Министерство образования и науки Российской Федерации

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т.А. Юрьева, А.П. Филимонова,
Н.Н. Двоерядкина

ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Учебно-методическое пособие

Благовещенск

2017

ББК 22.151.5 я73
Ю85

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензент:
И.А. Голубева, канд.физ.-мат. наук, доц. кафедры физики АмГУ

Юрьева Т.А., Филимонова А.П., Двоерядкина Н.Н.
Ю 85 Геометрия в пространстве: учебно-методическое пособие / Т.А. Юрьева, А.П. Филимонова, Н.Н. Двоерядкина. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2017. – 61 с.

Учебно-методическое пособие содержит краткие теоретические сведения по разделу «Аналитическая геометрия в пространстве» курса «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», а также упражнения. Пособие предназначено в помощь студентам I курса направления подготовки 24.03.0 «Ракетные комплексы и космонавтика» и специальности 24.05.01 «Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов». Может быть использовано преподавателями.

ББК 22.151.5 я73

В авторской редакции

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» является одной из базовых дисциплин в подготовке бакалавров в сфере проектирования, производства и эксплуатации ракет и ракетно-космических комплексов.

Представленное пособие рассматривает такие разделы аналитической геометрии как векторы в пространстве, прямая и плоскость в пространстве, поверхности второго порядка. Геометрические образы исследуются средствами алгебры на основе метода координат. Кроме того, в пособие включены сведения о цилиндрической и сферической системах координат.

Пособие предназначено, прежде всего, для организации самостоятельной работы студентов; призвано сфокусировать обучающихся на том теоретическом материале, который необходим для овладения ими профессиональными компетенциями. Проработка теоретического материала в сопровождении с решением упражнений, предложенных в конце каждого параграфа, будет способствовать осознанному усвоению курса и успешной сдачи экзамена.

§ 1. ВЕКТОРЫ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Базис пространства.
2. Векторное произведение.
3. Смешанное произведение.

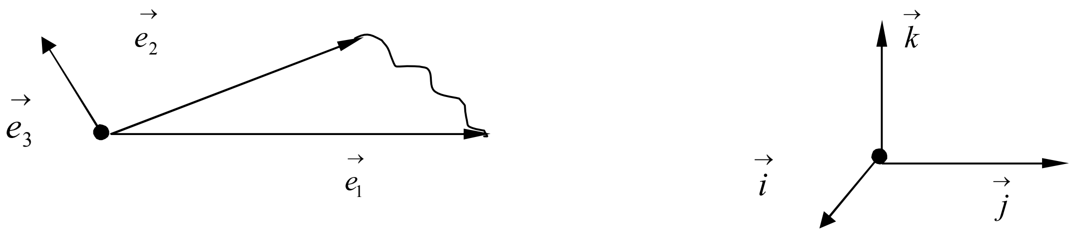
Понятие вектора, линейные операции над векторами и их свойства были изучены в курсе геометрии 10 класса. Тогда же изучена операция скалярного умножения векторов, ее свойства. Дальнейшее изложение ведется в предположении, что студенты владеют этими сведениями.

Аффинным базисом пространства называется совокупность трех некомпланарных векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ взятых в определенном порядке.

Аффинный базис пространства называется ортонормированным, если векторы этого базиса являются единичными и взаимно перпендикулярными.

Справедливо следующее утверждение: каждый вектор $\vec{a}$ пространства единственным образом разлагается по векторам базиса пространства: $\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$ ($\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$).

Таким образом, если в пространстве выбран некоторый базис, то каждому вектору пространства ставится в соответствие вполне определенная упорядоченная пара (упорядоченная тройка) чисел, представляющих собой коэффициенты разложения вектора по базису.



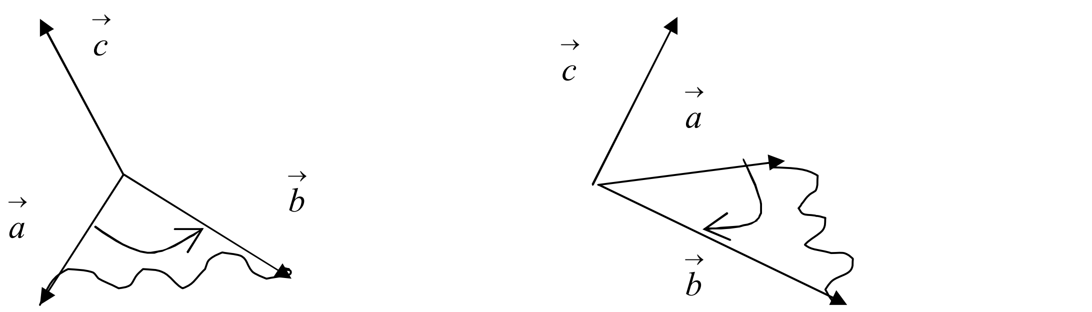
$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ – аффинный базис пространства

