедливы, во-первых, в прямоугольных коор-

динатах, соотношения:

$$\begin{aligned}W(j\omega) &= \frac{U_R(\omega) + jV_R(\omega)}{U_Q(\omega) + jV_Q(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega), \\U(\omega) &= \frac{U_R(\omega)U_Q(\omega) + V_R(\omega)V_Q(\omega)}{U_Q^2(\omega) + V_Q^2(\omega)}, \\V(\omega) &= \frac{U_R(\omega)V_Q(\omega) - V_R(\omega)U_Q(\omega)}{U_Q^2(\omega) + V_Q^2(\omega)}, \\U_R(\omega) &= \operatorname{Re}(R(j\omega)), \\V_R(\omega) &= \operatorname{Im}(R(j\omega)), \\U_Q(\omega) &= \operatorname{Re}(Q(j\omega)), \\V_Q(\omega) &= \operatorname{Im}(Q(j\omega));\end{aligned}\tag{1.32}$$

во-вторых, в полярных координатах, выражения:

$$\begin{aligned}W(j\omega) &= \frac{A_R(\omega)e^{j\varphi_R(\omega)}}{A_Q(\omega)e^{j\varphi_Q(\omega)}} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \\A(\omega) &= \frac{A_R(\omega)}{A_Q(\omega)}, \\\varphi(\omega) &= \varphi_R(\omega) - \varphi_Q(\omega), \\A_R(\omega) &= \operatorname{mod}(R(j\omega)), \\\varphi_R(\omega) &= \operatorname{arg}(R(j\omega)), \\A_Q(\omega) &= \operatorname{mod}(Q(j\omega)), \\\varphi_Q(\omega) &= \operatorname{arg}(Q(j\omega)).\end{aligned}\tag{1.33}$$

Формулы (1.30) – (1.33) оказываются весьма полезными при решении как теоретических, так и прикладных задач.

2. МОДЕЛИ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

2.1. Состояние динамической системы

В современной теории систем управления активно развиваются и используются *методы пространства состояний*. Наиболее характерный пример такого применения – теория автоматического управления, где, наряду с простыми классическими методами, появляются новые абстрактные методы, позволяющие решать более сложные задачи исследования замкнутых многомерных систем управления.

Начало систематического использования методов пространства состояний обычно связывают с работами Л.С. Понтрягина – по математической теории оптимальных процессов, Р. Беллмана – по динамическому программированию и Р. Калмана – по общей теории фильтрации и управления.

К преимуществам методов пространства состояний общепринято относить: одинаковую формулировку различных задач и простоту их решения при наличии большого числа переменных;

возможность обнаружения и исследования таких свойств систем, которые при использовании классических подходов в терминах "вход-выход" остались бы недоступными;

возможность анализа и синтеза нестационарных и нелинейных динамических систем;

использование векторно-матричной формы представления для описания исследовательских задач, имеющей неоспоримое преимущество при их численном решении на ПЭВМ.

Основной недостаток методов пространства состояний заключается в том, что переменные состояния сохраняют ясный физический смысл только тогда, когда они наблюдаемы и могут быть измерены или когда переменные состояния совпадают с фазовыми

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t), \dot{x}_2(t) = dx_1(t)/dt, \dots, \dot{x}_n(t) = dx_{n-1}(t)/dt.$$

В противном случае, если выбор переменных состояния определяется иным образом, связь математической модели с физической реальностью теряется и, как следствие, исчезает возможность корректного сопоставления расчетных и экспериментальных данных.

2.1.1. Вход, состояние и выход

Динамика системы описывается ее математической моделью, аналитически отражающей зависимости между тремя множествами переменных: переменными входа $u(t) \in R^m$, выхода $y(t) \in R^l$ и состояния $x(t) \in R^n$, где R^i – i -мерное линейное вещественное пространство.

Вход системы, выраженный множеством временных функций, представляет описание внешних переменных, действующих на систему. *Выход системы*, выраженный аналогично, – это описание наблюдаемых выходных переменных, непосредственно отражающих поведение системы.

Как уже отмечалось в главе 1, любая система состоит из набора подсистем или элементов (звеньев), которые по характеру реакции на входное воздействие делятся на статические и динамические.

Отличительной особенностью статической системы является ее безынерционность, т.е. наличие мгновенной реакции на входное воздействие, никак не связанное с ее предыдущим положением. В любой момент времени t_0 значение выхода статической системы $y(t_0)$ однозначно определяется по значению входа $u(t_0)$, а сама связь (стационарная или нестационарная) *статическая характеристика* – описывается одним из уравнений:

$$\begin{aligned}y &= F(u), \\y &= F(u, t).\end{aligned}$$

Важнейшее свойство любой динамической системы – это зависимость ее реакции как от переменных, действующих на систему в данный момент, так и от переменных, действовавших на нее в прошлом. Отметим, что для определения в момент времени t_1 значения выхода $y(t_1)$ информации только о значении входа $u(t_1)$ недостаточно, поскольку требуются еще сведения о предыстории изменения $u(t)$ на некотором интервале $t \in [t_0, t_1]$ и начальном состоянии $x(t_0)$. Такую зависимость будем описывать следующим образом:

$$y(t_1) = S(x(t_0), u(t)), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (2.1)$$

где S – оператор преобразования одной функции в другую.

Таким образом, состояние динамической системы – это некий параметр, однозначно определяющий реакцию выхода системы относительно входа. Состояние системы должно удовлетворять так называемым *аксиомам совместности*. Укажем две наиболее важные.

Первая аксиома совместности. Для определения будущего поведения системы не играет роли то, каким образом она пришла в данное состояние, поскольку траектория движения системы определяется однозначно по начальному состоянию и динамике входа в рассматриваемом интервале времени.

Выход $y(t)$, $\forall t \geq t_0$, определяется однозначно для $x(t_0)$ и $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$.

Вторая аксиома совместности. Если траекторию движения системы разбить на участки, то каждый из них можно рассматривать как новую траекторию с соответствующим начальным условием. При этом в зависимости от входного процесса и начального состояния динамика системы будет изменяться соответствующим образом.

Пусть $t_0 < t_1 < t_2$, тогда при любом $x(t_0)$ и $\forall t \in [t_0, t_1]$ выход $y(t_1)$ будет определяться уравнением (2.1). Если же вычислить значение $x(t_1)$, то выход $y(t_2)$ будет следующим:

$$y(t_2) = S(x(t_1), u(t)), \quad t \in [t_1, t_2].$$

2.1.2. Пространство состояний

Переменные динамической системы показаны на рис. 2.1, где переменные $u = u(t)$ и $y = y(t)$ называют соответственно входными и выходными.

Множество $X = \{x\}$ возможных значений состояния системы называется *пространством состояний*.

В случае $X = R^n$ состояние $x = x(t)$ есть n -мерный вещественный вектор – *вектор состояния* (в частном случае – это *фазовый вектор*), элементы которого будем обозначать через $x_i(t), i = \overline{1, n}$.

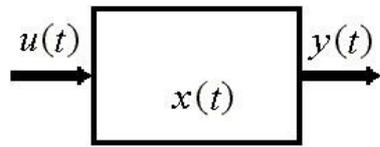


Рис. 2.1. Переменные динамической системы.

Вектор, составленный из указанных элементов, обычно записывают следующим образом:

$$\underline{x} = x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T,$$

где T – символ транспонирования.

Если x – состояние системы, $\mu(\cdot)$ – некоторое взаимно однозначное отображение пространства X в себя ($\mu : X \rightarrow X$), то $\underline{X} = \mu(x)$ также можно считать состоянием данной системы. Тогда состояние x можно определить различным, но взаимно однозначным образом.

Например, если $X = R^n$, а T – n -мерная невырожденная матрица ($\det T \neq 0$), то вектор $\underline{X} = Tx$ также можно применять для описания состояния системы, поскольку $x = T^{-1}\underline{X}$, где T^{-1} – обратная матрица.

2.2. Описание динамической системы в нормальной форме

Уравнения состояния так называемых *конечномерных дифференциальных (непрерывных) систем* можно представить в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \quad (2.2)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t), \quad (2.3)$$

где $f(\cdot), g(\cdot)$ – вектор-функции от векторных аргументов.

Уравнение (2.2) называют *уравнением состояния* (*эволюционным уравнением*), описывающим изменение состояния системы во времени $t \in R$, в соответствии с начальным условием $x(t_0)$ и входным воздействием $u(t)$, а уравнение (1.3) – уравнением выхода, устанавливающим статическую связь между значениями выхода и текущими значениями состояния и входа.

2.2.1. Уравнения линейных систем в пространстве состояний

Метод пространства состояний в качестве базовой математической модели системы (2.2), (2.3), когда функции $f(\cdot), g(\cdot)$ линейны по x, u , предполагает использование уравнений вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \quad (2.4)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \quad (2.5)$$

где $x(t) \in R^n$; $u(t) \in R^m$; $y(t) \in R^k$; матрицы-функции $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ соответствующего размера.

В теории автоматического управления матрицы, входящие в уравнения (2.4), (2.5), обычно называют: $A(t)$ – матрицей состояния системы; $B(t)$ – матрицей управления; $C(t)$ – матрицей выхода; $D(t)$ – матрицей обхода системы.

Системы (2.4), (2.5) называются *непрерывными линейными системами*, в которых матрицы $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ имеют следующую структуру:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \dots & b_{1m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \dots & b_{nm}(t) \end{pmatrix}, \quad m \leq n, \quad (2.7)$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \dots & c_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{l1}(t) & c_{l2}(t) & \dots & c_{ln}(t) \end{pmatrix}, \quad l \leq n. \quad (2.8)$$

В случае, когда матрица $D(t) \equiv 0$, систему (2.4), (2.5) называют *собственной*² (строго реализуемой), а при $D(t) \neq 0$ – *несобственной*.

Систему (2.4), (2.5) с матрицами $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ называют *нестационарной*, если же элементы этих матриц от времени не зависят, то система – *стационарная*.

Структура стационарной линейной системы представлена на рис. 2.2, для которой (например, при $n > m$), математическое описание будет следующим:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \quad (2.9)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad D = 0. \quad (2.10)$$

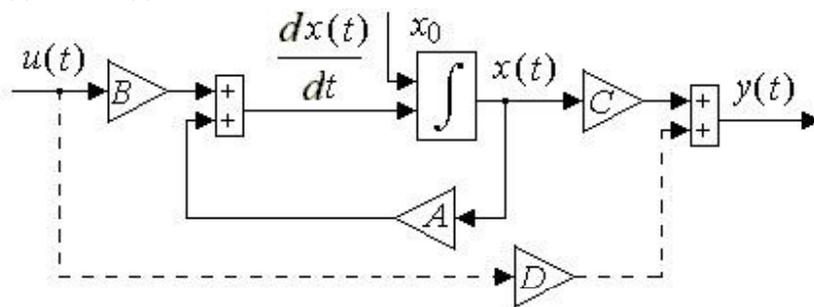


Рис. 2.2. Структурная схема стационарной динамической системы.

Системы (2.4), (2.5) и (2.9), (2.10) часто называют *нормальными системами*, или *системами в нормальной форме Коши*. В тех случаях, когда в системе (2.9), (2.10) переменные состояний совпадают с фазовыми, матрица A имеет специфическую форму записи – *форму Фробениуса*, представляемую в виде

² Такой тип систем в прикладных задачах является наиболее распространенным.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

где $a_i = \text{const} > 0$. Для матрицы Фробениуса характерно следующее: элементы над главной диагональю равны единице, а элементы нижней строки являются коэффициентами однородного дифференциального уравнения n -го порядка

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx(t)}{dt} + a_n x(t) = 0. \quad (2.12)$$

Иногда матрицу Фробениуса называют *матрицей сопровождения*.

2.2.2. Способы программирования в переменных состояния

Наиболее распространенными приемами построения моделей динамических систем в переменных состояния являются приемы, основанные на *способах прямого, параллельного или последовательного программирования*. Поскольку исходное математическое описание системы в этих способах программирования – передаточная функция, выберем описание динамической системы, например, в следующем виде:

$$x(s) = W(s)u(s) = \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} u(s). \quad (2.13)$$

2.2.2.1. Прямое программирование относится к наиболее общим подходам, позволяющим осуществить переход в пространство состояний без каких-либо предварительных условий. Этапы прямого программирования предусматривают последовательное выполнение следующих типовых действий или процедур:

во-первых, числитель и знаменатель функции $W(s)$ вида (2.13) разделим на выражение $a_0 s^3$, соответствующее слагаемому с максимальной степенью s в знаменателе, в результате получим уравнение

$$x(s) = \frac{\frac{b_0}{a_0} s^{-1} + \frac{b_1}{a_0} s^{-2} + \frac{b_2}{a_0} s^{-3}}{1 + \frac{a_1}{a_0} s^{-1} + \frac{a_2}{a_0} s^{-2} + \frac{a_3}{a_0} s^{-3}} u(s); \quad (2.14)$$

во-вторых, введем обозначение

$$E(s) = \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0} s^{-1} + \frac{a_2}{a_0} s^{-2} + \frac{a_3}{a_0} s^{-3}} u(s); \quad (2.15)$$

в-третьих, перепишем уравнение (2.15) следующим образом:

$$E(s) = u(s) - \frac{a_1}{a_0} s^{-1} E(s) - \frac{a_2}{a_0} s^{-2} E(s) - \frac{a_3}{a_0} s^{-3} E(s); \quad (2.16)$$

в-четвертых, учитывая соотношение (2.15), а также вводя обозначение

выхода $y(s) = x(s)$, представим уравнение (2.14) в виде

$$y(s) = x(s) = \frac{b_0}{a_0} s^{-1} E(s) + \frac{b_1}{a_0} s^{-2} E(s) + \frac{b_2}{a_0} s^{-3} E(s); \quad (2.17)$$

в-пятых, введем в рассмотрение переменные состояния, которые в изображениях зададим следующим образом:

$$x_1(s) = s^{-3} E(s), \quad (2.18)$$

$$x_2(s) = s^{-2} E(s), \quad (2.19)$$

$$x_3(s) = s^{-1} E(s); \quad (2.20)$$

в-шестых, запишем совместно уравнения (2.15) – (2.18). Подстановка соотношений (2.19) в (2.18) и (2.20) в (2.19), позволяет записать уравнения

$$x_1(s) = s^{-1} x_2(s), \quad x_2(s) = s^{-1} x_3(s). \quad (2.21)$$

Кроме того, подстановка $E(s)$ вида (2.16) в соотношение (2.17), с учетом обозначений (2.18) – (2.20), позволяет записать равенство

$$y(s) = \frac{b_0}{a_0} x_1(s) + \frac{b_1}{a_0} x_2 + \frac{b_2}{a_0} x_3(s). \quad (2.22)$$

Аналогичные действия, выполненные для выражения (2.20), приводят к следующему уравнению

$$x_3(s) = s^{-1} \left(u(s) - \frac{a_1}{a_0} x_3(s) - \frac{a_2}{a_0} x_2(s) - \frac{a_3}{a_0} x_1(s) \right). \quad (2.23)$$

Объединяя уравнения (2.20) – (2.23), окончательно получаем

$$sx_1(s) = x_2(s),$$

$$sx_2(s) = x_3(s),$$

$$sx_3(s) = -\frac{a_3}{a_0} x_1(s) - \frac{a_2}{a_0} x_2(s) - \frac{a_1}{a_0} x_3(s) + u(s), \quad (2.24)$$

$$y(s) = \frac{b_0}{a_0} x_1(s) + \frac{b_1}{a_0} x_2(s) + \frac{b_2}{a_0} x_3(s),$$

где первые три уравнения – уравнения состояний системы, а последнее – уравнение ее выхода.

Уравнения (2.24), записанные в изображениях, можно переписать относительно оригиналов следующим образом:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t),$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t),$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = -\frac{a_3}{a_0} x_1(t) - \frac{a_2}{a_0} x_2(t) - \frac{a_1}{a_0} x_3(t) + u(t), \quad (2.25)$$

$$y(t) = \frac{b_0}{a_0} x_1(t) + \frac{b_1}{a_0} x_2(t) + \frac{b_2}{a_0} x_3(t),$$

т.е. в виде, который полностью идентичен уравнениям нормальной системы

(2.9), (2.10), полагая, что имеют место соотношения

$$x^T(t) = (x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t)),$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_3}{a_0} & -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_1}{a_0} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ a_0 & a_0 & a_0 \end{pmatrix}, D = 0. \quad (2.26)$$

Приведем числовой пример. Пусть в исходной передаточной функции $W(s)$ вида (2.13) коэффициенты имеют значения:

$$b_0 = 1, b_1 = 7, b_2 = 12, a_0 = 1; a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 0, \quad (2.27)$$

тогда в системе (2.9), (2.10) матрицы и векторы будут следующими:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (12 \quad 7 \quad 1), D = 0. \quad (2.28)$$

Для динамической системы (2.25) – (2.27) или в нормальной форме системы (2.9), (2.10), (2.28) можно построить структурную схему в пространстве состояний, показанную на рис. 2.3.

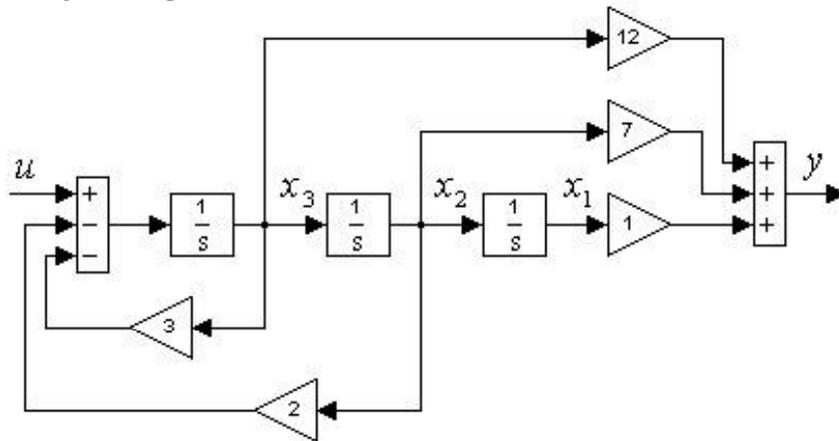


Рис. 2.3. Структурная схема динамической системы (2.25) – (2.27).

2.2.2.2. Параллельное программирование используется тогда, когда полюса передаточной функции $W(s)$, т.е. корни знаменателя, будут вещественными и рациональными, что допускает представление $W(s)$ в виде суммы дробно-рациональных функций. Данный способ программирования рассмотрим на числовом примере. Пусть аналогично системе (2.13), (2.27) исследуемая система описывается уравнением

$$x(s) = \frac{s^2 + 7s + 12}{s^3 + 3s^2 + 2s} u(s). \quad (2.29)$$

Параллельное программирование предусматривает выполнение определенной последовательности действий:

во-первых, учитывая явный вид $W(s)$, выражение (2.29) перепишем следующим образом:

$$x(s) = \frac{s^2 + 7s + 12}{s^3 + 3s^2 + 2s} u(s) = \frac{s^2 + 7s + 12}{s(s+1)(s+2)} u(s) =$$

$$= \left(\frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \frac{\alpha_3}{s+2} \right) u(s), \quad (2.30)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – неопределенные множители;

во-вторых, используя тождество

$$\alpha_1(s+1)(s+2) + \alpha_2s(s+2) + \alpha_3s(s+1) = s^2 + 7s + 12,$$

запишем систему линейных уравнений относительно его коэффициентов

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \quad 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 7, \quad 2\alpha_1 = 12,$$

решение которой будет иметь вид

$$\alpha_1 = 6, \quad \alpha_2 = -6, \quad \alpha_3 = 1; \quad (2.31)$$

в-третьих, учитывая (2.31), а также переобозначение $y(s) = x(s)$, перепишем уравнение (2.30) следующим образом:

$$y(s) = \left(\frac{1}{s} \cdot 6 + \frac{1}{s+1} \cdot (-6) + \frac{1}{s+2} \cdot 1 \right) u(s); \quad (2.32)$$

в-четвертых, введем в рассмотрение переменные состояния

$$x_1(s) = \frac{1}{s} u(s), \quad x_2 = \frac{1}{s+1} u(s), \quad x_3(s) = \frac{1}{s+2} u(s), \quad (2.33)$$

уравнения которых в эквивалентном виде будут иметь вид

$$sx_1(s) = u(s),$$

$$sx_2(s) = -x_2(s) + u(s), \quad (2.34)$$

$$sx_3(s) = -2x_3(s) + u(s),$$

а также, учитывая явный вид переменных состояния (2.33), перепишем уравнение (2.32) следующим образом:

$$y(s) = 6x_1(s) - 6x_2(s) + x_3(s). \quad (2.35)$$

Уравнения состояния (2.34) и уравнение выхода (2.35) можно записать и в оригиналах, т.е. в виде системы уравнений

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = u(t), \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_2(t) + u(t), \quad \frac{dx_3(t)}{dt} = -2x_3(t) + u(t), \quad (2.36)$$

$$y(t) = 6x_1(t) - 6x_2(t) + x_3(t),$$

которой в векторно-матричной форме (2.9), (2.10) соответствуют следующие матрицы и векторы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (6 \quad -6 \quad 1), \quad D = 0. \quad (2.37)$$

Структурная схема динамической системы (2.36) или (2.9), (2.10), (2.37) показана на рис. 2.4.

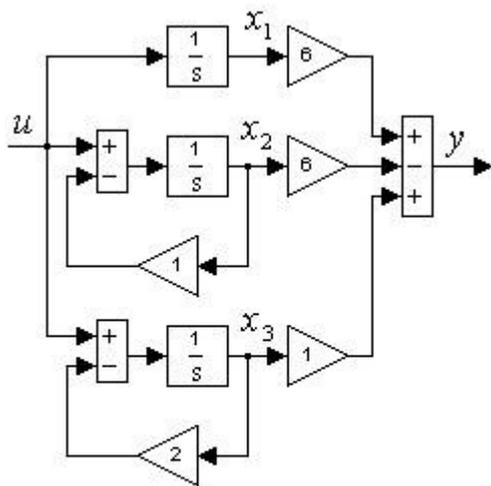


Рис. 2.4. Структурная схема системы (2.36).

2.2.2.3. Последовательное программирование применяется в тех случаях, когда может быть выполнено условие – $W(s)$ исследуемой системы допускает представление в виде произведения дробно-рациональных функций, иначе говоря, как полюса, так и нули $W(s)$ должны быть вещественными и рациональными.

Применение способа параллельного программирования, как и в предыдущем случае параллельного программирования, рассмотрим на примере выражения (2.29).

Этапы осуществления последовательного программирования следующие:

во-первых, уравнение (2.29) перепишем в виде

$$x(s) = \frac{s^2 + 7s + 12}{s^3 + 3s^2 + 2s} u(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{(s+3)}{(s+1)} \cdot \frac{(s+4)}{(s+2)} u(s); \quad (2.38)$$

во-вторых, введем в рассмотрение дополнительные переменные $u_1(s)$, $E_1(s)$ и переменную состояния $x_1(s)$, задавая уравнения

$$u_1(s) = \frac{1}{s} \frac{(s+3)}{(s+1)} u(s), \quad E_1(s) = \frac{1}{1+2s^{-1}} u_1(s), \quad x_1(s) = s^{-1} E_1(s), \quad (2.39)$$

что позволяет первую переменную состояния $x_1(s)$ описать в виде

$$x_1(s) = \frac{s^{-1}}{1+2s^{-1}} u_1(s) = \frac{1}{s+2} u_1(s)$$

или следующим образом:

$$sx_1(s) = -2x_1(s) + u_1(s); \quad (2.40)$$

в-третьих, подобно предыдущему, рассмотрим переменные вида

$$u_2(s) = \frac{1}{s} u(s), \quad E_2(s) = \frac{1}{1+s^{-1}} u_2(s), \quad x_2(s) = s^{-1} E_2(s), \quad (2.41)$$

что позволяет преобразовать выражение $u_1(s)$ из (2.39) и получить соотношение

$$u_1(s) = \frac{s+3}{s+1} u_2(s) = (1+3s^{-1}) E_2(s) = u_2(s) + 2x_2(s), \quad (2.42)$$

а также записать следующее уравнение для второй переменной состояния:

$$sx_2(s) = -x_2(s) + u_2(s); \quad (2.43)$$

в-четвертых, аналогично двум предыдущим этапам введем в рассмотрение переменные вида

$$E_3(s) = u(s), \quad x_3(s) = s^{-1} E_3(s), \quad (2.44)$$

тогда выражение для $u_2(s)$ из (2.41) получит вид

$$u_2(s) = \frac{1}{s} E_3(s) = x_3(s), \quad (2.45)$$

а третье уравнение состояния будет следующим:

$$sx_3(s) = u(s); \quad (2.46)$$

в-пятых, в результате подстановки уравнений (2.45) в (2.43) и (2.45) в (2.42), а затем (2.42) в (2.40) получаем систему уравнений состояния в виде:

$$\begin{aligned} sx_1(s) &= -2x_1(s) + 2x_2(s) + x_3(s), \\ sx_2(s) &= -x_2(s) + x_3(s), \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$sx_3(s) = u(s);$$

в-шестых, обозначая выход $y(s) = x(s)$ и выполняя подстановку выражения (2.39) в (2.38), получаем

$$y(s) = (1 + 4s^{-1})E_1(s) = E_1(s) + 4x_1(s) = u_1(s) + 2x_1(s),$$

а также учитывая явный вид функций $u_1(s)$ и $u_2(s)$ согласно равенствами (2.42) и (2.45), окончательно уравнение выхода $y(s)$ запишем в виде

$$y(s) = 2x_1(s) + 2x_2(s) + x_3(s). \quad (2.48)$$

В оригиналах система уравнений (2.47), (2.48) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -2x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -x_2(t) + x_3(t), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= u(t), \quad y(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t), \end{aligned} \quad (2.49)$$

которому в векторно-матричной форме записи (2.9), (2.10) соответствуют следующие матрица и векторы:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (2 \quad 2 \quad 1), \quad D = 0. \quad (2.50)$$

Структурная схема динамической системы (2.49) или (2.9), (2.10), (2.50) показана на рис. 2.5.

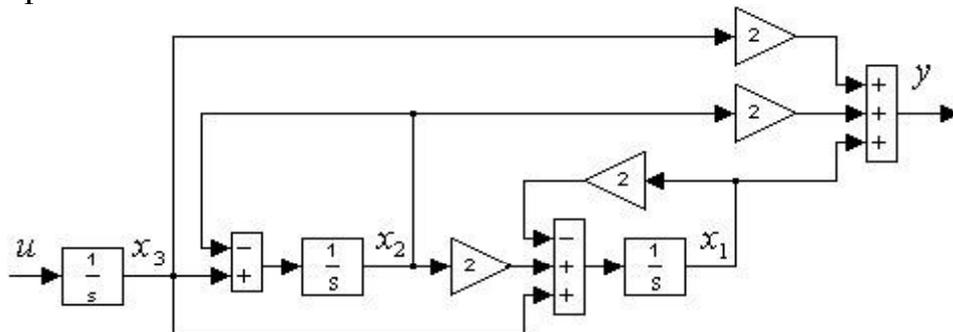


Рис. 2.5. Структурная схема динамической системы (2.49).

Кроме приведенных выше способов программирования, построение модели систем в переменных состояния можно осуществлять и по другим методикам.

В частности, структура исследуемой системы может задана. Например, хорошо известно, что при последовательном соединении элементов их передаточные функции перемножаются, а при параллельном – суммируются. Поэтому для

системы

$$x(s) = \left(\frac{1}{s} \cdot \frac{(s+3)}{(s+1)} \cdot \frac{(s+4)}{(s+2)} + \frac{1}{s+3} \right) u(s), \quad (2.51)$$

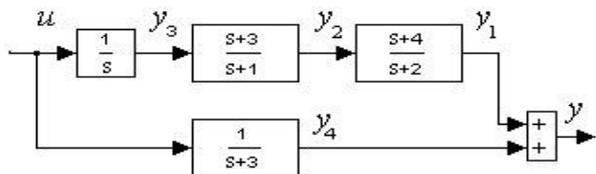


Рис. 2.6. Структурная схема.

которой соответствует структурная схема, изображенная на рис. 2.6, можно вначале любым из способов выполнить построение моделей в пространстве состояний для каждого из четырех элементов, а затем, исключая промежуточные переменные, записать уравнение модели в переменных состояния для всей системы.

2.2.2.4. Программирование по структурной схеме удастся осуществить тогда, когда в уравнении (2.51) можно выделить элементы, описываемые следующим образом:

$$\begin{aligned} y_1(s) &= W_1(s)y_2(s) = \frac{s+4}{s+2}y_2(s), \\ y_2(s) &= W_2(s)y_3(s) = \frac{s+3}{s+1}y_3(s), \\ y_3(s) &= W_3(s)u(s) = \frac{1}{s}u(s), \quad y_4(s) = W_4(s)u(s) = \frac{1}{s+3}u(s). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Для каждой $W(s)$ из (2.52), – например, с помощью прямого программирования – построим модели в пространстве состояний, структурные схемы которых показаны на рис. 2.7.

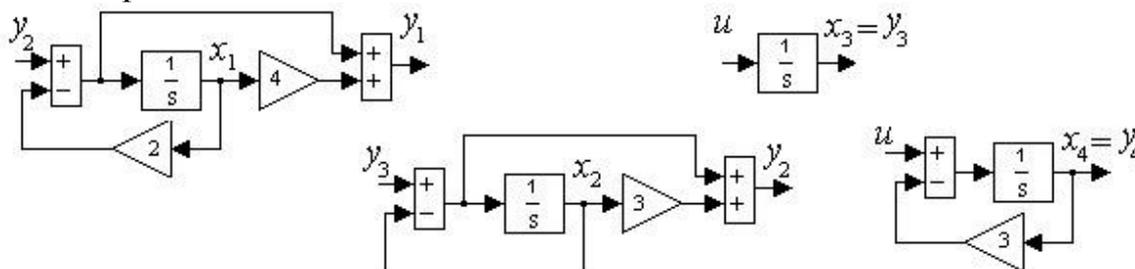


Рис. 2.7. Модели элементов системы (2.52) в пространстве состояний.

Модели элементов динамической системы (2.51) в пространстве состояний, в соответствии с выражениями (2.52), имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -2x_1(t) + y_2(t), \quad y_1(t) = 2x_1(t) + y_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -x_2(t) + y_3(t), \quad y_2(t) = 2x_2(t) + y_3(t), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= u(t), \quad y_3(t) = x_3(t), \\ \frac{dx_4(t)}{dt} &= -3x_4(t) + u(t), \quad y_4(t) = x_4(t). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Структурная схема динамической системы (2.53), в соответствии с моделями вида (2.52) и структурами на рис. 2.6 и рис. 2.7, изображена на рис. 2.8.

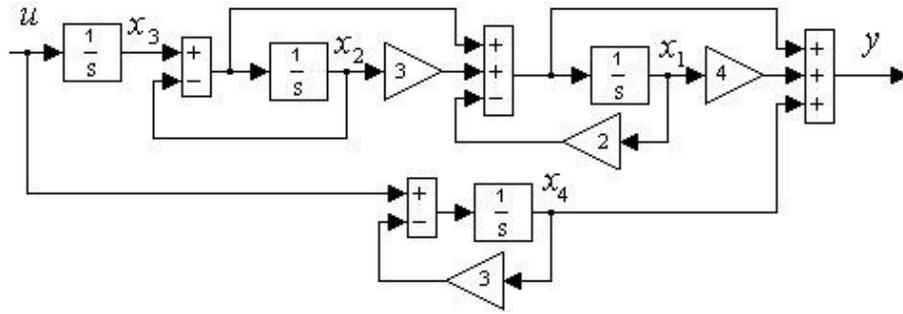


Рис. 2.8. Модель системы (2.53), (2.54).

