Министерство образования и науки Российской Федерации
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

7

А.П. Филимонова, Т.А. Юрьева,
Н.Н. Двоерядкина

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ: ПЛАНИМЕТРИЯ

Учебно-методическое пособие

Благовещенск

2017

ББК 22.15 Я 73

Ф 53

Рекомендовано

учебно-методическим советом университета

Рецензент:

Голубева И.А, канд.физ.-мат. наук, доц. кафедры физики АмГУ

Филимонова А.П., Юрьева Т.А., Двоерядкина Н.Н.

Ф 53 Аналитическая геометрия: планиметрия. Учебно-методическое пособие / А.П. Филимонова, Н.Н. Двоерядкина, Т.А. Юрьева. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2017. – 51 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов направления подготовки 24.03.01 – «Ракетные комплексы и космонавтика» и специальности 24.05.01 – «Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов». В нем приводятся методические указания для организации самостоятельной работы студентов по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия».

В авторской редакции

© Амурский государственный университет, 2017

ВВЕДЕНИЕ

Одним из важных составляющих аспектов федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования является возросшая роль самостоятельной работы студентов. Каждый студент имеет право самостоятельно формировать индивидуальную образовательную траекторию при организации своей познавательной деятельности в процессе обучения, с учетом исходного уровня готовности к восприятию материала, темпа изучения и понимания материала, своих индивидуально-личностных особенностей.

Предлагаемое учебно-методическое пособие содержит необходимый материал теоретического и практического характера по теме «Аналитическая геометрия на плоскости» для организации самостоятельной работы студентов при освоении дисциплины «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». Пособие может быть использовано как для аудиторной самостоятельной работы по дисциплине, выполняемой на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя, так и для внеаудиторной самостоятельной работы, выполняемой студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

В результате плодотворной работы над материалом данного учебно-методического пособия студенты имеют возможность освоить метод координат на плоскости. Научиться описывать свойства геометрических фигур с помощью уравнений или неравенств и систем уравнений или неравенств. Представлять геометрические фигуры, описанные теми или иными уравнениями. Исследовать форму фигуры или взаимное расположение нескольких фигур.

В учебно-методическом пособии изложены основные вопросы аналитической геометрии на плоскости, такие как, уравнения прямой, линии второго порядка, системы координат на плоскости.

§1. Системы координат на плоскости.

<u>I. Теоретические сведения.</u>

1. Общая декартова (аффинная) система координат
2. Прямоугольная система координат.
3. Координаты точки.
4. Некоторые задачи планиметрии в координатах.

Общая декартова (аффинная) система координат на плоскости определяется некоторой заданной точкой О (начало системы координат) и векторами базиса $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ ($\vec{e}_1 \,||.\, \vec{e}_2$ Оси координат – прямые, проходящие через точку О и сонаправлены векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ соответственно: ОХ – ось абсцисс $\upuparrows$, $\vec{e}_1$,ОУ – ось ординат $\upuparrows$ $\vec{e}_2$ (рис.1)

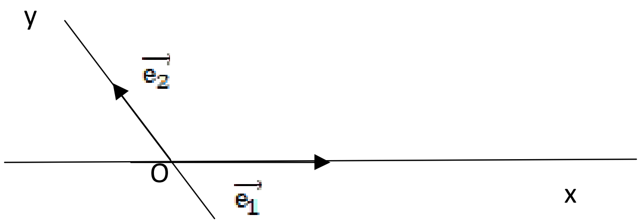

Рис.1

Частным случаем аффинной системы координат является прямоугольная декартова система координат. Эта система характеризуется векторами ортонормированного базиса $\vec{i}, \vec{j}$, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$ $\vec{i} \perp \vec{j}$ (рис.2).

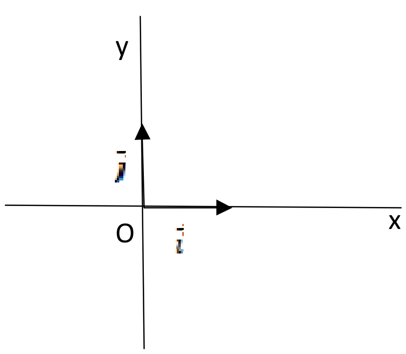

Рис. 2.

Часто систему координат обозначают ХОУ (если известен ее базис).

Если М произвольная точка плоскости, то относительно системы координат (общей или прямоугольной) ее координаты определяются как координаты радиус вектора $\overrightarrow{OM}$ Записи $\overrightarrow{OM} = (x, y)$ и M(x,y) равносильны; x – абсцисса точки М, y – ее ордината.

Задание на плоскости системы координат устанавливает взаимно-однозначное соответствие между упорядоченными парами действительных чисел и множеством точек плоскости, что позволяет аналитическими методами решать задачи планиметрии.

Рассмотрим некоторые простейшие задачи планиметрии в координатах.

1. Если вектор $\overrightarrow{AB}$ задан своими концами: $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, то он имеет координаты: $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$. (Система координат общая декартова).

2. Если задан отрезок AB своими концами: $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2, y_2)$,то координаты середины отрезка определяются $x = \dfrac{x_1+x_2}{2}$ и $y = \dfrac{y_1+y_2}{2}$ (Система координат общая декартова).

3. Пусть G – точка пересечения медиан треугольника (центроид), а вершины треугольника: (x_1,y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Тогда $G\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3};\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ (Система координат общая декартова).

4. Расстояние ρ(A, B) между точками $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ определяется формулой $\rho(A,B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ (Система координат прямоугольная).

5. Пусть на плоскости дан треугольник своими вершинами (x_1,y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Площадь плоского треугольника можно вычислить по формуле:

$S_\Delta = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ (Система координат прямоугольная).

Пример 1. Дан параллелограмм ABCD. Приняв вершину B за начало общей декартовой системы координат, а векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ за базисные, найти координаты вершины D, точки E – пересечения диагоналей, середины F стороны CD (рис. 3).

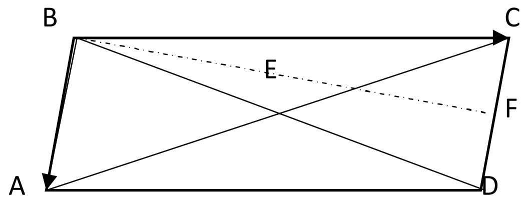

Рис.3.

Имеем $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, отсюда точка F(1/2,1) в базисе $\left\{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right\}$

Далее, $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

следовательно точка E (1/2,1/2)в базисе $\left\{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right\}$; $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ D(1,1) в базисе $\left\{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right\}$

Пример 2. $\left|\overrightarrow{OA}\right| = 2$ угол между первым вектором прямоугольной системы координат и вектором $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$ равен 60^0. Найти координаты точки A.

Рассмотрим рис. 4.

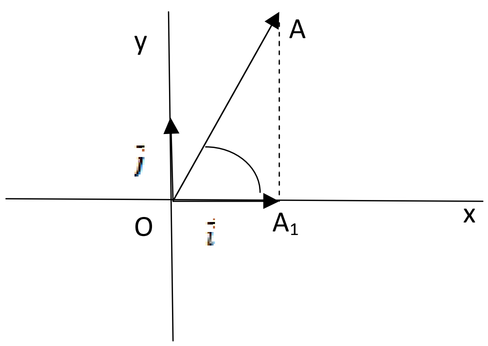

Рис.4.

По условию угол между первым вектором прямоугольной системы координат и вектором $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$ равен 60^0. Из прямоугольного треугольника OAA_1: OA_1=OA cos60=2*$\frac{1}{2}$=1. С другой стороны, OA_1=x, поэтому абсцисса точки A:

x=1; AA_1=OA sin60 = 2 $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ т.е. ордината точки A y=$\sqrt{3}$ Таким образом, $\overrightarrow{OA}=(1,\sqrt{3})$, что то же самое A(1, $\sqrt{3}$)

Пример 3. Даны вершины треугольника: A(3,1), B(1,1), C(-3,4).

Найти: а) длину медианы BK, б) вектор медианы CL, в) площадь треугольника, г) центроид G.

Рассмотрим треугольник ABC (рис.5.).

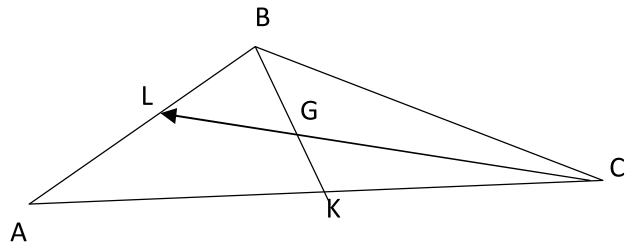

Рис.5.

а) BK=ρ(B, K) K – середина отрезка AC, следовательно, $K\left(\frac{3-3}{2};\frac{1+4}{2}\right)=\left(0,\frac{5}{2}\right)$ поэтому $BK=\sqrt{(0-1)^2+(\frac{5}{2}-1)^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

б) $\overrightarrow{CL}=(x_L-x_C;y_L-y_C)$, т.к. L – середина отрезка AB, то $L\left(\frac{3+1}{2};\frac{1+1}{2}\right)=(2,1)$, значит $\overrightarrow{CL}$ = (5, -3)

в) $S_\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -3 & 4 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}|3+4-3+3-12-1|=\frac{1}{2}|-6|=3$ (ед^2)

г) $G\left(\frac{3+1-3}{3};\frac{1+1+4}{3}\right)=\left(\frac{1}{3},2\right)$ – центроид треугольника ABC.

<u>II. Упражнения.</u>

1. Построить точки $A_1\left(-\frac{1}{2},0\right)$, $A_2(0,3)$, $A_3(-5,2)$ в общей декартовой системе координат.

2. Дана точка N(-2, 7) в прямоугольной системе координат. Определить проекции этой точки на оси координат.

3. Точка К имеет координаты (5, -2) в системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Найти координаты этой точки в системе координат $\{O, -\vec{e}_2, \vec{e}_1\}$.

4. Изобразить вектор $\vec{a} = (7, -4)$ с началом в точке (3,-2). Система координат прямоугольная.

5. В прямоугольной системе координат дана точка F(6, 1). Указать точки, симметричные точке F относительно а) начала координат, б) оси ординат, в) оси абсцисс.

6. В аффинной системе координат даны точки A_1(-2, x) и A_2 (y, 6). Найти x и y, если $\overrightarrow{A_1A_2} = (4,8)$

7. Определить коллинеарны ли точки: а) (-1, 0), (5, 2), (2, 1); б) (1, 5), (2, 3), (0, 1)?

8. Указать в треугольнике с вершинами в точках A(-1,4), B(3, 1), C(1, 1) равные стороны.

9. В прямоугольной системе координат на оси абсцисс найти точку, одинаково удаленную от точки A (3, 4) и начала координат O (0, 0).

10. Сторона квадрата ABCD равна 4. Определить координаты его вершин в системе координат: O – точка пересечения диагоналей, $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$

§2. Уравнения прямой на плоскости.

Далее, начиная с §2, будем предполагать, что на плоскости задана прямоугольная декартова система координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$.

<u>I. Теоретические сведения.</u>

1. Направляющий вектор прямой. Каноническое уравнение прямой.

2. Параметрические уравнения прямой.

3. Уравнение прямой, проходящие через две различные точки.

4. Уравнение прямой в отрезках.

5. Вектор нормали прямой. Уравнение прямой, заданной точкой и вектором нормали.

6. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

7. Общее уравнение прямой.

8. Нормальное уравнение прямой.

Прямую на плоскости можно однозначно определить различными способами. В связи с этим фактом прямая может иметь различные виды уравнений, соответствующие способам ее задания.

1. Каноническое уравнение прямой.

Прямая l задана точкой $M_0(x_0, y_0)$ и параллельным ей вектором $\vec{p}=(p_1, p_2)$, $\vec{p}\neq\vec{0}$ $\vec{p}\ ||\vec{0}$ (рис.6).

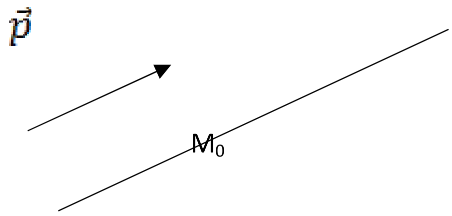

Рис. 6

Вектор $\vec{p}$ называется направляющим вектором прямой l. Уравнение l в этом случае имеет вид: l: $\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}$ и называется каноническим.

Например, прямая l проходит через точку A(-1, 3) параллельно $\vec{p}=4\vec{i}-7\vec{j}$, ее каноническое уравнение можно записать как: $\frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{-7}$

2. Параметрические уравнения прямой.

Прямая l задана тем же способом что и в п.1.

$\begin{cases} x = x_0 + p_1 t \\ y = y_0 + p_2 t \end{cases}$, $t\in R$ - параметрические уравнения l.

3. Прямая l задана двумя различными точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ ($M_1\neq M_2$). Тогда ее направляющим вектором служит $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$, а в качестве заданной точки можно взять любую из M_1 или M_2, например $M_1(x_1, y_1)$. Тогда уравнение прямой имеет вид: l: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

Например, прямая l проходит через точки A (2, -4), B(8, -5). Ее уравнение: l: $\frac{x-2}{8-2}=\frac{y+4}{-5+4}$, $\frac{x-2}{6}=\frac{y+4}{-1}$ - каноническое уравнение.

4. Если в качестве двух точек взять точки пересечения с осями координат OX и OУ: A(a, 0) и B(0, b), a≠0, b≠0 то будем иметь уравнение: *l:* $\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}$, $\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}$

Преобразуем это уравнение b(x-a)=-a, bx+ay=ab, $\frac{bx}{ab}+\frac{ay}{ab}=1$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ - уравнение прямой в отрезках.

5. Прямая *l* задана точкой $M_0(x_0, y_0)$ и перпендикулярным ей вектором $\vec{n}=(a,b)$, который называется ее вектором нормали $\vec{n}\neq\vec{0}$ (рис. 7).

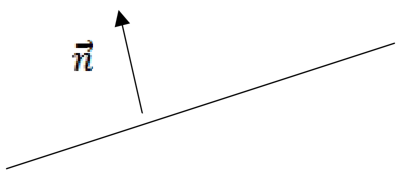

Рис.7

В этом случае уравнение прямой *l*: $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$. Например, прямая проходит через K(-3, 4) и имеет вектор нормали $\vec{n}=(2,-11)$. Тогда ее уравнение: 2(x+3)-11(y-4)=0.