$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ – ортонормированный базис пространства $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$, $\vec{i}\perp\vec{j}$, $\vec{i}\perp\vec{k}$, $\vec{j}\perp\vec{k}$

Рис. 1

Координатами вектора в данном базисе называются коэффициенты его разложения по векторам базиса: $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется правой, если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ из конца вектора $\vec{c}$ виден совершающимся против часовой стрелки (рис. 2). Если же указанный поворот совершается по часовой стрелке, то упорядоченная тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – левая.



$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правая тройка векторов

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – левая тройка векторов

Рис. 2

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинерны. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, который обозначается $[\vec{a},\ \vec{b}]$ (или $\vec{a}\times\vec{b}$) и удовлетворяет требованиям:

1. $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ $\left(0<\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)<\pi\right)$;

2. $[\vec{a},\ \vec{b}]\perp\vec{a}$, $[\vec{a},\ \vec{b}]\perp\vec{b}$;

3. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $[\vec{a},\ \vec{b}]$ – правая тройка (рис. 3).

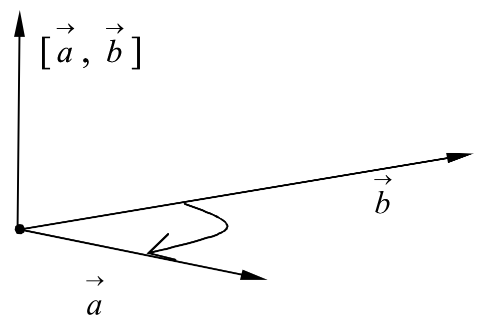


Рис. 3

В случае коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ их векторное произведение по определению является нуль-вектором: $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow[\vec{a},\ \vec{b}]=\vec{0}$.

Операция векторного умножения векторов обладает следующими свойствами:

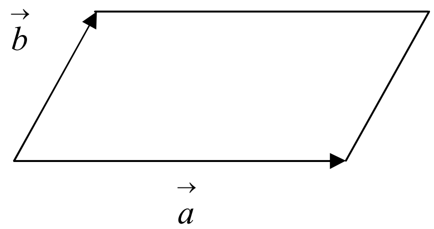
1. $[\vec a, \vec b]=-[\vec b, \vec a]$;

2. $[\lambda\vec a, \vec b]=[\vec a, \lambda\vec b]=\lambda[\vec a, \vec b]$, $\lambda\in R$;

3. $[\vec a+\vec b, \vec c]=[\vec a, \vec c]+[\vec b, \vec c]$ и $[\vec a, \vec b+\vec c]=[\vec a, \vec b]+[\vec a, \vec c]$.

Если в ортонормированном базисе $\{\vec i, \vec j, \vec k\}$ векторы $\vec a$ и $\vec b$ заданы своими координатами: $\vec a=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec b=(b_1, b_2, b_3)$, то

$$[\vec a, \vec b]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right).$$

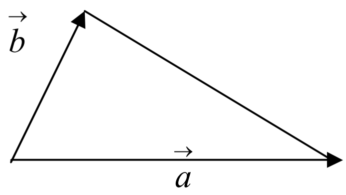


$S=\left\|\left[\vec a, \vec b\right]\right\|$

Рис. 4

Число, равное длине (модулю) векторного произведения векторов $\vec a$ и $\vec b$, равно и площади параллелограмма, построенного на $\vec a$ и $\vec b$ (рис. 4).

Тогда площадь треугольника, построенного на векторах $\vec a$ и $\vec b$ (рис. 5).



$S=\frac{1}{2}\left\|\left[\vec a, \vec b\right]\right\|$

Рис. 5

Рассмотрим векторное произведение $[\vec b, \vec c]$. Умножим вектор $\vec a$ скалярно на полученный вектор: $(\vec a, [\vec b, \vec c])$. Число, являющееся результатом приведенной последовательности операций, называют смешанным произведением трех векторов $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$, взятых в указанном порядке. Обозначение $(\vec a, \vec b, \vec c)$ – смешанное произведение векторов $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$.