Исключая в уравнениях (2.53) промежуточные переменные y_1, y_2, y_3, y_4 , а также учитывая равенство $y = y_1 + y_4$, модель системы (2.51) в пространстве состояний можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -2x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -x_2(t) + x_3(t), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= u(t), \\ \frac{dx_4(t)}{dt} &= -3x_4(t) + u(t), \quad y(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) + x_4(t). \end{aligned} \tag{2.54}$$

Векторно-матричная форма представления уравнений (2.54) в виде (2.9), (2.10) имеет место при следующих матрице и векторах:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (2 \quad 2 \quad 1 \quad 1), \quad D = 0. \tag{2.55}$$

2.2.3. Примеры уравнений состояния систем

Рассмотрим несколько моделей линейных систем в пространстве состояний, опираясь на классические модели приведенные в приложении 1.

Манипулятор. С помощью прямого программирования модель манипулятора вида (П.1.15)¹ можно описать в пространстве состояний уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t), \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = -k_1x_1(t) - k_2x_2(t) + u(t), \\ y(t) &= k_3x_1(t) + k_4x_2(t), \quad k_1 = \frac{1}{T_1}, \quad k_2 = \frac{T_2}{T_1}, \quad k_3 = \frac{K}{T_1}, \quad k_4 = \frac{KT_3}{T_1}, \end{aligned} \tag{2.56}$$

а также представить в виде структурной схемы (рис. 2.9). В форме (2.9), (2.10) этим уравнениям соответствуют

¹ Ссылка на соответствующую формулу приложения 1.

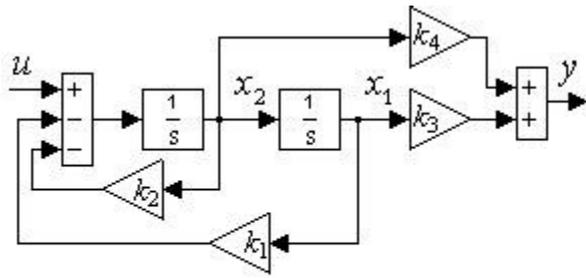


Рис. 2.9. Модель манипулятора (2.56) в пространстве состояний.

двух звеньев с выходом $y(s) = y_1(s) + y_2(s)$, запишем уравнения переменных $y_1(s)$ и $y_2(s)$ следующим образом:

$$y_1(s) = W_1(s)u(s) = \frac{k_4}{s + k_3}u_1(s), \quad y_2(s) = W_2(s)u(s) = \frac{k_5}{s + k_3}u_2(s), \quad (2.58)$$

$$k_3 = \frac{1}{T_0}, \quad k_4 = \frac{K_1}{T_0}, \quad k_5 = \frac{K_2}{T_0}.$$

Уравнения (2.58) в переменных состояния можно переписать в вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -k_3x_1(t) + u_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -k_3x_2(t) + u_2(t), \\ y(t) &= k_4x_1(t) + k_5x_2(t). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Структурную модель системы (2.59) в пространстве состояний можно изобразить в виде схемы, показанной на рис. 2.10. Если же систему уравнений (2.59) представить в векторно-матричном виде (2.9), (2.10), то соответствующие векторы и матрицы можно описать следующим образом:

$$\begin{aligned} x^T &= (x_1 \quad x_2), \quad u^T = (u_1 \quad u_2), \\ A &= \begin{pmatrix} -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = (k_4 \quad k_5), \quad D = 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Гидравлический сервомотор. Используя способ прямого программирования, уравнение гидромотора в переменных состояния будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t), \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= -k_2x_2(t) - k_3x_3(t) + u(t), \quad y(t) = k_1x_1(t), \\ k_1 &= \frac{K}{T^2}, \quad k_2 = \frac{1}{T^2}, \quad k_3 = \frac{2\zeta}{T}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

Структурная схема динамической системы (2.61) показана на рис. 2.11.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ C &= (k_3 \quad k_4), \\ D &= 0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Ресивер. С помощью способа программирования по структурной схеме, учитывая, что уравнение ресивера (П.1.43) соответствует параллельное соединение

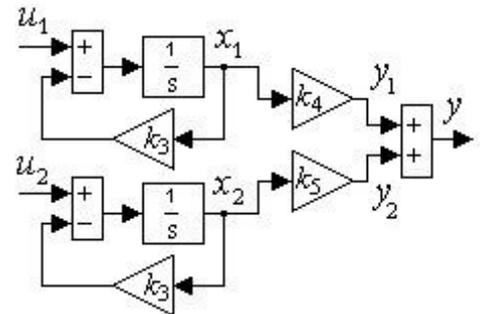


Рис. 2.10. Модель ресивера (2.59) в пространстве состояний.

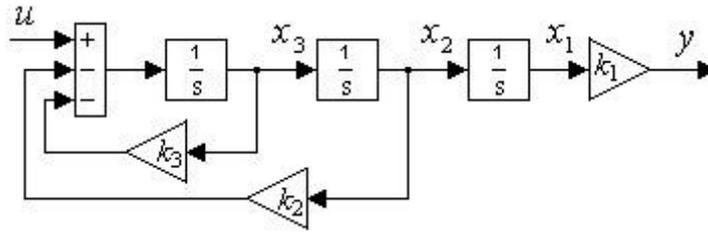


Рис. 2.11. Модель гидромотора (2.61) в пространстве состояний.

Векторно-матричная форма записи системы (2.61) в виде уравнений (2.9), (2.10) имеет следующие матрицу и векторы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k_2 & -k_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (k_1 \ 0 \ 0), \quad D = 0. \quad (2.62)$$

Длинный бьеф. С помощью способа прямого программирования длинный бьеф вида (П.1.65) можно описать в пространстве состояний уравнениями

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -k_2 x_2(t) + u(t - \tau), \quad y(t) = k_3 x_1(t) + k_4 u(t - \tau), \quad (2.63)$$

$$k_2 = \frac{1}{T_1}, \quad k_3 = \left(\frac{K_1}{T_1} - \frac{L_1}{T_1^2} \right), \quad k_4 = \frac{L_1}{T_1}.$$

Поскольку дифференциальное уравнение (2.63) – первого порядка, то ее векторно-матричная форма записи вида (2.9), (2.10) также будет скалярной, т.е. матрицы и векторы – скалярные величины, принимающие следующие значения:

$$A = -k_2, \quad B = 1, \quad C = k_3, \quad D = k_4. \quad (2.64)$$

В выражении (2.64) в отличие, например, от соотношений (2.57), (2.60) или (2.62), матрица обхода системы $D \neq 0$, что объясняется равенством порядка числителя и знаменателя передаточной функции из (1.98).

Структурную модель системы (2.63) или (2.9), (2.10), (2.64) в пространстве состояний можно представить в виде схемы, приведенной на рис. 2.12.

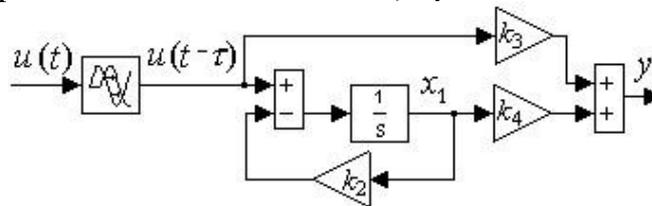


Рис. 2.12. Модель длинного бьефа (2.63) в пространстве состояний.

2.2.4. Передаточные функции нормальных систем

Рассмотрим модель нормальной системы в пространстве состояний

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.65)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2.66)$$

где $x(t) \in R^n$; $u(t) \in R^m$; $y(t) \in R^l$. Перепишем уравнения системы (2.65), (2.66) в изображениях с помощью векторно-матричной передаточной функции системы. С

этой целью выполним преобразование Лапласа над уравнениями (2.65) и определим изображение вектора состояний $x(s)$ в виде

$$x(s) = (sE - A)^{-1} Bu(s) = \frac{(sE - A)^+}{\det(sE - A)} Bu(s), \quad (2.67)$$

где $(sE - A)^{-1}$ – обратная матрица; $\det(sE - A)$ – детерминант матрицы; $(sE - A)^+$ – присоединенная¹ матрица к матрице $(sE - A)$; E – единичная матрица соответствующего размера, в данном случае $(n \times n)$. Если соотношение (2.66) записать в изображениях, куда затем подставить $x(s)$ из (2.67), то получим равенство

$$y(s) = (C(sE - A)^{-1} B + D) u(s) = W(s) u(s), \quad (2.68)$$

где $W(s)$ – передаточная функция в виде матричного множителя, связывающего изображения по Лапласу выхода $y(s)$ и входа $u(s)$ при $x(0) = 0$.

В строго реализуемых системах функция $W(s)$ имеет вид

$$W(s) = C(sE - A)^{-1} B. \quad (2.69)$$

Размер матрицы $W(s)$ определяется размерностями выхода $y(s)$ и входа $u(s)$, в рассматриваемом случае $(l \times m)$. При $l = m = 1$ функция $W(s)$ будет скалярной, но в общем случае $W(s)$ – это матричная функция с элементами $W_{ij}(s)$, т.к. выражение (2.68) можно представить соотношением

$$\begin{pmatrix} y_1(s) \\ \dots \\ y_l(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11}(s) & \dots & W_{1m}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{l1}(s) & \dots & W_{lm}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(s) \\ \dots \\ u_m(s) \end{pmatrix}.$$

2.2.5. Уравнения состояний при типовом соединении систем

В ряде прикладных задач возникает необходимость в получении математического описания системы в пространстве состояний, состоящей из элементов (подсистем), соединенных между собой типовым образом – параллельно, последовательно или с помощью обратной связи.

Объединение независимых систем. Рассмотрим простой случай, когда некоторая объединенная система S состоит из независимых систем S_i , $i = 1, 2$, описываемых уравнениями

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = A_i x_i(t) + B_i u_i(t), \quad y_i(t) = C_i x_i(t), \quad (2.70)$$

где матрицы A_i , B_i , C_i имеют соответственно размеры $(n_i \times n_i)$, $(n_i \times n_i)$, $(l_i \times m_i)$.

Введем в рассмотрение составные (обобщенные) векторы: для переменных состояния системы $x(t) = \text{col}\{x_1(t), x_2(t)\} \in R^{n_1+n_2}$, для переменных входа $u(t) = \text{col}\{u_1(t), u_2(t)\} \in R^{m_1+m_2}$, переменных выхода $y(t) = \text{col}\{y_1(t), y_2(t)\} \in R^{l_1+l_2}$.

Графический образ объединения систем S_i в одну показан на рис. 2.13, математическое описание которого представляет собой систему уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad (2.71)$$

¹ По определению это транспонированная матрица алгебраических дополнений.

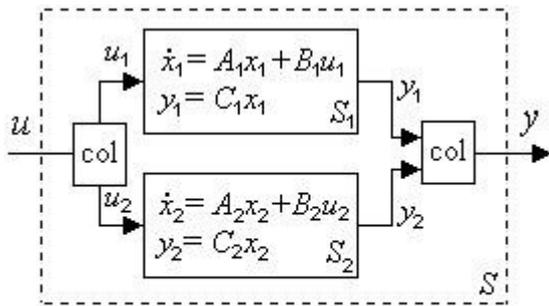


Рис. 2.13. Модель объединения независимых систем (2.70).

где блочные матрицы A, B, C имеют следующую структуру:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}.$$

Параллельное соединение систем (подсистем). Отличие объединения двух независимых систем от параллельного соединения двух подсистем состоит в том, что в последнем случае вход $u(t) = u_1(t) = u_2(t)$ поступает на обе подсистемы, а выход этого соединения образуется как сумма $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ (рис. 2.14).

Вектор состояния $x(t)$ остается составным и имеет вид

$$x(t) = \text{col} \{x_1(t), x_2(t)\} \in R^{n_1+n_2}.$$

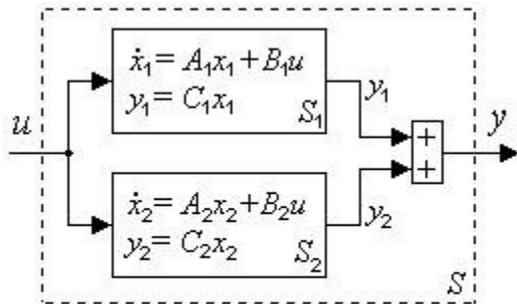


Рис. 2.14. Модель параллельного соединения двух систем.

Математическое описание системы S , образованной параллельным соединением нескольких систем S_i , имеет по-прежнему вид (2.71), где матрицы A, B, C блочные, вида

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad C = (C_1 \quad C_2).$$

Последовательное соединение подсистем, (рис. 2.15), где входом системы S является вход подсистемы S_1 , $u(t) = u_1(t)$, а выход системы S формируется выходом второй подсистемы S_2 , $y(t) = y_2(t)$.

При этом выход первой подсистемы является входом второй, $u_2(t) = y_1(t)$, поскольку их размерности совпадают. Описывая систему, представленную на рис. 2.15 уравнениями (2.71), получаем следующие блочные матрицы

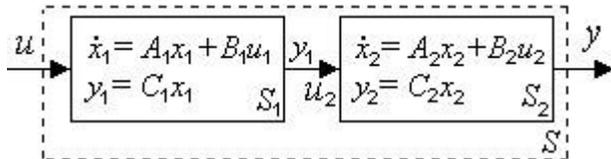


Рис. 2.15. Последовательное соединение двух подсистем.

уравнениями (2.71), получаем следующие блочные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \quad C_2).$$

Соединение подсистем с обратной связью, (рис. 2.16), где выход подсистемы S_2 , вычитаясь из входа всей системы S , поступает на вход подсистемы S_1 , т.е. $u_1(t) = u(t) - y_2(t)$, $u_2(t) = y_1(t)$, что позволяет в математическом описании (2.71), см. рис. 2.16, получить блочные матрицы вида

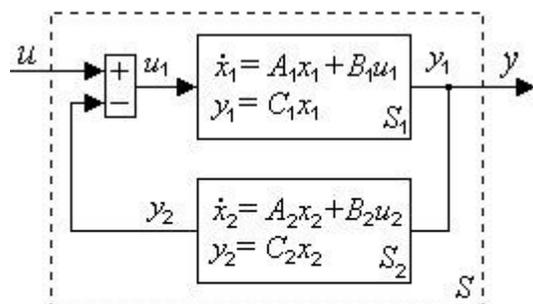


Рис. 2.16. Соединение подсистем с обратной связью.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (C_1 \quad 0).$$

3. ВИЗУАЛЬНОЕ ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

SIMULINK – это одно из приложений к пакету MATLAB, представляющее собой самостоятельную программную среду, применение которой не требует знания базового пакета. При этом доступ к функциям и инструментам MATLAB остается открытым и их можно использовать при SIMULINK-моделировании.

3.1. Simulink-моделирование

SIMULINK основан на принципе визуального программирования и работает с графическими образами (блоками), что позволяет на их основе создавать на экране модель устройства, а затем осуществлять требуемые расчеты. С помощью операции “drag-and-drop” (перетаскивание) блок переносится из библиотеки в окно-модель, где создается его копия со значениями параметров, заданными по умолчанию, которые могут быть изменены. В состав библиотек блоков среды SIMULINK входит основная библиотека (одноименная) и ряд дополнительных библиотек. При моделировании можно выбирать метод решения дифференциальных уравнений, а также способ изменения модельного времени (с фиксированным или переменным шагом). В ходе моделирования имеется возможность следить за процессами, происходящими в системе. Для этого используются специальные устройства наблюдения, входящие в состав библиотеки SIMULINK. Результаты моделирования могут быть представлены в виде графиков или таблиц. Наличие в SIMULINK непрерывных и дискретных блоков и возможность их одновременного использования позволяет моделировать гибридные (дискретно-непрерывные) системы. Для запуска среды визуального моделирования SIMULINK необходимо предварительно запустить пакет MATLAB, а затем либо нажать кнопку на панели инструментов главного окна MATLAB (рис. 3.1), либо в его командной строке набрать команду `Simulink` и нажать клавишу `Enter`.

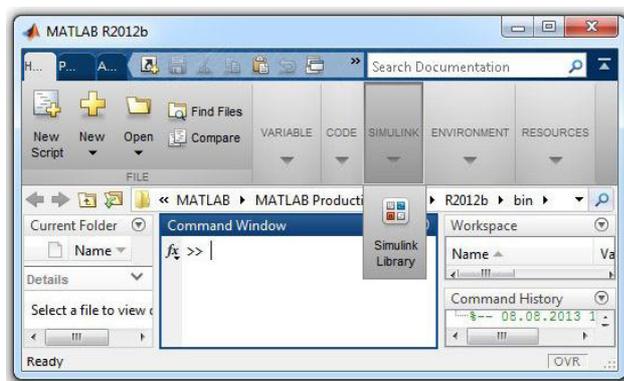


Рис. 3.1. Главное окно MATLAB R2012b с открытой вкладкой Simulink.

В результате будет активизировано окно обозревателя библиотек блоков или S-библиотек (рис. 3.2, где для примера в левом окне раскрыт перечень разделов библиотеки Simulink, этот же перечень разделов отражается и в правом окне просмотра).

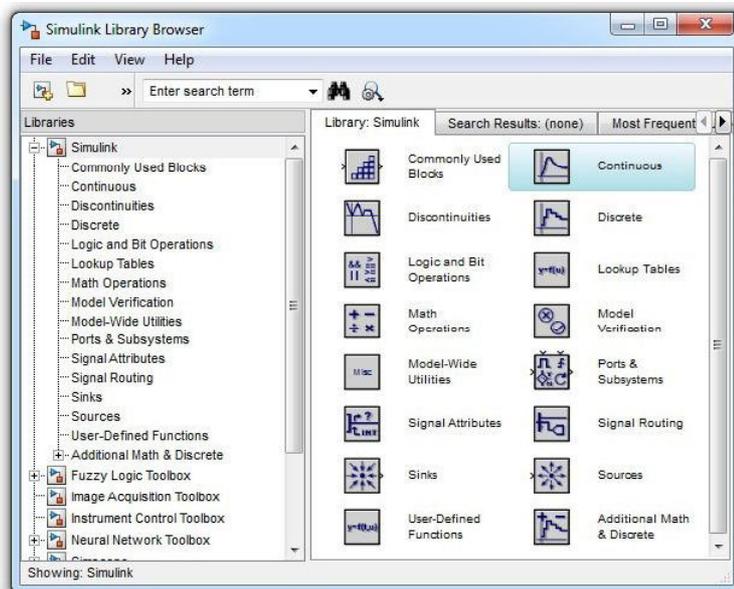


Рис. 3.2. Окно обозревателя библиотек Simulink.

Библиотека Simulink в MATLAB содержит следующие основные разделы: Commonly Used Blocks – часто используемые компоненты из различных разделов основной библиотеки Simulink;

Continuous – компоненты для моделирования систем в непрерывном времени.

Discontinuities – компоненты для моделирования негладких и разрывных нелинейных функций;

Discrete – компоненты для моделирования систем в дискретном времени;

Logic and Bit Operations – компоненты для моделирования логических (двоичных) операций;

Lookup Tables – компоненты для моделирования функциональных и табличных зависимостей;

Math Operations – компоненты для моделирования математических операций;

Model Verification – компоненты для тестирования и верификации поведения моделей;

Model-Wide Utilities – вспомогательные компоненты для документирования и линеаризации моделей;

Ports & Subsystems – блоки построения иерархических моделей и подсистем;

Signal Attributes – компоненты для преобразования типов сигналов в моделях;

Signal Routing – компоненты для коммутации и объединения/разъединения сигналов;

Sinks – компоненты для отображения и сохранения сигналов;

Sources – источники сигналов и воздействий;

User-Defined Functions – компоненты для создания пользовательских функций, реализованных на языке MATLAB.

Список разделов библиотеки Simulink представлен в виде дерева, и правила работы с ним являются общими для списков такого вида: пиктограмма свернутого узла дерева содержит символ+, а пиктограмма развернутого содержит символ –; для того чтобы развернуть или свернуть узел дерева, достаточно кликнуть на его пиктограмме левой клавишей мыши.

Если из перечня разделов на рис. 3.2, например, в окне обозревателя выбрать раздел Continuous, то правое окно примет новые очертания (рис. 3.3), где будут перечислены все блоки выбранного раздела библиотеки.

Как и обычно окно обозревателя библиотек Simulink содержит меню, в состав которого входят разделы: File (работа с файлами библиотек); Edit (добавление блоков и их поиск); View (управление показом элементов интерфейса); Help (вывод окна справки по обозревателю библиотек).

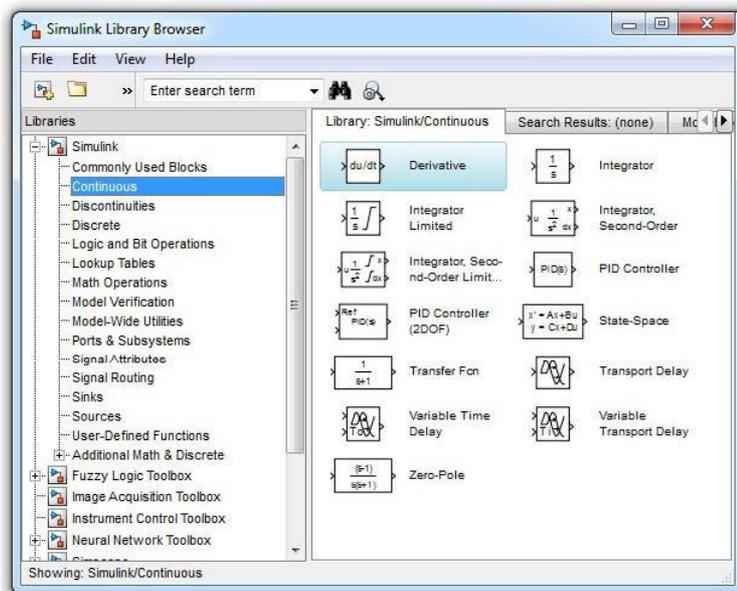


Рис. 3.3. Раздел библиотеки – Simulink/Continuous.

В окне библиотек Simulink имеется панель инструментов (рис. 3.4), содержащая следующие кнопки:



Рис. 3.4. Инструменты окна обозревателя.

– New model;

– Open model;

– Stay on top;

– Open simulink help.

Для создания S-модели используется кнопка .

Появляется новое окно untitled с очередным порядковым номером, вид которого показан на (рис. 3.5).

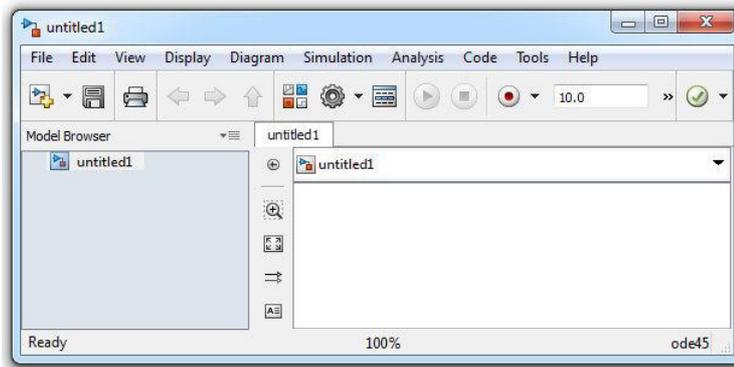


Рис. 3.5. Пустое окно модели Simulink.

3.2. Построение и использование Simulink-модели

3.2.1. Создание и правка модели

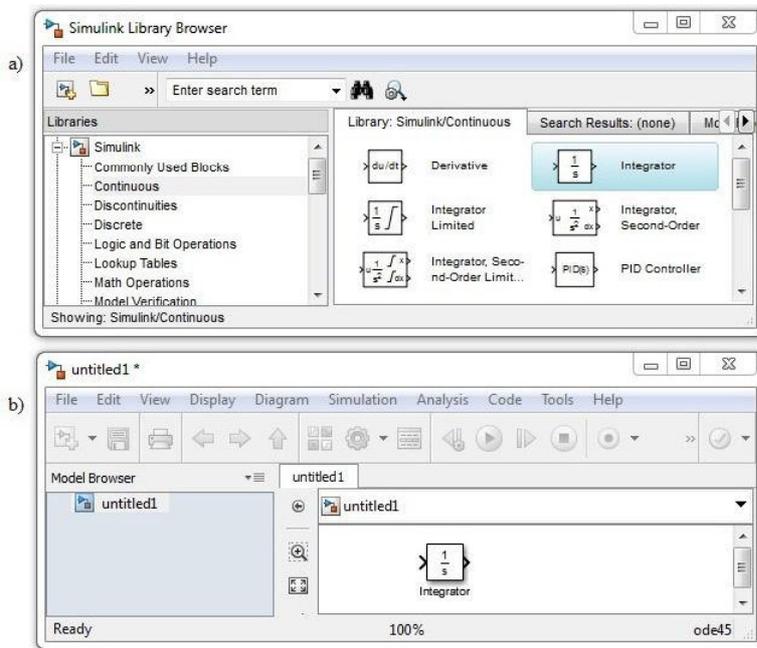


Рис. 3.6. Перенос интегратора из библиотеки в окно S-модели.

Для построения S-модели необходимо в окне, показанном на рис. 3.5, выполнить последовательность определенных действий, т.е. с помощью мыши перетащить в рабочую область этого окна требуемые блоки. Для этого необходимо открыть соответствующий раздел библиотеки, – в частности, Continuous (непрерывные системы). Далее, указать курсором на требуемый блок, – например, Integrator (картинка в этом случае принимает вид, показанный на рис. 3.6а) и, нажав на левую клавишу мыши, перенести Integrator в окно создаваемой модели.

При отпущенной клавише мыши картинка S-модели получает вид, показанный на рис. 3.6б.

Доступ к параметрам моделирования осуществляется с помощью команды меню S-модели – Simulation/Model Configuration Parameters, в результате выполнения которой появляется панель параметров моделирования, имеющая несколько вкладок, например, – Solver (установка параметров моделирования), раскрытая на рис. 3.7.

Установка параметров расчета S-модели на вкладке Solver выполняется с помощью элементов управления, разбитых на группы, в частности: Simulation time (интервал или время моделирования); Solver options (параметры моделирования); Output options (параметры вывода) и т.д.

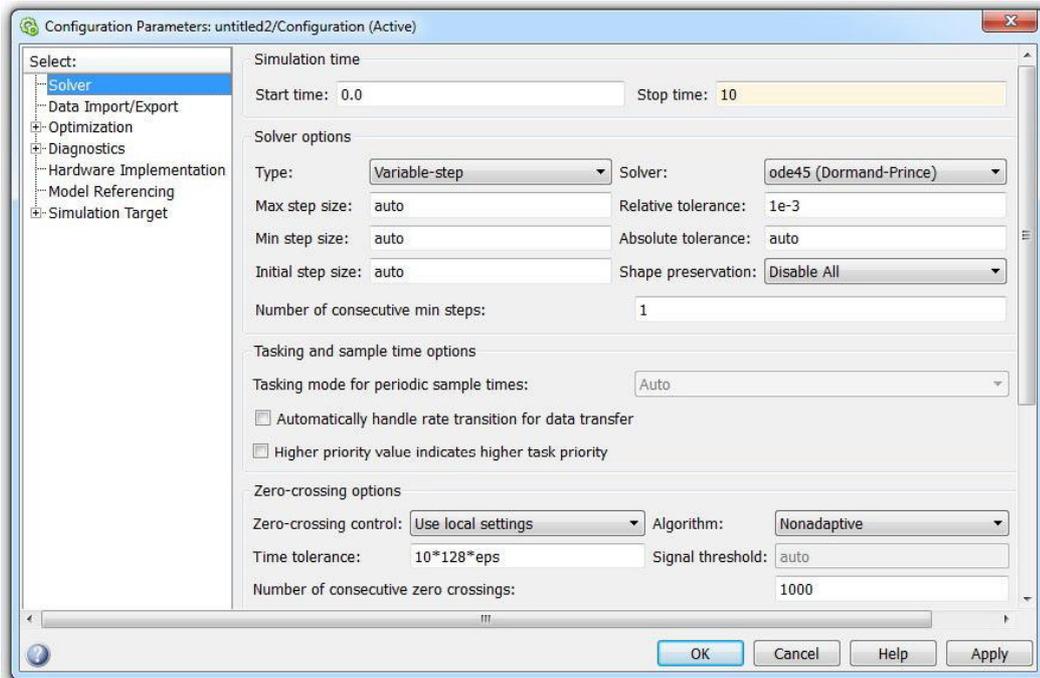


Рис. 3.7. Панель параметров S-модели.

Верхние два поля панели, группы `Simulation time`, устанавливают начальное и конечное время моделирования. По умолчанию эти значения, равные 0 и 10 сек соответственно. Следующая группа полей `Solver options`, отвечает за настройки решателя дифференциальных уравнений. В частности, поля с названиями `Max step size`, `Min step size` и `Initial step size` – определяют максимальный, минимальный и начальный временные шаги (шаг интегрирования) вычислительного процесса. По умолчанию система Simulink выбирает значения этих шагов автоматически. Очевидно, для вышерассмотренного примера необходимо установить некоторое значение максимального шага, который не позволил бы системе выбирать временной шаг больше заданного.

Заметим, что из-за большого значения шага интегрирования, выбираемого системой автоматически, на осциллографе могут наблюдаться ломаные кривые. В этом случае для получения более точных графических изображений рекомендуется задавать относительно малое значение параметра `Max step size`.

Пример 1. На рис. 3.8 показано окно модели, содержащее блоки, с помощью которых могут исследоваться характеристики гидравлического сервомотора, поскольку, согласно (П.1.60), его можно описать следующим уравнением в изображениях

$$x(s) = \frac{K}{s(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1)} u(s), \quad (3.1)$$

где $x(s)$, $u(s)$ – отклонения перемещений поршней соответственно сервомотора (выхода) и золотника (управление или вход); $K = 1.25$ [1/с] – коэффициент передачи сервомотора; $T = 0.18$ [с] – постоянная времени сервомотора; $\zeta = 0.95$ [б/р] – коэффициент затухания. После того как все необходимые блоки для построения модели выбраны, требуется их соединить с помощью курсора мыши – путем проведения линии от выхода одного блока на вход другого. Так на рис. 3.8 пока-

зана S-модель, из которой следует, что за исключением блока Sine Wave (входной синусоидальный сигнал), все другие блоки – Transfer Fcn (передаточная функция), Integrator и Scope (осциллограф) между собой соединены.

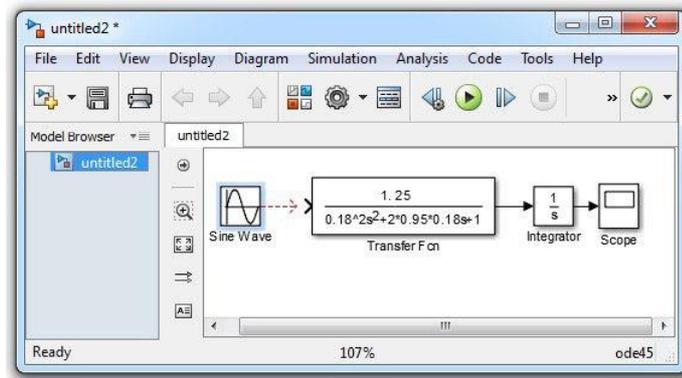


Рис. 3.8. Блоки S-модели гидромотора.