6. Прямая *l* задана точкой $M_0(x_0, y_0)$ и и угловым коэффициентом *к.* Угловой коэффициент $k=tg\varphi$, где φ– угол, образованный положительным лучом оси абсцисс и полупрямой *l*, распложенной выше оси абсцисс (рис.8).

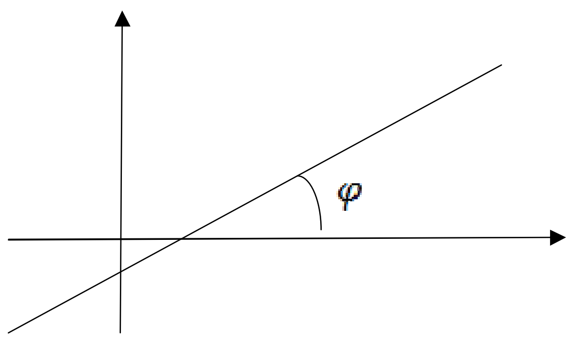

Рис.8.

В этом случае уравнение *l:* $y-y_0=k(x-x_0)$.

В частности, если M_0 совпадает с точкой B(0, b) пересечения прямой с осью ординат OY, то прямая имеет уравнение $y=kx+b$.

7. Общее уравнение прямой имеет вид: $l\colon ax+by+c=0,\ a^2+b^2\neq 0$, здесь $\vec{n}=(a,b)$ – вектор нормали прямой.

Все уравнения, рассмотренные в пунктах 1-6 можно привести к общему уравнению прямой.

Например, пусть прямая проходит через точки $M_1(1,0)$ и $M_2(0,-3)$. Ее каноническое уравнение $l\colon \frac{x-1}{0-1}=\frac{y-0}{-3-0}$, $l\colon \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{-3}$, $l\colon -3(x-1)=-1y$, $l\colon -3x+3=-y$, $l\colon 3x-y+3=0$ – общее уравнение прямой, $\vec{n}=(3,-1)$ – вектор нормали прямой.

8. Нормальное уравнение прямой.

Пусть дано общее уравнение прямой $l\colon ax+by+c=0,\ a^2+b^2\neq 0$. Нормальное уравнение прямой характеризуется равенством: $a^2+b^2=1$, c<0. Общее уравнение прямой можно привести к нормальному виду , если умножите обе его части на нормирующий множитель $\mu=\pm\frac{1}{|\vec{n}|}$, знак μ выбирается противоположным знаку c.

Например, пусть $l\colon 3x-4y-8=0$ – общее уравнение l, $\vec{n}=(3,-4)\perp l$, тогда $|\vec{n}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$, $\mu=\pm\frac{1}{5}$. В данном случае c=-8, тогда μ>0, т.е. $\mu=\frac{1}{5}$, а нормальное уравнение прямой имеет вид $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{8}{5}=0$.

Имеет место утверждение. Если в левую часть нормального уравнения прямой l подставить координаты какой-нибудь точки, то будем иметь число, с точностью до знака равное расстоянию от взятой точки до прямой l.

Справедливы утверждения:

1. Если $\vec{n}=(a,b)$ – вектор нормали прямой, то $\vec{p}=(-b,a)$ – направляющий вектор этой прямой.

2. Если $\vec{p}=(p_1,p_2)$ - направляющий вектор прямой, то угловой коэффициент этой прямой равен отношению второй координаты направляющего вектора к его первой координате: $k=\frac{p_2}{p_1}$.

Пример 1. Прямая *l* задана общим уравнением 3x-5y+4=0. Определить $\vec{n}$, $\vec{p}$ k, отрезки, отсекаемые прямой на осях координат. Записать параметрические уравнения прямой. Записать уравнение прямой в нормальной форме.

Из общего уравнения $\vec{n}=(3,-5)$ – вектор нормали прямой *l*, $\vec{p}=(5,3)$ – направляющий вектор этой прямой, а угловой коэффициент равен $k=\frac{3}{5}$.

Приведем общее уравнение прямой к уравнению в отрезках: 3x-5y=-4 $\frac{3x}{-4}+\frac{5y}{4}=1$, $\frac{x}{-4/3}+\frac{y}{4/5}=1$ – уравнение в отрезках; отрезок *a*, отсекаемый прямой на оси OX равен -4/3, отрезок b, отсекаемый на оси OY равен 4/5.

Для составления параметрических уравнений прямой *l* найдем какую-нибудь точку прямой *l*: пусть $x_0=2$, тогда $3*2-5y_0+4=0$, отсюда $y_0=2$ и точка (2;2) принадлежит прямой *l*.

Параметрические уравнения прямой *l:* $\begin{cases} x=2+5t \\ y=2+3t \end{cases}$, $t\in R$, т.к. $\vec{p}=(5,3)$.

Приведем уравнение прямой к нормальному виду: $\vec{n}=(3,-5)$, $|\vec{n}|=\sqrt{3^2+(-5)^2}=\sqrt{34}$. В данном случае c=4, тогда $\mu<0$, т.е. $\mu=-\frac{1}{\sqrt{34}}$, а нормальное уравнение прямой имеет вид $-\frac{3}{\sqrt{34}}x+\frac{5}{\sqrt{34}}y-\frac{4}{\sqrt{34}}=0$.

Пример 2.Даны параметрические уравнения прямой *l:* $\begin{cases} x=-1+t \\ y=3+2t \end{cases}$, $t\in R$.

Указать $\vec{n}$, $\vec{p}$ k, записать общее уравнение прямой, найти точки пересечения прямой *l* с осями координат.

Имеем, $\vec{p}=(1,2)\parallel l$, тогда $\vec{n}=(2,-1)$ – вектор нормали. Далее M_0 (-1, 3)∈ *l*, тогда *l*: 2(x+1)-1(y-3)=0, 2x+2-y+3=0, 2x-y+5=0 – общее уравнение прямой *l*. Угловой коэффициент $k = \frac{p_2}{p_1} = \frac{2}{1} = 2$. Если l пересекает OX, то y=0, тогда 2x+5=0, x=-5/2. Следовательно, A(-5/2; 0) $=l \cap OX$; если l пересекает OУ, то x=0, откуда – y+5=0, y=5, поэтому B(0;5)) $=l \cap OY$.

Можно было составить общее уравнение прямой, исключив параметр t из системы параметрических уравнений: t=x+1 из первого уравнения, тогда y=3+2(x+1), y=5+2x или 2x-y+5=0 – общее уравнение прямой.

Пример 3. В треугольнике ABC A(2,1), B(5,3), C(3,-4). Составить уравнение стороны BC, медианы AK, высоты CH (рис.9).

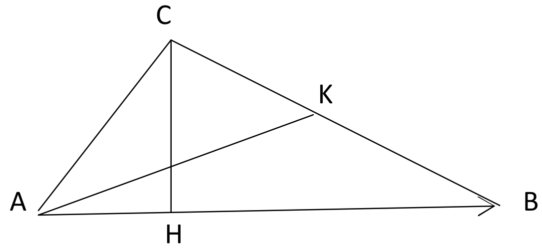

Рис.9.

Сторона BC определяется двумя точками B(5,3), C(3,-4). Уравнение BC: $\frac{x-5}{3-5} = \frac{y-3}{-4-3}$, $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-3}{-7}$, -7(x-5)=-2(y-3), 7x-2y-29=0. Далее, K – середина отрезка BC, поэтому $K\left(\frac{3+5}{2}; \frac{-4+3}{2}\right) = \left(4; -\frac{1}{2}\right)$. Тогда медиана AK: $\frac{x-2}{4-2} = \frac{y-1}{-0.5-1}$, $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1.5}$, $-\frac{3}{2}(x-2) = 2(y-1)$, -3(x-2)=4(y-1), 3x+4y-10=0.

Для высоты CH вектор $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$. Имеем уравнение прямой с заданной точкой C(3,-4) и вектором нормали $\vec{n} = (5-2, 3-1) = (3, 2)$. Отсюда CH: 3(x-3)+2(y+4)=0, 3x+2y-1=0.

II. Упражнения.

1. Прямая задана уравнением $y = \frac{1}{3}x - 3$. Указать угловой коэффициент k и точки пересечения прямой с осью ординат.

2. Прямая задана уравнением 2x+3y=6. Указать отрезки, отсекаемые на осях координат, данной прямой.

3. Доказать утверждение: если $\vec{n} = (a, b)$ - вектор нормали прямой, то $\vec{p} = (-b, a)$ - направляющий вектор этой прямой.

4. Прямая *l* задана параметрически: $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -t \end{cases}$. Указать несколько точек прямой *l*.

5. Найти нормирующий множитель прямой: $\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{2}$.

6. Изобразить прямую в системе координат: а) 2x=5, б)y=0, в)x+2y=0, г) y=3, д) 4x-3y+12=0.

7. Угол наклона прямой к положительному лучу Ox равен 30^0. Записать общее уравнение прямой. Привести общее уравнение к нормальному виду.

8. Дан направляющий вектор $\vec{p} = (4, -3)$ прямой *l.* Написать каноническое уравнение прямой *l,* параметрические уравнения, если известно, что проходит через точку (1, -1). Найти угловой коэффициент k, вектор нормали.

9. Прямая *l* задана уравнением $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$. Найти $\vec{n}$, $\vec{p}$ k, μ.

10. Прямая задана уравнением –x+2y+4=0. Записать уравнение этой прямой в виде уравнения с угловым коэффициентом. Изобразить прямую в системе координат.

§3. Аффинные задачи теории прямой.

К аффинным задачам теории прямой на плоскости относятся вопросы взаимного расположения прямых, которые рассматриваются в этом параграфе.

I. Теоретические сведения.

1. Параллельность прямых.
2. Совпадение прямых.
3. Условие пересечения прямых.
4. Нахождение точки пересечения прямых.

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями: l_1: $a_1x+b_1y+c_1=0$ и l_2: $a_2x+b_2y+c_2=0$. Векторы $\vec{n}_1=(a_1,b_1)$ и $\vec{n}_2=(a_2,b_2)$ - соответственно векторы нормали этих прямых.

В случае параллельности прямых l_1 и l_2 векторы $\vec{n}_1=(a_1,b_1)$ и $\vec{n}_2=(a_2,b_2)$ коллинеарны, то есть координаты этих векторов пропорциональны. Отсюда:

а) $l_1 \parallel l_2$ ($l_1 \neq l_2$) тогда и только тогда, когда $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$;

б) $l_1 \parallel l_2$ ($l_1 = l_2$) (l_1 и l_2 совпадают) тогда и только тогда, когда $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$;

в) l_1 и l_2 пересекаются в некоторой точке L в том и только том случае, когда $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$.

В случае пересечения прямых l_1 и l_2 координаты точки пересечения находятся как решение системы двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными: $L:\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$. Данную систему можно решать методом Крамера: $x=\frac{\Delta x}{\Delta}$, $y=\frac{\Delta y}{\Delta}$, так как $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$ в силу пересечения прямых l_1 и l_2.

Если способ задания прямых канонический, то рассматриваются направляющие векторы этих прямых. Условие параллельности в этом случае – коллинеарности направляющих векторов прямых.

В случае задания прямых угловыми коэффициентами условием параллельности является равенство угловых коэффициентов этих прямых: $k_1=k_2$. Это следует из определения углового коэффициента прямой.

Пример 1. Определить взаимное расположение следующих пар прямых:

а) l_1: 2x-3y+1=0 и l_2: 4x-6y+5=0;

б) l_1: x+4y+8=0 и l_2: 4x+y+8=0;

в) l_1: -x+3y-7=0 и l_2: 3x-9y+21=0.

а) $\vec{n}_1 = (2,-3)$, $\vec{n}_2 = (4,-6)$; $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$ отсюда, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, но $\frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{5} \neq \frac{1}{2}$; таким образом, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$. Это означает, что $\boldsymbol{l_1}$ **и** $\boldsymbol{l_2}$ параллельны и не совпадают.

б) $\vec{n}_1 = (1, 4)$, $\vec{n}_2 = (4, 1)$; $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{4}$; $\frac{b_1}{b_2} = \frac{4}{1}$ отсюда, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$. Это означает, что $\boldsymbol{l_1}$ **и** $\boldsymbol{l_2}$ пересекаются в точке.

в) $\vec{n}_1 = (-1, 3)$, $\vec{n}_2 = (3,-9)$; $\frac{a_1}{a_2} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$; $\frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}$ отсюда, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, но $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-7}{21} = -\frac{1}{3}$; таким образом, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$. Это означает, что $\boldsymbol{l_1}$ **и** $\boldsymbol{l_2}$ совпадают.

Пример 2. Показать, что прямые l_1: x+2y-4=0 и l_2: 3x-7y+5=0 пересекаются. Найти точку пересечения.

$\vec{n}_1 = (1, 2)$, $\vec{n}_2 = (3,-7)$; $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}$; $\frac{b_1}{b_2} = -\frac{2}{7}$ отсюда, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$. Это означает, что $\boldsymbol{l_1}$ **и** $\boldsymbol{l_2}$ пересекаются в точке L. Эта точка находится как решение системы: $L: \begin{cases} x+2y-4=0 \\ 3x-7y+5=0 \end{cases}$. Имеем $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -13$, $\Delta x = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = -18$, $\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -17$. Отсюда, $x = \frac{18}{13}$, $y = \frac{17}{13}$ и L$\left(\frac{18}{13}; \frac{17}{13}\right)$.

Пример 3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку K(-1, 3) параллельно прямой 2x-5y+10=0.

Искомая прямая имеет уравнение 2x-5y+c=0, так как в качестве вектора нормали можно взять вектор $\vec{n}_1 = (2,-5)$ нормали данной прямой. Так как координаты точки K удовлетворяют уравнению 2x-5y+c=0, то 2*(-1)-5*3+c=0, следовательно, c=17. Уравнение искомой прямой: 2x-5y+17=0.

Пример 4. Написать уравнение прямой, проходящей через точку (0, -4) параллельно прямой $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

Угловой коэффициент данной прямой $k=-\frac{1}{2}$, следовательно, угловой коэффициент искомой прямой $k=-\frac{1}{2}$ в силу параллельности прямых.

Искомая прямая $y=-\frac{1}{2}x+b$, так как она проходит через точку (0, -4), то b=-4, поэтому уравнение искомой прямой имеет вид $y=-\frac{1}{2}x-4$.

<u>II. Упражнения.</u>

1. Определить взаимное расположение прямых

l_1: $\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{-3}$ и l_2: $\frac{x-2}{-8}=\frac{y+3}{6}$

2. Дана прямая $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Может ли эта прямая быть параллельна координатным осям?