По обпределению $(\vec a, \vec b, \vec c)=(\vec a, [\vec b, \vec c])$.

Операция смешанного умножения векторов обладает следующими свойствами:

1. $\alpha(\vec a, \vec b, \vec c)=(\alpha\vec a, \vec b, \vec c)=(\vec a, \alpha\vec b, \vec c)=(\vec a, \vec b, \alpha\vec c)$, $\alpha\in R$.

2. $(\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})=(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d})+(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$, $(\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{d})=(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})+(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d})$, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}+\vec{d})=(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})+(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$.

3. Смешанное произведение векторов не изменяется при циклической перестановке сомножителей: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})=(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})=(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$.

4. При перестановке двух рядом стоящих сомножителей смешанное произведение векторов меняет знак.

Например, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})=-(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$.

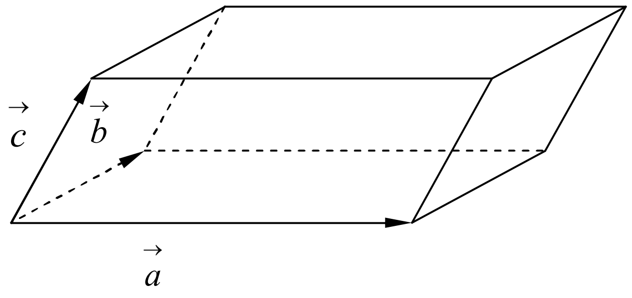
Справедливо утверждение: векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ заданы своими координатами относительно ортонормированного базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$: $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}=(c_1, c_2, c_3)$. Тогда $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

Из этой формулы следует, что условие компланарности векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ в координатах имеет вид: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$.

Смешанное произведение векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})>0$, если упорядоченная тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правая; $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})<0$, если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – левая тройка векторов.

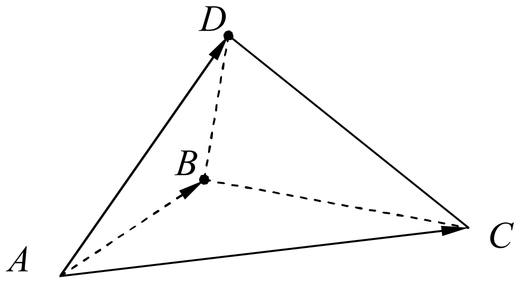
Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ по абсолютной величине численно равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 6).



$$V = \left|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\right|$$

Рис. 6

Отсюда следует формула для вычисления объема тетраэдра (рис. 7):



$$V = \frac{1}{6}\left|(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})\right|$$

Рис. 7

Упражнения

1. Записать разложение вектора $3\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ по базису $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, если $\vec{a} = -\vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3}$, $\vec{b} = 3\vec{e_2} + \vec{e_3}$, $\vec{c} = 2\vec{e_1} - 4\vec{e_2}$.

2. Найти координаты векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

3. Найти координаты векторов $3\vec{a} + 4\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$, $3\vec{b} - 4\vec{c}$, $5\vec{c}$, $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

4. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{k}$. Определить координаты вектора $-\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

5. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p} = 6\vec{a} - 3\vec{b}$ и $\vec{g} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right| = 4$, $\left|\vec{b}\right| = 3$, $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 30^\circ$.

6. Определить координаты вектора $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$, если $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=3\vec{j}+\vec{k}$.

7. Показать, что для базисных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ выполняются равенства: $[\vec{i}, \vec{j}]=\vec{k}$, $[\vec{j}, \vec{k}]=\vec{i}$, $[\vec{k}, \vec{i}]=\vec{j}$, $[\vec{j}, \vec{i}]=-\vec{k}$, $[\vec{k}, \vec{j}]=-\vec{i}$, $[\vec{i}, \vec{k}]=-\vec{j}$.

8. Угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$. Длины векторов: $\left|\vec{a}\right|=6$, $\left|\vec{b}\right|=5$. Найти $\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\|$.

9. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны. Зная, что $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=4$, вычислить $\left\|\left[3\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-2\vec{b}\right]\right\|$.

10. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, образующие правую тройку векторов, взаимно перпендикулярны, т. е. $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{b}\perp\vec{c}$, $\vec{a}\perp\vec{c}$. Зная, что $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=2$ $\left|\vec{c}\right|=3$, вычислить $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

11. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}+\vec{b}$, $-\vec{b}+2\vec{c}$, $3\vec{c}+\vec{a}$, если $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=-\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$.

12. Определить, правую или левую тройку векторов образуют $\vec{p}$, $\vec{g}$, $\vec{r}$, если $\vec{p}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{g}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{r}=7\vec{i}+14\vec{j}-13\vec{k}$.

13. Вычислить $(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, \vec{j}, \vec{k})$, $(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, \vec{i}, \vec{k})$, $(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$.

14. Проверить компланарны ли векторы $\vec{p}=[\vec{a}, \vec{m}]$, $\vec{g}=[\vec{b}, \vec{m}]$, $\vec{r}=[\vec{c}, \vec{m}]$, где $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.

15. Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, если за основание взят параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

16.Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – некомпланарны. При каких значениях λ компланарны векторы $\vec{a}+2\vec{b}+\lambda\vec{c}$, $4\vec{a}+5\vec{b}+6\vec{c}$, $7\vec{a}+8\vec{b}+\lambda^2\vec{c}$?

17.Показать, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо соотношение: $[\vec{a}, \vec{b}]=(\vec{a}, \vec{b}, \vec{i})\vec{i}+(\vec{a}, \vec{b}, \vec{j})\vec{j}+(\vec{a}, \vec{b}, \vec{k})\vec{k}$.

§ 2. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

1. Понятие системы координат

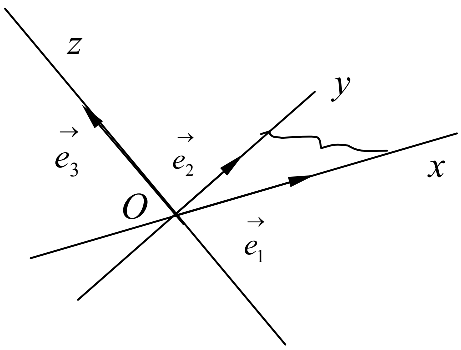
2. Координаты точки

3. Простейшие задачи в координатах

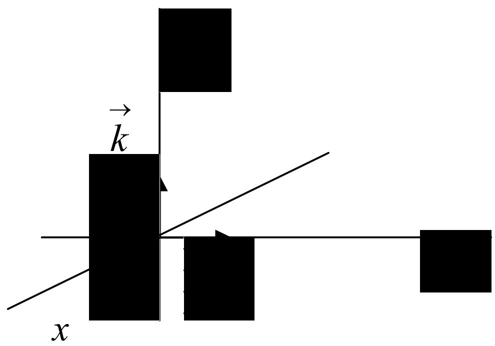
Система координат в пространстве однозначно определяется заданием некоторой точки O пространства и векторов базиса пространства. Тогда O называется началом системы координат.

Прямые, проходящие через начало координат в направлении векторов базиса, называются осями координат.

В зависимости от выбора базиса различают аффинную (общую декартову) и прямоугольную декартову системы координат (рис. 8).



$\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ – аффинная система координат в пространстве



$\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ – прямоугольная система координат в пространстве

Рис. 8

Ox, Oy и Oz – оси координат, Ox – ось абсцисс, Oy – ось ординат, Oz – ось аппликат. Другое обозначение системы координат в пространстве: $Oxyz$.

Пусть M – произвольная точка пространства. Вектор $\vec{OM}$, соединяющий начало системы координат с точкой M, называется радиус-вектором точки M.

Координатами точки M пространства в системе координат называются координаты ее радиус-вектора $\vec{OM}$ в соответствующем базисе:

$$M(x,y,z) \Leftrightarrow \vec{OM} = (x,y,z) \Leftrightarrow \vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 .$$

В частности, $M(x,y,z) \Leftrightarrow \vec{OM} = (x,y,z) \Leftrightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

x называется абсциссой, y – ординатой, z – аппликатой точки M.

Задание системы координат в пространстве устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками пространства и упорядоченными тройками действительных чисел.

Если вектор $\vec{AB}$ в пространстве задан своими концами: $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то его координаты находятся по формуле: $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Если в некоторой системе координат даны две различные точки $A(x_1, y_1, z_1)$, и $B(x_2\ y_2,\ z_2)$, то координаты точки M, делящей отрезок AB в данном отношении $\lambda \neq -1$ можно определить по формулам: $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$.