Очевидно, что вместо блока Integrator и блока Transfer Fcn можно было использовать только последний, но тогда его знаменатель будет следующим: $0.18^2s^3 + 2*0.95*0.18s^2 + s$.

Для изменения значений параметров соответствующего блока необходимо дважды щелкнуть левой клавишей мыши, указав курсором на изображение редактируемого блока, в результате откроется окно параметров этого блока. На рис. 3.9 в качестве примера показано окно редактирования параметров блока Transfer Fcn, где задаются требуемые значения коэффициентов передаточной функции. Внесение изменений завершается нажатием кнопки ОК.

Для создания точки разветвления на соединительной линии S-модели необходимо подвести курсор к предполагаемому узлу и, нажав правую клавишу мыши, протянуть линию. Для удаления линии требуется ее выделить и нажать клавишу Delete на клавиатуре; также можно удалить и блок.

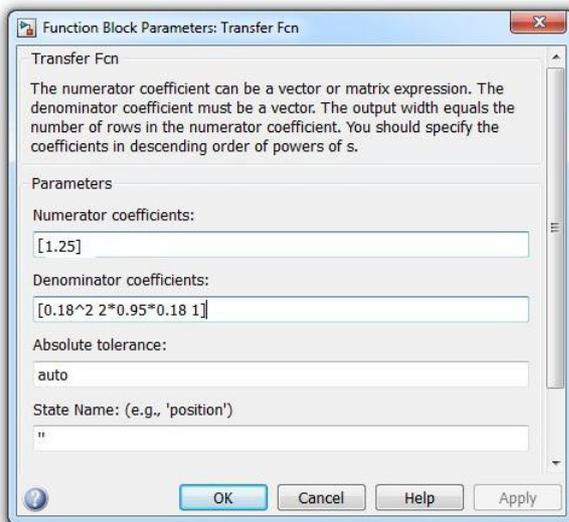


Рис. 3.9. Окно параметров блока Transfer Fcn.

Для создания точки разветвления на соединительной линии S-модели необходимо подвести курсор к предполагаемому узлу и, нажав правую клавишу мыши, протянуть линию. Для удаления линии требуется ее выделить и нажать клавишу Delete на клавиатуре; также можно удалить и блок.

Схема S-модели гидравлического сервомотора, в которой выполнены все требуемые соединения между блоками, приведена на рис. 3.10.

Здесь, в отличие от схемы на рис. 3.8, с помощью элемента схемы Mux (Мультиплексор) две скалярные переменные объединены в одну – векторную переменную, что позволило для наблюдения подать на осциллограф выходной $x(t)$ и входной $u(t)$ сигналы.

Для наглядности S-модели и удобства ее использования можно вводить текстовые надписи и пояснения, например, – название имитационной модели (рис. 3.10).

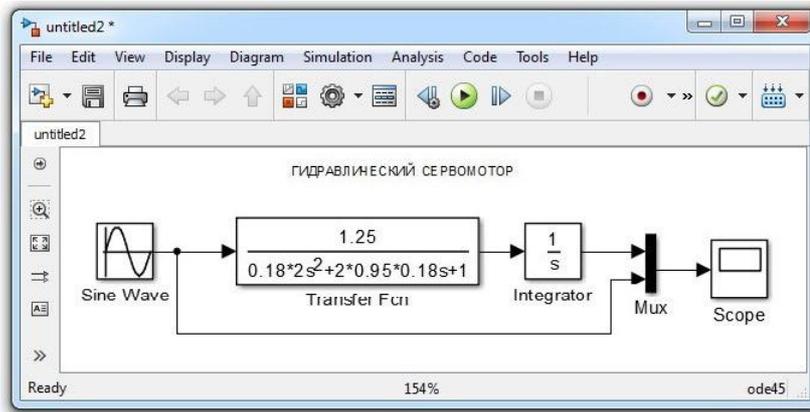


Рис. 3.10. S-модель гидромотора.

Если теперь в окне S-модели на панели инструментов (рис. 3.10) нажать кнопку Run, а затем дважды кликнуть левой кнопкой по блоку Scope, то на экране осциллографа появится изображение сигналов $u(t)$ и $x(t)$ (рис. 3.11a). Если требуется изменить параметры осциллографа, то на панели инструментов блока Scope (рис. 3.11a) надо нажать кнопку Parameters, в результате будет вызвано окно параметров, показанное на рис. 3.11b.

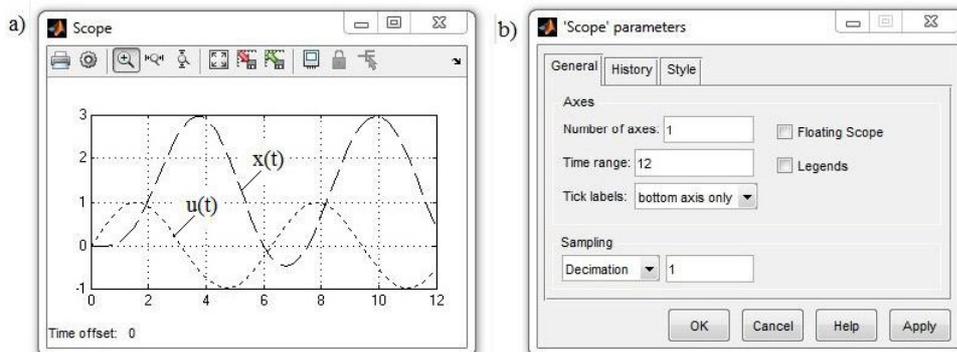


Рис. 3.11. Экранная форма и окно параметров блока Scope.

Пример 2. В предыдущем примере исследование характеристик гидравлического сервомотора опиралось на модель, построенную с использованием его передаточной функции. Если же описание гидромотора рассматривать в пространстве состояний вида (2.61) со следующими значениями коэффициентов:

$$k_1 = \frac{K}{T^2} = 771.6, \quad k_2 = \frac{1}{T^2} = 30.9, \quad k_3 = \frac{2\zeta}{T} = 10.6, \quad (3.2)$$

то аналог S-модели (см. рис. 3.10) можно построить в виде, представленном на рис. 3.12.

Заметим, что в данной S-модели, в отличие от показанной на рис. 3.8, на осциллографе наблюдаются другие переменные – выход гидромотора и его производная, причем используется Scope, у которого определено два входа, т.е. в позиции Number of axes (рис. 3.11b) задано значение 2.

Кроме того, учитывая, что уравнениям гидромотора (2.61) в векторно-матричной форме записи эквивалентны уравнениям (2.9), (2.10), где матрицы и векторы, с учетом (3.2), имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k_2 & -k_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (k_1 \ 0 \ 0), \quad D = 0, \quad (3.3)$$

можно построить S-модель гидравлического сервомотора и с использованием блока State Space. S-модель и окно параметров блока State Space изображены на рис. 3.13.

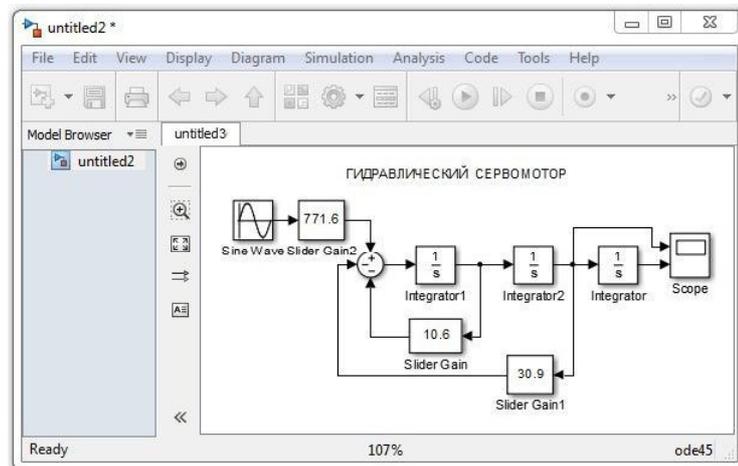


Рис. 3.12. S-модель гидромотора (2.61), (3.2) в пространстве состояний.

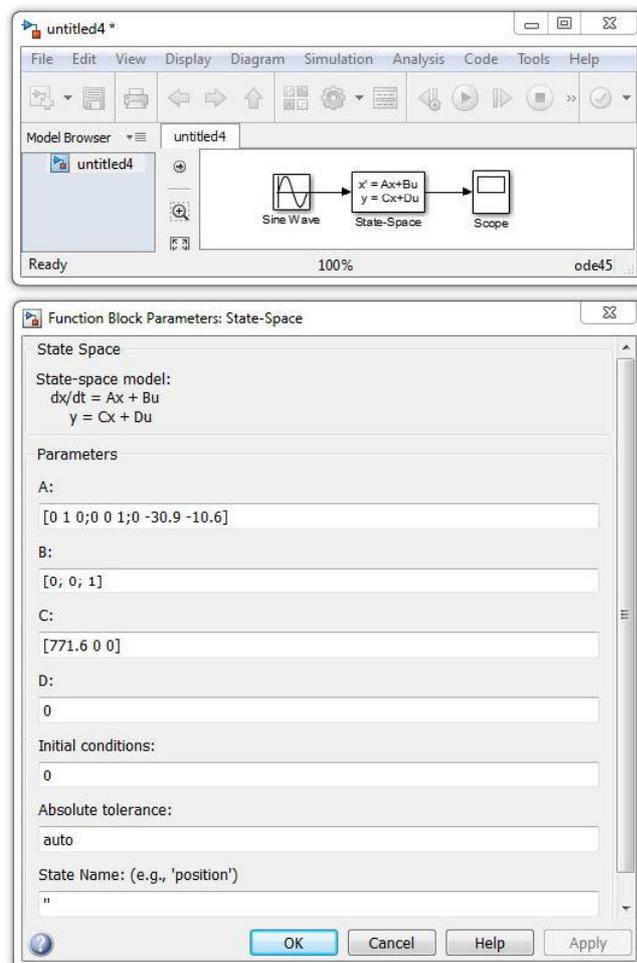


Рис. 3.13. S-модель гидромотора (2.9), (2.10), (3.2), (3.3) в пространстве состояний.

Завершив составление расчетной схемы, ее необходимо сохранить в виде файла на диске, выбрав пункт меню File/Save As... в окне схемы и указав папку и имя файла. При последующем редактировании схемы можно пользоваться пунктом меню File/Save. При повторных запусках программы SIMULINK загрузка схемы осуществляется с помощью меню File/Open... в окне обозревателя библиотеки или из основного окна MATLAB.

3.2.2. Основные схемы моделирования

Рассматриваются типовые схемы моделирования элементов и систем автоматического управления, используемые в лабораторных работах.

Схема моделирования статической характеристики.

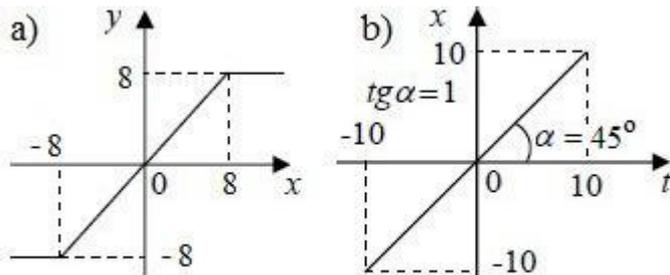


Рис. 3.14. Статическая характеристика $y = F(x)$ и входной сигнал $x(t)$.

Построим на экране осциллографа функцию $F(x)$ – статическую характеристику нелинейного элемента типа "зона насыщения", при линейном изменении аргумента $x(t)$. Эти функции с заданными параметрами изображены на рис. 3.14.

С этой целью, используя в качестве развертки осциллографа и входа нелинейности – выход блока Ramp (линейно возрастающий сигнал), а также блоки Saturation и Scope, собираем схему S-модели и вводим требуемые значения параметров в соответствующих окнах (рис. 3.15).

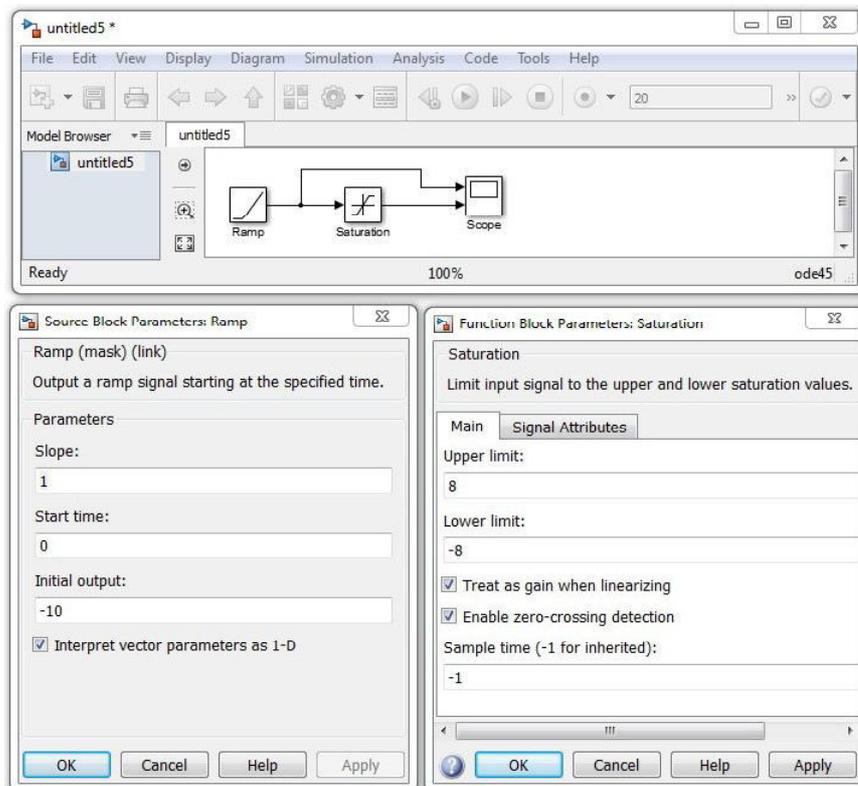


Рис. 3.15. Моделирование нелинейности – "зона насыщения".

В окне блока Ramp параметры Slope, Start time и Initial output – это наклон, начальное время и начальное значение сигнала. Диапазон значений входного сигнала был выбран так, чтобы статическая характеристика наблюдалась полностью, включая уровни насыщения. В рассматриваемом случае значение параметра Initial output, было равно –10.

В окне блока Saturation параметры Upper limit и Lower limit означают верхний и нижний пределы соответственно.

После запуска на осциллографе (рис. 3.16) наблюдается динамика входного сигнала (верхний график), который линейно нарастает под углом 45° , что позволяет ось времени считать эквивалентной оси x статической характеристики, изображенной на рис. 3.14а. Таким образом, на экране осциллографа наблюдается (нижний график) именно зависимость $y(x)$.

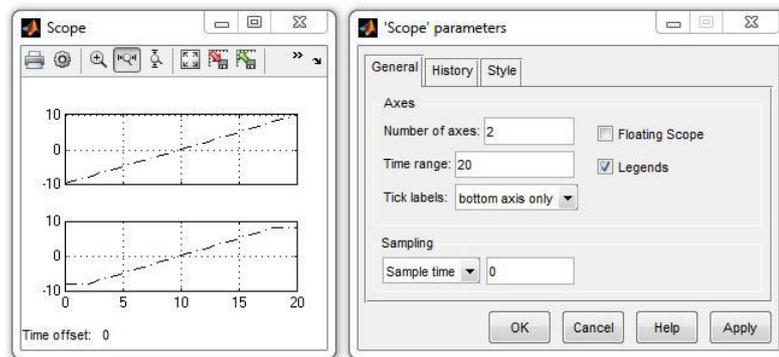


Рис. 3.16. Блок Scope и окно его параметров.

Для получения на осциллографе симметричной статической характеристики был выбран временной интервал моделирования – 20 сек, а поскольку начальное время моделирования должно было совпасть с начальным временем и начальным значением входного сигнала, очевидно, что промежуток времени моделирования был установлен от –10 до 10.

Схема моделирования временных характеристик.

Рассмотрим основные характеристики – переходной процесс $h(t)$ и весовую функцию $\omega(t)$ (импульсную переходную характеристику), учитывая, что $\omega(t) = \frac{dh(t)}{dt}$. Для примера построим семейство графиков $h(t)$ и $\omega(t)$ для набора аperiodических звеньев первого порядка

$$x(s) = \frac{K}{Ts + 1} u(s), \quad (3.4)$$

для 4-х случаев, когда коэффициент усиления принимает различные значения, а величина постоянной времени не меняется. Схема, параметры и результаты моделирования при $T = 1$ и $K = 1, 3, 5, 9$, представлены на рис. 3.17.

Поскольку, в рассмотренном случае коэффициент усиления был задан как вектор, что позволило за один цикл моделирования получить два семейства характеристик – переходных и весовых функций.

Если требуется получить временной отклик системы на гармоническое воздействие, такая задача возникает, например, при построении эксперименталь-

ным путем частотных характеристик системы, то на ее вход подается синусоидальный сигнал определенной частоты.

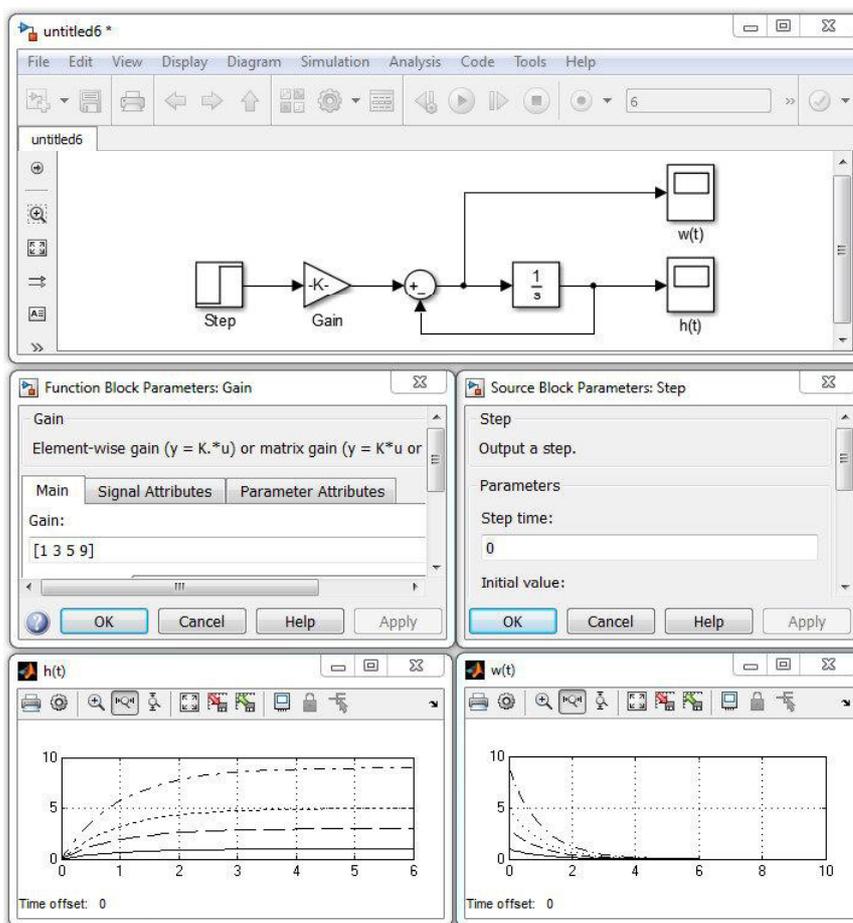


Рис. 3.17. Моделирование семейства звеньев (3.4) в пространстве состояний.

При этом на выходе системы с течением времени устанавливается синусоидальный сигнал той же частоты, но сдвинутый по фазе и обычно измененный по амплитуде. Поэтому на осциллограф, как правило, выводят входной и выходной сигналы (см. рис. 3.10, рис. 3.11), что позволяет наблюдать и измерять фазовые и амплитудные изменения гармонического сигнала на выходе системы на соответствующих частотах.

Заметим, что для построения амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик системы такой способ исследования в каждом эксперименте дает только по одной точке.

Моделирование частотных характеристик. Если математическое описание исследуемой системы известно, например, оно задано в виде передаточной функции (3.1), то, используя явный вид функций соответствующих частотных характеристик, имеющих в данном случае следующий вид:

$$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega \left((1 - T^2\omega^2) + j2\zeta T\omega \right)}; \quad (3.5)$$

$$A(\omega) = \text{mod}W(j\omega) = \frac{K}{|\omega| \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4(\zeta T\omega)^2}}; \quad (3.6)$$

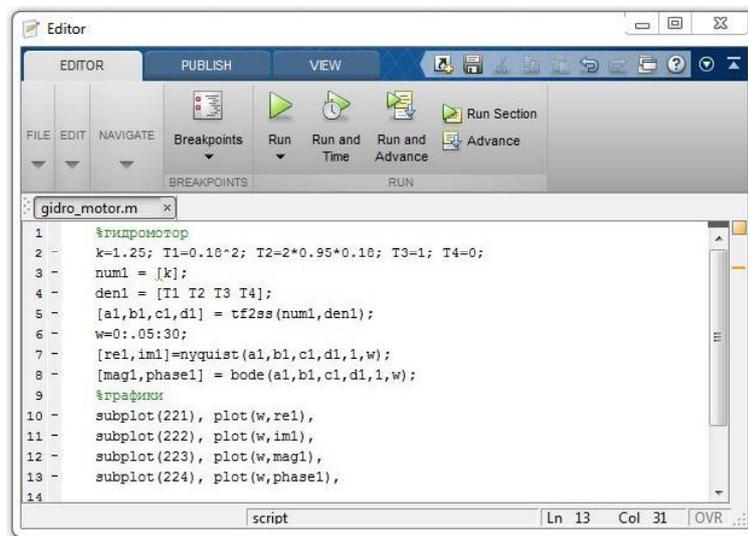
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2\zeta T\omega}{1 - T^2\omega^2}; \quad (3.7)$$

$$U(\omega) = \operatorname{Re}W(j\omega) = -\frac{2K\zeta T}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4(\zeta T\omega)^2}; \quad (3.8)$$

$$V(\omega) = \operatorname{Im}W(j\omega) = -\frac{K(1 - T^2\omega^2)}{\omega \left[(1 - T^2\omega^2)^2 + 4(\zeta T\omega)^2 \right]}, \quad (3.9)$$

можно построить их графики.

Для этого в главном окне MATLAB необходимо кликнуть по кнопке New Script, а затем, сохранив открывшийся в редакторе m-файл, например, под именем `gidro_motor.m` и сформировав соответствующий набор команд (рис. 3.18), можно построить (используя кнопку Run) графики частотных характеристик в выбранном частотном диапазоне (рис. 3.19).



```

1 %гидромотор
2 k=1.25; T1=0.16*2; T2=2*0.95*0.16; T3=1; T4=0;
3 num1 = [k];
4 den1 = [T1 T2 T3 T4];
5 [a1,b1,c1,d1] = tf2ss(num1,den1);
6 w=0:.05:30;
7 [re1,im1]=nyquist(a1,b1,c1,d1,1,w);
8 [mag1,phase1] = bode(a1,b1,c1,d1,1,w);
9 %графики
10 subplot(221), plot(w,re1),
11 subplot(222), plot(w,im1),
12 subplot(223), plot(w,mag1),
13 subplot(224), plot(w,phase1),
14

```

Рис. 3.18. М-файл для построения частотных характеристик гидромотора (3.1).

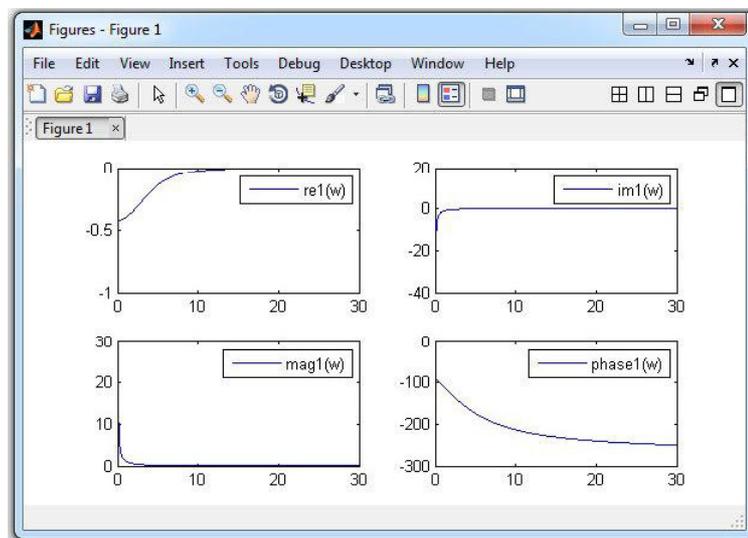


Рис. 3.19. Графики частотных характеристик гидромотора (3.1).

Схема моделирования фазовых траекторий. Метод фазовых траекторий (фазовой плоскости) применяется для исследования динамических систем в автономном режиме, т.е. когда внешние воздействия отсутствуют, а движение системы происходит при ненулевых начальных условиях. Типовая схема исследования системы этим методом при $x(0) = 4$, $y(0) = -2$ приведена на рис. 3.20, где для получения фазовой траектории используется блок XY Graph, входящий в раздел Sinks (приемники сигналов).

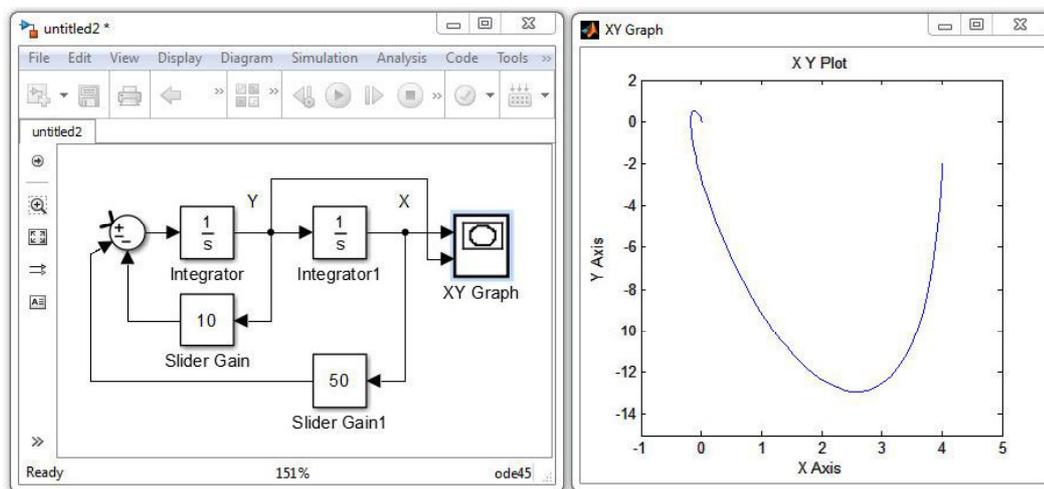


Рис. 3.20. Моделирование фазового портрета системы второго порядка.

3.2.3. Публикация результатов моделирования

Для отображения графических результатов моделирования в текстовом редакторе удобно использовать блок To Workspace, расположенный в разделе Sinks. В качестве примера рассмотрим структурную схему на рис. 3.21, изображение которой было перенесено в текстовый редактор с использованием команды меню: Edit → Copy Model To Clipboard → Bitmap, выполненной в окне соответствующей S-модели.

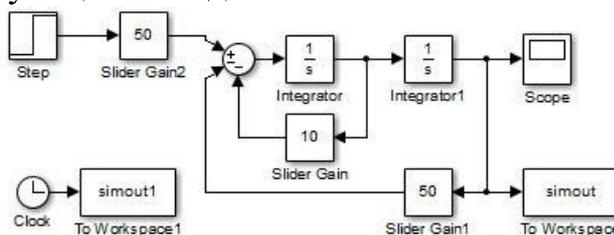


Рис. 3.21. Моделирование переходного процесса в системе второго порядка.

Перед запуском процесса моделирования необходимо в настройках блоков To Workspace (рис. 3.22) задать тип передаваемых данных и имя, под которым эти данные будут переданы.

По умолчанию имя переменной – simout. Удобно использовать тип данных Array (массив).

После моделирования, в рабочей области системы MATLAB появляются два массива: simout и simout1, первый – это вектор значений выходного сигнала, а второй – вектор значений времени.

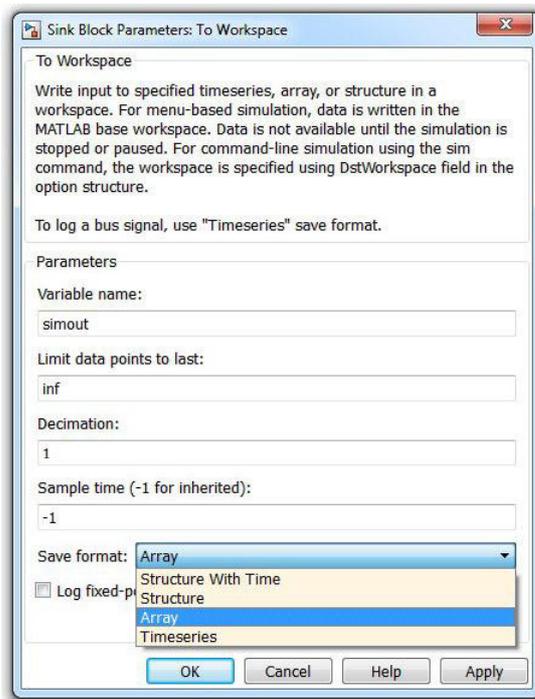


Рис. 3.22. Окно параметров блока To Workspace.

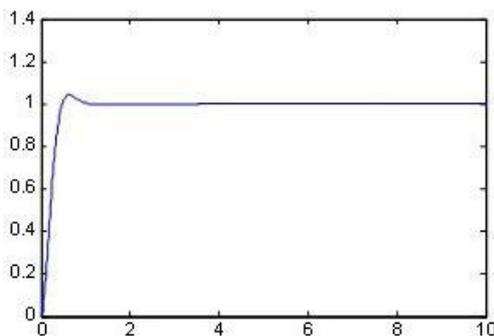


Рис. 3.23. $h(t)$ системы 2-го порядка.

Выполняя из командной строки среды MATLAB команду `plot(simout1, simout)`, будет построен график, изображение которого совпадает с полученным на осциллографе. Для переноса графика в текстовый редактор достаточно его скопировать с помощью команды меню `Edit → Copy Figure`, выполняемой в соответствующем графическом окне Figure. Результат такого переноса показан на рис. 3.23.

3.3. Инструмент LTI Viewer

Simulink является самостоятельным инструментом и при работе с ним не требуется знать сам MATLAB, однако доступ к функциям MATLAB и другим его инструментам открыт, и их можно использовать в Simulink. Часть входящих в состав пакетов имеет инструменты, встраиваемые в Simulink, в частности, – LTI Viewer, приложение Control System Toolbox (пакета для разработки систем управления). Так для построения динамических характеристик гидравлического сервомотора с использованием его математического описания в пространстве состояний вида (2.9), (2.10), (2.61), (2.62) надо выполнить следующие действия: во-первых, запустить из командной строки файл приложения `ltiview`, в результате появится окно (рис. 3.24);

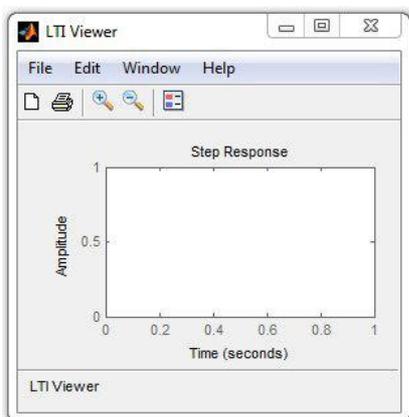


Рис. 3.24. Окно LTI Viewer.