3. Показать, что прямая l: $\begin{cases} x=1+4t \\ y=7 \end{cases}$ параллельна оси абсцисс.

4. Показать, что прямые l_1: $\begin{cases} x=2+t \\ y=3-t \end{cases}$, $t\in R$ и l_2: $\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{2}$ пересекаются.

5. Проходят ли через одну и туже точку прямые x-y+7=0, 3x-y-1=0, 2x-y+3=0?

6. Определить параметр λ, при котором прямые (1+λ)x-2λy=0 и 3λx-8y+1=0 параллельны.

7. Прямые $\frac{x-1}{3}=\frac{y+7}{2}$ и $\frac{x+2}{p_1}=\frac{y-6}{p_2}$ параллельны. Указать возможные значения p_1 и p_2.

8. При каких значениях параметра α прямые αx-y+4=0 и 4x+ αy+3=0: а) параллельны, б) пересекаются?

9. Найти точку пересечения прямых $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{-3}$ и $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}$

10. Найти точку пересечения l: 3x+7y-21=0 с прямой проходящей через точку (2, 0) параллельно оси ординат.

11. Найти точку пересечения l: 2x-5y+6=0 с прямой проходящей через точку (0, -3) параллельно оси абсцисс.

12. Равносильны ли утверждения:

а) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ и $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$;

б) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ и $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$?

Здесь $\vec{n}_1 = (a_1, b_1)$ - нормаль прямой l_1 , а $\vec{n}_2 = (a_2, b_2)$ - нормаль прямой l_2.

§4. Метрические задачи теории прямой на плоскости.

К метрическим задачам относятся задачи, связанные с метрикой плоскости. В этом параграфе рассмотрим задачи на вычисление расстояния между некоторыми объектами плоскости и нахождения угла между прямыми. Все эти вопросы требуют знания темы «Скалярное произведение векторов».

I. Теоретические сведения.

1. Расстояние от точки до прямой.
2. Расстояние между параллельными прямыми.
3. Вычисление угла между пересекающимися прямыми.
4. Ортогональность прямых на плоскости.

Пусть $l: ax+by+c=0$, а $M_0(x_0, y_0)$ - точка, не принадлежащая прямой l. Расстояние $\rho(M_0, l)$ от точки M_0 до прямой l находится по формуле: $\rho(M_0, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, где $\vec{n} = (a, b)$ - вектор нормали l.

В случае, если M_0 лежит на прямой l, то $\rho(M_0, l)=0$.

Даны две параллельные прямые l_1: $ax+by+c_1=0$ и l_2: $ax+by+c_2=0$. Расстояние между можно найти по формуле: $\rho(l_1, l_2) = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ где $\vec{n} = (a, b)$ - общий вектор нормали параллельных прямых l_1 и l_2.

Угол между прямыми l_1: $a_1x+b_1y+c_1=0$ и l_2: $a_2x+b_2y+c_2=0$ определяется формулой: $cos(l_1,l_2)=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

Здесь $\vec{n}_1=(a_1,b_1)$ - нормаль прямой l_1 , а $\vec{n}_2=(a_2,b_2)$ - нормаль прямой l_2. Частный случай – ортогональность прямых ($l_1 \perp l_2$). Прямые ортогональны тогда и только тогда, когда $(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=0$. Поэтому необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых l_1 и l_2: $a_1a_2+b_1b_2=0$ $\left(\angle(l_1,l_2)=\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Если прямые заданы канонически, то в качестве угла между ними рассматривается угол между направляющими векторами прямых.

Если прямые заданы угловыми коэффициентами: l_1: $y=k_1x+b_1$, l_2: $y=k_2x+b_2$, то они ортогональны тогда и только тогда, когда $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$.

Пример 1. Найти расстояние от A(-1, 1) до l $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+3}{5}$

Уравнение l приведем к общему виду: l: 5(x-2)=4(y+3), 5x-4y-22=0, $\vec{n}=(5,-4)$ - вектор нормали, $|\vec{n}|=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$. Тогда $\rho(A,l)=\dfrac{|5(-1)-4\cdot1-22|}{\sqrt{41}}=\dfrac{31}{\sqrt{41}}$

Пример 2. Найти расстояние между прямыми l_1: $x-2y+5=0$ и l_2: 2x-4y+11=0.

Прямые l_1 и l_2 параллельны, так как $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{vmatrix}=0$, следовательно, $\vec{n}_1=(1,-2)\parallel$ $\vec{n}_2=(2,-4)$, $l_1 \neq l_2$ так как $\dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{5}{11}\neq\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{1}{2}$.

Преобразуем уравнение $l_2: x-2y+\dfrac{11}{2}=0$. Отсюда c_1=5, c_2=11/2, поэтому

$$\rho(l_1,l_2)=\frac{\left|\frac{11}{2}-5\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{5}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Пример 3. Определить угол между прямыми l_1: 6x-2y+9=0, l_2: 2x+y-7=0.

Прямые l_1 и l_2 пересекаются, так как $\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, $cos(l_1, l_2) = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$, где $\vec{n}_1 = (6,-2)$ и $\vec{n}_2 = (2,1)$. $cos(l_1, l_2) = \frac{6 \cdot 2 - 2 \cdot 1}{\sqrt{36+4}\sqrt{4+1}} = \frac{10}{\sqrt{40}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, следовательно угол между прямыми равен 45^0.

Пример 4. Определить α, если известно, что l_1: (5α-2)x+(α+4)y-6=0 и l_2: (3α+2)x+(1-4α)y+9=0 взаимно перпендикулярны.

Здесь $\vec{n}_1 = (5\alpha - 2, \alpha + 4)$ и $\vec{n}_2 = (3\alpha + 2, 1 - 4\alpha)$ векторы нормали l_1 и l_2 соответственно. По условию $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$, то есть (5α-2) (3α+2)+(α+4) (1-4α)=0, откуда $11\alpha^2$-11α=0, α_1=0, α_2=1.

Пример 5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (-3, 2) и перпендикулярно прямой y-4=2(x+1).

Имеем угловой коэффициент k_1=2 данной прямой. В силу ортогональности искомой прямой данной ее угловой коэффициент k_2=-1/2. Уравнение искомой прямой:y-2=-1/2(x+3). Общий вид искомой прямой: x+2y-1=0.

II. Упражнения.

1. Прямые заданы канонически: l_1: $\frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{p_2}$ l_2 $\frac{x - x_2}{p_1'} = \frac{y - y_2}{p_2'}$

Написать необходимое и достаточное условие ортогональности l_1 и l_2

2. При каких значениях параметрах λ ось ОУ и прямая y=x+λ ортогональны?

3. Прямые l_1 и l_2 заданы угловыми коэффициентами: l_1 : y=kx+b_1, l_2 : y=kx+b_2. Найти $\rho(l_1, l_2)$.

4. Перпендикуляр опущен из начала координат на прямую l: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Найти длину этого перпендикуляра.

5. Составить уравнения прямых, параллельных l: 2x-3y+5=0, если они удалены от l на расстояние, равное 3.

6. Найти угол между прямыми, заданными параметрически: l_1 : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \end{cases}$

$t \in R$ и l_2: $\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 3 + 5t \end{cases}$ $t \in R$.

7. Треугольник ABC задан вершинами: A(0, 1), B(1, 0), C(2, 2). Найти длину высоты CH двумя способами.

8. Указать угол между прямой l_1: x-y=0 и прямой l_2 , проходящей через (4,0) параллельно оси ОУ.

9. Указать угол между прямой l_1: x+y=0 и прямой l_2 , проходящей через (0,3) параллельно оси ОХ.

10. Найти расстояние от точки (-2, -5) до прямой, проходящей через (0, 1) параллельно оси ОХ.

§5. Окружность как линия второго порядка.

I. Теоретические сведения.

1. Понятие окружности.
2. Каноническое уравнение окружности.
3. Параметрические уравнения окружности.
4. Касательная к окружности.

Пусть A – некоторая фиксированная точка плоскости, $r \in R^+$. Рассмотрим на плоскости множество точек с характеристическим свойством: любая точка M данного множества удовлетворяет условию MA=const=r. Из школьного курса математики известно, что данное множество точек представляет собой окружность с центром в точке A и радиусом r.

Если на плоскости введена прямоугольная система координат, то точки A и M имеют соответственно имеют координаты: $A(x_0, y_0)$, M(x,y). Уравнение окружности: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ следует из определения. Данное уравнение называется каноническим уравнением окружности. Окружность далее будем обозначать символом:ω.

Изображение окружности дано на рис. 10.

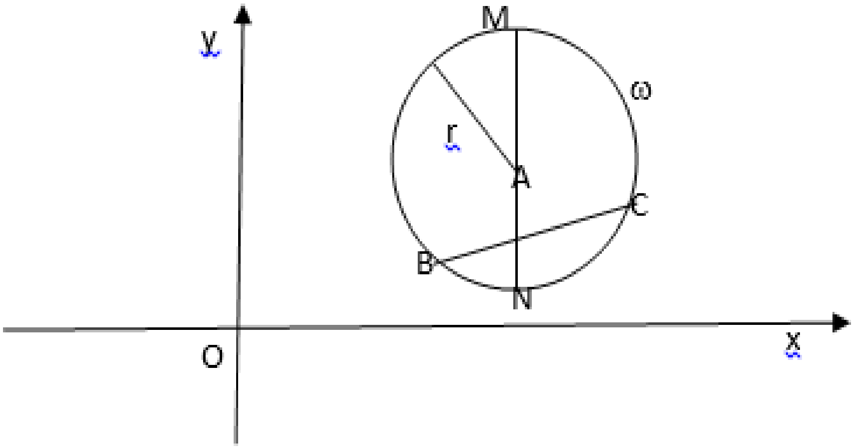

Рис. 10.

В случае совпадения A с началом координат: A=O(0,0) каноническое уравнение окружности имеет вид: $x^2+y^2=r^2$.

Уравнение окружности является алгебраическим уравнением второго порядка, поэтому окружность относят к линиям второго порядка на плоскости.

Любые две точки окружности можно соединить отрезком, который называется хордой окружности. Например, на рис.9 BC – хорда. Проходящая через центр окружности хорда - диаметр окружности. На рис.9 MN – диаметр.

Обозначим через t угол, который образован радиусом OM окружности ω с положительным лучом оси абсцисс (рис.11).

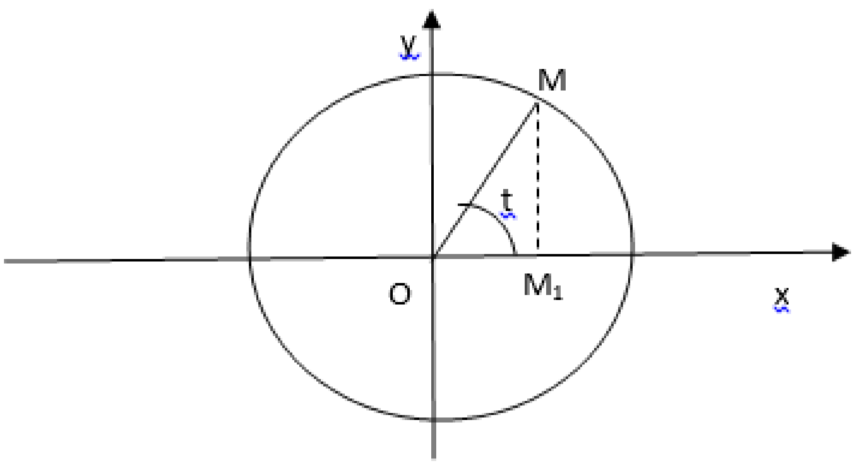

Рис.11

Тогда справедливы равенства: $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, что следует из прямоугольного треугольника OMM_1.

Уравнения: называются параметрическими уравнениями окружности ω, центр которой находится в точке O(0, 0), а радиус равен r.

Пусть дана окружность ω: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, O(a,b) – ее центр, r – радиус. Пусть прямая l – касательная к окружности в точке $M_1(x_1, y_1)$ (рис.12).

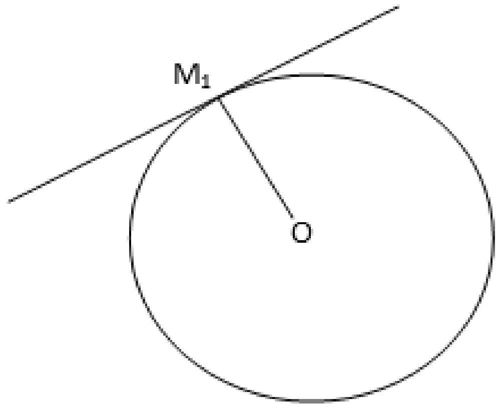

Рис.12

Тогда прямая l задается уравнением: $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2$.

Пример 1. Даны две точки $A_1(-2, 6)$, $A_2(2, 0)$. Записать уравнение окружности ω, для которой A_1A_2 является диаметром.

Центр A окружности – середина отрезка A_1A_2, поэтому $A\left(\frac{-2+2}{2};\frac{6+0}{2}\right)=(0,3)$.

Радиус окружности $r=AA_1=\rho(A, A_1)=\sqrt{(-2-0)^2+(3-6)^2}=\sqrt{13}$, отсюда искомое уравнение окружности: $x^2+(y-3)^2=13$.

Пример 2. Определить центр и радиус окружности ω: $x^2+y^2-10x-4y+25=0$

Приведем уравнение ω к каноническому виду: $(x^2-10x+25-25)+(y^2-4y+4-4)+25=0$, $(x^2-10x+25)+(y^2-4y+4)=4$, $(x-5)^2+(y-2)^2=4$. Центр ω - точка A(5, 2), радиус ω равен 2.

Пример 3. Написать уравнение траектории движения точки K(x, y), если эта точка в любой момент времени остается вдвое ближе к точке A_1 (1, 0), чем к точке A_2 (4, 0).

По условию $\rho(K, A_2)=2\,\rho(K, A_1)$. Отсюда, $\sqrt{(x-4)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$. Проведем преобразования: $(x-4)^2+y^2=4(x-1)^2+4y^2$, $x^2-8x+16+y^2=4x^2-8x+4+4y^2$,

$3x^2+3y^2=12$, $x^2+y^2=4$. Траекторией движения точки К является окружность с центром в начале координат и радиусом 2.

Пример 4. Составить уравнение касательной к окружности $(x-1)^2+(y+2)^2=10$ в точке (2, 1).