В частности, если M середина отрезка AB, то $\lambda = 1$. Отсюда следует формула для вычисления координат середины отрезка: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

В декартовой координатной системе имеет точка G пересечения медиан (центроид) треугольника с вершинами $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2\ y_2,\ z_2)$, $C(x_3\ y_3,\ z_3)$ имеет координаты $x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$, $z_G = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$.

Расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2\ y_2,\ z_2)$, заданными в прямоугольной системе координат определяется по формуле:

$$\rho(A,\ B) = \left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Упражнения

1. Построить в аффинной системе координат на плоскости точки A(-1, 3), B(0, 4), C(-2, 0), D(4, -5), выбрав базис $\{\vec{e_1},\ \vec{e_2}\}$.

2. Построить в прямоугольной системе координат в пространстве точки M(0, 4, 2), K(-2, 0, 3), L(3, 2, -5), N(4, -3, 6).

3. Даны точки M(3, -2, 4), N(-1, 3, 0). Найти координаты векторов $2\vec{NM}$, $-3\vec{MN}$.

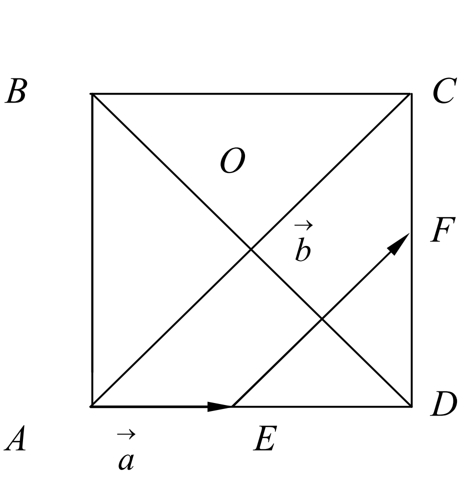


Рис. 9

4. Определить начало вектора $\vec{c}$ =(-2, 1, 0), если его конец совпадает с точкой *K*(3, 2, 1).

5. Дан квадрат *ABCD*, *O* – точка пересечения его диагоналей, *E* и *F* – середины сторон *AD* и *CD* соответственно (рис. 9). Найти координаты векторов $\vec{AC}$, $\vec{FO}$, $\vec{BO}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, если . $\vec{a} = \vec{AE}$, $\vec{b} = \vec{EF}$.

6. Найти площадь треугольника, вершины которого находятся в точках *A*(6, 5, -1), *B*(12, 1, 0), *C*(1, 4, 5).

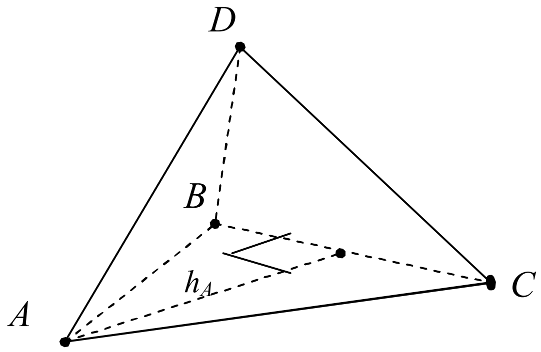


Рис. 10

7. Даны точки *A*(2, -1, 2), *B*(1, 2, -1), *C*(3, 2, 1). Найти $[\vec{BC} - 2\vec{CA}, \vec{CB}]$.

8. Дан тетраэдр *ABCD*: *A*(2, -1, -1), *B*(5, -1, 2), *C*(3, 0, -3), *D*(6, 0, -1) (рис. 10). Найти площадь полной поверхности тетраэдра.

9. Найти расстояние от точки *C*(3, 2, 2) до прямой, проходящей через *A*(1, 2, -3) и *B*(5, 2, 0).

10. В условиях упражнения 8 вычислить высоту h_A грани *ABC*.

11. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, если $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{CD}$, $\vec{c} = \vec{EF}$, *A*(0, 1, 1), *B*(3, -1, 0), *C*(-2, 3, 2), *D*(4, 0, -1), *E*(5, 1, 1), *F*(0, -2, 4).

12. Найти объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках *A*(2, 1, -1), *B*(3, 0, 1), *C*(2, -1, 3), *D*(4, 2, 0). Найти расстояние от начала координат до точек $M(1, -3, \sqrt{15})$, $P(3, \sqrt{7}, -3)$.