во-вторых, сформировать LTI-объект, например, – `sys1` в последней строке текста программы, пусть это будет файл с именем `otau01.m`:

```
% ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ СЕРВОМОТОР
K=25; KSI=0.95; T=0.18;
a=[0 1 0;0 0 1; 0 -1/T^2 -2*KSI/T]; b=[0;0;1];
c=[K/T^2 0 0]; d=[0];
sys1=ss(a,b,c,d);
```

который необходимо запустить из командной строки файл `otau01.m`;

в-третьих, в меню окна LTI Viewer в разделе File (рис. 3.24) выбрать команду Import, что вызовет появление нового окна (рис. 3.25), где следует выбрать имя импортируемой системы (в данном случае она одна) и нажать кнопку ОК. В результате изображение экранной формы MATLAB совместно с окном LTI Viewer получит вид, представленный на рис. 3.26.

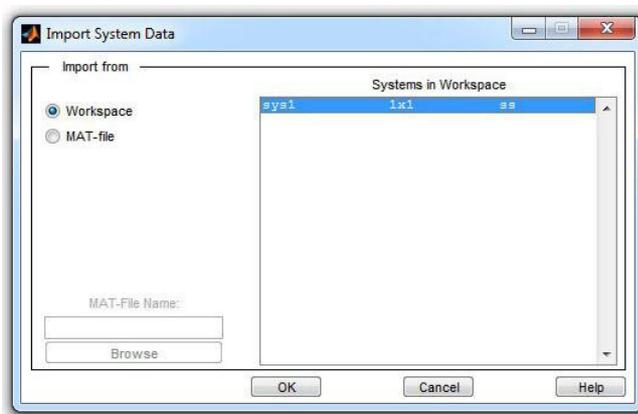


Рис. 3.25. Окно Import System Data.

В этом примере (см. окно LTI Viewer) по умолчанию построена реакция исследуемой системы на единичное ступенчатое воздействие.

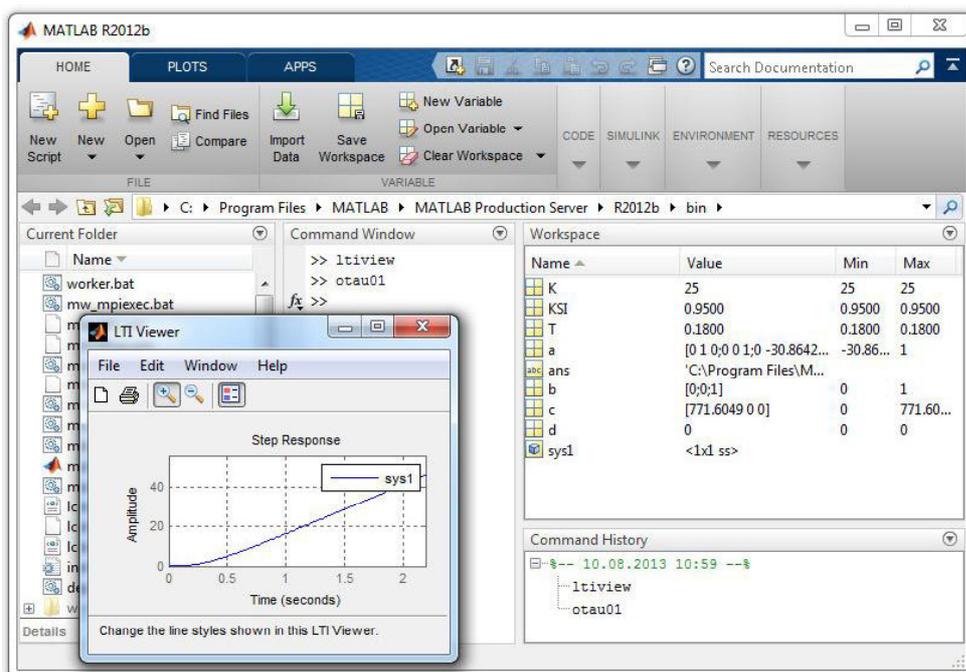


Рис. 3.26. Экранная форма MATLAB совместно с LTI Viewer.

Для получения других характеристик системы необходимо выполнить команду `Edit\Plot Configuration...` в окне `LTI Viewer`. В ходе выполнения этой команды откроется окно `Plot Configuration` (рис. 3.27), в котором можно как задать число графиков (панель `Select a response plot configuration`), так и определить вид их отображения (панель `Response type`).

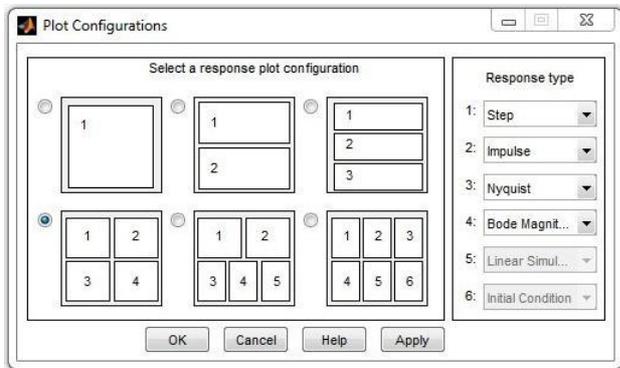


Рис. 3.27. Окно `Plot Configuration`.

В предлагаемом меню для построения доступны следующие графики или диаграммы:

`step` – реакция на единичное ступенчатое воздействие;

`impulse` – реакция на единичное импульсное воздействие;

`bode` – логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики;

`bode mag` – логарифмическая ам-

плитудная частотная характеристика; `nyquist` – диаграмма (годограф) Найквиста;

`nichols` – годограф Николса;

`sigma` – сингулярные числа; `pole/zero` – нули и полюса системы.

Как видно из экранной формы, показанной на рис. 3.27, в рассматриваемом примере выбрано построение четырех графиков, а именно – `step`, `impulse`, `nyquist`, `bode mag`, вызываемых нажатием кнопки `ОК`, что в результате приводит к появлению нового вида у окна `LTI Viewer` (рис. 3.28).

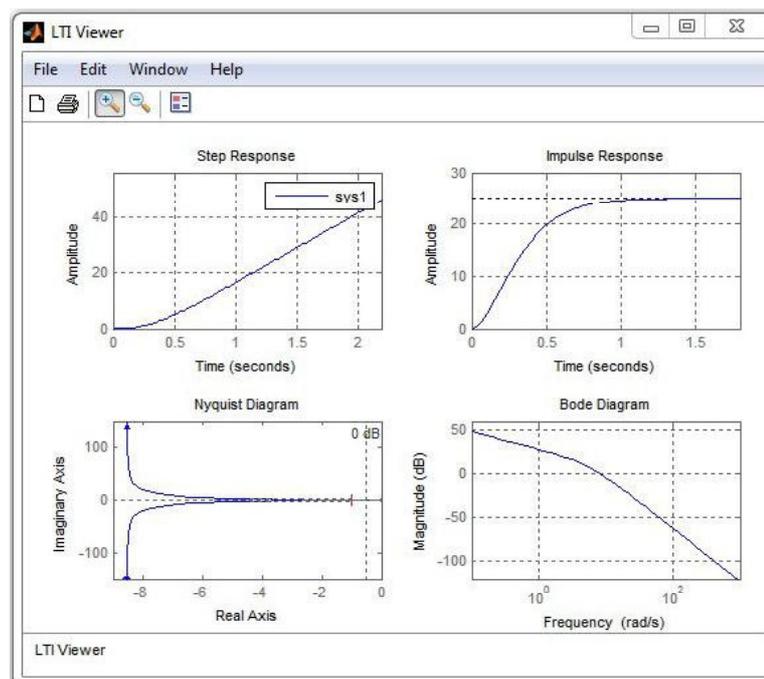


Рис. 3.28. Окно `LTI Viewer` с четырьмя графиками.

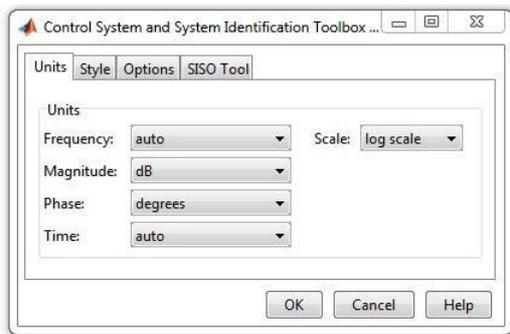


Рис. 3.31. Окно Control System Toolbox Preferences.

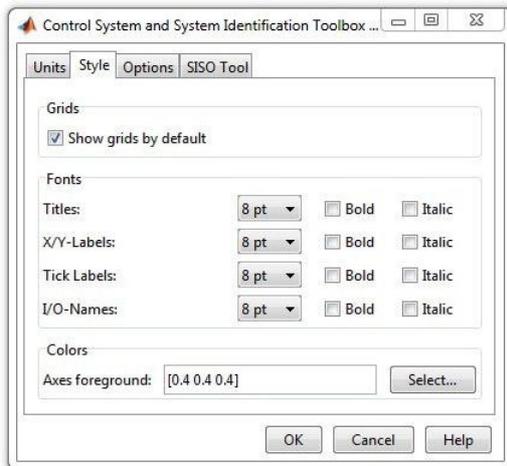


Рис. 3.30. Вкладка Style.

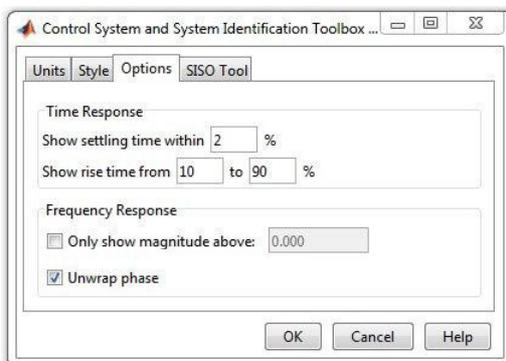


Рис. 3.31. Вкладка Options.

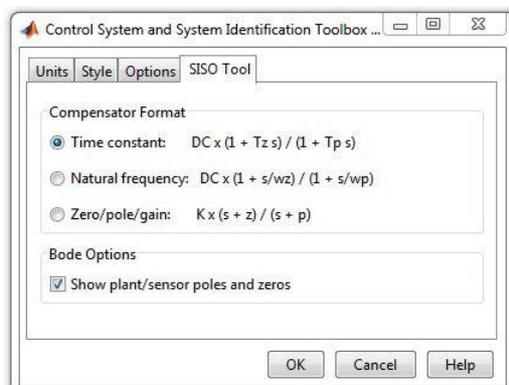


Рис. 3.32. Вкладка SISO Tool.

Для настройки LTI Viewer использует программа File\ Toolbox Preferences, выполнение которой открывает окно, показанное на рис. 3.29 и позволяющее осуществить настройку параметров линейной стационарной модели.

1. Установка параметров измерения (вкладка Units на рис. 3.29) – это задание единиц измерения частоты (рад/с или Гц), уровня (dB или абсолютные единицы), фазы (градусы или радианы), а также установка вида шкалы частоты (логарифмический или линейный).

2. Установка стиля графиков (вкладка Style). Внешний вид вкладки Style показан на рис. 3.30.

На данной вкладке можно выполнить настройку шрифтов окна LTI Viewer (панель Fonts), выбрать цвет осей графиков (панель Colors), а также задать нанесение линий сетки на графики (флажок Show grids).

3. Установка параметров переходного процесса (вкладка Options которая показана на рис. 3.31).

Данная вкладка позволяет задать параметры для вычисления времени нарастания и времени переходного процесса (установленные по умолчанию). Также по умолчанию LTI Viewer вычисляет время переходного процесса как время от нуля до момента, начиная с которого переходная функция входит в 2% зону и больше ее не покидает (параметр Show settling time within). Параметры для вычисления времени переходного процесса можно изменить (см. Show rise time from).

На вкладке имеется флажок Unwrap phase, установка которого позволяет избежать отображения разрывов в фазовой частотной характеристике, связанных с областью определения функции \arctg , вычисляющей сдвиг по фазе.

4. Установка параметров для анализа и синтеза линейных систем автоматического

управления со скалярными входом/выходом (SISO – Single Input/Single Output). Внешний вид вкладки SISO Tool показан на рис. 3.32.

На данной вкладке показаны значения настроек SISO-инструмента, выставленные по умолчанию. Например, с помощью панели Compensator Format можно выбрать формат постоянной времени

$$dcgain * \frac{1 + Tz_1 s}{1 + Tp_1 s},$$

где Tz_1, Tz_2, \dots и Tp_1, Tp_2, \dots – это постоянные времени передаточной функции LTI-системы, соответственно ее числителя и знаменателя.

4. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ С ЗАДАЧАМИ

Предлагаемый практикум, затрагивает только часть разделов теории автоматического управления, но позволяет студентам получить достаточно полное представление об основах автоматического управления в технических системах и приобрести навыки, необходимые для решения ряда практических задач.

Лабораторные работы имеют различный уровень сложности и выполняются в течение 2-х или 4-х академических часов. Каждая из них предполагает самостоятельную работу студентов по освоению не только базового курса лекций, но и дополнительного материала, вынесенного на самостоятельное изучение. В частности, для выполнения лабораторных работ необходимо предварительно изучить теоретический материал и освоить пакет программ MatLab версии не ниже 7.01 со средой моделирования Simulink.

Текущий контроль знаний осуществляется путем опроса студентов перед началом лабораторного занятия. Выполнение каждой работы включает проведение компьютерного моделирования, создание в печатной форме отчета, завершаемое его защитой.

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- 1) титульный лист, выполненный согласно образцу (приложение 3);
- 2) цель работы;
- 3) теоретическую часть: используемые формулы, диаграммы, схемы и т.п. с пояснениями;
- 4) экспериментальную часть, в которой приводятся расчеты и результаты моделирования в виде схем и графиков.
- 5) выводы по работе.

4.1. Исследование временных и частотных характеристик динамических систем 1-го порядка (4 часа)

Цель лабораторной работы – получить навыки в построении математических моделей динамических систем и освоить приемы имитационного моделирования временных и частотных характеристик систем 1-го порядка на примере апериодического, идеального интегрирующего, реального дифференцирующего и упругих звеньев.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рассматриваются линейные системы автоматического управления, описываемые обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка

$$\frac{dz}{dt} + b_1 z = a_0 \frac{du}{dt} + a_1 u \quad (4.1)$$

или, используя передаточную функцию, соотношением

$$z(s) = W(s)u(s) = \frac{a_0 s + a_1}{s + b_1} u(s), \quad (4.2)$$

где a_0, a_1, b_1 – числа, которые могут иметь разные знаки, в связи с чем:

при положительных числах a_0, a_1, b_1 (полюса и нули $W(s)$ лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости корней), система является *устойчивой* и *минимально-фазовой*;

если числа a_0, a_1 имеют одинаковые знаки (как правило, положительные числа), а $b_1 < 0$ (полюс $W(s)$ лежит в правой полуплоскости) – система становится *неустойчивой*, но *минимально-фазовой*;

если числа a_0, a_1 имеют разные знаки (нуль $W(s)$ лежит в правой полуплоскости), а $b_1 > 0$ – система оказывается *неминимально-фазовой*, но *устойчивой*;

если числа a_0, a_1 имеют разные знаки, а $b_1 < 0$ – система является *неустойчивой* и *неминимально-фазовой*.

Например, при $a_1 > 0, b_1 \neq 0$ – любое число, тогда система (4.1) является аperiodическим звеном, S-модель которого показана на рис. 4.1.

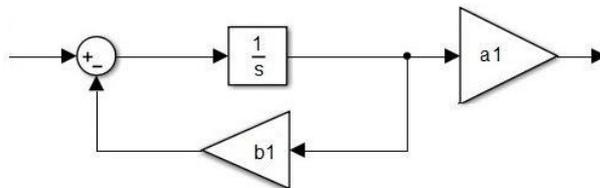


Рис. 4.1. S-модель аperiodического (инерционного) звена 1-го порядка.

Передаточная функция этого звена (в пространстве состояний) имеет вид

$$W(s) = \frac{a_1}{s + b_1}, \quad (4.3)$$

Очевидно, что свойства аperiodического звена (4.3), зависят от значений параметров a_1, b_1 и определяются следующими решениями уравнения (4.1):

$$\text{при } a_1 > 0, b_1 > 0, \text{ имеем } h(t) = \frac{a_1}{b_1} (1 - e^{-b_1 t}), \quad \omega(t) = a_1 e^{-b_1 t}; \quad (4.4)$$

$$\text{при } a_1 > 0, b_1 < 0, \text{ имеем } h(t) = \frac{a_1}{|b_1|} (e^{|b_1| t} - 1), \quad \omega(t) = a_1 e^{|b_1| t}.$$

Отметим, что звено, при $a_1 > 0, b_1 = 0, h(t) = a_1 t$ – это идеальный интегратор. В случае $a_1, b_1 > 0$, аperiodическое звено (4.3) является устойчивым, передаточная функция которого (во второй форму записи) имеет вид

$$W(s) = \frac{K}{Ts + 1}, \quad K = \frac{a_1}{b_1}, \quad T = \frac{1}{b_1} [c], \quad (4.5)$$

при этом из графика на рис. 4.2 хорошо видно, что длительность переходного процесса составляет приблизительно $(3 \div 4)T$ [с].

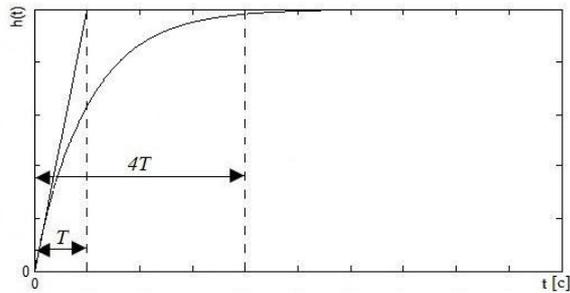


Рис. 4.2. Оценка времени затухания $h(t)$ в аperiodическом звене 1-го порядка.

При построении семейства временных характеристик, наряду с S -моделями, можно воспользоваться стандартными командами пакета Matlab.

Например, используя передаточную функцию (4.3) и задавая при $a_1 = 1$ следующий набор значений параметра b_1 : $b_1 = 2$; $b_1 = -2$, $b_1 = 0$, т.е. рассматривая как устойчивое и неустойчивое инерционные звенья, так и идеальное интегрирующее звено, можно построить соответствующие им переходные процессы и весовые функции (рис. 4.3). В частности, создав и запустив m -файл вида:

Листинг lb1_1.m

```
%временные характеристики
W0=tf([1],[1 2]); %устойчивое инерционное звено
W1=tf([1],[1 0]); %идеальный интегратор
W2=tf([1],[1 -2]); %неустойчивое инерционное звено
subplot(121); step(W0,W1,W2,1); %переходной процесс
subplot(122); impulse(W0,W1,W2,1).%весовая функция
```

Отметим, что в командах `step(W0,W1,W2,1)` и `impulse(W0,W1,W2,1)` время моделирования было задано (0.8 с), если же его не указывать, то оно будет выбрано по умолчанию, т.е. автоматически.

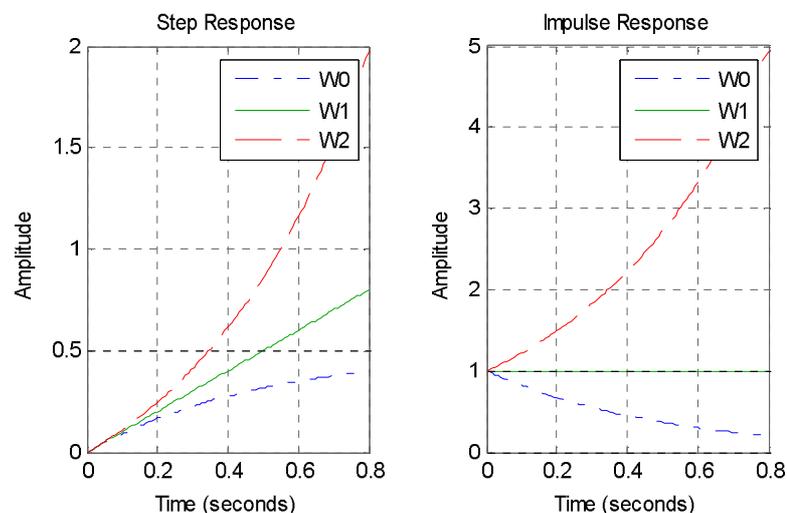


Рис. 4.3. Динамические процессы в звеньях 1-го порядка.

Теоретический анализ свойств системы управления связан с построением частотных характеристик на основе ее передаточной функции. Используя стандартные команды пакета Matlab, можно построить вещественную и мнимую частотные характеристики, годограф, а также логарифмические амплитудную и фазовую частотные характеристики исследуемой системы.

Частотная передаточная функция (комплексный коэффициент усиления) устойчивого инерционного звена 1-го порядка (4.3) имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{a_1}{b_1 + j\omega},$$

а частотные характеристики описываются выражениями:

$$\begin{aligned} \text{вещественная} - U(\omega) &= \operatorname{Re}W(j\omega) = \frac{a_1 b_1}{b_1^2 + \omega^2}, \\ \text{мнимая} - V(\omega) &= \operatorname{Im}W(j\omega) = -\frac{a_1 \omega}{b_1^2 + \omega^2}, \\ \text{амплитудная} - A(\omega) &= \operatorname{mod}W(j\omega) = \frac{a_1}{\sqrt{b_1^2 + \omega^2}}, \\ \text{фазовая} - \varphi(\omega) &= \operatorname{arg}W(j\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\omega}{b_1}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

При этом логарифмическая амплитудно-частотная характеристика описывается следующим образом:

$$20 \lg A(\omega) = \left(20 \lg a_1 - 20 \lg \sqrt{b_1^2 + \omega^2} \right) [\text{дБ}].$$

Например, если коэффициенты устойчивого инерционного звена имеют значения: $a_1 = 100$, $b_1 = 4$, то в результате запуска *m*.файла:

Листинг lb1_2.m

```
%частотные характеристики
num=[100]; den=[1 4];
[re,im]=nyquist(num,den);
subplot(221); plot(re); %вещественная
subplot(222); plot(im); %мнимая
subplot(223); nyquist(num,den); %годограф
subplot(224); bode(num,den); %логарифмические
```

будут построены частотные характеристики, представленные на рис. 4.4.

Частотные передаточные функции идеального интегрирующего, реального дифференцирующего и упругого звеньев описываются соответственно следующими выражениями:

$$W(j\omega) = \frac{a_1}{j\omega} \text{ – идеальное интегрирующее;}$$

$$W(j\omega) = \frac{ja_0\omega}{b_1 + j\omega} \text{ – реальное дифференцирующее;}$$

$$W(j\omega) = \frac{a_1 + ja_0}{b_1 + j\omega} \text{ – упругое звено.}$$

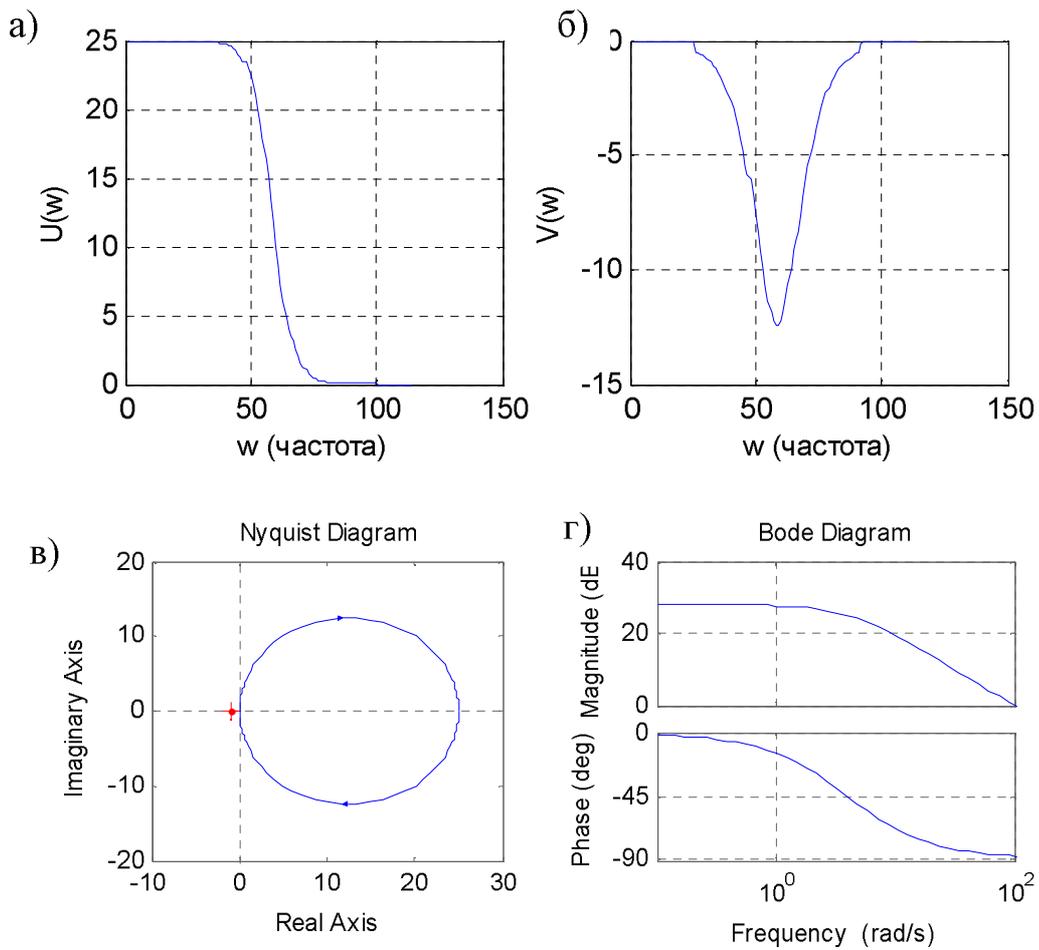


Рис. 4.4. Частотные характеристики устойчивого аperiodического звена 1-го порядка.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 4.1

параметры	№ варианта (для уравнения (4.2))														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b_1	0.3	0.4	0.5	0.6	1.7	1.8	1.9	2.1	2.2	2.3	3.5	4.5	4.7	4.2	4.1
a_0	0.4	0.8	1.1	1.3	3.5	3.4	3.8	4.2	4.3	4.8	6.8	8.6	9.8	8.6	8.0
a_1	1.2	1.4	1.9	2.0	2.2	1.5	2.4	2.3	1.6	2.6	1.7	3.1	1.8	2.7	2.8

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. В соответствии с вашим вариантом задания (табл. 4.1), полагая $a_0 = 0$, запишите передаточную функцию апериодического звена 1-го порядка и, создавая листинги, аналогичные m-файлам lb1_1 и lb1_2, постройте графики временных и частотных характеристик этого звена.

2. Постройте семейство переходных процессов апериодического звена 1-го порядка, изменяя значения параметра b_1 следующим образом: $0.25b_1$; $0.5b_1$; $2b_1$; $4b_1$.

3. Повторите задание пп.1, полагая $a_0 = b_1 = 0$, т.е. запишите передаточную функцию идеального интегрирующего звена и постройте графики его временных и частотных характеристик.

4. Повторите задание пп.1, полагая $a_1 = 0$, т.е. запишите передаточную функцию реального дифференцирующего звена и постройте графики его временных и частотных характеристик.

5. Повторите задание пп.1, запишите передаточную функцию упругого и постройте графики его временных и частотных характеристик.

6. Поменяйте местами числитель и знаменатель передаточной функции упругого звена и повторите задание пп.5.

7. Сделайте выводы на основе сравнительного анализа результатов моделирования.

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте строгое определение передаточной функции.

2. Как найти передаточную функцию системы управления, если ее математическая модель представлена в виде дифференциального уравнения n -го порядка или системы n дифференциальных уравнений первого порядка?

3. Дайте определение переходного процесса $h(t)$ и весовой функции $\alpha(t)$, а также приведите аналитические зависимости, связывающие их с передаточной функцией $W(s)$.

4. Запишите передаточные функции и уравнения переходных процессов идеального интегрирующего, реального дифференцирующего и упругого звеньев.

5. Приведите примеры апериодического звена первого порядка и реально дифференцирующего звена.

6. При каком значении параметра b_1 , апериодическое звено будет неустойчивым

$$W_1(s) = \frac{a_1}{s + b_1}.$$

7. Как, используя способ прямого программирования, получить описание системы управления в пространстве состояний, если математическая модель системы задана в виде передаточной функции?

4.2. Исследование временных и частотных характеристик динамических систем 2-го порядка (4 часа)

Цель лабораторной работы – имитационное моделирование и анализ временных и частотных характеристик звеньев второго порядка и систем управления, построенных с помощью типовых соединений.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

I. Рассматриваются линейные системы автоматического управления, описываемые обыкновенным дифференциальным уравнением 2-го порядка

$$\frac{d^2z}{dt^2} + b_1 \frac{dz}{dt} + b_2 z = a_1 u, \quad (4.7)$$

или, используя передаточную функцию, соотношением

$$z(s) = W(s)u(s) = \frac{a_1}{s^2 + b_1 s + b_2} u(s), \quad (4.8)$$

где a_1, b_1, b_2 – положительные числа.

Известно, что числовые значения коэффициентов b_1 и b_2 , определяют тип звена (4.7), в частности:

- 1) $b_1^2 - 4b_2 > 0$ – апериодическое звено;
- 2) $b_1^2 - 4b_2 < 0$ – колебательное звено;
- 3) $b_1 = 0$ – консервативное звено;
- 4) $b_2 = 0$ – интегрирующее звено с замедлением.

При исследовании первых трех звеньев удобно вводить замену коэффициентов a_1, b_1 и b_2 . Например, для апериодического звена целесообразно использовать постоянные времени T_3 и T_4 , удовлетворяющие равенствам

$$T_3 T_4 = \frac{1}{b_2}, \quad T_3 + T_4 = \frac{b_1}{b_2}, \quad K = \frac{a_1}{b_2}, \quad (4.9)$$

а для колебательного и консервативного звеньев – постоянную времени T и коэффициент затухания ζ , полагая выполненными условия

$$T^2 = \frac{1}{b_2}, \quad 2\zeta T = \frac{b_1}{b_2}, \quad K = \frac{a_1}{b_2}, \quad (4.10)$$

причем, если $0 < \zeta < 1$ – это колебательное звено, когда $\zeta = 0$ – консервативное.