Уравнение касательной имеет вид $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2$. В данном случае $a=1$, $b=-2$, $x_1=2$, $y_1=1$. Тогда касательная имеет уравнение: $(x-1)(2-1)+(y+2)(1+2)=10$, $x+3y-5=0$.

Пример 5. Параметрические уравнения окружности имеют следующий вид: $\omega:\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$. Записать каноническое уравнение ω.

Здесь r=4, O(0, 0) – центр ω. Тогда каноническое уравнение ω: $x^2+y^2=16$.

II. Упражнения.

1. Задана окружность: а) $(x+3)^2+(y-5)^2=36$; б) $(x-1)^2+y^2=8$; в) $x^2+(y+4)^2=20$; г) $x^2+y^2=3$. Указать координаты центра и радиус окружности.

2. Записать уравнение окружности, если даны ее центр и радиус:

а) O(-1,4), r=2; б) O (2,-3), r= $\sqrt{3}$; в) O (-2, 0), r=1; г) O (0, 8), r=$\sqrt{5}$; д) O (0, 0), r=$\sqrt[4]{7}$

3. Записать параметрические уравнения окружности $x^2+y^2=17$.

4. Записать уравнение линии второго порядка в канонической форме: а) $x^2+y^2+8x-4y+10=0$, б) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$.

5. Дана окружность с центром (1, -2) и радиусом 5. Выяснить, принадлежат ли точки $A_1(4{,}1; 1{,}9)$ и A_2 (0, $2\sqrt{6}$, -2) этой окружности.

7. Написать уравнение общей хорды окружностей $x^2+y^2-10x+25=0$ и $x^2+y^2=16$.

8. На окружности с центром O(0, 0) и радиусом 13 найти точки: а) с ординатой -12, б) с абсциссой +5.

9. Окружность ω задана общим уравнением $x^2+y^2+Ax+By+C=0$. В каком случае она: а) касается оси ординат; б) касается оси OX.

10. Изобразить в системе координат множество точек, сумма квадратов расстояний которых от двух данных $A_1(1, 0)$ и $A_2(0, 1)$ постоянна и равна 4.

§6. Эллипс.

<u>I. Теоретические сведения.</u>

1. Понятие эллипса.

2. Каноническое уравнение эллипса.

3. Параметрические уравнения эллипса.

4. Изображение эллипса в прямоугольной системе координат.

5. Касательная к эллипсу.

6. Эксцентриситет эллипса.

Фиксируем две точки F_1 и F_2 плоскости. Рассмотрим множество точек M плоскости с характеристическим свойством: $MF_1 + MF_2 = const$, $MF_1 + MF_2 > F_1F_2$. Данное множество точек является линией на плоскости, которая называется эллипсом. Точки F_1 и F_2 – фокусы эллипса. Расстояние F_1F_2 между фокусами принято обозначать 2с, а сумму расстояний от точки эллипса до фокусов принято обозначать 2а, т.е. $MF_1 + MF_2 = 2a > 2c$. При совпадении F_1 и F_2 эллипс является окружностью радиуса r=a, фокусы при этом совпадают с радиусом окружности.

Для получения канонического уравнения эллипса система координат выбирается следующим образом: за начало системы координат принимают середину отрезка F_1F_2, положительный луч оси абсцисс направлен по радиус вектору OF_1 первого фокуса (рис.13)

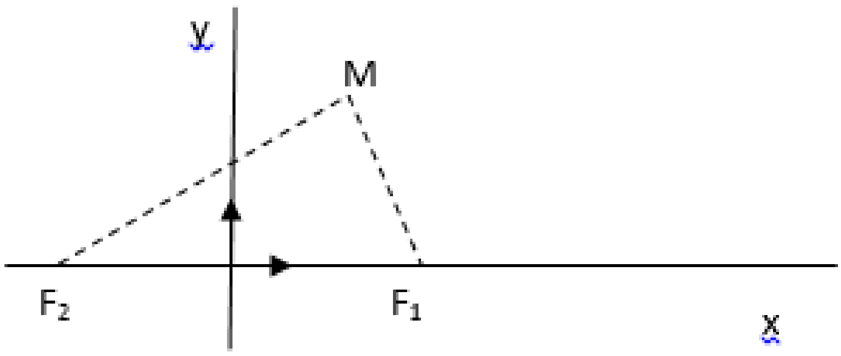

Рис.13.

В введенной системе координат произвольная точка M и фокусы имеют координаты: M(x, y), F_1(c, 0) F_2 (-c, 0). Характеристическое свойство эллипса в координатах принимает вид: $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$. После проведения ряда преобразований и введения обозначения $a^2 - c^2 = b^2 \quad a > c$ будем иметь $b^2x^2 + a^2y^2 = b^2a^2$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - это и есть каноническое уравнение эллипса. Далее эллипс будем обозначать символом γ. Записывают: γ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Фокальным радиусом точки M $\in\gamma$ называют отрезки MF_1 и MF_2, причем $F_1M = a - \frac{c}{a}x$, $F_2M = a + \frac{c}{a}x$, x – абсцисса точки M.

Из уравнения γ следует, что эллипс имеет осями симметрии оси координат и центром симметрии начало координат. Центр симметрии – начало координат – O(0,0) – центр эллипса. Эллипс γ – центральная линия второго порядка. Фокальная первая ось симметрии та, на которой расположены F_1 и F_2, вторая ось симметрии перпендикулярная первой.

Хордой эллипса является отрезок, соединяющий две его точки. Хорда, проходящая через центр эллипса является его диаметром. Эллипс имеет четыре вершины: A_1 (a,0), A_2 (-a,0), B_1 (0,b), B_2 (0,-b). Эти точки являются точками пересечения эллипса с осями симметрии. A_1A_2 называется большой осью, число a - большой полуосью; B_1B_2 называется малой осью, число b - малой полуосью (a>b). Все точки эллипса находятся в прямоугольнике , который образован прямыми: x=a, x=-a, y=b, y=-b, так как из канонического уравнения γ следует, что $|x| \le a$ и $|y| \le b$. В первом квадрате системы координат имеем: $y = +b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, отсюда при возрастании x от 0 до a ордината эллипса убывает от b до 0. (рис.14).

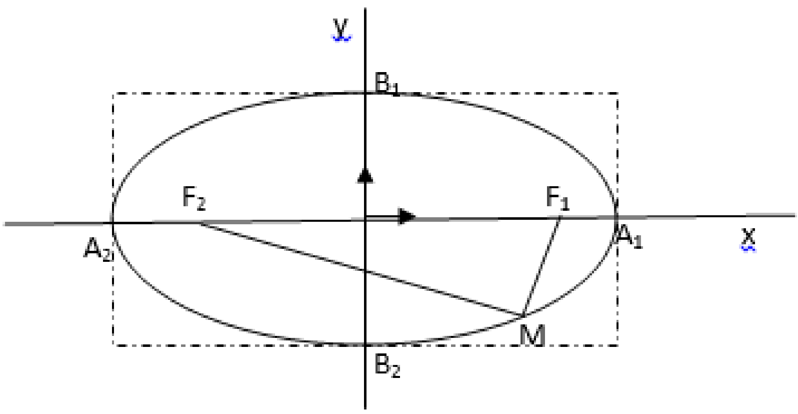

Рис.14. Изображение эллипса

Параметрические уравнения эллипса: проведем две концентрические окружности (с центром O(0,0)) ω_1 и ω_2 с радиусами OB_1 и OA_1, затем луч с началом O(0,0), который пересекает ω_1 и ω_2 в точках L_1 и L_2 (рис.15).

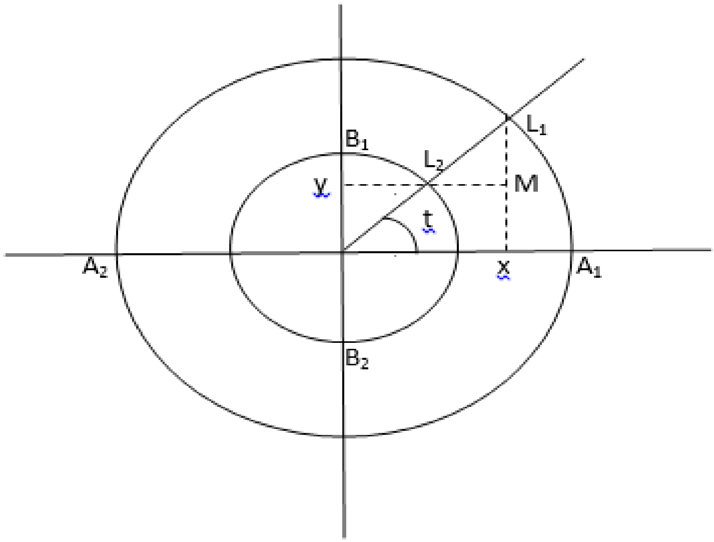

Рис.15.

Пусть M(x,y) – точка эллипса γ. Обозначим через t угол между лучами OL_1 и OA_1. Тогда x=a cost, y=b sint, что следует из треугольника L_1ML_2. Таким образом, $\gamma : \begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases}$ параметрические уравнения эллипса γ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ $(a > b)$ называется эксцентриситетом эллипса γ. ε=0 в случае, когда γ – окружность. В общем случае: 0< ε<1.

Пусть прямая l – касательная к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ в точке M_0 (x_0, y_0) (рис.16).

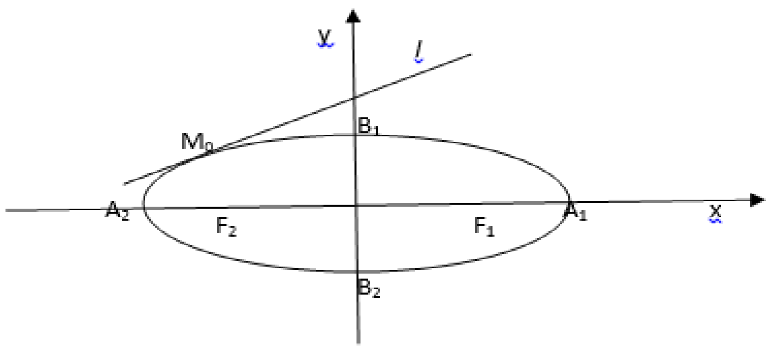

Рис.16.

Уравнение касательной l к линии γ: $\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$.

Пример 1. Дан эллипс γ: $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$. Указать центр, вершины, фокусы, полуоси, расстояние между фокусами, эксцентриситет. Изобразить γ в системе координат.

Имеем: $a^2 = 169$, a=13; $b^2 = 25$, b=5; ($a > b$), следовательно a=13 – большая полуось, b=5 – малая полуось; центр – O(0,0); вершины: A_1 (13,0), A_2 (-13,0), B_1 (0,5), B_2 (0,-5). Из соотношения $a^2 - c^2 = b^2$ получаем $169 - c^2 = 25$, $c^2 = 144$, c=12, поэтому F_1(12, 0) F_2 (-12, 0), а $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{12}{13}$. Расстояние F_1F_2 между фокусами равно 2c=24. Изображение эллипса на рис.17.

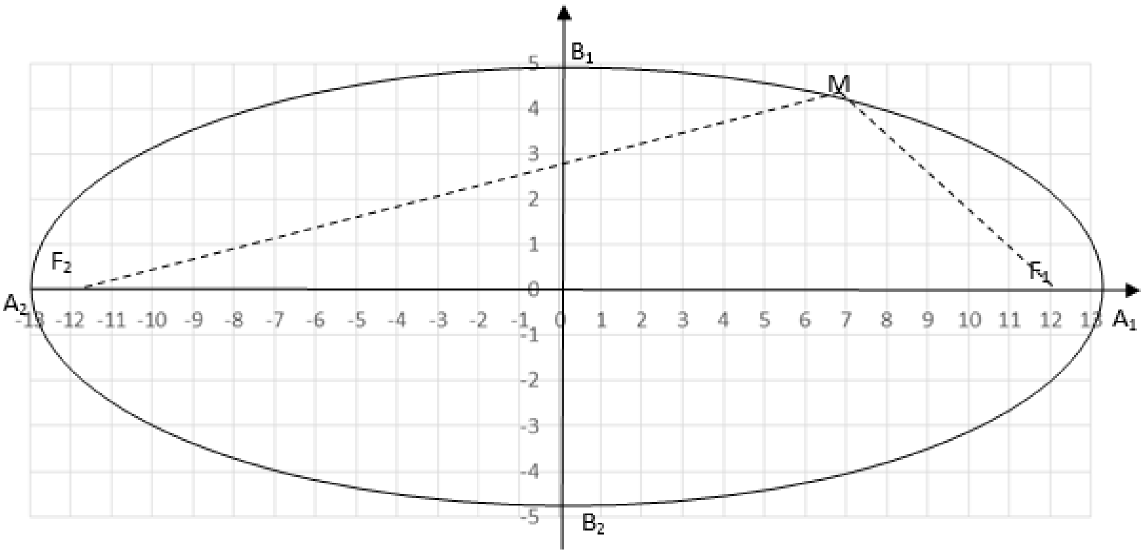

Рис.17

Пример 2. Дан эллипс γ: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$. Указать центр, вершины, фокусы, полуоси, фокусы, расстояние между фокусами, эксцентриситет. Изобразить γ в системе координат.

Имеем: $a^2 = 9$, a=3 малая полуось; $b^2 = 36$, b=6 - большая полуось; центр – O(0,0). В данном случае a<b, значит ось ОУ – фокальная ось. Найдем c из соотношения $b^2 - c^2 = a^2$, $36 - c^2 = 9$, $c^2 = 27$, $c = 3\sqrt{3}$, отсюда F_1(0, $3\sqrt{3}$) F_2 (0, - $3\sqrt{3}$) – фокусы. Далее вершины: A_1 (3,0), A_2 (-3,0), B_1 (0,6), B_2 (0,-6). Расстояние F_1F_2

между фокусами равно 2c=$6\sqrt{3}$. $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ - эксцентриситет. Изображение эллипса на рис.18.