С учетом уравнений (4.8), (4.9), можно записать соотношения:

для инерционного звена

$$z(s) = W(s)u(s) = \frac{K}{(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)} u(s), \quad \text{пусть } T_3 > T_4, \quad (4.11)$$

$$h(t) = K \left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \right); \quad (4.12)$$

для колебательного звена

$$z(s) = W(s)u(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1} u(s), \quad (4.13)$$

$$h(t) = K \left(1 - \frac{\gamma}{\zeta \lambda} e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \varphi_0) \right) = K \left(1 - (\cos \lambda t + \frac{\gamma}{\lambda} \sin \lambda t) e^{-\gamma t} \right), \quad (4.14)$$

$$\gamma = \frac{\zeta}{T}, \quad \lambda = \frac{1}{T} \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad \varphi_0 = \arctg \frac{\lambda}{\gamma};$$

для консервативного

$$z(s) = W(s)u(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 1} u(s), \quad (4.15)$$

$$h(t) = K(1 - \cos \omega t), \quad \omega = \frac{1}{T}. \quad (4.16)$$

II. Рассматриваются типовые соединения линейных систем (рис. 4.5), передаточные функции описываются выражениями:

а) $W(s) = \frac{z(s)}{g(s)} = W_1(s)W_2(s)$ – последовательное соединение; (4.17)

б) $W(s) = \frac{z(s)}{g(s)} = W_2(s) - W_1(s)$ – параллельное соединение; (4.18)

в) $W(s) = \frac{z(s)}{g(s)} = \frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}$ – соединение с обратной связью. (4.19)

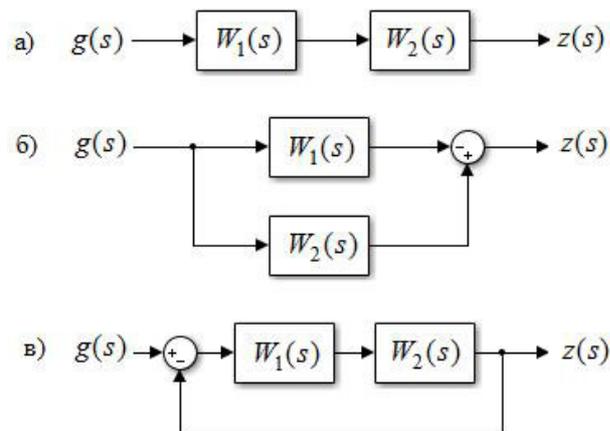


Рис. 4.5. Структурные схемы типовых соединений.

Примером последовательного соединения может служить инерционное звено 2-го порядка (4.11), поскольку оно может быть образовано последовательным соединением двух инерционных звеньев 1-го порядка.

Классическими примерами параллельного соединения являются структурные схемы типовых законов управления или промышленных ПИ-, ПД- и ПИД-

регуляторов, описываемые соответственно передаточными функциями вида:

$$W_{ПИ}(s) = k_{II} + k_{II} \frac{1}{s}, \quad W_{ПД}(s) = k_{II} + k_{II} s, \quad W_{ПИД}(s) = k_{II} + k_{II} \frac{1}{s} + k_{II} s, \quad (4.20)$$

где идеальный дифференциатор, входящий в состав ПД- и ПИД-регуляторов, технически реализуется, как правило, за счет применения реального дифференцирующего звена, т.е. путем замены $k_{II} s \cong k_{II} \frac{s}{T_* s + 1}$ (здесь T_* – достаточно малая постоянная времени) и использования следующих передаточных функций

$$W_{ПД}(s) = k_{II} + k_{II} \frac{s}{T_* s + 1},$$

$$W_{ПИД}(s) = k_{II} + k_{II} \frac{1}{s} + k_{II} \frac{s}{T_* s + 1}. \quad (4.21)$$

Здесь k_{II} , k_{II} и k_{II} – константы (передаточные коэффициенты или настройки регулятора).

Примером соединения с обратной связью может служить любая замкнутая система управления, в частности – рис. 4.5в, это система с отрицательной обратной связью, где $W_1(s)$ – регулятор, $W_2(s)$ – объект управления.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 4.2

параметры	№ варианта (для уравнения (4.7))														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b_1	4.3	5.4	4.5	5.6	6.7	5.8	4.9	5.1	6.2	4.3	6.5	4.5	5.7	4.2	6.1
b_2	3.4	3.8	2.1	3.3	3.5	3.4	3.8	2.2	3.3	1.8	3.8	2.6	1.8	2.6	3.0
a_1	1.2	1.4	1.7	1.0	1.2	1.5	1.4	1.3	1.6	1.3	1.7	1.1	1.8	1.7	1.8

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. В соответствии с вашим вариантом задания (табл. 4.2), используя передаточную функцию апериодического звена 2-го порядка и создавая листинги, аналогичные m-файлам `lb1_1` и `lb1_2`, постройте временные и частотные характеристики этого звена.

2. Оставляя значение коэффициента b_1 прежним, задайте новое значение коэффициента b_2 таким образом, чтобы выполнилось условие $b_1^2 - 4b_2 < 0$. Для полученного колебательного звена определите значения постоянной времени T и коэффициента затухания ζ , а затем, используя листинги пп.1, постройте временные и частотные характеристики этого звена.

3. Повторите задание предыдущего пункта (полагая $b_1 = 0$) и постройте графики временных и частотных характеристик консервативного звена.

Замечания: 1) для наглядности графических результатов в командах `step` и `impulse`

необходимо задать время моделирования; 2) при моделировании частотных характеристик (дополнительно к случаю $b_1 = 0$) постройте графики, задавая значение $b_1 = 10^{-6} \cong 0$.

4. Повторите задание пп.1 (полагая $b_2 = 0$) для интегрирующего звена с замедлением (последовательное соединение звеньев идеального интегрирующего и инерционного 1-го порядка), постройте временные и частотные характеристики.

Замечание: в команде `step` необходимо задать время моделирования.

5. Постройте переходной процесс и весовую функцию ПИ-регулятора, где $k_{II} = b_1$, $k_{II} = b_2$. Для ПД- и ПИД-регуляторов, используя передаточные функции вида (4.21), где $k_{II} = b_1$, $k_{II} = b_2$, $k_D = a_1$ и $T^* = 0.1a_1$, постройте графики их переходных процессов и весовых функций.

Замечание: в командах `step` и `impulse` необходимо задать время моделирования.

7. Для системы управления (см. рис. 4.5в) с передаточными функциями:

$W_1(s) = k_{II}$, $W_2(s) = \frac{a_1}{s^2 + b_1s - b_2}$, постройте графики $h(t)$ и $\omega(t)$, задавая значение

коэффициента k_{II} из условий: $k_{II}a_1 - b_2 > 0$; $k_{II}a_1 - b_2 = 0$; $k_{II}a_1 - b_2 < 0$.

Замечание: в командах `step` и `impulse` необходимо задать время моделирования.

8. Сделайте выводы на основе сравнительного анализа результатов моделирования (по каждому из пунктов задания).

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ

1. Приведите физические и технологические примеры апериодического, колебательного и консервативного звеньев.

2. Сформулируйте отличительные особенности математических моделей апериодического, колебательного и консервативного звеньев, а также интегрирующего звена с замедлением, исходя из дифференциального уравнения (4.7).

3. Как определить весовую функцию $\omega(t)$ по уравнению переходного процесса $h(t)$?

4. Запишите передаточные функции последовательного и параллельного соединения двух звеньев, а также передаточные функции звена охваченного положительной и отрицательной обратными связями.

4.3. Исследование устойчивости систем управления с обратной связью (4 часа).

Цель лабораторной работы – исследование устойчивости замкнутых линейных систем управления и оценка влияния значений коэффициентов их характеристических уравнений на динамические процессы.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

I. Рассматриваются линейные замкнутые системы управления (рис. 4.6), которые описываются следующими передаточными функциями:

$$W_{раз}(s) = W_1(s)W_2(s), \quad W_1(s) = \frac{a_1(s)}{b_1(s)}, \quad W_2(s) = \frac{a_2(s)}{b_2(s)},$$

$$W_{зам}(s) = \frac{W_{раз}(s)}{1 + W_{раз}(s)} = \frac{a_1(s)a_2(s)}{b_1(s)b_2(s) + a_1(s)a_2(s)} = \frac{a_3(s)}{b_3(s)}, \quad (4.22)$$

где $W_{раз}(s)$, $W_{зам}(s)$ – передаточные функции соответственно разомкнутой и замкнутой систем; $a_i(s)$, $b_i(s)$, $i = \overline{1,3}$ – нормированные полиномы с числовыми коэффициентами.

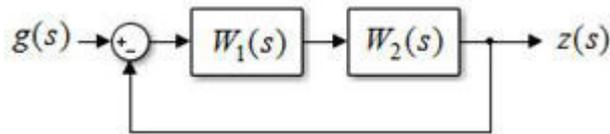


Рис. 4.6. Замкнутая система управления с единичной отрицательной обратной связью.

Хорошо известно, что устойчивость таких систем может устанавливаться как за счет необходимых и достаточных условий устойчивости – все корни полинома $b_3(s)$ должны лежать в левой полуплоскости комплексной плоскости корней, так и с помощью применения критериев устойчивости.

Критерий устойчивости Рауса-Гурвица:

для устойчивости системы с характеристическим полиномом вида

$$b_3(s) = b_{3n}s^n + b_{3n-1}s^{n-1} + \dots + b_{31}s + b_{30}, \quad (4.23)$$

необходимо и достаточно, чтобы при $b_{3n} > 0$, все главные диагональные миноры матрицы Гурвица были бы положительными.

Например, пусть $n = 3$, тогда (при $b_{33} > 0$) для матрицы Гурвица

$$G = \begin{pmatrix} b_{32} & b_{30} & 0 \\ b_{33} & b_{31} & 0 \\ 0 & b_{32} & b_{30} \end{pmatrix},$$

должны выполняться условия

$$\Delta_1 = b_{32} > 0, \quad \Delta_2 = b_{32}b_{31} - b_{33}b_{30} > 0, \quad \Delta_3 = b_{30}\Delta_2 > 0.$$

Следствие критерия устойчивости Рауса-Гурвица позволяет определить нахождение исследуемой системы на границе устойчивости, в частности, рассматривая такие условия для случая $n = 3$, имеют место следующие описания:

$$b_{30} = 0, \quad b_{33} > 0, \quad b_{32} > 0, \quad b_{31} > 0 \text{ – аperiodической границы};$$

$$b_{33} = 0, \quad b_{32} > 0, \quad b_{31} > 0, \quad b_{30} > 0 \text{ – границы } \infty\text{-го корня};$$

$$b_{32}b_{31} - b_{33}b_{30} = 0, \quad b_{33} > 0, \quad b_{32} > 0, \quad b_{31} > 0, \quad b_{30} > 0 \text{ – колебательной границы}.$$

Критерий устойчивости Михайлова:

для устойчивости системы с полиномом (4.23) необходимо и достаточно, чтобы кривая Михайлова $b_3(j\omega) = b_{3n}(j\omega)^n + \dots + b_{31}(j\omega)s + b_{30} = X(\omega) + jY(\omega)$, начиналась с положительного значения на вещественной оси ($b_3(j0) = b_{30} > 0$) и, последовательно обходила n квадрантов против часовой стрелки, при изменении частоты в интервале $0 \leq \omega \leq \infty$.

Кривые Михайлова *устойчивых* систем не пересекают начало координат и уходят в бесконечность в n -м квадранте.

Если же кривая Михайлова начинается в начале координат (причем при смещении графика этой кривой вправо – система оказывается устойчивой, а при смещении влево – неустойчивой), то исследуемая система будет находиться на *апериодической границе*.

В том случае, когда кривая Михайлова проходит через начало координат (причем при смещении графика этой кривой влево – система оказывается устойчивой, а при смещении вправо – неустойчивой), то исследуемая система будет находиться на *колебательной границе*.

Если график кривой Михайлова системы n -го порядка совпадает с графиком устойчивой системы $(n - 1)$ -го порядка, то исследуемая система находится на *границе ∞ -го корня*.

Критерий устойчивости Найквиста, в отличие от критериев Рауса-Гурвица и Михайлова, рассматривается только замкнутых систем (рис. 4.6), об устойчивости которой судят по виду годографа разомкнутой системы $W_{раз}(j\omega)$.

Критерий устойчивости Найквиста (для случая неустойчивой и минимально-фазовой $W_{раз}(s)$):

для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты в интервале $-\infty \leq \omega \leq \infty$, годограф $W_{раз}(j\omega)$ охватывал точку с координатами $(-1, j0)$, против часовой стрелки $l/2$, где l – число правых корней характеристического уравнения $W_{раз}(s)$.

Критерий устойчивости Найквиста (для случая устойчивой и минимально-фазовой $W_{раз}(s)$):

для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты в интервале $-\infty \leq \omega \leq \infty$, годограф $W_{раз}(j\omega)$ не охватывал точку с координатами $(-1, j0)$.

В том случае, когда годограф $W_{раз}(j\omega)$ проходит через точку $(-1, j0)$, замкнутая система оказывается на границе устойчивости.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 4.3

параметры	№ варианта (для уравнений (4.24))														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
λ	0.2	0.3	0.3	0.4	0.4	0.5	0.3	0.6	0.6	0.7	0.1	0.5	0.3	0.4	0.8
K	1.4	1.2	1.3	1.4	1.2	1.3	1.4	1.2	1.3	1.4	1.2	1.3	1.4	1.2	1.3
$T_1(c)$	0.2	0.1	0.4	0.3	0.2	0.1	0.4	0.3	0.2	0.1	0.2	0.5	0.3	0.4	0.5
$T_2(c)$	2.0	2.2	2.4	2.6	2.7	2.1	2.3	2.5	2.0	2.2	2.4	2.6	2.6	2.7	2.1
$T_3(c)$	1.1	1.3	1.1	1.2	1.3	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.4	1.3	1.2

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. В соответствии с вашим вариантом задания (табл. 4.3) определите устойчивость, применяя критерий Рауса-Гурвица, замкнутой системы (рис. 4.6) с передаточными функциями

$$W_1(s) = K, \quad W_2(s) = \frac{T_1 s + 1}{(T_2 s + 1)(T_3^2 s^2 + 2\lambda T_3 s + 1)}, \quad (4.24)$$

Теоретический вывод подтвердите видом переходного процесса, полученным в результате имитационного моделирования замкнутой системы управления с помощью ее Simulink-модели.

2. Замените передаточные функции (4.24) следующими:

$$W_1(s) = \left(1 + \frac{K}{s}\right), \quad W_2(s) = \frac{1}{(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}, \quad W_{раз}(s) = W_1(s)W_2(s), \quad (4.25)$$

где (в отличие от пп. 1) значение параметра $K > 0$ выбирается произвольно.

Применяя следствие критерия Рауса-Гурвица, рассчитайте значение коэффициента усиления разомкнутой системы K_* , при котором замкнутая система (4.25) будет находиться на колебательной границе устойчивости. Используя K_* определите значения параметра K , выполняя неравенства

$$K = K_1 > K_*, \quad K = K_2 = K_*, \quad K = K_3 < K_*$$

и постройте графики соответствующих весовых функций и переходных процессов Simulink-модели замкнутой системы (при K_1 , K_2 и K_3).

3. Замените передаточные функции (4.24) следующими:

$$W_1(s) = \frac{K}{s}, \quad W_2(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad (4.26)$$

где (в отличие от пп. 1) теперь значение параметра $T_1 \geq 0$ выбирается произвольно. Запишите характеристическое уравнение замкнутой системы (4.26) и покажите, что при $T_1 > 0$ и $T_1 = 0$, замкнутая система будет соответственно устойчивой и находится на границе ∞ -го корня.

Теоретический вывод подтвердите графиками кривых Михайлова, построенными при $T_1 > 0$ и $T_1 = 0$.

4. Замените передаточные функции (4.24) следующими:

$$W_1(s) = K, \quad W_2(s) = \frac{1}{(T_3 s + 1)^3}, \quad (4.27)$$

где (как и в пп. 2) значение параметра $K > 0$ выбирается произвольно.

Учитывая, что $\text{Im}W_{раз}(j\omega) = \frac{-KT_3\omega(3-T_3^2\omega^2)}{(1-3T_3^2\omega^2)^2 + T_3^2\omega^2(3-T_3^2\omega^2)^2}$, вычислите,

используя соотношение $KT_3\omega(3-T_3^2\omega^2) = 0$, частоту ω_ϕ (при которой поворот годографа составит угол $\arg W_{раз}(j\omega_\phi) = 180^\circ$) и величину запаса по амплитуде

$$A_{зап} = 1 - \text{Re}W_{раз}(j\omega_\phi) = 1 - \frac{K(1-3T_3^2\omega_\phi^2)^2}{(1-3T_3^2\omega_\phi^2)^2 + T_3^2\omega_\phi^2(3-T_3^2\omega_\phi^2)^2}.$$

Поскольку $\text{mod}W_{раз}(j\omega) = \frac{K}{(T_3^2\omega^2 + 1)\sqrt{(T_3^2\omega^2 + 1)}}$, вычислите, используя

соотношение $\frac{K}{T_3^2\omega^2 + 1)\sqrt{(T_3^2\omega^2 + 1)}} = 1$, частоту ω_a (при которой годограф имеет

длину $\text{mod}W_{раз}(j\omega_a) = 1$), т.е. в результате решения уравнения

$$T_3^6\omega_a^6 + 3T_3^4\omega_a^4 + 3T_3^2\omega_a^2 + 1 - K^2 = 0,$$

определите в системе управления величину запаса по фазе

$$\varphi_{зан} = 180^\circ - 3\text{arct}T_3\omega_a.$$

5. Замените передаточные функции (4.24) следующими:

$$W_1(s) = K \left(1 + \frac{s}{0.05T_1s + 3} \right), \quad W_2(s) = \frac{T_1s + 1}{(T_2s + 1)(T_3^2s^2 + 2\lambda T_3s + 1)}, \quad (4.28)$$

где (как и в пп. 2) значение параметра $K > 0$ выбирается произвольно.

Постройте годографы разомкнутой системы управления, выбирая значения параметра K так, чтобы замкнутая система (согласно критерию Найквиста) была бы устойчивой, неустойчивой и находилась на границе устойчивости.

6. Сделайте выводы на основе сравнительного анализа результатов моделирования.

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте необходимые и достаточные условия устойчивости линейной динамической системы управления.

2. Сформулируйте частотный критерий устойчивости Михайлова.

3. Сформулируйте алгебраический критерий устойчивости Рауса-Гурвица.

4. Сформулируйте критерий устойчивости Найквиста. Почему у критерия Найквиста две формулировки?

5. Как определяются запасы устойчивости системы управления по амплитуде и частоте?

6. Дайте качественную характеристику вида годографа разомкнутой системы с передаточной функцией вида

$$W(s) = \frac{K}{s^2(Ts + 1)},$$

опираясь на условия устойчивости замкнутой системы с единичной отрицательной обратной связью.

8. Обеспечивая устойчивость замкнутой системы управления, запишите соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты усиления передаточных функций следующих разомкнутых систем:

$$W_1(s) = \frac{K(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)}, \quad W_2(s) = \frac{Ks}{T_1^2s^2 - T_2s + 1}.$$

4.4. Исследование статических и скоростных ошибок замкнутых систем (2 часа).

Цель лабораторной работы – исследование и анализ установившихся ошибок в статических и астатических системах управления.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Основной характеристикой качества работы систем управления (в установившемся режиме) является величина *установившейся ошибки* e_y , определяемая соотношением

$$e_y = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot e(s), \quad (4.29)$$

где $e(s)$ – изображение по Лапласу сигнала ошибки $e(t)$.

В тех случаях, когда внешнее воздействие постоянно и $e_y \neq 0$, то ошибка, также как и система управления, называются *статическими*. Если же статическая ошибка $e_y = 0$, то систему управления считают *астатической*. Как правило, систему управления считают статической или астатической относительно задающего воздействия $g(t)$ и/или возмущения $f(t)$.

Сигнал ошибки в замкнутой системе (рис. 4.7) можно описать уравнением

$$e(s) = e_g(s) + e_f(s) = \frac{1}{1 + W_1(s)W_2(s)} g(s) + \frac{-W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} f(s), \quad (4.30)$$

где $e_g(s)$ и $e_f(s)$ – изображения соответственно задающего воздействия $g(t)$ и возмущения $f(t)$, поэтому определение предельных значений (4.29), зависит от явного вида как изображений $g(s)$, $f(s)$, так и передаточных функций $W_1(s)$, $W_2(s)$.

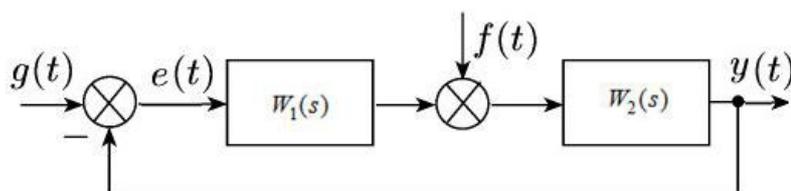


Рис. 4.7. Типовая схема системы управления.

Обычно функционирование систем управления с единичной отрицательной обратной связью рассматривают в типовых режимах – *стабилизации* и *слежения*. В режиме стабилизации задающий сигнал является постоянным, $g(t) = const$, а в режиме слежения переменным, $g(t) = var$.

Установившуюся ошибку в режиме слежения часто называют *скоростной ошибкой*, $e_y = e_{ск}$. Следует отметить, что если скоростная ошибка, при максимальной скорости изменения $g(t)$, будет ограничена, т.е. $e_{ск} \leq e_{ск}^*$, где $e_{ск}^*$ – заданное или допустимое значение скоростной ошибки, то задающее воздействие

$g(t) = var$, при расчете ошибок, можно заменить сигналом $g^*(t) = \max \left| \frac{dg(t)}{dt} \right| = K_g t$.

Будем полагать, что передаточные функции имеют вид

$$W_1(s) = \frac{K_1}{s^\nu}, \quad \nu = 0, 1; \quad W_2(s) = \frac{K_1 K_2 R(s)}{s^\nu Q(s)}, \quad (4.31)$$

где ν – порядок астатизма ($\nu = 0$ – астаизм нулевого порядка или статизм, $\nu = 1$ – астаизм первого порядка); $K_1, K_2 > 0$ – коэффициенты передачи; $R(s), Q(s)$ – нормированные устойчивые полиномы

$$R(s) = (r_m s^m + \dots + r_1 s + 1), \quad Q(s) = (q_n s^n + \dots + q_1 s + 1), \quad (4.32)$$

а задающее $g(t)$ и возмущающее $f(t)$ воздействия (соответственно в режиме стабилизации и слежения) удовлетворяют условиям:

$$g(t) = g_0 1(t), \quad f(t) = f_0 1(t); \quad (4.33)$$

$$g(t) = g^*(t) = \max \left| \frac{dg(t)}{dt} \right| \leq K_g t, \quad f(t) = f^*(t) = \max \left| \frac{df(t)}{dt} \right| \leq K_f t, \quad (4.34)$$

где $g_0, K_g, f_0, K_f = const > 0$ – числовые коэффициенты.

Поскольку в соотношениях (4.29), (4.30), согласно (4.33) и (4.34), используются изображения сигналов $1(t)$ и t , приведем их явный вид

$$L(1(t)) = \int_0^\infty 1(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad L(t) = \int_0^\infty t e^{-st} dt = \frac{1}{s^2}.$$

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 4.4

параметры	№ варианта (для уравнений (4.30) – (4.34))														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
K_1	4	2	3	5	6	7	4	2	3	7	6	5	4	2	3
K_2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.4	0.5	0.3	0.6	0.6	0.7	0.1	0.5	0.3	0.4	0.8
r_1	0.2	0.1	0.4	0.3	0.2	0.1	0.4	0.3	0.2	0.1	0.2	0.5	0.3	0.4	0.5
q_1	2.0	2.2	2.4	2.6	2.7	2.1	2.3	2.5	2.0	2.2	2.4	2.6	2.6	2.7	2.1
q_2	1.1	1.3	1.1	1.2	1.3	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.4	1.3	1.2
g_0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
f_0	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
K_g	0.6	0.6	0.7	0.1	0.5	0.3	0.4	0.8	0.6	0.7	0.1	0.5	0.3	0.4	0.8
K_f	0.2	0.3	0.3	0.4	0.4	0.5	0.3	0.2	0.5	0.3	0.4	0.4	0.5	0.3	0.3

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. В соответствии с вашим вариантом задания (табл. 4.4), исследуя случай $\nu = 0$, рассчитайте значение статической ошибки в режиме стабилизации замкнутой системы управления (4.30). С помощью Simulink-модели системы управления (структурная схема которой показана на рис. 4.7) покажите, что теоретический и экспериментальный результаты совпадают.

2. Повторите пп.1 и рассчитайте новое значение коэффициента усиления

K_1 , при котором уже найденную величину статической ошибки можно уменьшить вдвое. Подтвердите это утверждение экспериментально.

Покажите теоретически и продемонстрируйте с помощью Simulink-модели, что рассматриваемая система управления в режиме слежения не является работоспособной.

3. Рассматривая случай $\nu = 1$, рассчитайте величину скоростной ошибки в системе управления (4.30) для режима слежения. Подтвердите, используя Simulink-модель системы управления, эквивалентность теоретического и экспериментального результатов.

Покажите теоретически и продемонстрируйте на Simulink-модели, что рассматриваемая система управления в режиме стабилизации дает нулевую статическую ошибку.

Замечание: предварительно убедитесь, что исследуемая замкнутая система управления устойчива. Если окажется, что замкнутая система неустойчива, то замените табличное значение параметра K_1 на новое. Предлагаемую замену обоснуйте и используйте в последующих расчетах и моделировании.

4. Повторите пп.3 и покажите, рассчитывая новые значения коэффициента усиления K_1 , что коэффициент усиления разомкнутой системы имеет предельное или критическое значение $K_{\text{крит}}$, т.е. замкнутая система управления при $K_1 K_2 > K_{\text{крит}}$ потеряет устойчивость.

Подтвердите этот вывод с помощью Simulink-модели, рассматривая варианты имитационного моделирования: $K_1 K_2 = K_{\text{крит}}$; $K_1 K_2 > K_{\text{крит}}$.

5. Сделайте выводы на основе сравнительного анализа результатов моделирования.

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ

1. Чем отличается статическая система от астатической и от чего зависит порядок астатизма системы управления?

2. Докажите, что в режиме стабилизации замкнутой системы управления установившаяся ошибка зависит от величины коэффициента усиления разомкнутой статической системы $W_{\text{раз}}(s)$.

3. Докажите, что при стабилизации замкнутой системы управления с астатической $W_{\text{раз}}(s)$, величина установившейся ошибки стремится к нулю.

4. Докажите, что в следящей замкнутой системе управления со статической $W_{\text{раз}}(s)$, величина установившейся ошибки неограниченно возрастает.

5. Докажите, что в замкнутой системе с астатической $W_{\text{раз}}(s)$, величина скоростной ошибки зависит от величины коэффициента усиления разомкнутой системы.

6. При внешних воздействиях $g(t) = 1 + 0.1t$ и $f(t) = 0.2$, определите величину установившейся ошибки в системе управления (рис. 4.7), где

$$W_1(s) = 0.5, \quad W_2(s) = \frac{4}{s(s+1)}.$$

4.5. Исследование нелинейных систем 1-го типа (4 часа).

Цель лабораторной работы – исследование и анализ динамических процессов в нелинейных системах управления 1-го типа.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рассматриваются так называемые нелинейные системы управления 1-го типа со структурой (рис. 4.8) состоящей из двух блоков – линейного (ЛБ) и нелинейного (НБ).

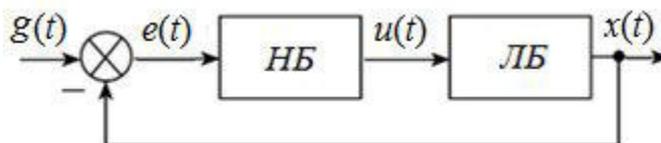


Рис. 4.8. Структура нелинейной системы 1-го типа.

Примерами нелинейных элементов *НБ*, показанными на рис. 4.9, являются "люфт", "зона нечувствительности", "реле (с гистерезисом)" и "насыщение".



Рис. 4.9. Примеры типовых нелинейных блоков в среде simulink.

Математической моделью *ЛБ* служат линейное дифференциальное уравнение или передаточная функция

$$W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}. \quad (4.35)$$

где $R(s) = r_m s^m + \dots + r_1 s + r_0$ и $Q(s) = (s^n + q_{n-1} s^{n-1} + \dots + q_1 s + q_0)$ – соответствующие полиномы.

Изображение процессов на фазовой плоскости. Если уравнения системы управления представлены в нормальной форме, то вектор состояния системы однозначно определяет ее состояние. Каждому состоянию системы в пространстве состояний соответствует точка. Точка, соответствующая текущему состоянию системы, называется изображающей точкой. При изменении состояния изображающая точка описывает траекторию. Эта траектория называется фазовой траекторией. Совокупность фазовых траекторий, соответствующая всевозможным начальным условиям, называется фазовым портретом.

Наглядно фазовую траекторию или фазовый портрет можно представить в случае двухмерного фазового пространства. В фазовой плоскости по осям координат откладываются две переменные (фазовые координаты), однозначно определяющие состояние системы второго порядка.

Метод анализа и синтеза системы управления, основанный на построении фазового портрета, называют методом фазовой плоскости.

Если рассмотреть систему управления 2-го порядка, которая описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= F(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (4.36)$$

то ее решение $x_i = x_i(x^0, t)$, $i=1,2$, при начальном условии $x(t_0) = x^0 = (x_1^0, x_2^0)^T$, представляет собой параметрические уравнения фазовых траекторий, где параметром является время. Построив фазовые траектории по этим уравнениям при различных начальных условиях, получаем фазовый портрет.

Уравнения (4.36) являются дифференциальными уравнениями фазовых траекторий в параметрической форме. Разделив второе уравнение на первое, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{F_1(x_1, x_2)}{x_2}, \quad (4.37)$$

решение которого непосредственно связывает фазовые координаты. Это уравнение будем называть (непараметрическим) *дифференциальным уравнением фазовых траекторий*. Фазовые траектории обладают следующими свойствами. В верхней полуплоскости изображающая точка движется слева направо, так как $\dot{x}_1 = x_2 > 0$ и x_1 возрастает. В нижней полуплоскости, наоборот, изображающая точка движется справа налево, так как $\dot{x}_1 = x_2 < 0$ и x_1 убывает.

Один из примеров simulink-модели нелинейной системы 1-го типа представлен на рис. 4.10, где используется нелинейный элемент типа "квантователь (с одинаковым шагом по уровню)".

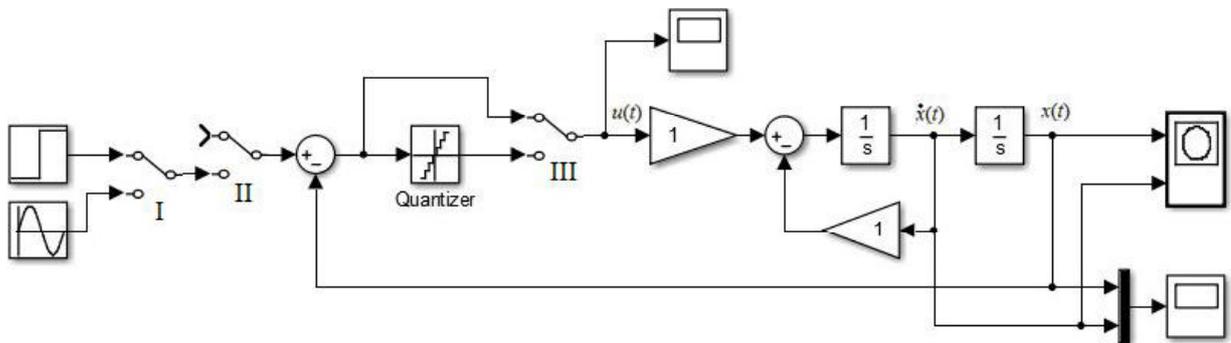


Рис. 4.10. Simulink-модель нелинейной системы 1-го типа с "квантователем".