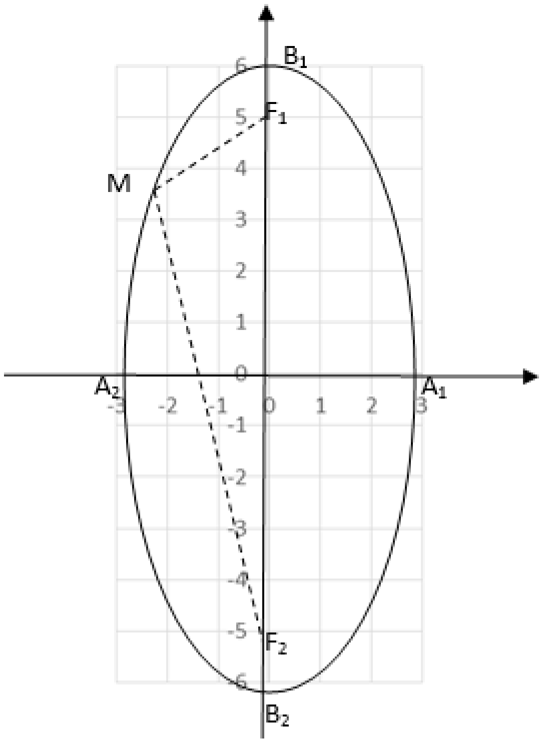

Рис.18.

Пример 3. Дан эллипс γ: $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{25} = 1$. Изобразить эллипс в системе координат.

Уравнение эллипса со смещенным центром имеет вид: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, где ($x_0$, y_0) – центр.

В нашем случае центр в точке (3, -4). В эту точку перенесем оси координат, получим новую систему координат $x'O'y'$. В этой системе координат каноническое уравнение эллипса γ: $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{25} = 1$. Отсюда, a=2 – малая полуось, b=5 – большая полуось, а вершины A_1 (2,0), A_2 (-2,0), B_1 (0,5), B_2 (0,-5) в $x'O'y'$ (рис.19).

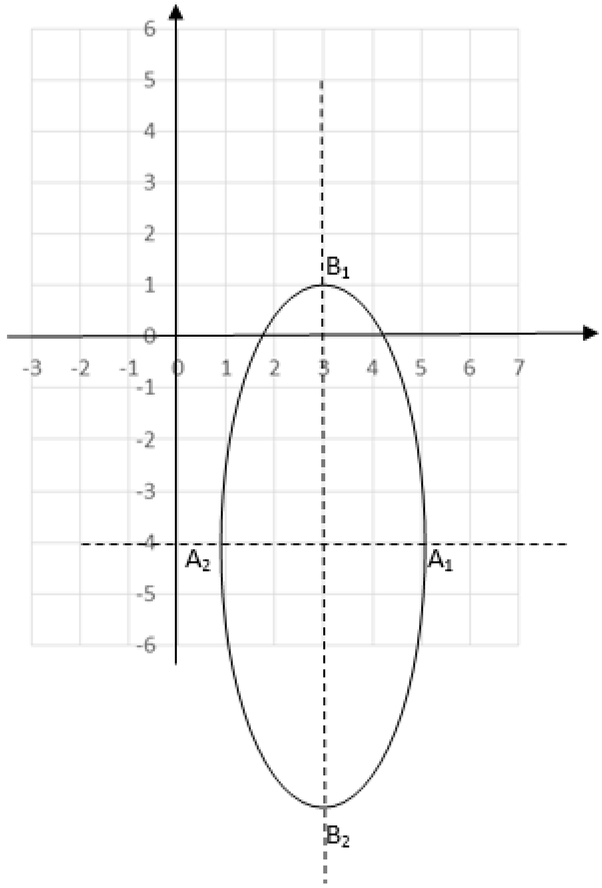

Рис.19.

Пример 4. Привести уравнение линии второго порядка $4x^2+9y^2-8x-32=0$ к каноническому виду.

Проведем преобразования: $(4x^2-8x)+9y^2=32$, $4(x^2-2x+1-1)+9y^2=32$, $4(x-1)^2-4+9y^2=32$, $4(x-1)^2+9y^2=36$, $\frac{4(x-1)^2}{36}+\frac{9y^2}{36}=1$, $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ - каноническое уравнение эллипса с центром (1,0), большой полуосью a=3 и малой полуосью b=2. Вершины эллипса A_1 (3,0), A_2 (-3,0), B_1 (0,2), B_2 (0,-2) в $x'O'y'$, которая получена переносом начала координат в точку (1,0).

Пример 5. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ параллельных прямой x+y-4=0.

Уравнение касательной l к линии γ: $\frac{x\cdot x_0}{20}+\frac{y\cdot y_0}{5}=1$, здесь ($x_0$, y_0) – точка касания.

Приведем уравнение l к уравнению с угловым коэффициентом k: $\frac{y \cdot y_0}{5} = 1 - \frac{x \cdot x_0}{20}$, $yy_0 = 5 - \frac{x \cdot x_0}{4}$, $y = \frac{5}{y_0} - \frac{x \cdot x_0}{4y_0}$, отсюда $k = -\frac{x_0}{4y_0}$.

Так как l и прямая x+y-4=0, угловой коэффициент которой равен -1 параллельны, то $-\frac{x_0}{4y_0} = -1$, $x_0 = 4y_0$. В силу принадлежности (x_0, y_0) эллипсу имеем $\frac{x_0^2}{20} + \frac{y_0^2}{5} = 1$, тогда $\frac{16y_0^2}{20} + \frac{y_0^2}{5} = 1$, откуда $y_0^2 = 1$, а $y_0 = \pm 1$, следовательно, $x_0 = \pm 4$. Отсюда, точки (4,1) и (-4, -1) являются точками касания с эллипсом. Касательные прямые l_1 и l_2 имеют соответственно уравнения: l_1: y-1=-(x-4), т.е. l_1: x+y-5=0; l_2: y+1=-(x+4), т.е. l_2: x+y+5=0.

Пример 6. Составить каноническое уравнение эллипса, если a+b=9, c=3 и a>b.

Так как $a^2 - c^2 = b^2$, то имеем систему $\begin{cases} a + b = 9 \\ a^2 - b^2 = 9 \end{cases}$. Решая ее методом подстановки получаем $a^2 - (9 - a)^2 = 9$, $18a = 90$, $a = \frac{90}{18} = 5$, тогда b=9-5=4. Уравнение эллипса : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

<u>II. Упражнения.</u>

1. Найти точки эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, абсциссы которых x=1, x=3, x=2.

2. $\gamma : \begin{cases} x = 6 \cdot \cos t \\ y = 4 \cdot \sin t \end{cases}$. Записать каноническое уравнение эллипса. Указать центр, полуоси, вершины.

3. $\gamma : 9x^2 + 25y^2 = 1$. Указать центр, полуоси, фокусы, вершины.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если:

а) $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{3}$, a=3, a>b;

б) F_1F_2=8, $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

5. Изобразить линию второго порядка $x^2 + y^2 + 2x - 5 = 0$ в системе координат.

6. Исследовать зависимость формы эллипса от эксцентриситета.

7. Написать уравнение множества точек сумма расстояний каждой из которых до $F_1(4,0)$ и $F_2(-4,0)$ равна 10.

8. Написать уравнение касательных к эллипсу $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ в его вершинах.

9. Изобразить линии $\frac{x^2}{49} + y^2 = 1$ и $x^2 + \frac{y^2}{25} = 1$ в системе координат.

10. Определить длину хорды эллипса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ параллельной оси ординат и проходящей через первый фокус эллипса.

§7. Гипербола.

I. Теоретические сведения.

1. Понятие гиперболы.
2. Каноническое уравнение гиперболы.
3. Эксцентриситет гиперболы
4. Изображение гиперболы в прямоугольной системе координат.
5. Гипербола со смещенным центром.
6. Равносторонняя гипербола.
7. Касательная к гиперболе.

Зафиксируем две точки F_1 и F_2 плоскости. Рассмотрим множество точек M плоскости с характеристическим свойством: $|MF_1 - MF_2|=const$, $|MF_1-MF_2|< F_1F_2$. Данное множество точек является линией на плоскости, которая называется гиперболой. Точки F_1 и F_2 – фокусы гипреболы. Расстояние F_1F_2 между фокусами принято обозначать 2c, а $|MF_1-MF_2|=2a$. Для гиперболы 2a<2c.

На плоскости установим систему координат следующим образом: начало системы координат поместим в середину отрезка F_1F_2, положительный луч оси абсцисс направлен по радиус вектору OF_1 первого фокуса (рис.20)

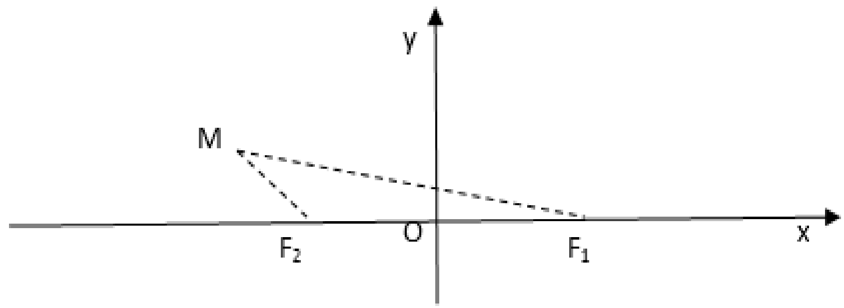

Рис.20

Относительно введенной системы координат произвольная точка M и фокусы имеют координаты: M(x, y), F_1(c, 0) F_2 (-c, 0). Характеристическое свойство гиперболы в координатах принимает вид: $\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a$.

После проведения ряда преобразований и введения обозначения $c^2-a^2=b^2$ $a<c$ будем иметь $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Далее гиперболу будем обозначать символом γ. Таким образом, γ: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$- каноническое уравнение гиперболы.

$F_1M=\left|\frac{c}{a}x-a\right|$, $F_2M=\left|\frac{c}{a}x+a\right|$ - фокальные радиусы точки M $\in$γ.

Анализ уравнения гиперболы дает следующие факты. Гипербола имеет две оси симметрии - оси координат и центр симметрии - начало координат. Центр симметрии гиперболы называется ее центром. Гипербола γ – центральная линия второго порядка. Ось симметрии, проходящая через фокусы F_1 и F_2 – фокальная (действительная) ось. Ось симметрии, перпендикулярная фокальной– мнимая. Точки пересечения фокальной оси с гиперболой – вершины гиперболы: A_1 (a,0), A_2 (-a,0). Мнимая ось не имеет общих точек с γ. Число a – действительная полуось γ, а число b – мнимая полуось γ.

Гипербола расположена вне полосы, образованной прямыми $x=\pm a$, так как $|x|\geq a$. Прямые $l_1: y=\frac{b}{a}x$ и $l_2: y=-\frac{b}{a}x$ - асимптоты γ (рис.21).

Гипербола расположена во внутренних областях вертикальных углов, образованных асимптотами, а именно в тех, где находятся фокусы F_1 и F_2. Г имеет две ветви соответственно в полуплоскостях x>0, x<0.

Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом гиперболы γ. Для гиперболы ε>1.

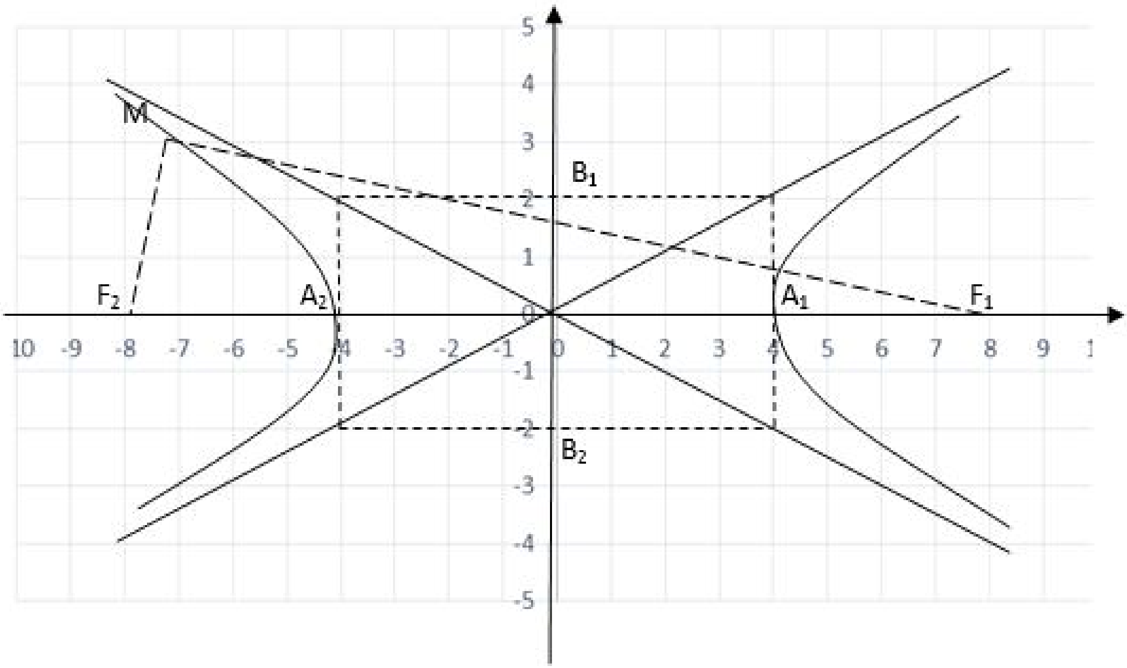

Рис.21.

Здесь A_1 (a,0), A_2 (-a,0) – вершины, B_1(0,b), B_2(0, -b) – вспомогательные точки для построения гиперболы.

Если a=b, то γ – равносторонняя гипербола, ее $\varepsilon = \sqrt{2}$, а асимптоты y=x и y=-x – биссектрисы координатных углов. Так как асимптоты равносторонней гиперболы взаимно перпендикулярны, то их можно принять за оси системы координат; в этой системе координат гипербола имеет уравнение: $xy = \frac{a^2}{2}$ или $y = \frac{k}{x}$, $(k = \frac{a^2}{2})$.

Уравнение касательной l к гиперболе в точке M_0 (x_0, y_0) имеет вид: $\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$.

Уравнение гиперболы со смещенным центром $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$.

Пример 1. Дана гипербола γ: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. Указать центр, вершины, фокусы, полуоси, эксцентриситет. Написать уравнения асимптот. Изобразить гиперболу γ в системе координат.

Из уравнения a=2 – действительная полуось, b=3 – мнимая полуось, O(0,0) – центр. Так как $c^2 = b^2 + a^2$, то $c = \sqrt{13}$, а $F_1(\sqrt{13}, 0)$ $F_2(-\sqrt{13}, 0)$ - фокусы.

Вершины: A_1 (2,0), A_2 (-2,0), $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{13}{2}$. Уравнения $y = \pm\frac{3}{2}x$ - асимптоты гиперболы. Изображение гиперболы на рис.22.