Для удобства имитационного моделирования в simulink-модель системы управления введены ключи, в частности: ключ I – подключает входной задающий сигнал (ступенчатый или синусоидальный); ключ II – позволяет перевести систему управления в автономный режим (внешнее воздействие отсутствует); ключ III – отключает (подключает) нелинейный блок, превращая систему управления в линейную (нелинейную).

При этом, используя обычные и графические индикаторы, можно наблюдать как переходные процессы, так и фазовые портреты системы управления.

С помощью simulink-модели системы управления, в случае, когда положение всех ключей полностью соответствует изображению на рис. 4.10 (система линейная), можно построить графики (рис. 4.11): а) – фазового портрета; б) и в) – соответственно переменных $u(t)$ и $x(t)$, $\dot{x}(t)$, где $x(t_0) = x^0 = (0.45, 0.45)^T$.

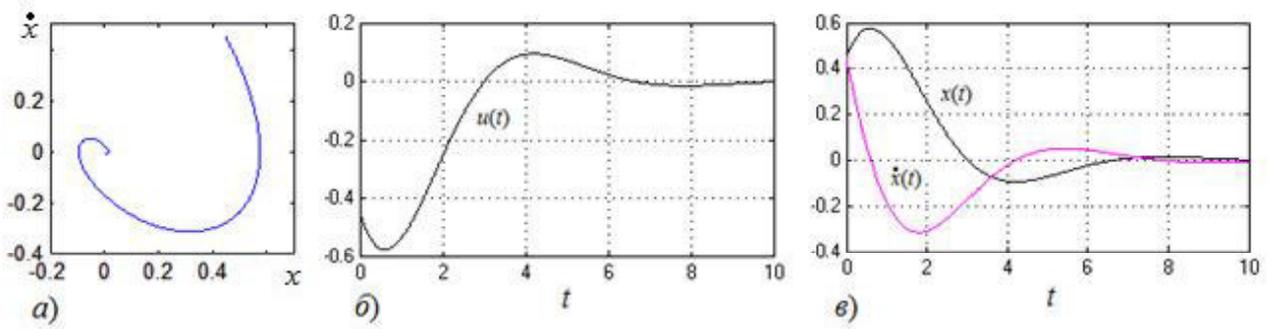


Рис. 4.11. Графики Simulink-модели линейной системы управления в автономном режиме.

Случай, когда ключ III занимает положение противоположное тому, что показано на рис. 4.10 (система управления нелинейная, интервал квантования $\Delta t = 0.2$ с), графики фазового портрета и переменных $u(t)$, $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ имеют вид (при тех же начальных условиях), представленный на рис. 4.12.

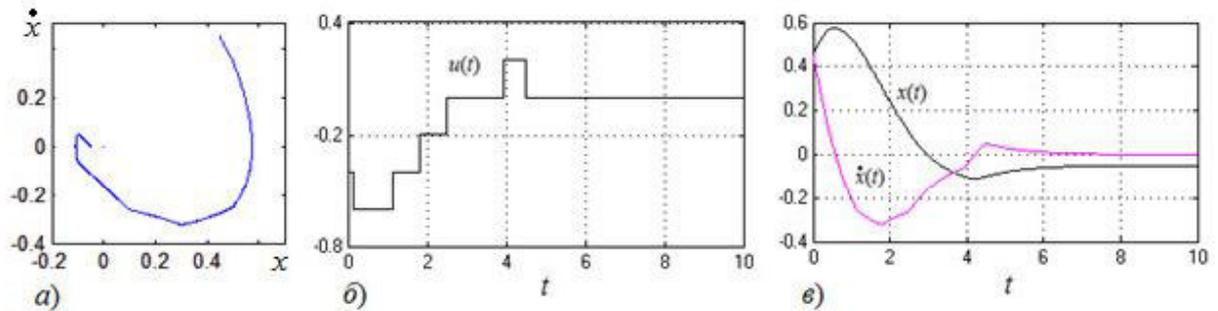


Рис. 4.12. Графики процессов нелинейной системы управления в автономном режиме.

Графики фазового портрета и переменных $u(t)$, $x(t)$ и $\dot{x}(t)$, с начальными условиями $x(t_0) = x^0 = (0.45, 0.45)^T$, построенные в нелинейной системе управления "с квантователем" при входных воздействиях $g(t) = 1(t)$ и $g(t) = \sin(t)$, изображены на рис. 4.13 соответственно а) и б).

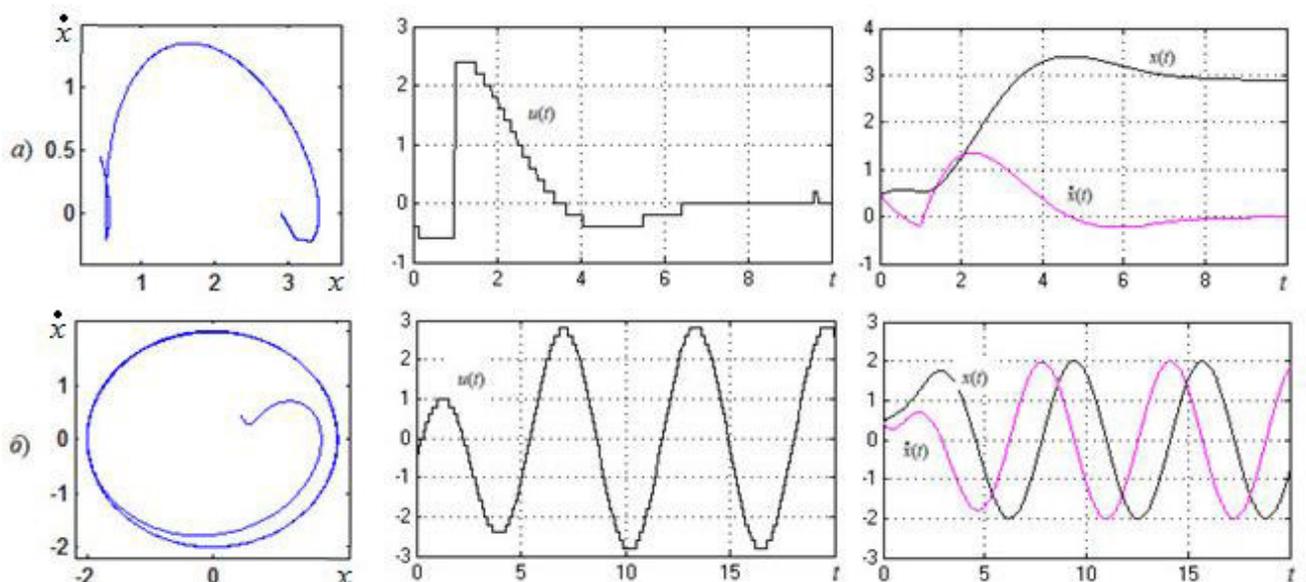


Рис. 4.13. Графики процессов в нелинейной системе управления в режимах стабилизации $g(t) = 1(t)$ и слежения $g(t) = \sin(t)$.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Исследуются динамические процессы, протекающие в нелинейной системе управления 1-го типа, имитационная модель которой приведена на рис. 4.14, где K и T – соответственно коэффициент усиления и постоянная времени линейного блока.

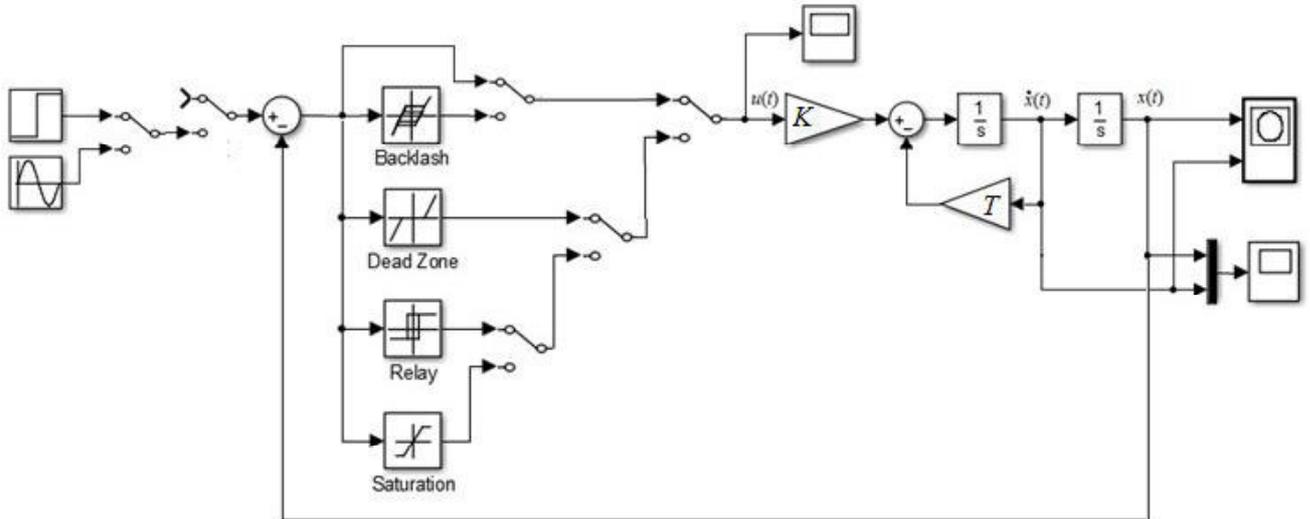


Рис. 4.14. Simulink-модель нелинейной системы 1-го типа.

Таблица 4.5

параметры	№ варианта														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
K	4	2	3	5	6	7	4	2	3	7	6	5	4	2	3
T	1.2	0.9	0.7	0.4	0.4	0.5	0.8	1.6	0.6	0.7	1.5	1.3	0.9	1.4	0.8
x_1^0	0.2	0.1	0.4	0.3	0.2	0.1	0.4	0.3	0.2	0.1	0.2	0.5	0.3	0.4	0.5
x_2^0	2.0	2.2	2.4	2.6	2.7	2.1	2.3	2.5	2.0	2.2	2.4	2.6	2.6	2.7	2.1
ширина люфта	1.1	1.3	1.1	1.2	1.3	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.4	1.3	1.2
начало и конец зоны нечувствительности	-0.1 и 0.1	-0.2 и 0.2	-0.3 и 0.3	-0.4 и 0.4	-0.3 и 0.3	-0.2 и 0.2	-0.1 и 0.1	-0.1 и 0.1	-0.2 и 0.2	-0.3 и 0.3	-0.4 и 0.4	-0.3 и 0.3	-0.2 и 0.2	-0.1 и 0.1	-0.4 и 0.4
значение всех порогов включения	-0.3 и 0.3	-0.4 и 0.4	-0.5 и 0.5	-0.6 и 0.6	-0.2 и 0.2	-0.3 и 0.3	-0.4 и 0.4	-0.5 и 0.5	-0.6 и 0.6	-0.2 и 0.2	-0.3 и 0.3	-0.4 и 0.4	-0.5 и 0.5	-0.6 и 0.6	-0.3 и 0.3
верхний и нижний пороги ограничений	0.6	0.6	0.7	0.1	0.5	0.3	0.4	0.8	0.6	0.7	0.1	0.5	0.3	0.4	0.8

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. В соответствии с вашим вариантом задания (табл. 4.5), используя `simulink`-модель (рис. 4.14) в автономном режиме работы ($g(t) = 0$), постройте графики фазового портрета и переменных $u(t)$, $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ линейной системы управления (нелинейности отключены).

2. Переведите `simulink`-модель из автономного режима в режим управления. Постройте графики фазового портрета и переменных $u(t)$, $x(t)$, $\dot{x}(t)$ линейной системы управления в режимах как стабилизации $g(t) = 1(t)$, так и слежения $g(t) = \sin(t)$.

3. Подключите в `simulink`-модели нелинейность типа "люфт" и постройте графики фазового портрета и переменных $u(t)$, $x(t)$ и $\dot{x}(t)$, для трех режимов нелинейной системы 1-го типа: автономного, $g(t) = 0$; стабилизации, $g(t) = 1(t)$; слежения $g(t) = \sin(t)$.

4. Переключите нелинейность "люфт" на нелинейность типа "зона нечувствительности" и повторите задание пп.3.

5. Переключите нелинейность "зона нечувствительности" на нелинейность типа "реле (с гистерезисом)" и повторите задание пп.3.

6. Переключите нелинейность "реле (с гистерезисом)" на нелинейность типа "насыщение" и повторите задание пп.3.

7. Сделайте выводы на основе сравнительного анализа результатов моделирования.

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ

1. Чем отличие существенной нелинейности от несущественной нелинейности?

2. Какими принципиальными особенностями обладают нелинейные системы по сравнению с линейными?

3. Приведите примеры нелинейных статических характеристик.

4. Какие методы исследования нелинейных систем вам известны?

5. Поясните смысл и содержание метода фазовой плоскости.

П.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ

Рассмотрим дифференциальные уравнения и запишем передаточные функции некоторых динамических элементов различных систем, математические модели которых допускают линеаризацию.

П.1.1. Манипулятор

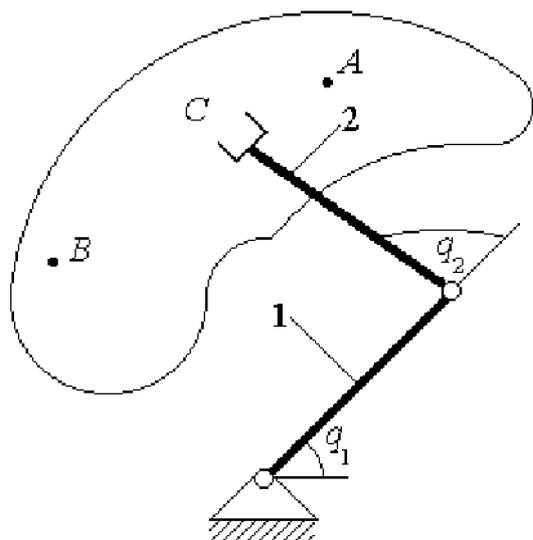


Рис. П.1.1. Схема двухзвенного манипуляционного робота.

Манипуляционный робот (*манипулятор*) – это устройство, воспроизводящее ряд функций, аналогичных функциям рук человека. Манипулятор состоит из звеньев, соединенных между собой определенным образом. Одно звено является основанием (*база*), относительно которого осуществляется отсчет перемещения и ориентация исполнительного органа манипулятора. Группа звеньев, соединяющих его с основанием, образует кинематическую цепь манипулятора. Два соседних звена составляют кинематическую пару, число степеней свободы которой определяется числом независимых движений одного звена пары относительно другого. В большинстве случаев звенья манипулятора образуют кинематические пары пятого класса (число степеней свободы такого манипулятора равно числу

звеньев), в которых относительное движение звеньев определяется одним параметром – углом поворота или перемещением. В первом случае имеет место пара вращательного типа, а во втором – поступательного.

На рис. П.1.1 приведена схема простейшего двухзвенного манипулятора, перемещающего захватное устройство C в плоскости из точки A в точку B, при нулевых начальных и конечных скоростях. Кинематическая цепь манипулятора состоит из звеньев 1 и 2, образующих с основанием и между собой две кинематические пары вращательного типа. Положение захвата на плоскости и конфигурация механизма полностью определяются двумя независимыми углами $q_1 = q_1(t)$ и $q_2 = q_2(t)$, называемыми обобщенными координатами. Исполнительным органом манипулятора является двухзвенный механизм, движения звеньев которого взаимосвязаны, причем каждая степень свободы имеет автономную систему следящего электропривода. При позиционном управлении манипулятором обычно изменяют положение его исполнительного органа.

Движение манипулятора, изображенного на рис. П.1.1, поскольку он является динамическим элементом с конечным числом степеней свободы и обладающим запасом кинетической энергии, может быть описано системой диффе-

ренциальных уравнений Лагранжа второго рода.

Если обозначить производные обобщенных координат манипулятора в виде

$$q'_1 = q'_1(t) \text{ и } q'_2 = q'_2(t),$$

то соответствующая система дифференциальных уравнений запишется как

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial q'_i} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_i} = Q_i, \quad (П.1.1)$$

$$i = 1, 2,$$

где E_K – кинетическая энергия манипулятора; Q_i – обобщенные силы.

В общем случае обобщенные силы:

$$Q_i = \frac{\partial E_{\Pi}}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial q'_i} + f_i(t), \quad (П.1.2)$$

$$i = 1, 2,$$

где E_{Π} – потенциальная энергия манипулятора; R – функция рассеяния энергии; $f_i(t)$ – внешние силы, приложенные к манипулятору.

Кинетическая энергия E_K представляет собой квадратичную положительно определенную форму от обобщенных скоростей

$$E_K = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 m_{i,j} q'_i q'_j. \quad (П.1.3)$$

Потенциальная энергия E_{Π} является некоторой функцией обобщенных координат системы. Функция рассеяния, или диссипативная функция R характеризует собой скорость рассеяния энергии в манипуляторе и зависит от обобщенных скоростей. Обобщенные диссипативные силы

$$Q_{R_i} = \frac{\partial R}{\partial q'_i} \quad (П.1.4)$$

можно определить по формуле

$$Q_{R_i} = -k_i f(q'_i) \frac{|q'_i|}{q'_i}, \quad (П.1.5)$$

где функция $f(x'_i) = 1$ – в случае сухого трения и $f(x'_i) = x'_i$ – в случае вязкого трения. Из формулы (П.1.5) следует, что диссипативная сила направлена противоположно вектору скорости x'_i и равна либо постоянной величине (в случае сухого трения), либо пропорциональна скорости x'_i (в случае вязкого трения). Диссипативная функция в соответствии с формулами (П.1.4) и (П.1.5) принимает вид

$$R = \sum_{i=1}^2 k_i \int_0^{q'_i} f_i(u) du. \quad (П.1.6)$$

Можно показать, что уравнения Лагранжа второго рода, описывающие движение двухзвенного манипулятора, являются нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка, которые без учета моментов трения в шарнирах и веса груза имеют вид

$$\begin{cases} a_{11} \frac{d^2 q_1(t)}{dt^2} + a_{12} \frac{d^2 q_2(t)}{dt^2} = M_1, \\ a_{21} \frac{d^2 q_1(t)}{dt^2} + a_{22} \frac{d^2 q_2(t)}{dt^2} = M_2, \end{cases} \quad (\text{П.1.7})$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_1 l_1^2 + J_1 + 4m_2 l_1^2 + m_2 l_1 l_2 \cos q_2 + a_{22}, \quad a_{22} = m_2 l_2^2 + J_2, \\ a_{12} &= 2m_2 l_1 l_2 \cos q_2 + a_{22}, \quad a_{21} = a_{12}, \quad J_1 = m_1 l_1^2 / 3, \quad J_2 = m_2 l_2^2 / 3, \\ M_1 &= 2m_2 l_1 l_2 (q'_2)^2 \sin q_2 + 4m_2 l_1 l_2 q'_1 q'_2 \sin q_2 + M_{ДВ1} l_1 + \\ &+ M_{P11} + M_{P21}, \quad M_2 = M_{ДВ2} l_2 + M_{P22} - 2m_2 l_1 l_2 (q'_2)^2 \sin q_2, \\ M_{P11} &= -P_1 l_1 \cos q_1, \quad M_{P21} = -P_2 (2l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)), \\ M_{P22} &= -P_2 l_2 \cos(q_1 + q_2), \end{aligned} \quad (\text{П.1.8})$$

где нелинейные коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{21} и a_{22} являются функциями обобщенных координат $q_1(t)$, $q_2(t)$ и их производных. В уравнениях (П.1.7), (П.1.8) были приняты следующие обозначения: m_1 и m_2 – массы 1-го и 2-го звеньев; $2l_1$, $2l_2$ – длины звеньев; J_1 , J_2 – моменты инерции звеньев; $M_{ДВ1}$, $M_{ДВ2}$ – моменты, создаваемые двигателями; M_{P11} , M_{P21} – моменты, создаваемые в 1-м шарнире весом звеньев; M_{P22} – моменты, создаваемые в 2-м шарнире весом 2-го звена.

В практике проектирования систем управления манипуляторами достаточно широкое распространение получил метод, основанный на использовании так называемой *выделенной следящей системы* (механическая передача "плюс" электропривод), т.е. системы с одной степенью свободы, когда явление взаимодействия систем не учитывается. Рассмотрим еще одну математическую модель манипулятора, но более простую – в виде системы с одной степенью свободы, отражая некоторые специфические особенности работы манипуляторов при упругих механических передачах.

Обычно для передачи движения от исполнительного двигателя к нагрузке, по соответствующей степени подвижности, используется механическая передача, которая может обладать существенными особенностями: упругостями, люфтами, переменными сухими и вязкими трениями и т.п. Например, механическая передача является упругой, если соответствующая степень подвижности удалена от моторного блока, т.е. когда исполнительный двигатель не компонуется непосредственно на каждой степени свободы и передача движений осуществляется при помощи валиков, тросов или карданных передач. Каждый из этих элементов обладает существенными упругими деформациями. В силу этого механическую передачу нельзя рассматривать как некоторую статическую нагрузку, действующую на валу исполнительного двигателя, поскольку в ней протекают динамические процессы. Следовательно, механическая передача с действующими силами представляет собой отдельный элемент выделенной следящей системы.

Принципиальная схема механической передачи с упругой деформацией кинематической передачи, при наличии вязкого трения на валу нагрузки, показана на рис. П.1.2, где используются следующие обозначения: J – момент инерции

ротора кинематической передачи; $M_{ДВ}$ – момент, развиваемый двигателем; $M_{ДВ}$ – передаваемый нагрузке крутящий момент; J_H – момент инерции нагрузки и кинематической передачи; $q_{ДВ}$ – угол поворота вала двигателя; q_H – угол поворота вала нагрузки; γ – величина упругой деформации в кинематической передаче; ρ – коэффициент упругости кинематической передачи; χ – коэффициент, учитывающий потери на деформацию; i_P – передаточное редуктора; $M_{ВН}$ – внешний нагрузочный момент; M_C – момент вязкого сопротивления движению вала нагрузки; $M_{СТ}$ – статический момент, определяемый весом перемещаемого груза и весом кинематических звеньев исполнительного органа ($M_{СТ}$ нелинейным образом зависит от углов поворота каждой степени свободы).

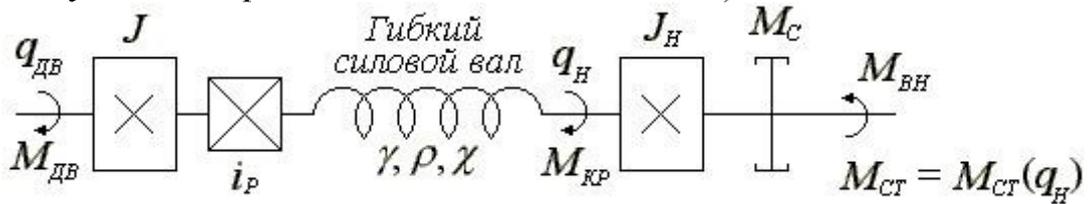


Рис. П.1.2. Схема упругой механической передачи манипулятора.

В общем случае силы и моменты, передаваемые от одной сосредоточенной массы к другой, являются нелинейными функциями упругой деформации. Если же рассматривается некоторый квазистационарный режим работы манипулятора, то изменение упругой деформации гибкого вала от крутящего момента можно описать линейным уравнением

$$\mu\chi \frac{d\gamma(t)}{dt} + \mu\chi\gamma(t) = M_{КР}(t), \quad (\text{П.1.9})$$

где μ – коэффициент, характеризующий относительное уменьшение жесткости гибкого вала при кручении. Кроме того, изменение упругой деформации $\gamma(t)$ описывается соотношением

$$\gamma(t) = \frac{q_{ДВ}(t)}{i_P} - q_H(t). \quad (\text{П.1.10})$$

Поскольку уравнение равновесия моментов на валу нагрузки имеет вид

$$M_{КР} = M_{ДВ} + M_C + M_{ВН} + M_{СТ}, \quad (\text{П.1.11})$$

$$M_{ДВ} = J_H \frac{d^2 q_H(t)}{dt^2}, \quad M_C = f_{ВТ} \frac{dq_H(t)}{dt},$$

где $f_{ВТ}$ – коэффициент вязкого трения на валу нагрузки, то с учетом соотношений (П.1.9) и (П.1.10) уравнение (П.1.11) можно представить в виде

$$J_H \frac{d^2 q_H(t)}{dt^2} + (f_{ВТ} + \mu\chi) \frac{dq_H(t)}{dt} + \mu\rho q_H(t) =$$

$$= \frac{\mu\chi}{i_P} \frac{dq_{ДВ}(t)}{dt} + \frac{\mu\rho}{i_P} q_{ДВ}(t) - M_{ВН} - M_{СТ}. \quad (\text{П.1.12})$$

Допустим, что внешнее возмущение отсутствует $M_{ВН} = 0$, а статический момент описывается равенством $M_{СТ} = K_{СТ} q_H$, $K_{СТ} = \text{const}$, тогда уравнение манипулятора (П.1.12) можно записать в первой форме записи

$$T_1 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = K \left(T_3 \frac{du(t)}{dt} + u(t) \right), \quad (\text{П.1.13})$$

используя следующие обозначения:

$$x(t) = q_H(t), \quad u(t) = q_{ДВ}(t), \quad T_1 = \frac{J_H}{K_{СТ} + \mu\rho}, \quad T_2 = \frac{f_{ВТ} + \mu\chi}{K_{СТ} + \mu\rho}, \quad T_3 = \frac{\chi}{\rho}, \quad K = \frac{\mu\rho}{i_P(K_{СТ} + \mu\rho)}.$$

Во второй форме записи (при нулевых начальных условиях) уравнение манипулятора (П.1.13) будет иметь вид

$$x(s) = \frac{K(T_3 s + 1)}{T_1 s^2 + T_2 s + 1} u(s). \quad (\text{П.1.14})$$

П.1.2. Центробежный маятник

Центробежный маятник применяется как чувствительный элемент (*датчик*) некоторых систем управления. Схема маятника изображена на рис. П.1.3, где входной величиной является угловая скорость $\omega = \omega(t)$, а выходной – перемещение $z = z(t)$ платформы.

При увеличении скорости вращения шары под действием центробежной силы расходятся и перемещают платформу. На платформу воздействуют также сила упругости пружины, сила демпфирования и силы инерции.

Введем обозначения: c – коэффициент жесткости пружины; k – коэффициент вязкого трения; m – масса шара; M – масса частей, участвующих в поступательном движении вдоль оси OZ ; ω – угловая скорость вала; f_0 – сила предварительного поджатия пружины.

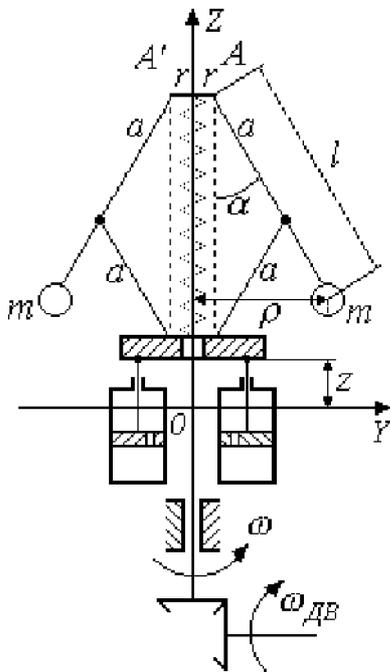


Рис. П.1.3. Схема центробежного маятника.

Для составления дифференциального уравнения центробежного маятника воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода (П.1.1). В качестве обобщенной координаты z_i выберем выходную координату – перемещение платформы z . Найдем выражение для кинетической энергии E_K , потенциальной E_K и диссипативной функции R центробежного маятника.

Из рис. П.1.3 видно, что расстояния ρ и z определяются по формулам

$$\rho = r + l \sin \alpha,$$

$$z = 2a(1 - \cos \alpha).$$

Кинетическая энергия системы описывается соотношением

$$E_K = E_{K_1} + E_{K_2} + E_{K_3},$$

где E_{K_1} – кинетическая энергия шаров во вращательном движении вокруг оси OZ ; E_{K_2} – кинетическая энергия шаров во вращательном движении вокруг точек A и A' ; E_{K_3} – кинетическая энергия масс в поступательном движении

вдоль оси OZ . Имеем:

$$E_{K_1} = \frac{2m\omega^2 \rho^2}{2} = m\omega^2(r + l \sin \alpha)^2 = m\omega^2 \left(r + \frac{1}{2a} \sqrt{z(4a-z)} \right)^2, \quad (\text{П.1.15})$$

$$E_{K_2} = \frac{2ml^2(\alpha')^2}{2} = \frac{ml^2(z')^2}{z(4a-z)}, \quad (\text{П.1.16})$$

$$E_{K_3} = \frac{M(z')^2}{2}. \quad (\text{П.1.17})$$

Потенциальная энергия маятника определяется суммой

$$E_{II} = E_{II_1} + E_{II_2} + E_{II_3},$$

где E_{II_1} – потенциальная энергия масс, движущихся параллельно оси OZ ; E_{II_2} – потенциальная энергия шаров; E_{II_3} – потенциальная энергия пружины. В данном случае имеем:

$$E_{II_1} = Mgz, \quad E_{II_2} = 2mgl(1 - \cos \alpha) = \frac{mglz}{a}, \quad E_{II_3} = f_0z + \frac{cz^2}{2}. \quad (\text{П.1.18})$$

Найдем обобщенную диссипативную силу Q_R . Благодаря наличию гидравлического демпфера сила сухого трения по сравнению с силой вязкого трения мала, ею можно пренебречь. Согласно формуле (1.38) получаем

$$Q_R = \frac{\partial R}{\partial z'} = -kz'. \quad (\text{П.1.19})$$

Вычислим значения ряда слагаемых, входящих в уравнение Лагранжа (П.1.1):

$$\frac{\partial E_K}{\partial z'} = \frac{2ml^2 z'}{z(4a-z)} + Mz',$$

$$\frac{\partial E_K}{\partial z} = \frac{m\omega^2 l(2a-z)}{a\sqrt{z(4a-z)}} \left(r + \frac{l}{2a} \sqrt{z(4a-z)} \right) - \frac{2ml^2(z')^2(2a-z)}{z^2(4a-z)^2},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial z'} \right) = Mz'' - \frac{2ml^2(z')^2(4a-2z)}{z^2(4a-z)^2} + \frac{2ml^2 z''}{z(4a-z)},$$

$$\frac{\partial E_{II}}{\partial z} = Mg + \frac{mgl}{a} + f_0 + cz$$

и тогда, подставляя полученные выражения в уравнение (П.1.1), найдем

$$\begin{aligned} & Mz'' - \frac{2ml^2(z')^2(4a-2z)}{z^2(4a-z)^2} + \frac{2ml^2 z''}{z(4a-z)} - \\ & - \frac{m\omega^2 l(2a-z)}{a\sqrt{z(4a-z)}} \left(r + \frac{l}{2a} \sqrt{z(4a-z)} \right) + \frac{2ml^2(z')^2(2a-z)}{z^2(4a-z)^2} = \\ & = -Mg - \frac{mgl}{a} - f_0 - cz - kz', \quad \text{или} \end{aligned}$$

$$z'' \left(M + \frac{2ml^2}{z(4a-z)} \right) - \frac{2ml^2(2a-z)}{z^2(4a-z)^2} (z')^2 + kz' + cz - \frac{ml(2a-z)}{a\sqrt{z(4a-z)}} \left(r + \frac{l}{2a} \sqrt{z(4a-z)} \right) \omega^2 = -Mg - \frac{mgl}{a} - f_0. \quad (\text{П.1.20})$$

Введем следующие обозначения:

$$f_1(z) = M + \frac{2ml^2}{z(4a-z)}, \quad f_2(z) = \frac{2ml^2(2a-z)}{z^2(4a-z)^2}, \quad (\text{П.1.21})$$

$$f_3(z, \omega) = \frac{ml(2a-z)}{a\sqrt{z(4a-z)}} \left(r + \frac{l}{2a} \sqrt{z(4a-z)} \right) \omega^2,$$

при $r = 0$

$$f_3(z, \omega) = \frac{ml^2(2a-z)}{2a^2} \omega^2. \quad (\text{П.1.22})$$

С учетом принятых обозначений уравнение центробежного маятника запишется в виде

$$f_1(z) \frac{d^2z}{dt^2} - f_2(z) \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + k \frac{dz}{dt} + cz - f_2(z, \omega) = -Mg - \frac{mgl}{a} - f_0. \quad (\text{П.1.23})$$

Уравнение (П.1.23) является нелинейным, ему в установившемся состоянии равновесия (z_0, ω_0) соответствует уравнение

$$cz_0 - f_3(z_0, \omega_0) = -f_0 - Mg - \frac{mgl}{a}. \quad (\text{П.1.24})$$

Если относительно состояния равновесия (z_0, ω_0) ввести в рассмотрение малые колебания маятника вида

$$\Delta z = z - z_0, \quad \Delta \omega = \omega - \omega_0, \quad (\text{П.1.25})$$

то в результате разложения в ряд Тейлора нелинейных функций (1.54) получим

$$f_1(z) = f_1(z_0) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} \right)_0 \Delta z + F_1(\Delta z),$$

$$f_2(z) = f_2(z_0) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} \right)_0 \Delta z + F_2(\Delta z), \quad (\text{П.1.26})$$

$$f_3(z, \omega) = f_3(z_0, \omega_0) + \left(\frac{\partial f_3}{\partial z} \right)_0 \Delta z + \left(\frac{\partial f_3}{\partial \omega} \right)_0 \Delta \omega + F_3(\Delta z, \Delta \omega),$$

где функции $F_1(\Delta z)$, $F_2(\Delta z)$, $F_3(\Delta z, \Delta \omega)$ имеют более высокий порядок малости по сравнению со значениями Δz и $\Delta \omega$.

Учитывая соотношения (1.57) – (1.59), уравнение (1.56) можно переписать в виде

$$f_1(z_0) \frac{d^2 \Delta z}{dt^2} + k \frac{d\Delta z}{dt} + \left(c - \left(\frac{\partial f_3}{\partial z} \right)_0 \right) \Delta z =$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial \omega} \right)_0 \Delta \omega + F_4(\Delta z, \Delta z', \Delta z'', \Delta \omega),$$
(П.1.27)

$$F_4(\Delta z, \Delta z', \Delta z'', \Delta \omega) = F_3(\Delta z, \Delta \omega) + F_2(\Delta z)(\Delta z')^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} \right)_0 \Delta z (\Delta z')^2 + f_2(z_0)(\Delta z')^2 - F_1(\Delta z) \Delta z'' - \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} \right)_0 \Delta z \Delta z'',$$
(П.1.28)

имеет более высокий порядок малости по сравнению с Δz , $\Delta z'$, $\Delta z''$ и $\Delta \omega$. Опуская из рассмотрения функцию (П.1.28), уравнение колебаний маятника (П.1.27) в отклонениях от состояния равновесия (z_0 , ω_0) запишем в первой форме записи, вида:

$$T_1 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = Ku(t),$$
(П.1.29)

где, с учетом соотношений (П.1.21), введены следующие обозначения:

$$x(t) = \Delta z, \quad u(t) = \Delta \omega, \quad T_1 = \frac{f_1(z_0)}{c - \left(\frac{\partial f_3}{\partial z} \right)_0} = \frac{M + \frac{2ml^2}{z_0(4a - z_0)}}{c - \left(\frac{\partial f_3}{\partial z} \right)_0},$$

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial z} \right)_0 = -\frac{ml\omega_0^2}{a} \left(\frac{4a^2 r}{\sqrt[3]{z_0(4a - z_0)}} + \frac{l}{2a} \right),$$

$$T_2 = \frac{k}{c - \left(\frac{\partial f_3}{\partial z} \right)_0},$$

$$K = \frac{\left(\frac{\partial f_3}{\partial \omega} \right)_0}{c - \left(\frac{\partial f_3}{\partial z} \right)_0} = \frac{2ml(2a - z_0)}{a\sqrt{z_0(4a - z_0)}} \left(r + \frac{l}{2a} \sqrt{z_0(4a - z_0)} \right) \omega_0.$$

Во второй форме записи и при нулевых начальных условиях уравнение колебаний маятника (П.1.29) будет иметь вид

$$x(s) = \frac{K}{T_1 s^2 + T_2 s + 1} u(s).$$
(П.1.30)

П.1.3. Ресивер

Общий вид ресивера показан на рис. П.1.4. Рассмотрим принцип его действия. На входе и выходе ресивера установлены заслонки 1 и 2, соответственно с

сечениями S_1 и S_2 . Газ от компрессора под давлением P_1 , большим критического, поступает через сечение S_1 в ресивер объема V , в котором устанавливается давление P . В этом случае истечение газа через сечение S_1 является сверхкритическим. Одновременно газ через сечение S_2 поступает к потребителю под давлением P_2 , которое меньше критического. При этом истечение через S_2 будет докритическим.

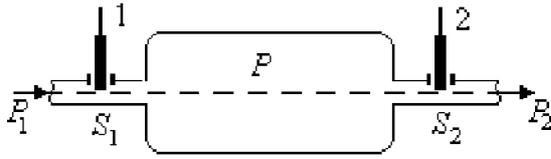


Рис. П.1.4. Общий вид ресивера.

В ресивере при $P_1^*, P_2^* = const, S_1^*, S_2^* = const$ имеет место установившейся режим $P = P^* = const$.

В соответствии с законами гидротермодинамики уравнение динамики ресивера (при постоянной температуре газа) имеет вид

$$\frac{V}{RQ_A} \frac{dP}{dt} = G_1 - G_2, \quad (\text{П.1.31})$$

где R – постоянная Клайперона; Q_A – абсолютная температура газа; G_1 и G_2 – весовые расходы газа через сечения S_1 и S_2 .

При сверхкритическом истечении газа через сечение S_1 весовой расход определяется по формуле

$$G_1 = \mu S_1 \sqrt{\frac{2gk_0}{k_0 + 1} \left(\frac{2}{k_0 + 1} \right)^{\frac{2}{k_0 - 1}} \frac{P_1}{V_1}}, \quad (\text{П.1.32})$$

здесь μ – коэффициент расхода через сечение S_1 ; k_0 – показатель адиабаты газа; V_1 – удельный (отнесенный к массе) объем газа в сечении S_1 . Учитывая соотношение $V_1 P_1 = RQ_A$, уравнение (П.1.32) можно представить в виде

$$G_1 = \frac{\mu K_1 P_1}{\sqrt{RQ_A}} S_1, \quad K_1 = \sqrt{\frac{2gk_0}{k_0 + 1} \left(\frac{2}{k_0 + 1} \right)^{\frac{2}{k_0 - 1}}}. \quad (\text{П.1.33})$$

Для докритического истечения газа через сечение S_2 весовой расход определяется выражением

$$G_2 = \mu S_2 \sqrt{\frac{2gk_0}{k_0 - 1} \left(\left(\frac{P_2}{P} \right)^{\frac{2}{k_0}} - \left(\frac{P_2}{P} \right)^{\frac{k_0 + 1}{k_0}} \right) \frac{P}{V}}, \quad (\text{П.1.34})$$

которое более компактно можно переписать следующим образом:

$$G_2 = \frac{\mu K_2}{\sqrt{RQ_A}} S_2 \sqrt{P(P - P_2)}, \quad (\text{П.1.35})$$

$$K_2 = \sqrt{\frac{2gk_0}{k_0 - 1} \frac{P}{P - P_2} \left(\left(\frac{P_2}{P} \right)^{\frac{2}{k_0}} - \left(\frac{P_2}{P} \right)^{\frac{k_0 + 1}{k_0}} \right)}.$$

Коэффициент K_2 в уравнении (П.1.35), в отличие от K_1 из соотношения (П.1.33), зависит от P и в общем случае является переменным, однако при небольших ва-

риациях P значение коэффициента K_2 можно считать квазистационарным, т.е. $K_2 \approx const$, что хорошо согласуется с практикой.

Подставляя выражения (П.1.33), (П.1.35) в уравнение (П.1.31), получаем

$$\frac{V}{RQ_A} \frac{dP}{dt} = \frac{\mu K_1 P_1}{\sqrt{RQ_A}} S_1 - \frac{\mu K_2}{\sqrt{RQ_A}} S_2 \sqrt{P(P - P_2)}. \quad (\text{П.1.36})$$

Уравнение (П.1.36) нелинейное, но при $P_1, P_2 = const$ и неподвижном положении задвижек $S_1^*, S_2^* = const$ в ресивере возникает установившийся режим $P^* = const$, поэтому если ввести в рассмотрение малые отклонения

$$\Delta S_1 = S_1 - S_1^*, \quad \Delta S_2 = S_2 - S_2^*, \quad \Delta P = P - P^*, \quad (\text{П.1.37})$$

то можно линеаризовать уравнение (1.69) и представить его в виде

$$\begin{aligned} \frac{V}{RQ_A} \frac{d\Delta P}{dt} = & \frac{\mu K_1 P_1}{\sqrt{RQ_A}} S_1^* - \frac{\mu K_2}{\sqrt{RQ_A}} S_2^* \sqrt{P^*(P^* - P_2)} + \\ & + \frac{\mu K_1 P_1}{\sqrt{RQ_A}} \Delta S_1 - \left(\frac{\mu K_2}{\sqrt{RQ_A}} \sqrt{P^*(P^* - P_2)} \right) \Delta S_2 - \\ & - \frac{\mu K_2}{2\sqrt{RQ_A}} S_2^* \left(\sqrt{\frac{P^* - P_2}{P^*}} + \sqrt{\frac{P^*}{P^* - P_2}} \right) \Delta P. \end{aligned} \quad (\text{П.1.38})$$

Поскольку установившийся режим в ресивере описывается уравнением

$$\frac{\mu K_1 P_1}{\sqrt{RQ_A}} S_1^* = \frac{\mu K_2}{\sqrt{RQ_A}} S_2^* \sqrt{P^*(P^* - P_2)}, \quad (\text{П.1.39})$$

то, вычитая уравнение (П.1.39) из уравнения (П.1.38), можно получить следующее уравнение динамики ресивера в отклонениях:

$$\begin{aligned} \frac{VP^*}{RQ_A} \frac{d\Delta P}{P^* dt} + \frac{\mu K_2 S_2^* P^* (2P^* - P_2)}{2\sqrt{RQ_A} P^* (P^* - P_2)} \frac{\Delta P}{P^*} = \\ = \frac{\mu K_1 P_1 S_1^*}{\sqrt{RQ_A}} \frac{\Delta S_1}{S_1^*} - \left(\frac{\mu K_2 S_2^*}{\sqrt{RQ_A}} \sqrt{P^*(P^* - P_2)} \right) \frac{\Delta S_2}{S_2^*}. \end{aligned} \quad (\text{П.1.40})$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x = \frac{\Delta P}{P^*}, \quad u_1 = \frac{\Delta S_1}{S_1^*}, \quad u_2 = \frac{\Delta S_2}{S_2^*}, \quad T_0 = \frac{\frac{VP^*}{RQ_A}}{\frac{\mu K_2 S_2^* P^* (2P^* - P_2)}{2\sqrt{RQ_A} P^* (P^* - P_2)}}, \\ K_1 = \frac{\frac{\mu K_1 P_1 S_1^*}{\sqrt{RQ_A}}}{\frac{\mu K_2 S_2^* P^* (2P^* - P_2)}{2\sqrt{RQ_A} P^* (P^* - P_2)}}, \quad K_2 = - \frac{\frac{\mu K_2 S_2^*}{\sqrt{RQ_A}} \sqrt{P^*(P^* - P_2)}}{\frac{\mu K_2 S_2^* P^* (2P^* - P_2)}{2\sqrt{RQ_A} P^* (P^* - P_2)}}, \end{aligned}$$

тогда уравнение (1.73), записанное в первой форме записи, можно представить в виде

$$T_0 \frac{dx}{dt} + x = K_1 u_1 + K_2 u_2. \quad (\text{П.1.41})$$

Отметим, что уравнение (П.1.41) записано относительно двух входных воздействий, если же, например, со стороны компрессора положение заслонки 1 во времени не изменяется, т.е. $\Delta S_1 = 0$, $u_1 = 0$, то в этом случае получим

$$T_0 \frac{dx}{dt} + x = K_2 u_2. \quad (\text{П.1.42})$$

Во второй форме записи уравнение (П.1.41) имеет вид

$$x(s) = \frac{K_1}{T_0 s + 1} u_1(s) + \frac{K_2}{T_0 s + 1} u_2(s). \quad (\text{П.1.43})$$

П.1.4. Гидравлический сервомотор

Схема гидравлического сервомотора с поступательно движущимся поршнем изображена на рис. П.1.5а, где z_M , z_3 – перемещения поршня сервомотора и золотника; P_H , P_B – давления масла в полостях сервомотора (здесь и далее индексы H и B указывают соответственно на положения *нижнее* и *верхнее*); P_{II} , $P_A = \text{const}$ – давления масла от источника питания и на сливе, причем $P_A = 0$.

Рассмотрим принцип действия сервомотора с золотниковым управлением. К цилиндрическому золотнику 1 (см. рис. 1.14а) по трубе 3 от источника питания подается масло под давлением.

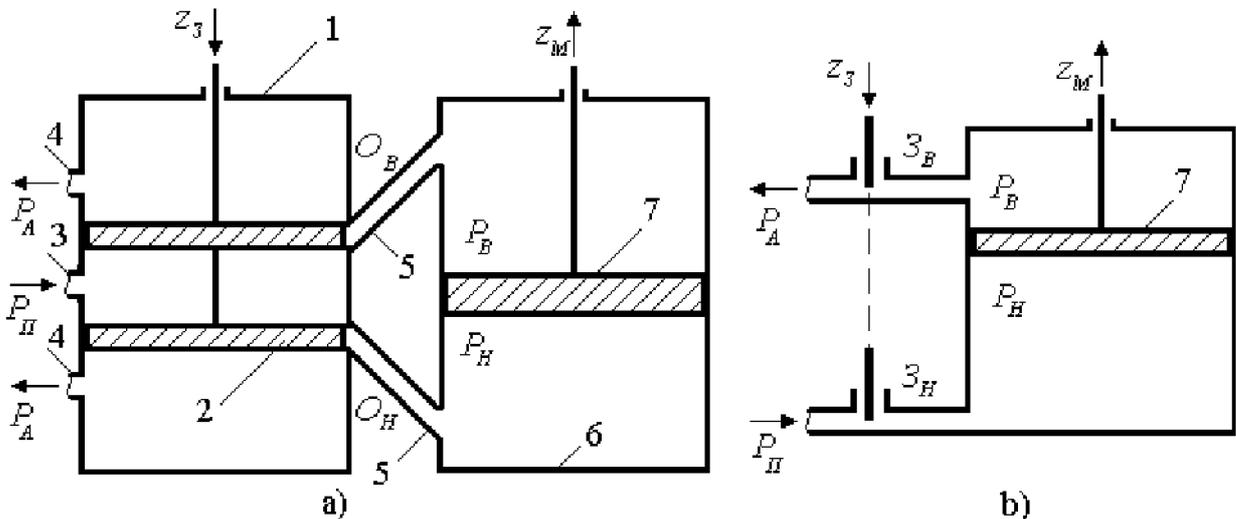


Рис. П.1.5. Исходная и эквивалентная схемы гидравлического сервомотора.

Подвижная часть золотника может перемещаться вверх и вниз. Золотник состоит из двойного поршня, выполненного так, что в среднем положении он закрывает одновременно оба окна O_B и O_H , соединяющих через каналы 5 золотник с цилиндром 6 сервомотора. При смещении поршня золотника вниз от своего нейтрального положения нижняя полость цилиндра сервомотора соединяется через золотник с напорной трубой 3, а верхняя – со сливной трубой 4. Благодаря наличию разности давлений, образующихся по обе стороны поршня 7, последний

будет двигаться вверх. При перемещении поршня золотника вверх относительно нейтрального положения поршень получает обратное направление движения.

Составим уравнение динамики сервомотора при движении поршня 7 вверх (см. рис. П.1.5б), где золотник заменен задвижками $З_B$ и $З_H$, жестко связанными между собой.

Уравнения гидравлики, описывающие расход масла Q_H , протекающего через дросселируемое отверстие (задвижка $З_H$) и Q_B , вытекающего через сливное отверстие (задвижка $З_B$), имеют вид

$$Q_H = \mu b z_3 \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (P_{II} - P_H)}, \quad Q_B = \mu b z_3 \sqrt{\frac{2g}{\gamma} P_B}, \quad (\text{П.1.44})$$

где μ – коэффициент расхода при полностью открытых отверстиях; b – ширина отверстия; z_3 – перемещение задвижки; γ – плотность масла. Из уравнений (П.1.44) следует, что при $Q_H^* = Q_B^*$, т.е. в установившемся режиме, между давлениями установится соотношение

$$P_{II} - P_H^* = P_B^*. \quad (\text{П.1.45})$$

Запишем уравнения расхода масла в сервомоторе для нижней и верхней полостей

$$Q_H = Q_M + Q_{CH}, \quad Q_B = Q_M - Q_{CB}, \quad (\text{П.1.46})$$

где Q_M – расход, затрачиваемый на перемещение поршня сервомотора; Q_{CH} , Q_{CB} – количества масла, расходуемые на сжатие (*расширение*). Тогда уравнения (П.1.44) можно записать следующим образом:

$$Q_M + Q_{CH} = \mu b z_3 \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (P_{II} - P_H)}, \quad (\text{П.1.47})$$

$$Q_M - Q_{CB} = \mu b z_3 \sqrt{\frac{2g}{\gamma} P_B}.$$

Расход масла через гидравлический цилиндр Q_M определяется формулой

$$Q_M = S z' = S \frac{dz_M}{dt}, \quad (\text{П.1.48})$$

где S – площадь цилиндра; z' – скорость перемещения поршня.

Определим явный вид выражений, описывающих изменение расходов Q_{CH} и Q_{CB} . Для этого, во-первых, введем в рассмотрение коэффициент объемного сжатия

$$\beta = \frac{\Delta V / V}{\Delta P}, \quad (\text{П.1.49})$$

здесь $\Delta V / V$ – относительное уменьшение объема масла при увеличении давления на величину ΔP ; во-вторых, рассмотрим количество сжатой жидкости

$$Q_C = \frac{\Delta V}{\Delta t}; \quad (\text{П.1.50})$$

в-третьих, учитывая равенство (П.1.49) и вычисляя предел при $\Delta t \rightarrow 0$, запишем уравнение (П.1.50) в виде

$$Q_C = V\beta \frac{dP}{dt}. \quad (\text{П.1.51})$$

Динамику изменения расходов Q_{CH} и Q_{CB} , опираясь на выражение (П.1.51), опишем следующим образом:

$$Q_{CH} = V_H\beta \frac{dP_H}{dt}, \quad Q_{CB} = V_B\beta \frac{dP_B}{dt},$$

что с учетом соотношения (П.1.48) позволяет представить уравнения (1.80) в виде

$$\begin{aligned} S \frac{dz_M}{dt} + V_H\beta \frac{dP_H}{dt} &= \mu b z_3 \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (P_{II} - P_H)}, \\ S \frac{dz_M}{dt} - V_B\beta \frac{dP_B}{dt} &= \mu b z_3 \sqrt{\frac{2g}{\gamma} P_B}. \end{aligned} \quad (\text{П.1.52})$$

Уравнения (П.1.52) являются нелинейными, поэтому осуществим их линеаризацию, т.е. ограничимся только первыми членами разложения нелинейных функций в ряд Тейлора, рассматривая следующие отклонения переменных в установившемся режиме

$$\begin{aligned} \Delta P_H &= P_H - P_H^*, \quad \Delta P_B = P_B - P_B^*, \\ \Delta Q_H &= Q_H - Q_H^*, \\ \Delta Q_B &= Q_B - Q_B^*, \quad \Delta z_3 = z_3 - z_3^*, \end{aligned}$$

который опишем в соответствии с уравнениями (П.1.44) в виде

$$\begin{aligned} Q_H^* &= \mu b z_3^* \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (P_{II} - P_H^*)}, \\ Q_B^* &= \mu b z_3^* \sqrt{\frac{2g}{\gamma} P_B^*}. \end{aligned} \quad (\text{П.1.53})$$

Исключив слагаемые Q_H^* и Q_B^* при линеаризации уравнений (1.85) соответственно в первом и втором уравнениях, получим следующие уравнения в отклонениях:

$$\begin{aligned} S \frac{dz_M}{dt} + V_H\beta \frac{dP_H}{dt} &= \\ &= \left(\mu b \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (P_{II} - P_H^*)} \right) \Delta z_3 - \left(\mu b z_3^* \sqrt{\frac{2g}{\gamma (P_{II} - P_H^*)}} \right) \Delta P_H, \end{aligned} \quad (\text{П.1.54})$$

$$\begin{aligned} S \frac{dz_M}{dt} - V_B\beta \frac{dP_B}{dt} &= \\ &= \left(\mu b \sqrt{\frac{2g}{\gamma} P_B^*} \right) \Delta z_3 + \left(\mu b z_3^* \sqrt{\frac{2g}{\gamma P_B^*}} \right) \Delta P_B. \end{aligned} \quad (\text{П.1.55})$$

Если предположить, что поршень находится в среднем положении $V_B = V_H = V$, то с учетом равенства (П.1.45) для уравнений (1.54) и (1.55), в результате суммирования их левых и правых частей, получим одно уравнение вида

$$2S \frac{d\Delta z_M}{dt} - V\beta \frac{d(\Delta P_H - \Delta P_B)}{dt} =$$

$$= \left(2\mu b \sqrt{\frac{2g}{\gamma}} \right) \Delta z_3 - \left(\mu b z_3^* \sqrt{\frac{2g}{\gamma P_B^*}} \right) (\Delta P_H - \Delta P_B). \quad (\text{П.1.56})$$

Уравнение расходов (П.1.56) можно дополнить уравнением движения поршня сервомотора

$$m \frac{d^2 \Delta z_M}{dt^2} = S(\Delta P_H - \Delta P_B), \quad (\text{П.1.57})$$

где m – масса поршня, штока и других движущихся частей.

Объединение двух уравнений (1.89), (1.90) и исключение промежуточной переменной $(\Delta P_H - \Delta P_B)$ позволяет записать уравнение гидравлического сервомотора следующим образом:

$$\frac{mV\beta}{2S^2} \frac{d^3 \Delta z_M}{dt^3} + \left(\mu b z_3^* \frac{m}{S^2} \sqrt{\frac{g}{\gamma P_B^*}} \right) \frac{d^2 \Delta z_M}{dt^2} + \frac{d\Delta z_M}{dt} = \left(\frac{\mu b}{S} \sqrt{\frac{2gP_B^*}{\gamma}} \right) \Delta z_3, \quad (\text{П.1.58})$$

которое с учетом обозначений

$$x = \Delta z_M, \quad u = \Delta z_3, \quad T = \frac{1}{S} \sqrt{\frac{mV\beta}{2}}, \quad \zeta = \mu b z_3^* \frac{m}{S^2} \sqrt{\frac{g}{\gamma P_B^*}}, \quad K = \frac{\mu b}{S} \sqrt{\frac{2gP_B^*}{\gamma}},$$

где T – постоянная времени; ζ – коэффициент затухания, $0 \leq \zeta < 1$; K – коэффициент передачи гидравлического сервомотора, можно представить в виде

$$T^2 \frac{d^3 x}{dt^3} + 2\zeta T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = Ku. \quad (\text{П.1.59})$$

Во второй форме записи уравнение (1.92) имеет вид

$$x(s) = \frac{K}{s(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1)} u(s). \quad (\text{П.1.60})$$

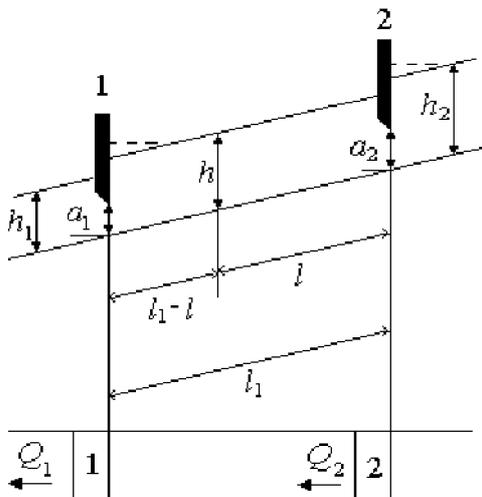


Рис. П.1.6. Длинный бьеф ирригационной системы.

П.1.5. Длинный бьеф

Ирригационные каналы имеют большое количество модификаций.

Схема некоторого участка оросительной сети в виде длинного бьефа – типового ирригационного объекта показана на рис. П.1.6.

Для построения математической модели фрагмента или участка оросительной сети обычно используется уравнение Сен-Венана, описывающее неустановившееся движение воды в канале с помощью дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа

$$J \frac{\partial h_0}{\partial l} = \frac{1}{2g} \frac{\partial v_0^2}{\partial l} + \frac{1}{2g} \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{v_0^2}{C_0^2 R}, \quad \frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{\partial Q_0}{\partial l} = 0, \quad (\text{П.1.61})$$

где R – гидравлический радиус; C_0 – коэффициент Шези; h_0 – глубина воды в канале; w_0 – живое сечение потока воды в канале; Q_0 – расход воды; v_0 – средняя скорость воды; J – уклон канала; l – пространственная координата.

Используя известные результаты, на основании теории волн малой амплитуды можно получить линейное приближение уравнений Сен-Венана, т.е. для выражений (1.94) можно записать следующие линеаризованные уравнения в отклонениях от некоторого установившегося режима

$$\frac{\partial \Delta h}{\partial l} + \frac{1}{g} \frac{\partial \Delta v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial \Delta v}{\partial l} + 2J \frac{\Delta v}{v} + J \left(\frac{2B}{w} - \frac{\chi}{h} \right) \Delta h = 0, \quad (\text{П.1.62})$$

$$B \frac{\partial \Delta h}{\partial t} + w \frac{\partial \Delta v}{\partial l} + vB \frac{\partial \Delta h}{\partial l} = 0,$$

где B – ширина потока поверху; χ – смоченный периметр русла канала.

Уравнения (1.95) описывают неустановившееся движение воды в канале без перегораживающих сооружений, но при их наличии необходимо учитывать граничные условия. Заметим, не вдаваясь в физическую сущность, что для верхнего и нижнего створов канала граничные условия можно определить по соответствующим формулам, обычно представленным в виде стандартных таблиц.

Кроме того, уравнения (П.1.62) можно свести к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям с сосредоточенным запаздыванием по управляющему воздействию – относительному открытию затвора, перегораживающего сооружения: $u = \Delta a/a$.

Известно, что закон относительного изменения глубины наполнения $x = \Delta h/h$ в любом створе канала (изображенного на рис. П.1.6 и представляющего собой в частном случае бьеф значительной протяженности, где обычно пренебрегают влиянием всех отраженных волн, за исключением первой) можно записать в изображениях Лапласа следующим образом:

$$x(s) = \left(\frac{L_1 s + K_1}{T_1 s + 1} (u(s) + x_2(s)) - \frac{L_2 s + K_2}{T_2 s + 1} x_0 \right) \times \left(1 - \frac{L_3 s + K_3}{T_3 s + 1} e^{-\tau_2 s} \right) e^{-\tau_1 s} + x_0, \quad (\text{П.1.63})$$

здесь $x_2 = \Delta h_2/h_2$; $u = \Delta a_2/a_2$ – относительное открытие затвора гидротехнического сооружения; x_0 – начальное значение x ; $T_i, L_i, i=1, 2, 3$ – постоянные времени объекта; K_i – коэффициенты передачи объекта; $\tau_1, \tau_2 = const$ – временные запаздывания. Структурная схема модели (П.1.63) представлена на рис. П.1.7.

Уравнение (П.1.63) может иметь и более простой вид. В частности, если нижележащее сооружение отсутствует или находится на таком расстоянии $l_1 \gg l_1 - l$, что можно пренебречь и первой отраженной волной, то уравнение изменения глубины наполнения в створе наблюдения будет следующим:

$$x(s) = \frac{L_1 s + K_1}{T_1 s + 1} e^{-\tau_1 s} (u(s) + x_2(s)) - \left(\frac{L_2 s + K_2}{T_2 s + 1} e^{-\tau_1 s} - 1 \right) x_0,$$

а при нулевых начальных условиях $x_0 = 0$ получит вид

$$x(s) = \frac{L_1 s + K_1}{T_1 s + 1} e^{-\tau_1 s} u(s) + \frac{L_1 s + K_1}{T_1 s + 1} e^{-\tau_1 s} x_2(s). \quad (\text{П.1.64})$$

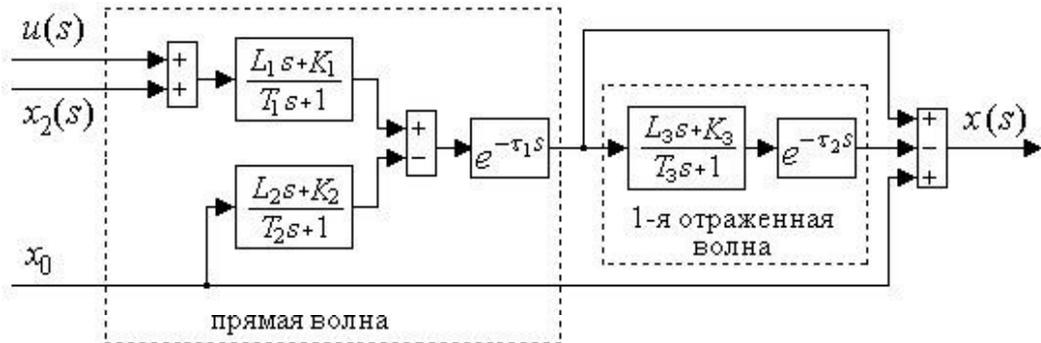


Рис. П.1.7. Структурная схема модели длинного бьефа (П.1.63).