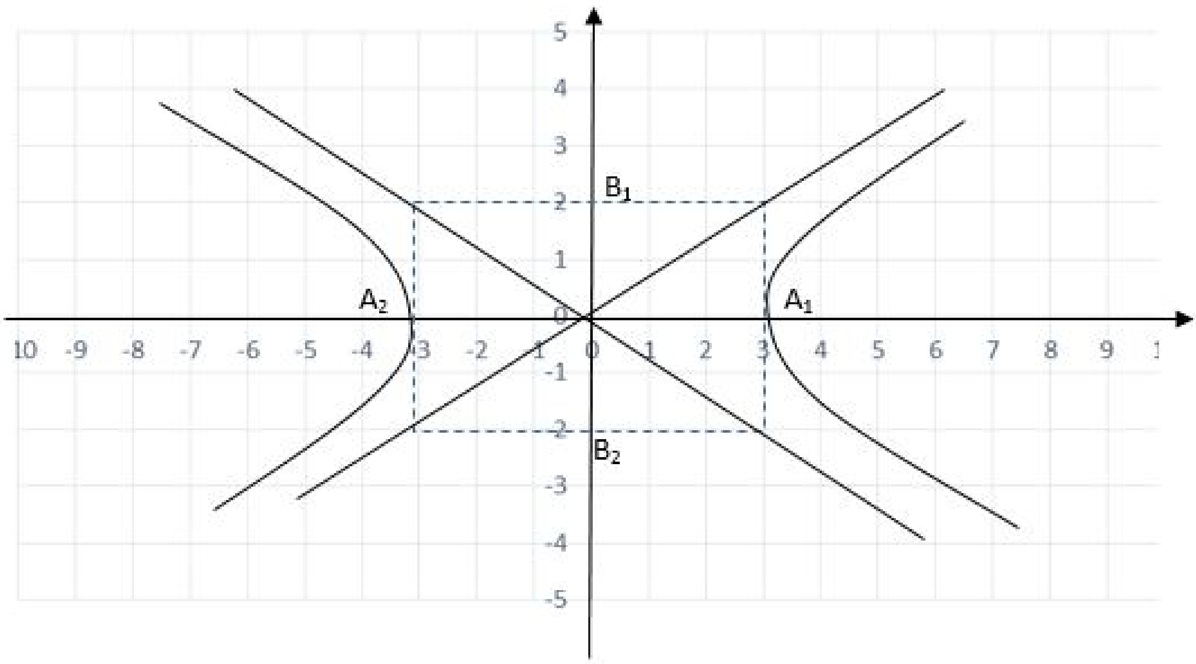

Рис.22.

Пример 2. Гипербола γ задана уравнением $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{2} = 1$. Указать центр, вершины, фокусы, полуоси, эксцентриситет. Написать уравнения асимптот. Изобразить гиперболу γ в системе координат.

Здесь ОУ – действительная ось симметрии γ, ОХ – мнимая; a=4 – мнимая полуось, b=$\sqrt{2}$ - действительная полуось, O(0,0) – центр гиперболы. Вершины

$B_1(0, \sqrt{2})$ и $B_2(0, -\sqrt{2})$; $c^2=16+2=18$, $c= 3\sqrt{2}$, следовательно $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3$, фокусы $F_1(0, 3\sqrt{2})$ $F_2(0, -3\sqrt{2})$. Уравнения асимптот $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}x$. Изображение гиперболы на рис.23.

$|MF_1 - MF_2|=2b=2\sqrt{2}$, $F_1F_2=2c=6\sqrt{2}$

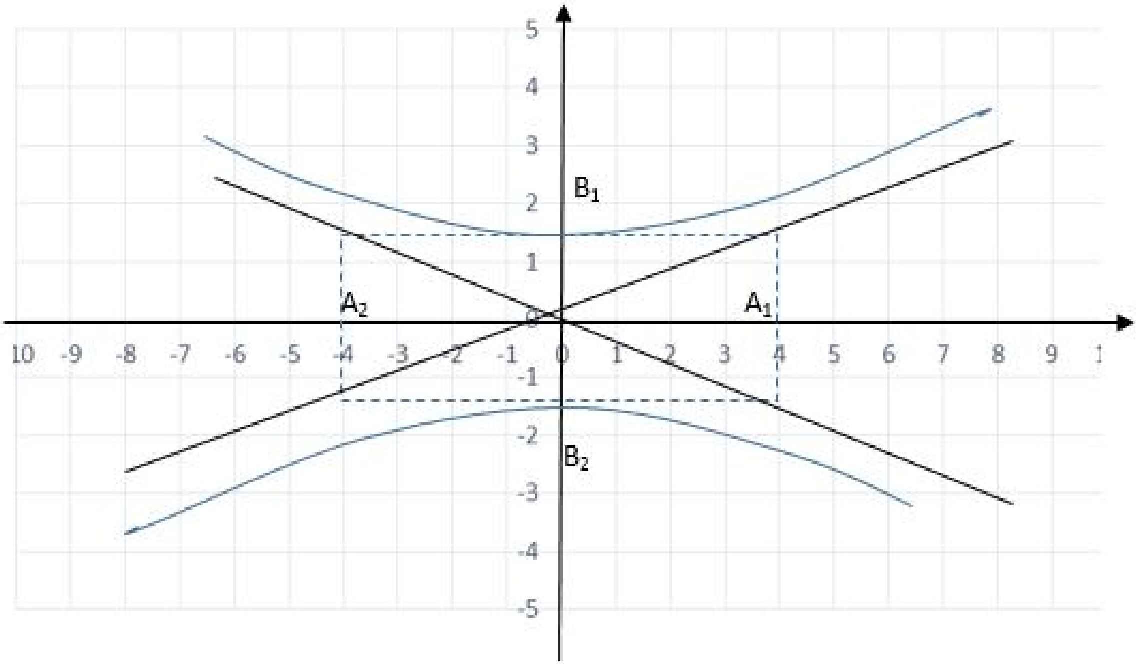

Рис. 23.

Пример 3. Построить гиперболу: $\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{4} = 1$.

Гипербола дана со смещенным центром (-3, 5). Перенесем оси координат в данную точку, получим новую систему координат $x'O'y'$. В ней a=3 – действительная полуось, b=2 – мнимая полуось; $A_1(3,0)$, $A_2(-3,0)$ – вершины, а точки $B_1(0,2)$, $B_2(0,-2)$ – вспомогательная для построения линии (рис.24).

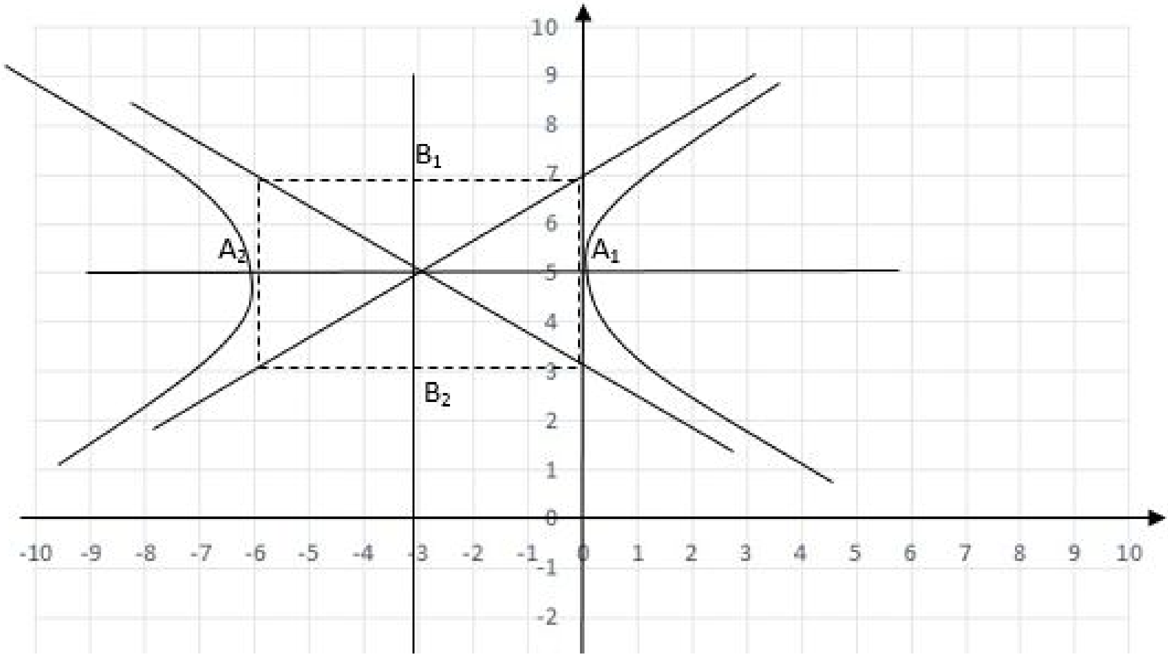

Рис.24.

Пример 4. Привести уравнение линии второго порядка $2x^2-4x-y^2+6y-5=0$ к каноническому виду.

Проведем преобразования:

$2(x^2-2x+1-1)-(y^2-6y+9-9)=5$, $2(x-1)^2-2-(y-3)^2+9=5$, $2(x-1)^2-(y-3)^2=-2$,

$\frac{2(x-1)^2}{-2}-\frac{(y-3)^2}{-2}=1$, $-\frac{(x-1)^2}{1}+\frac{(y-3)^2}{2}=1$ - каноническое уравнение гиперболы с центром (1, 3), мнимая полуось a=1 и действительная полуось b=√2. Вершины B_1 (0,√2), B_2 (0,-√2) в $x'O'y'$, которая получена переносом начала координат в точку (1,3).

Пример 5. Найти фокальные радиусы точки M (8, $3\sqrt{3}$) гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

Имеем $F_1M=\left|\frac{c}{a}x-a\right|$, $F_2M=\left|\frac{c}{a}x+a\right|$ - фокальные радиусы точки M∈γ. Так ка a=4, b=3, то $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$. Следовательно, $F_1M=\left|\frac{5}{4}\cdot 8-4\right|=6$, $F_2M=\left|\frac{5}{4}\cdot 8+4\right|=14$.

Пример 6. Написать уравнение гиперболы γ, если a=3, действительная ось симметрии – ОХ, точка М (6, $2\sqrt{3}$) принадлежит гиперболе.

Так как ОХ –действительная ось симметрии, то a=3 – действительная полуось, а γ: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1$. В силу принадлежности М (6, $2\sqrt{3}$) линии γ, имеем $\frac{6^2}{9}-\frac{(2\sqrt{3})^2}{b^2}=1$. Из последнего равенства $b^2=4$, откуда $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$.

Пример 7. Показать, что касательные в вершинах гиперболы: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, параллельны оси ординат.

Вершинами γ являются: $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$. Уравнения касательных в этих точках: $l_1:\frac{x\cdot a}{a^2}-\frac{y\cdot 0}{b^2}=1$ и $l_2:\frac{x\cdot(-a)}{a^2}-\frac{y\cdot 0}{b^2}=1$, $l_1:\frac{x}{a}=1$, x=a; $l_2:-\frac{x}{a}=1$, x=-a. Прямые $x=\pm a$ параллельны ОУ.

Пример 8.

Показать, что длина перпендикуляра, опущенного из фокуса гиперболы на одну из ее асимптот, равна мнимой полуоси.

Пусть $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, b –мнимая полуось, а $F_1(c,0)$ – фокус. Имеем: $l:y=\frac{b}{a}x$ - асимптота, $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

Используем формулу нахождения расстояния от точки до прямой: $\rho(F_1,l)=\frac{\left|\frac{b}{a}\cdot c-0\right|}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}+1}}=\frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2+b^2}}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}}=b$. Утверждение справедливо.

II. Упражнения.

1. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

а) A_1A_2=8, F_1F_2=10, A_1 , A_2 – вершины гиперболы;

б) a=$2\sqrt{5}$, $\varepsilon=\sqrt{1{,}2}$, ОХ – действительная ось симметрии.

2. Для γ: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{4}=1$ написать уравнение сопряженной гиперболы. Найти эксцентриситет, написать уравнения асимптот для каждой из гипербол. (Замечание: сопряженными называются гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$).

3. Относительно равносторонней гиперболы определить положение точек $A_1(1,-2)$, $A_2(\sqrt{2},1)$, $A_3(4,1)$. Сделать чертеж.

4. Дать изображение гиперболы xy=2.

5. Указать координаты центра γ: $2x^2-4x-y^2-2y+11=0$

6. Установить зависимость формы гиперболы от ε.

7. Написать уравнение множества точек M, для каждой из которых $|MF_1 - MF_2|=6$, если $F_1(4,0)$, $F_2(-4,0)$.

8. Изобразить гиперболу, если уравнения ее асимптот: $y=\pm\frac{x}{2}$ и гипербола проходит через точку $(12, 3\sqrt{3})$.

9. Дана гипербола γ: $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$. Указать центр, полуоси, вершины, фокусы, эксцентриситет.

10. Написать уравнение прямой линии l, которая касается гиперболы $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ в точка M_0 (5, -4).

§8. Парабола.

<u>I. Теоретические сведения.</u>

1. Понятие параболы.

2. Каноническое уравнение параболы.

3. Изображение параболы в прямоугольной системе координат.

4. Касательная к параболе.

Фиксируем на плоскости точку F и некоторую прямую d, $F \notin d$. Рассмотрим множество точек M плоскости с характеристическим свойством: ρ(M, d)= ρ(M, F). Это множество точек представляет собой линию на плоскости, которая называется параболой. Точка F – фокус параболы, прямая d – директриса параболы. Расстояние ρ(F, d) называется фокальным параметром параболы и обозначается p.

Введем на плоскости систему координат следующим образом. Через точку F проведем прямую *l*, перпендикулярную директрисе d. Обозначим D=*l*∩d. Начало системы координат поместим в середину отрезка DF, ось OX – прямая *l*, положительный луч оси абсцисс направлен по радиус вектору OF фокуса F (рис.25).

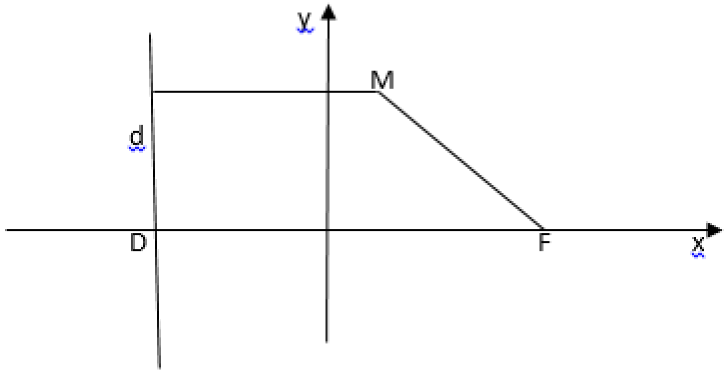

Рис.25

В этой системе координат: F(p/2,0), D(-p/2,0), d: x+p/2=0, M(x, y). Параболу будем обозначать γ. Характеристическое свойство параболы в координатах записывается в виде: $\left|x+\frac{p}{2}\right|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$. После проведения ряда преобразований будем иметь каноническое уравнение параболы: $y^2=2px$.

Из этого уравнения следует, что все точки параболы γ принадлежат полуплоскости $x\geq 0$, ось абсцисс является осью симметрии γ (ось параболы), а точка O(0,0)=γ∩OX – вершина параболы. Далее, при возрастании x текущей точки M(x, y) параболы, $|y|$ неограниченно возрастает. Изображение γ: $y^2=2px$ (рис. 26).

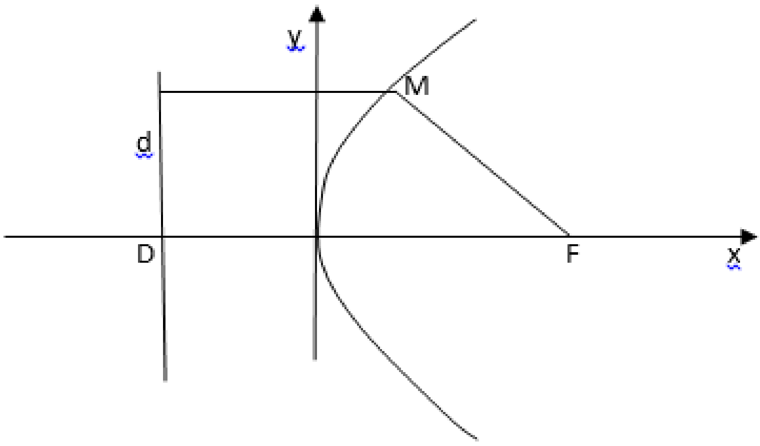

Рис.26

Уравнение касательной l к параболе $y^2 = 2px$ в точке касания $M_0(x_0, y_0) \in \gamma$ имеет вид: $y \cdot y_0 = p(x + x_0)$.

Касательная l образует равные углы с фокальным радиусом точки касания и с лучом, параллельным оси параболы и имеющим начало в точке касания (рис.27).

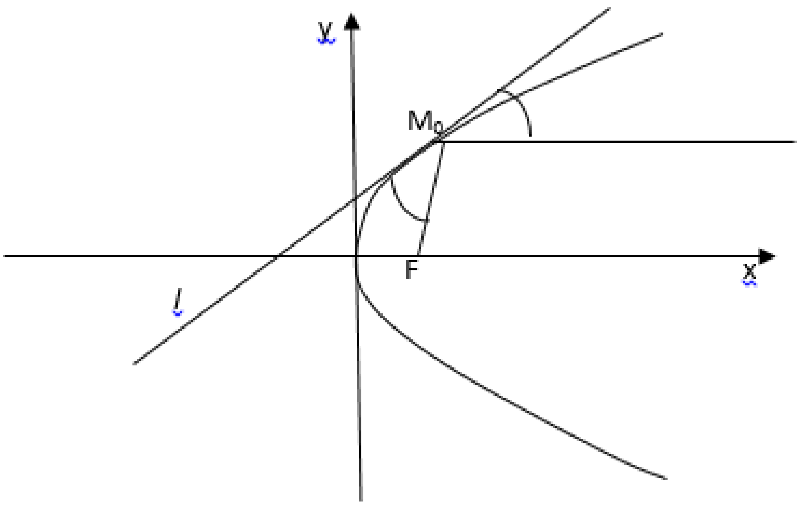

Рис27

Пример 1. Дана парабола γ: $y^2 = 6x$. Указать вершину, ось, фокус. Написать уравнение директрисы. Изобразить параболу.

Каноническое уравнение γ: $y^2 = 2px$, отсюда 2p=6, p=3 – фокальный параметр параболы, следовательно фокус F(3/2, 0), уравнение директрисы d: x+3/2=0. Вершина O(0,0), ось – OX. Так как коэффициент при x положителен, то γ расположена в правой полуплоскости относительно оси ОУ: $x \geq 0$. Для изображение γ найдем ее дополнительные для построения точки: пусть x=6, тогда $y^2 = 36$ и y_1=6, y_2=-6. Имеем (6,6) и (6,-6), принадлежат γ (рис. 28).

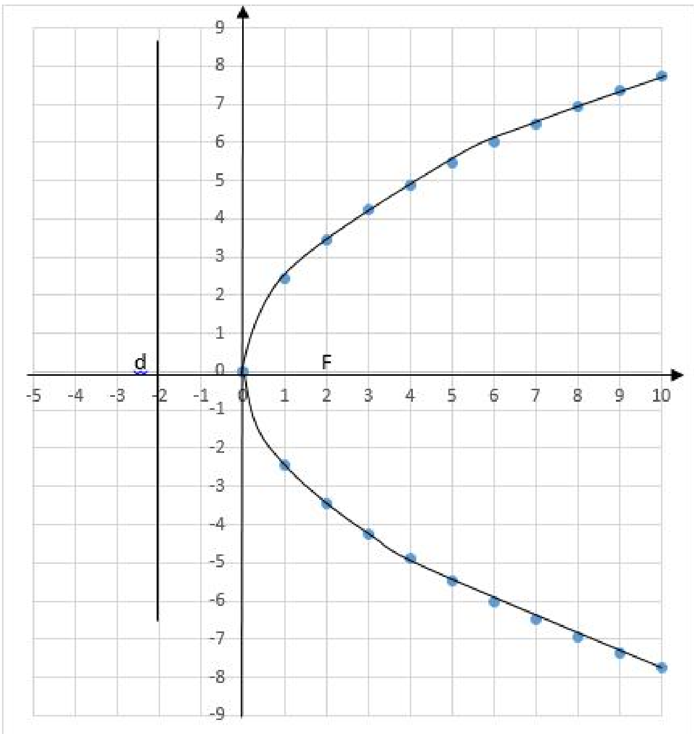

Рис.28. Изображение γ: $y^2 = 6x$

Пример 2. Дана параболу γ: $x^2 = 4y$. Указать вершину, ось, фокус. Написать уравнение директрисы. Изобразить параболу.

Вершина O(0,0), ось – ОУ. Так как коэффициент при у положителен, то γ расположена в верхней полуплоскости относительно оси ОХ: $y \geq 0$. Каноническое уравнение γ: $x^2 = 2py$, отсюда 2p=4, p=2 – фокальный параметр параболы, следовательно фокус F(0,1), уравнение директрисы d: y+1=0. Для изображение γ найдем ее дополнительные для построения точки: пусть y=1/4, тогда $x^2 = 1$ и x_1=1, x_2=-1. Имеем (1,1/4) и (-1,1/4), принадлежат γ (рис. 29).

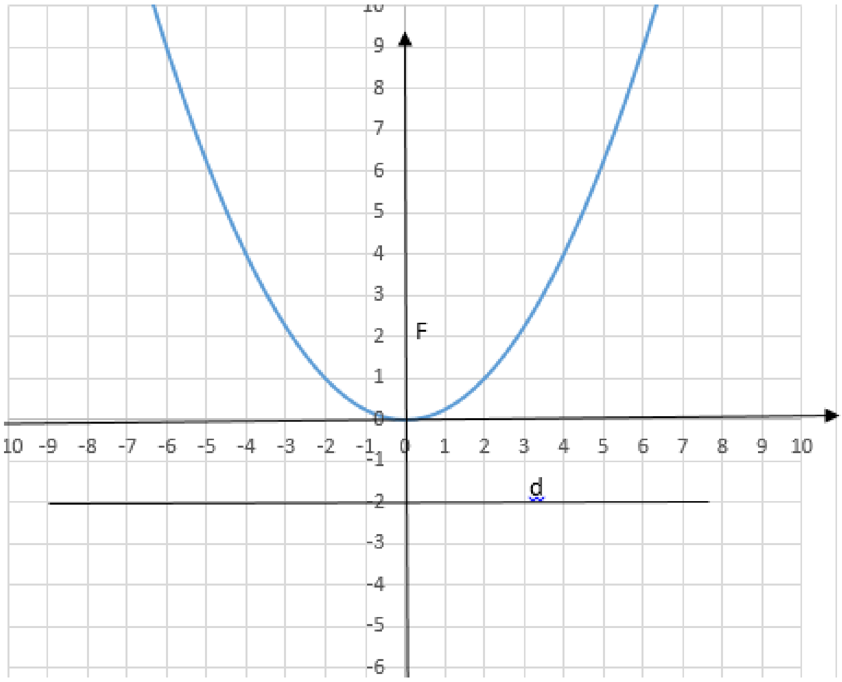

Рис.29. Изображение γ: $x^2 = 4y$

Пример 3. Дана парабола γ: $y^2 = -8x$. Изобразить параболу.

В данном случае вершина О(0,0), ось симметрии (ось параболы) – ось ОХ, но парабола расположена в левой полуплоскости относительно оси ОУ, так как -8<0. Далее, p=4 – фокальный параметр, F(-2,0) - фокус, уравнение директрисы d: x-2=0. Дополнительные точки для построения: пусть x=-1, тогда $y^2 = 8$, $y_1 = 2\sqrt{2}$, $y_1 = -2\sqrt{2}$. Точки $\left(-1,\, 2\sqrt{2}\right)$ и $\left(-1,\, -2\sqrt{2}\right)$ принадлежат параболе (рис.30).

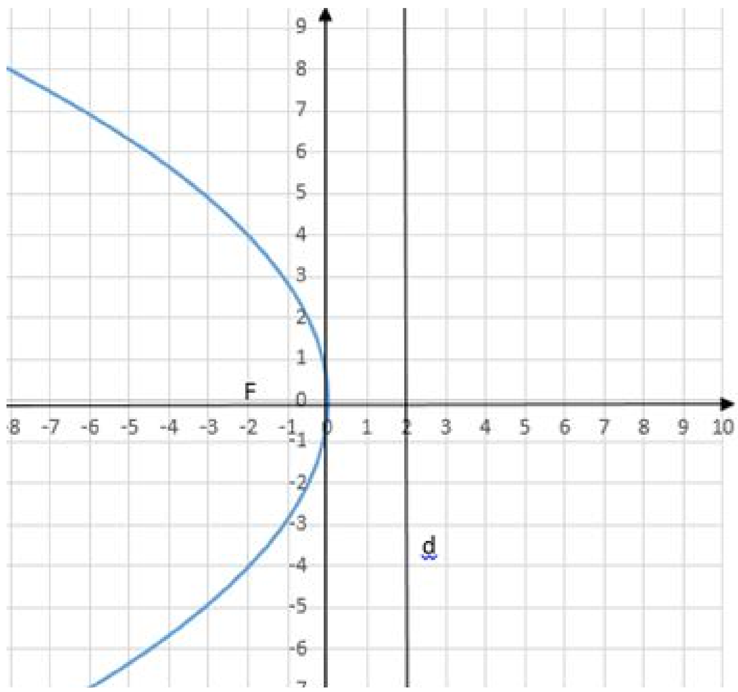

Рис.30. Изображение γ: $y^2 = -8x$

Пример 4. Изобразить параболу γ: $x^2 = -2y$.

Вершина O(0,0), ось – ОУ. Так как коэффициент при у отрицателен, то γ расположена в нижней полуплоскости относительно оси ОХ. Каноническое уравнение γ: $x^2 = 2py$, отсюда p=1 – фокальный параметр параболы, следовательно фокус F(0,-1/2), уравнение директрисы d: y-1/2=0. Для изображение γ найдем ее дополнительные точки: пусть y=-2 тогда $x^2 = 4$ и x_1=2, x_2=-2. Имеем (2, -2) и (-2, -2) принадлежат γ (рис. 31).

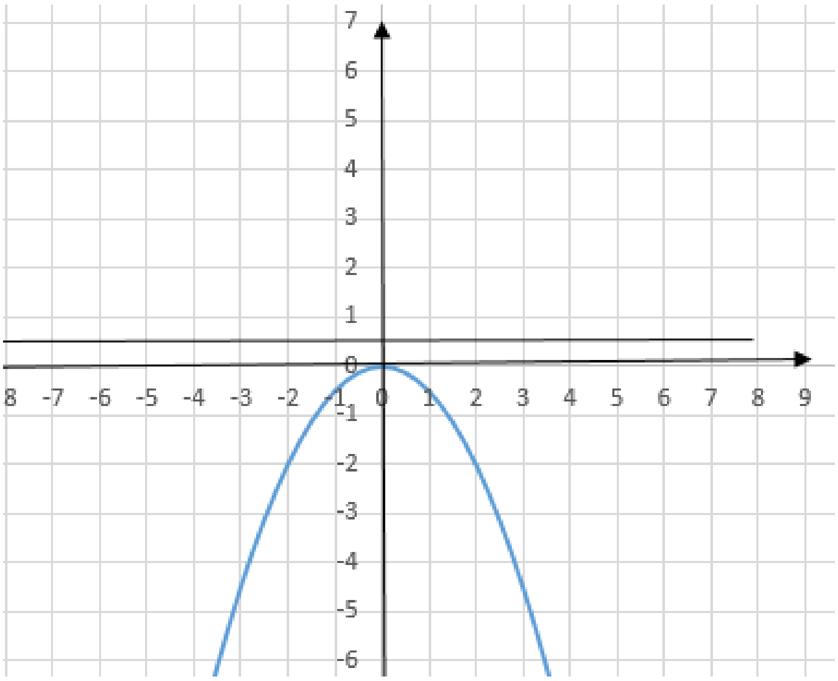

Рис.31. Изображение γ: $x^2 = -2y$

Пример 5. Привести уравнение линии второго порядка к каноническому виду, γ: $x^2 - 4x + 2y + 10 = 0$. Изобразить линию.

Проведем преобразования: $x^2 - 4x + 4 - 4 = -2y - 10$, $(x-2)^2 = -2y - 6$; $(x-2)^2 = -2(y+3)$ - каноническое уравнение параболы со смещенной вершиной (2,-3). Перенесем оси координат в точку (2,-3). В системе координат $x'O'y'$ имеем уравнение $x'^2 = -2y'$. Отсюда ось $O'y'$; -2<0, поэтому линия расположена в нижней полуплоскости относительно $x'O'$. Дополнительные точки: пусть $y' = -8$, тогда $x'^2 = 16$, $x_1' = 4$, $x_2' = -4$. Имеем точки в $x'O'y'$ (4, -8), (-4, -8) (рис.32).