Если же уровень верхнего бьефа во времени является квазистационарным $\Delta h_2 \cong 0$, например, – случай, когда верхним бьефом служит водохранилище, то уравнение (П.1.64) станет еще более простым

$$x(s) = \frac{L_1 s + K_1}{T_1 s + 1} e^{-\tau_1 s} u(s). \quad (\text{П.1.65})$$

В первой форме записи соотношению (П.1.65) соответствует уравнение

$$T_1 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = L_1 \frac{du(t - \tau_1)}{dt} + K_1 u(t - \tau_1). \quad (\text{П.1.66})$$

П.1.6. Печь сжигания (окисления) серы

На рис. П.1.8а представлена технологическая схема процесса получения сернистого ангидрида, основанного на окислении природной серы в форсуночных печах. Предварительно расплавленная сера из сборника 1 насосом 2 подается на форсунки, расположенные в торцевой части печи 4. Сюда же подводится основное количество воздуха, необходимого для окисления серы. С помощью вентилятора 3 дополнительный воздух из атмосферы вводится через патрубок в стенке цилиндрической печи. Образовавшийся сернистый ангидрид поступает в котел-утилизатор 5, где теплота газа используется для получения перегретого пара. Разрежение в печи создается воздуходувками, расположенными в конце технологической линии производства серной кислоты.

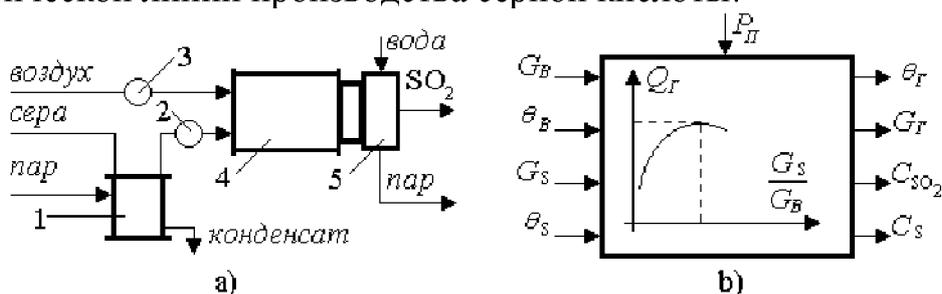


Рис. П.1.8. Технологическая (а) и структурная (б) схемы процесса окисления серы.

Если рассматривать печь в виде структурной схемы, представленной на рис. П.1.8b, то в ней обычно выделяют:

выходные координаты: θ_G и G_G – температура и расход газа печи; C_{SO_2} – концентрация SO_2 в газе; C_S – концентрация серы в газе в результате проскока несгоревшей серы на выход печи;

входные воздействия: θ_B , G_B – температура и расход воздуха; θ_S , G_S – температура и расход серы;

возмущающее воздействие: P_{II} – разрежение в печи (возмущающее воздействие).

При построении математической модели в качестве выходной переменной примем температуру в зоне реакции и рассмотрим тепловой баланс печи сжигания серы.

Статические свойства печи сжигания серы. В установившемся режиме, соответствующем равенству приходящей, уходящей и рассеиваемой теплоты в печи, справедливо равенство

$$\sum_i Q_i = Q_S + Q_B + Q_P - Q_G - Q_{ноо} = 0, \quad (\text{П.1.67})$$

где Q_S , Q_B – теплота, вносимая соответственно серой и воздухом; Q_P – теплота реакции; $Q_{ноо}$ – потери теплоты в окружающую среду. Уравнение теплового баланса печи является одновременно и уравнением статики.

Теплота, *приносимая с поступающей средой*, определяется соотношением

$$\begin{aligned} Q_S &= q_1 + q_2 + q_3, \\ q_1 &= G_S c_{S_{тв}} \theta_{S1}, \quad q_2 = G_S c_{S_{ж}} \theta_{S2}, \quad q_3 = G_S c_{S_{пл}}, \\ \theta_{S1} &= \theta_{S_{пл}} - \theta_{SO_2}, \quad \theta_{S2} = \theta_{S_{тв}} - \theta_{S_{пл}}, \quad \text{или} \\ Q_S &= G_S (c_{S_{тв}} \theta_{S1} + c_{S_{ж}} \theta_{S2} + c_{S_{пл}}), \end{aligned} \quad (\text{П.1.68})$$

где q_1 – теплота нагревания твердой серы от θ_{SO_2} (начальная температура) до $\theta_{S_{пл}}$ (температура плавления); q_2 – теплота нагревания жидкой серы от $\theta_{S_{пл}}$ до $\theta_{S_{тв}}$ (температура максимальной вязкости); q_3 – теплота плавления серы; $c_{S_{тв}}$, $c_{S_{ж}}$ – удельная теплоемкость твердой и жидкой серы; $c_{S_{пл}}$ – удельная теплота плавления серы.

Теплота, *приносимая воздухом*, поступающим в печь, описывается уравнением

$$Q_B = G_B c_B \theta_B, \quad (\text{П.1.69})$$

где c_B – теплоемкость воздуха.

Поскольку реакция окисления серы экзотермическая, то количество теплоты, *выделяемой от теплового эффекта реакции*, соответствует $S + O_2 = SO_2 + \lambda_S$, где λ_S – количество тепла, выделяемого при сжигании одной массовой единицы серы (теплота сгорания серы). Если пренебречь незначительным проскоком серы на выход печи, то количество теплоты, *выделяемой в ходе реакции окисления*, определяется соотношением

$$Q_P = G_S \lambda_S. \quad (\text{П.1.70})$$

Теплота, уносимая из печи реакционным газом, определяется выражением

$$Q_{\Gamma} = G_{\Gamma} c_{\Gamma} \theta_{\Gamma}. \quad (\text{П.1.71})$$

Будем полагать, что *потери теплоты* пропорциональны ее притоку

$$Q_{nom} = \beta_{nom} (Q_S + Q_B + Q_P), \quad (\text{П.1.72})$$

где β_{nom} – коэффициент теплотерь.

Можно показать, что уравнение

$$(1 - \beta_{nom}) [G_S (c_{Sm6} \theta_{S1} + c_{Sжс} \theta_{S2} + c_{Sнл} + \lambda_S) + G_B c_B \theta_B] - G_{\Gamma} c_{\Gamma} \theta_{\Gamma} = 0. \quad (\text{П.1.73})$$

определяет взаимосвязь основных параметров процесса в установившемся режиме, при $G_{\Gamma} = G_B$ его можно переписать в виде

$$\theta_{\Gamma} = \frac{(1 - \beta_{nom})}{c_{\Gamma}} \left[\frac{G_S}{G_B} (c_{Sm6} \theta_{S1} + c_{Sжс} \theta_{S2} + c_{Sнл} + \lambda_S) + c_B \theta_B \right]. \quad (\text{П.1.74})$$

Таким образом, статическая характеристика печи сжигания серы (П.1.74) по основному каналу имеет вид

$$\theta_{\Gamma} = f \left(\frac{G_S}{G_B} \right), \quad (\text{П.1.75})$$

номинальный участок которой является относительно линейным.

Динамические свойства печи сжигания серы. Приращение температуры в зоне реакции прямо пропорционально приращениям входящей и уходящей теплоты и обратно пропорционально тепловой емкости реакционной зоны печи

$$\frac{d\Delta\theta_{\Gamma}}{dt} = \frac{1}{A_{II}} (\Delta Q_S + \Delta Q_B + \Delta Q_P - \Delta Q_{\Gamma} - \Delta Q_{noo}), \quad (\text{П.1.76})$$

где A_{II} – тепловая емкость реакционной зоны печи.

Примем ряд следующих допущений: составы продуктов на входе в печь постоянны; температура уходящего реакционного газа равна температуре в зоне реакции; температура наружной стенки и теплоотдача от наружной стенки в окружающую среду постоянны ввиду низкой теплопроводности печи; состав газа в печи равен составу реакционного газа, в соответствии с этим, согласно формулам (П.1.68) – (П.1.72), приращения ΔQ_i можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta Q_S &= (c_{Sm6} \theta_{S1} + c_{Sжс} \theta_{S2} + c_{Sнл}) \Delta G_S, \\ \Delta Q_B &= c_B \theta_B \Delta G_B = 0, \quad \Delta \theta_P = \lambda_S \Delta G_S, \end{aligned} \quad (\text{П.1.77})$$

$$\Delta Q_{\Gamma} = c_{\Gamma} G_{\Gamma} \Delta \theta_{\Gamma}, \quad \Delta Q_{nom} = \beta_{nom} (c_{Sm6} \theta_{S1} + c_{Sжс} \theta_{S2} + c_{Sнл}) \Delta G_S.$$

В первой форме записи, с учетом соотношений (П.1.77), уравнение (П.1.76) можно записать следующим образом:

$$T \frac{dx}{dt} + x = Ku, \quad x = \Delta \theta_{\Gamma}, \quad u = \Delta G_S, \quad (\text{П.1.78})$$

$$T = \frac{A_{II}}{c_{\Gamma} G_{\Gamma}}, \quad K = \frac{(1 - \beta_{nom})}{c_{\Gamma} G_{\Gamma}} (c_{Sm6} \theta_{S1} + c_{Sжс} \theta_{S2} + c_{Sнл} + \lambda_S). \quad (\text{П.1.79})$$

Следует отметить, что исполнительный механизм по технологическим соображениям расположен на некотором удалении от форсунок, подающих серу в печь. В связи с этим в основном канале управления "расход серы – температура

газа" возникает так называемое транспортное запаздывание τ , т.е. реальный процесс описывается уравнением

$$T \frac{dx}{dt} + x = Ku(t - \tau), \quad (\text{П.1.80})$$

которому во второй форме записи соответствует уравнение

$$x(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-\tau s} u(s). \quad (\text{П.1.81})$$

П.1.7. Двигатель постоянного тока с независимым возбуждением

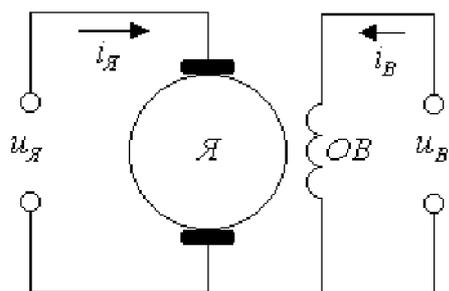


Рис. П.1.9. Схема двигателя постоянного тока с независимым возбуждением.

На рис. П.1.9 схематически показан двигатель постоянного тока с независимым возбуждением. В соответствии со вторым законом Ньютона для вращательного движения уравнение моментов на валу двигателя:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_D - M_C, \quad (\text{П.1.82})$$

где ω – угловая скорость вращения вала двигателя; J – момент инерции движущихся частей, приведенный к валу двигателя.

Пусть $M_D = M_D(\omega, u_A)$, $M_C = M_C(\omega, t)$, т.е. вращающий момент M_D зависит от угловой скорости ω и напряжения u_A , приложенного к якорю, а момент сопротивления M_C зависит от угловой скорости ω и времени t . Эти зависимости обычно задаются аналитически или в виде графиков и определяются типом двигателя, характером нагрузки и т.д. Типичные механические характеристики электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением, отражающие зависимость M_D от ω , приведены на рис. П.1.10, где также показана и характеристика M_C . Так как вращающий момент M_D и момент сопротивления M_C являются нелинейными функциями скорости вращения ω , то и уравнение (П.1.82) – нелинейное.

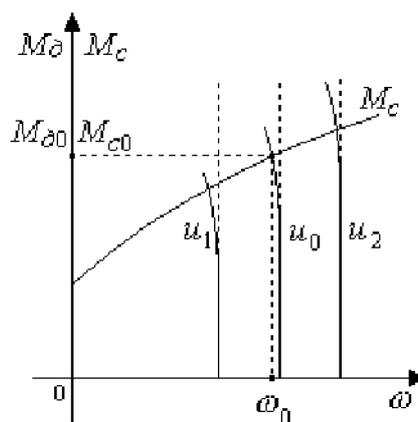


Рис. П.1.10. Механические характеристики двигателя.

Для линеаризации уравнения (П.1.82) перейдем к уравнению в отклонениях от установившегося режима, параметры которого – ω_0 и u_0 – определяются из графиков, приведенных на рис. П.1.10, при выполнении условия

$$M_{D0} = M_{C0}. \quad (\text{П.1.83})$$

Разложим нелинейные функции $M_D = M_D(\omega, u_A)$ и $M_C = M_C(\omega, t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки (ω_0, u_0) . Если в этих разложениях отбросить члены высшего порядка малости относительно приращений $\Delta\omega$ и Δt , то с учетом соот-

ношения $\omega' = \Delta\omega'$ уравнение (П.1.82) в относительных единицах получит следующий линеаризованный вид:

$$J\omega_H \frac{d\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_H}\right)}{dt} + \omega_H \left(\left(\frac{\partial M_C}{\partial \omega} \right)_0 - \left(\frac{\partial M_D}{\partial \omega} \right)_0 \right) \frac{\Delta\omega}{\omega_H} =$$

$$= u_{Я\max} \left(\frac{\partial M_D}{\partial u} \right)_0 \frac{\Delta u_{Я}}{u_{Я\max}} - \Delta M_C,$$
(П.1.84)

где $\Delta M_C = \Delta M_C(t)$ – приращение, учитывающее зависимость момента сопротивления от времени. Введем в рассмотрение обозначения:

$$T = \frac{J}{\left(\left(\frac{\partial M_C}{\partial \omega} \right)_0 - \left(\frac{\partial M_D}{\partial \omega} \right)_0 \right)}, \quad K = \frac{u_{Я\max} \left(\frac{\partial M_D}{\partial u} \right)_0}{\omega_H \left(\left(\frac{\partial M_C}{\partial \omega} \right)_0 - \left(\frac{\partial M_D}{\partial \omega} \right)_0 \right)},$$

$$f(t) = - \frac{\Delta M_C}{\omega_H \left(\left(\frac{\partial M_C}{\partial \omega} \right)_0 - \left(\frac{\partial M_D}{\partial \omega} \right)_0 \right)}, \quad x = \frac{\Delta\omega}{\omega_H}, \quad u = \frac{\Delta u_{Я}}{u_{Я\max}},$$
(П.1.85)

где ω_H – номинальное значение ω , $u_{Я\max}$ – максимальное значение $u_{Я}$. Пусть $f(t) = 0$, тогда уравнение (П.1.84) будет иметь следующий вид:

$$T \frac{dx}{dt} + x = Ku.$$
(П.1.86)

Если выходная величина двигателя – угол поворота \bar{X} , а не скорость x , то, учитывая равенство $x = \bar{X}'$, уравнение (П.1.86) можно представить в виде

$$T \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + \frac{d\bar{x}}{dt} = Ku.$$
(П.1.87)

Соотношениям (П.1.86) и (П.1.87) соответствуют уравнения

$$x(s) = \frac{K}{Ts + 1} u(s),$$
(П.1.88)

$$\bar{x}(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)} u(s).$$
(П.1.89)

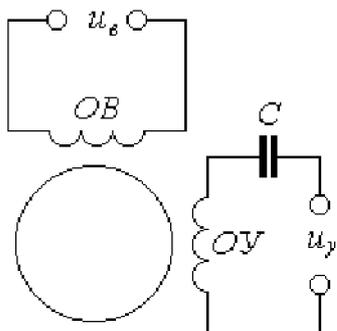


Рис. П.1.11. Схема асинхронного двухфазного двигателя.

П.1.8. Асинхронный двухфазный двигатель

Асинхронный двухфазный двигатель представляет собой электрическую машину переменного тока. В пазах статора двигателя располагаются две обмотки таким образом, что их магнитные поля взаимно перпендикулярны. Одна обмотка подключается к источнику переменного тока с постоянным напряжением и называется *обмоткой возбуждения*, а другая обмотка подключается к источнику переменного тока с изменяющимся напряже-

нием и называется *обмоткой управления*. Ротор двигателя представляет собой полый тонкостенный металлический стакан.

Схема асинхронного двухфазного двигателя показана на рис. П.1.11. Емкость C служит для создания сдвига по фазе в 90° между напряжением в обмотке возбуждения u_δ и обмотке управления u_y , необходимого для создания вращающегося магнитного поля.

Уравнение моментов на валу асинхронного двухфазного двигателя имеет вид уравнения (П.1.82), где $M_D = M_D(u_y, \omega)$ – вращающий момент; M_C – момент сопротивления; J – момент инерции вращающихся частей, приведенный к валу двигателя.

Механические характеристики асинхронного двухфазного двигателя, приведенные на рис. П.1.12, являются нелинейными. Линеаризацию нелинейностей произведем путем их замены параллельными секущими, т.е. в рамках метода секущих (альтернатива разложению в ряд Тейлора, которая позволяет получить хорошее приближение секущей прямой к кривой не только в окрестности установившегося состояния, но и в некоторой области возможных режимов работы линеаризуемого элемента). Уравнение секущих опишем следующим образом:

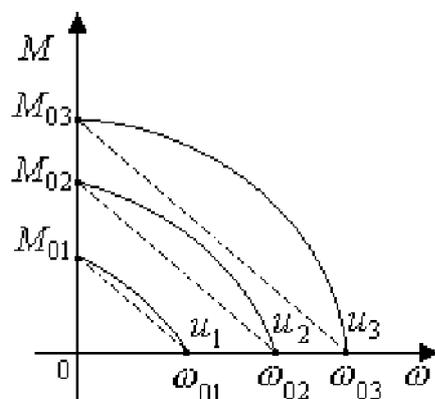


Рис. П.1.12. Механические характеристики двигателя.

$$M_D = M_{D0} - k_1 \omega, \quad 84(\text{П.1.90})$$

где k_1 – коэффициент, зависящий от вида механической характеристики, – например, пусть

$$M_{D0} = k_2 u_y. \quad (\text{П.1.91})$$

С учетом выражений (П.1.90) и (П.1.91) уравнение (П.1.82) получит вид

$$T \frac{dx}{dt} + x = Ku + f(t), \quad (\text{П.1.92})$$

$$x = \omega, \quad u = u_y,$$

$$T = \frac{J}{k_1}, \quad K = \frac{k_2}{k_1}, \quad f(t) = \frac{M_C}{k_1}.$$

Уравнение (1.125) при $f(t) = 0$ и во второй форме записи будет полностью идентично выражению (1.121).

П.1.9. Электронная упругая поляризация диэлектрика

Традиционные модели. Известно, что существуют следующие виды процесса поляризации диэлектриков:

смещение электронных оболочек относительно атомных ядер (упругая электронная поляризация);

смещение положительных ионов относительно отрицательных (упругая

ионная поляризация);

ориентация в электрическом поле полярных молекул, обладающих собственным дипольным моментом (упругая *дипольная* поляризация);

неравномерность распределения заряда в диэлектрике, вызванная тепловым движением частиц (релаксационная *электронная, ионная и дипольная* поляризации).

Количественной мерой результата поляризации материала служит его поляризованность – P , которую можно описать выражением:

$$P = E \sum_{l=1}^H \sum_{i=1}^{K_l} n_{l,i} \alpha_{l,i}, \quad (\text{П.1.93})$$

где E – напряженность электрического поля внутри диэлектрика; l и i – индексы вида поляризационного процесса и разновидности участвующей в нем частицы (H – количество видов, K_l – число разновидностей); $n_{l,i}$ и $\alpha_{l,i}$ – концентрации и поляризуемости частиц каждой разновидности.

Для вычисления диэлектрической проницаемости материала – ε традиционно используются соотношения, связывающие ε с поляризуемостями частиц, составляющих диэлектрик.

Во-первых, это формула Борна:

$$\varepsilon = 1 + \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{l=1}^H \sum_{i=1}^{K_l} n_{l,i} \alpha_{l,i}, \quad (\text{П.1.94})$$

где ε_0 – электрическая постоянная. При выводе этой формулы предполагается, что E определяется напряженностью среднего макроскопического поля E_{cp} в материале:

$$E = E_{cp} = E_0 - E_1 = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0}, \quad (\text{П.1.95})$$

где E_0 – напряженность внешнего поля; E_1 – напряженность деполяризирующего поля, обусловливаемого наведенными поверхностными зарядами. Действительно, если в выражении (1.128) осуществить замену $E_0 = \varepsilon E$, то в результате преобразований получим соотношение:

$$E_{cp} = \frac{P}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}, \quad (\text{П.1.96})$$

из которого, с учетом выражения (П.1.93), будет следовать соотношение (П.1.94).

Формула (П.1.93) обычно применяется для вычисления диэлектрической проницаемости газов, а при ее расчетах для конденсированных диэлектриков используется формула Клаузиуса-Мосотти:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3\varepsilon_0} \sum_{l=1}^H \sum_{i=1}^{K_l} n_{l,i} \alpha_{l,i}. \quad (\text{П.1.97})$$

Здесь, согласно модели Лоренца, величина E определяется в отличие от выражения (П.1.95) не только напряженностью среднего макроскопического поля, но и напряженностями внутренних полей

$$E = E_{cp} + E_2 + E_3, \quad (\text{П.1.98})$$

где E_2 – напряженность поля, создаваемого поляризованными молекулами, окружающими сферу Лоренца, а E_3 – напряженность поля, образованного молекулами, находящимися внутри сферы. Значения напряженностей E_2 и E_3 определяются следующим образом:

$$E_2 = \frac{P}{3\varepsilon_0}, \quad E_3 = 0. \quad (\text{П.1.99})$$

Из выражения (П.1.98), с учетом (П.1.93), (П.1.96), (П.1.99), можно записать соотношение

$$E = \frac{P}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)} + \frac{P}{3\varepsilon_0} = \left(\frac{E}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)} + \frac{E}{3\varepsilon_0} \right) \sum_{l=1}^H \sum_{i=1}^{K_l} n_{l,i} \alpha_{l,i}, \quad (\text{П.1.100})$$

из которого непосредственно вытекает формула Клаузиуса-Мосотти.

При исследовании частотных характеристик материала его диэлектрическую проницаемость принято рассматривать как комплексную функцию $\varepsilon(j\omega)$, т.е. формулы (П.1.93) и (П.1.98) принимают вид функциональных зависимостей:

$$\varepsilon(j\omega) = 1 + \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{l=1}^H \sum_{i=1}^{K_l} n_{l,i} \alpha_{l,i}(j\omega), \quad (\text{П.1.101})$$

$$\frac{\varepsilon(j\omega) - 1}{\varepsilon(j\omega) + 2} = \frac{1}{3\varepsilon_0} \sum_{l=1}^H \sum_{i=1}^{K_l} n_{l,i} \alpha_{l,i}(j\omega), \quad (\text{П.1.102})$$

где $\alpha_{h,k}(j\omega)$ – так называемые комплексные поляризуемости частиц вида:

$$\alpha_{h,k}(j\omega) = \text{Re} \alpha_{h,k}(j\omega) + j \text{Im} \alpha_{h,k}(j\omega),$$

$$\text{Re} \alpha_{h,k}(j\omega) = \frac{q_{h,k}^2}{m_{h,k}} \frac{\omega_{0h,k}^2 - \omega^2}{(\omega_{0h,k}^2 - \omega^2)^2 + 4b_{h,k}^2 \omega^2}, \quad (\text{П.1.103})$$

$$\text{Im} \alpha_{h,k}(j\omega) = -\frac{q_{h,k}^2}{m_{h,k}} \frac{j2b_{h,k}\omega}{(\omega_{0h,k}^2 - \omega^2)^2 + 4b_{h,k}^2 \omega^2}.$$

При получении этих функций используется математическое описание процесса поляризации, в котором участвует отдельно взятая заряженная частица, входящая в состав диэлектрика, помещенного в слабое переменное электрическое поле с напряженностью $E_0(t)$ и представляющее собой обыкновенное линейное дифференциальное уравнение. При этом для набора *электронных* и *ионных* видов поляризации математическая модель будет следующей:

$$\frac{d^2 \mu_{h,k}(t)}{dt^2} + 2b_{h,k} \frac{d\mu_{h,k}(t)}{dt} + \omega_{0h,k}^2 \mu_{h,k}(t) = \frac{q_{h,k}^2}{m_{h,k}} E_0(t), \quad (\text{П.1.104})$$

где h и k – соответственно индексы вида поляризационного процесса и разновидности участвующей в нем частицы; $\mu_{h,k}(t)$ – индуцированный дипольный момент частицы; $\omega_{0h,k}$ и $b_{h,k}$ – собственная частота и коэффициент затухания колебаний частицы; $q_{h,k}$ и $m_{h,k}$ – ее заряд и масса.

Уравнение (П.1.104) справедливо и для набора *дипольных* видов поляриза-

ции, но вместо числовых параметров $m_{h;k}$ и $q_{h;k}$ в этих случаях появляются другие коэффициенты: $J_{h;k}$ – момент инерции диполя относительно оси вращения и произведения $\mu_{0h;k} \sin \beta_{h;k}$, где $\mu_{0h;k}$ – собственный электрический момент полярной молекулы; $\beta_{h;k}$ – угол между направлением $\mu_{0h;k}$ и направлением внешнего поля в начальный момент времени.

Кибернетическая модель. Как уже отмечалось, напряженность поля в диэлектрике E определяется как напряженностями внешнего и деполяризующего полей (E_0 и E_1), так и напряженностями внутренних полей (E_2 и E_3). Однако в отличие от выражения (П.1.98), где использовалось описание поля с напряженностью E_{cp} , напряженность поля внутри диэлектрика E , можно записать в виде:

$$E = E_0 - E_1 + E_2 + E_3 = E_0 - \frac{2}{3\varepsilon_0} \sum_{l=1}^H \sum_{i=1}^{K_l} n_{l,i} \mu_{l,i}, \quad (\text{П.1.105})$$

где $\mu_{l,i} = \alpha_{l,i} E$ – индуцированный дипольный момент частицы (i -й разновидности; l -го вида поляризационного процесса).

Кроме того, при составлении математической модели процесса поляризации диэлектрика будем учитывать как напряженность внешнего поля $E_0(t)$, так и напряженности других действующих полей. Применительно к уравнению вида (П.1.104) это означает, что для его правой части справедлива замена $E_0(t) \rightarrow E(t)$, приводящая к следующей математической модели:

$$\frac{d^2 \mu_{h;k}(t)}{dt^2} + 2b_{h;k} \frac{d\mu_{h;k}(t)}{dt} + \omega_{0h;k}^2 \mu_{h;k}(t) = \frac{q_{h;k}^2}{m_{h;k}} E(t), \quad (\text{П.1.106})$$

где напряженность $E(t)$, согласно соотношению (П.1.105), описывается выражением

$$E(t) = E_0(t) - \frac{2}{3\varepsilon_0} \sum_{l=1}^H \sum_{i=1}^{K_l} n_{l,i} \mu_{l,i}(t). \quad (\text{П.1.107})$$

Тогда с целью построения обобщенной модели процесса поляризации диэлектрика, в результате объединения набора соотношений типа (П.1.106), описывающих все виды поляризации, и выражения (П.1.107) можно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mu_{h;k}(t)}{dt^2} + 2b_{h;k} \frac{d\mu_{h;k}(t)}{dt} + \omega_{0h;k}^2 \mu_{h;k}(t) = \\ = \frac{q_{h;k}^2}{m_{h;k}} \left(E_0(t) - \frac{2}{3\varepsilon_0} \sum_{l=1}^H \sum_{i=1}^{K_l} n_{l,i} \mu_{l,i}(t) \right), \end{aligned} \quad (\text{П.1.108})$$

$$\begin{aligned} h = \overline{1, H}, \\ k = \overline{1, K_l}. \end{aligned}$$

С позиции технической кибернетики, уравнения (П.1.108) представляют собой математическую модель некоторой замкнутой линейной системы управления с отрицательной обратной связью.

Для построения структурной схемы процесса поляризации диэлектрика (рис. П.1.13) уравнения (П.1.106), (1.107) запишем в изображениях и преобразуем к виду:

$$E(s) = E_0(s) - \frac{2}{3\varepsilon_0} \sum_{l=1}^H \sum_{i=1}^{K_l} n_{l,i} \mu_{l,i}(s), \quad \mu_{h,k}(s) = \alpha_{h,k}(s) E(s),$$

$$\alpha_{h,k}(s) = \frac{q_{h,k}^2 / m_{h,k}}{s^2 + 2b_{h,k}s + \omega_{0h,k}^2}, \quad (\text{П.1.109})$$

$$h = \overline{1, H},$$

$$k = \overline{1, K_l}.$$

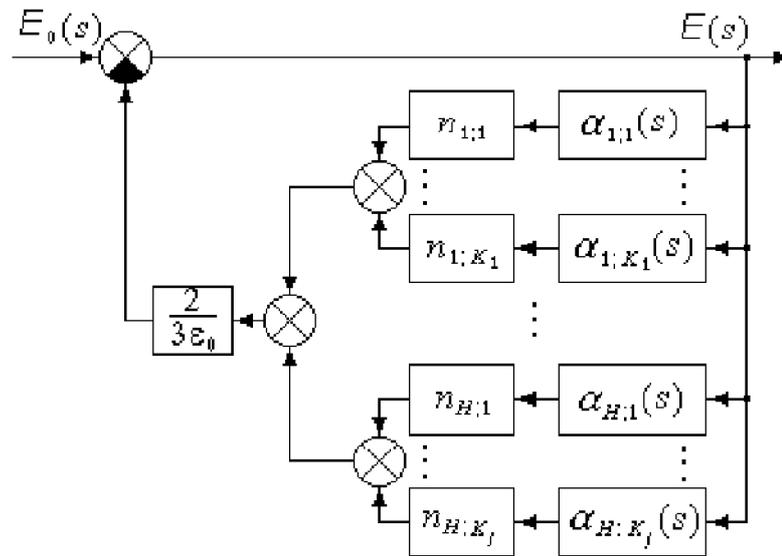


Рис. П.1.13. Структурная схема процесса поляризации диэлектрика.

Важно отметить, что для системы (1.142) можно записать так называемое уравнение *кибернетической связи* типа "выход-вход" между напряженностями внутреннего и внешнего полей, а именно:

$$E(s) = W(s)E_0(s), \quad W(s) = \frac{1}{1 + \frac{2}{3\varepsilon_0} \sum_{l=1}^H \sum_{i=1}^{K_l} n_{l,i} \alpha_{l,i}(s)}, \quad (\text{П.1.110})$$

где $W(s)$ – передаточная функция "связи". Однако что при исследовании свойств диэлектриков соотношение (П.1.110) и ему подобные в физике не применяются, здесь общепринято использовать функцию $\varepsilon(s)$ – комплексную диэлектрическую проницаемость материала, обратную функции $W(s)$, т.е. функциональную зависимость вида

$$\varepsilon(s) = 1 + \frac{2}{3\varepsilon_0} \sum_{l=1}^H \sum_{i=1}^{K_l} n_{l,i} \alpha_{l,i}(s). \quad (\text{П.1.111})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
2. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.2. Линейные системы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
3. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1975.
4. Еремин Е.Л., Еремин И.Е., Ильина Л.В. Основы теории управления. Практикум на ПЭВМ. Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2002.
5. Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н. Matlab 7. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
6. Поршнев С.В. Matlab 7. Основы работы и программирования. Учебник. – М.: ООО "Бином-Пресс", 2011.
7. Еремин Е.Л. Динамические модели и S-моделирование систем. Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2003.
8. Еремин Е.Л., Еремин И.Е., Костюков Н.С. Имитационное моделирование диэлектрической проницаемости конденсированных материалов: ультрафиолетовый и видимый спектры частот. – Благовещенск: Изд-во АмурКНИИ ДВО РАН, 2001.

Евгений Леонидович Еремин,
кафедра информационных и управляющих систем АмГУ,
профессор, доктор техн. наук

Илья Евгеньевич Еремин,
кафедра информационных и управляющих систем АмГУ,
доцент, доктор техн. наук

Системы автоматического управления:
Лабораторный практикум (MatLab-Simulink).