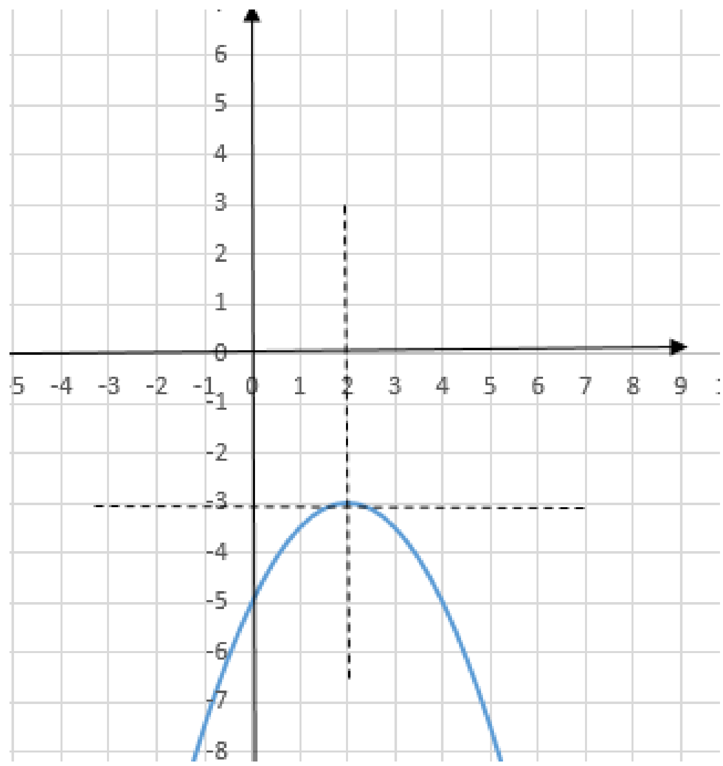

Рис.32. Изображение γ: $x^2 - 4x + 2y + 10 = 0$

Данная парабола пересекает ось ОУ в точке (0, -5).

Пример 6. Дана парабола γ: $y^2 = 12x$. Определить длину хорды γ , перпендикулярной оси симметрии γ и проходящей через фокус F параболы γ.

Здесь 2p=12, p=6 – фокальный параметр γ, тогда фокус F(3, 0). Парабола имеет вершину O(0,0) и ось – ОУ. L_1L_2 – хорда, длину которой надо найти. Так как $L_1L_2 \perp OX$, то $L_1(3,\ y_1)$, $L_2(3,\ y_2)$. В силу того, что $L_1 \in \gamma$ и $L_2 \in \gamma$, имеем $y_1^2 = 12 \cdot 3$, $\left(y_2^2 = 12 \cdot 3\right)$, отсюда $y_1=6$, $y_2=-6$. Тогда длина хорды $L_1L_2=12=2p$.

Пример 7. Составить уравнение касательной к параболе γ: $y^2 = 8x$ в точке $M_0(2, 4)$.

Уравнение касательной l к параболе $y^2 = 2px$ в точке касания $M_0(x_0, y_0) \in \gamma$ имеет вид: $y \cdot y_0 = p(x + x_0)$. В данном случае p=4, $x_0=2$, $y_0=4$, поэтому касательная имеет уравнение $y \cdot 4 = 4(x+2)$, y=x+2, x-y+2=0.

Пример 8. Составить уравнение параболы, имеющей фокус F (3,0) и уравнение директрисы x+1=0.

Воспользуемся характеристическим свойством параболы: ρ(M, d)= ρ(M, F), M – текущая точка параболы.

В нашем случае: $\sqrt{(x-3)^2+y^2}=|x+1|$, $(x-3)^2+y^2=(x+1)^2$, $y^2-8x+8=0$, $y^2=8(x-1)$ - парабола со смещенной в точку (1, 0) вершиной.

II. Упражнения.

1. Составить каноническое уравнение параболы, если расстояние между фокусом и вершиной O(0,0) равна 2,5, а ось симметрии а) OX, б)OУ.

2. Найти точки пересечения параболы $x^2=18y$ с прямой 2х-6=0.

3. Исследовать зависимость формы параболы от ее фокального параметра.

4. Изобразить параболы: а) $y^2=x$ б) $x^2=y$ в) $y^2=-x$ г) $x^2=-y$

5. Каноническое уравнение параболы $y^2=2px$. Доказать, что прямая, проходящая через вершину γ пересекает ее ровно в одной точке.

6. Парабола γ задана уравнением $y=x^2-5x+6$. Найти вершину параболы и точки ее пересечения с осями координат. Изобразить параболу.

7. Найти точки пересечения параболы $-2x^2=y$ с прямой x+y+2=0.

8. Привести уравнение линии $x^2-6x-4y+29=0$ к каноническому виду. Сделать чертеж.

9. Написать уравнение касательной к параболе γ: $x^2=2py$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

10. Найти на параболе $y^2=2x$ точку, расстояние которой до вершины параболы равно 24.

§9. Полярная система координат.

I. Теоретические сведения.

1. Введение полярной системы координат.

2. Координаты точки в полярной системе координат.

3. Формулы перехода от полярных координат к прямоугольным декартовым.

4. Формулы перехода от прямоугольных декартовых координат к полярным.

Пусть О – некоторая точка плоскости, $\vec{i}$ - единичный вектор. Пара $\{O,\vec{i}\}$ определяет на плоскости полярную систему координат. Обозначим через l – прямую, проходящую через точку О в направлении вектора $\vec{i}$. Прямая l – называется полярной осью, точка О – полюсом полярной системы координат (рис. 33).

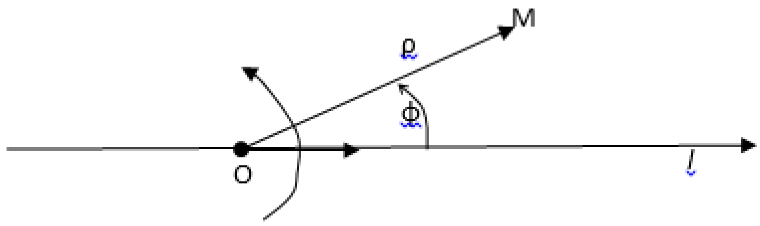

Рис.33

Пусть М – произвольная точка плоскости, ρ(О, М)=ρ – полярный радиус точки М, а $\varphi=\left(\vec{i}\,^\wedge\,\overrightarrow{OM}\right)$ - направляющий между полярной осью l и вектором $\overrightarrow{OM}$, φ называется полярным углом точки М. Числа ρ и φ полярные координаты точки М: М(ρ, φ).

При совпадении М с О полагают ρ=0, φ не определён. Далее, $\rho\in[0, +\infty]$, φ имеет бесконечное множество значений, кратных 2π: φ+2πk, $k\in Z$. Значение угла φ_0, такое, что $-\pi< \varphi< \pi$ – главное.

К полярной системе координат присоединим прямоугольную декартову систему координат с началом в полюсе О, первым координатным вектором $\vec{i}$ и ортонормированным базисом $\{\vec{i},\vec{j}\}$ (рис.34).

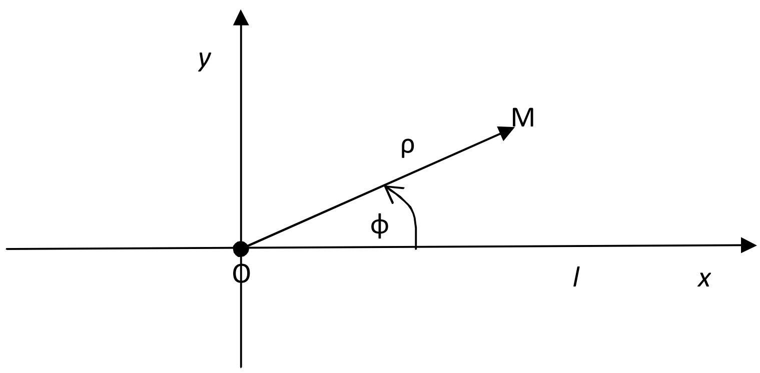

Рис.34.

Пусть М имеет координаты (x,y) в присоединительной системе координат. В этом случае формулы перехода от полярных координат (ρ, φ) точки М к ее прямоугольным координатам (x, y) имеют вид: $\begin{cases} x = \rho \cdot cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \end{cases}$. Обратные формулы перехода от прямоугольных координат М (x,y) к ее полярным координатам (ρ, φ) следующие: $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$

Пример 1. Построить в выбранной полярной системе координат точки $A_1(1, -\frac{\pi}{2})$, $A_2(2, \frac{\pi}{3})$, $A_3\left(\sqrt{3}, -\frac{2\pi}{3}\right)$.

Возьмем на плоскости полюс О, полярную ось $l \uparrow\uparrow \vec{i}$, положительное направление отсчета углов противоположно вращению часовой стрелки (рис. 35).

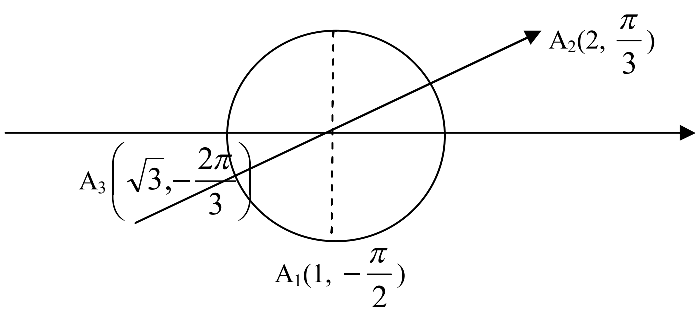

Рис.35

Проведем вспомогательную единичную окружность с центром в полюсе О. Отметим на окружности точки, соответствующие углам $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$. Проведем лучи с началом О через отмеченные точки и отложим на этих лучах соответственно отрезки с длинами 1, 2, $\sqrt{3}$. В результате получим искомые точки $A_1(1, -\frac{\pi}{2})$, $A_2(2, \frac{\pi}{3})$, $A_3\left(\sqrt{3}, -\frac{2\pi}{3}\right)$ (рис.35).

Замечание. Если φ>0, то угол откладываем в положительном направлении от оси *l*, в противном случае, - в отрицательном направлении.

Пример 2. Дана полярная система координат и присоединенная к ней прямоугольная декартова система. Определить прямоугольные координаты точек К$(3, -\frac{\pi}{6})$, L$(2, \frac{\pi}{3})$, N$\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

Воспользуемся формулами $\begin{cases} x = \rho \cdot cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \end{cases}$.

Для точки К: $\begin{cases} x = 3 \cdot cos(-\frac{\pi}{6}) \\ y = 3 \cdot \sin(-\frac{\pi}{6}) \end{cases}$, $\begin{cases} x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$, т.е. К $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

Для точки L: $\begin{cases} x = 2 \cdot cos\frac{\pi}{3} \\ y = 2 \cdot \sin\frac{\pi}{3} \end{cases}$, $\begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$, т.е. L $\left(1, \sqrt{3}\right)$.

Для точки N: $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cdot cos\frac{3\pi}{4} \\ y = \sqrt{2} \cdot \sin\frac{3\pi}{4} \end{cases}$, $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$, т.е. N (-1, 1).

Пример 3. Дана прямоугольная декартова система координат на плоскости, а $\{O, \vec{i}\}$ - полярная система координат, для которой прямоугольная является присоединенной. Определить полярные координаты точек $L_1(0, 6)$ и L_2 $\left(1, -\sqrt{3}\right)$.

Для L_1: $\rho = \sqrt{0^2 + 6^2} = 6$ $\cos\varphi = \frac{0}{6} = 0$ $\sin\varphi = \frac{6}{6} = 1$ отсюда $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, L_1 $(6, \frac{\pi}{2})$ в полярной системе координат.

Для L_2: $\rho = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$ $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ $\sin\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ отсюда $\varphi = \frac{5\pi}{3}$. Таким образом, L_2 $(2, \frac{5\pi}{3})$ в полярной системе координат.

II. Упражнения.

1. Указать полярные координаты точки плоскости, симметричной точке М $(1, \frac{\pi}{4})$, относительно: а) полярной оси, б) полюса.

2. Какие фигуры на плоскости определяют уравнения и неравенства, заданные в полярной системе координат: а) φ=const=α, б) ρ=const=r, в) ρ<r, r= const; г) φ-α>0, α= const.

3. Полярные координаты точек плоскости удовлетворяют условию:

а) $\rho\cos\varphi=4$; б) $\rho\sin\varphi=2$. Указать расположение этих точек на плоскости.

4. Построить линию $\rho=2-\sin\varphi$ по точкам, начиная от $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$.

5. Записать уравнение лемнискаты $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy$ $a=const$ в полярной системе координат.

6. Записать полярное уравнение окружности: а) $x^2+y^2=4$, б) $(x-1)^2+(y+2)^2=9$.

7. Найти расстояние между точками $A_1(1, \frac{\pi}{4})$, $A_2(2, -\frac{\pi}{4})$, заданными полярными координатами.

8. Найти середину отрезка M_1M_2, где $M_1(3, \frac{\pi}{4})$, $M_2(3, \frac{3\pi}{4})$ в полярной системе координат.

9. Какую линию на плоскости определяет уравнение $\rho(2\cos\varphi+\sin\varphi)-5=0$, записанное в полярных координатах?

10. Дана парабола уравнением в декартовых координатах: $y^2=4x$. Записать уравнение данной параболы в полярных координатах.

Оглавление

Введение 2
§1. Системы координат на плоскости. 4
§2. Уравнения прямой на плоскости. 8
§3. Аффинные задачи теории прямой. 14
§4. Метрические задачи теории прямой на плоскости. 18
§5. Окружность как линия второго порядка. 21
§6. Эллипс. 25
§7. Гипербола. 32
§8. Парабола. 39
§9. Полярная система координат. 46

Анна Павловна Филимонова,

доцент кафедры ОМиИ АмГУ, канд. физ.-мат. наук;

Татьяна Александровна Юрьева,

доцент кафедры ОМиИ АмГУ, канд. пед. наук;

Наталья Николаевна Двоерядкина,

доцент кафедры ОМиИ АмГУ, канд. пед. наук

Аналитическая геометрия: планиметрия. Учебно-методическое пособие.

Заказ 785.