13. Вычислить радиус сферы, с центром в точке (2, –1, 3) и проходящей через точку (–1, 5, –4).

14. Найти отношение, в котором плоскость xOy делит отрезок *AB*, где *A*(-4, –5, 2), *B*(–2, 1, –7).

§ 3. ДРУГИЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Цилиндрическая система координат

2. Сферическая система координат

Помимо прямоугольной декартовой системы координат, в которой положение точки в пространстве однозначно определяется тройкой чисел (x, y, z), большое практическое значение имеют цилиндрическая и сферическая системы координат.

Цилиндрическая система координат задается следующим образом: возьмем точку O – начало системы координат; проведем, через нее ось Oz – ось аппликат; через точку O проведем плоскость, перпендикулярную оси Oz; в полученной плоскости введем полярную систему координат с полюсом в точке O: полярную ось ρ и полярный угол φ (рис. 11)

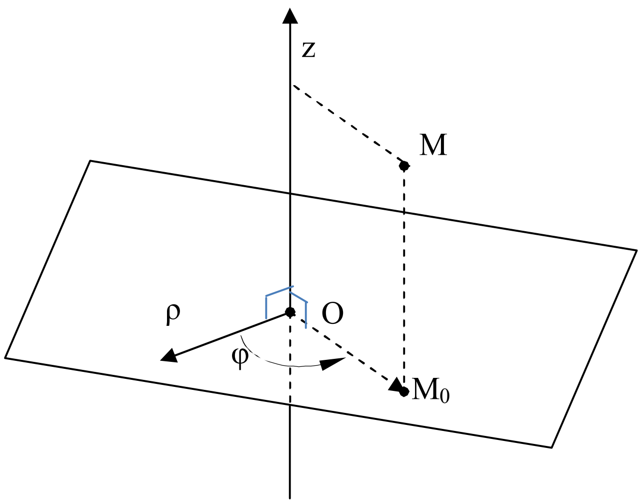


Рис. 11

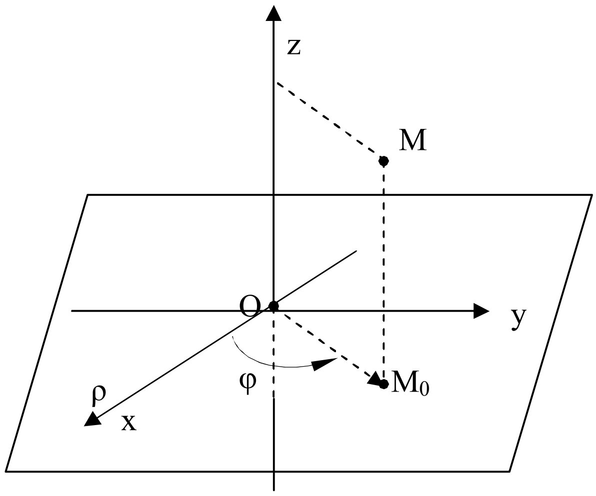


Рис. 12

В цилиндрической системе координат положение точки M в пространстве однозначно определяется тройкой чисел (ρ, φ, z). z – аппликата точки M, ρ – длина радиус-вектора проекции M_0 точки M на плоскость, φ – угол, образованный радиус-вектором точки M_0 с полярной осью. $\rho \in [0;+\infty)$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $z \in (-\infty;+\infty)$.

Совместив цилиндрическую систему координат с прямоугольной декартовой системой координат (начало координат с полюсом O, ось абсцисс с полярной осью, ось аппликат остается прежней) можно получить формулы перехода от цилиндрической системы координат к декартовой (рис. 12):

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Формулы перехода от прямоугольной декартовой системы координат имеют вид: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Сферическая система координат задается следующим образом: возьмем точку O – начало системы координат; через точку O проведем плоскость; проведем через точку O прямую, перпендикулярную плоскости и луч, лежащий в этой плоскости. В сферической системе координат положение точки *M* в пространстве однозначно определяется тройкой чисел (ρ, φ, θ). θ – угол, образованный радиус-вектором точки *M* с прямой, перпендикулярной плоскости, ρ – длина радиус-вектора точки *M*, φ – угол, образованный проекцией радиус-вектора точки *M* на плоскость, с заданным в плоскости лучом (рис. 13). $\theta \in [0;\pi]$, $\rho \in [0;+\infty)$, $\varphi \in [0;2\pi]$.

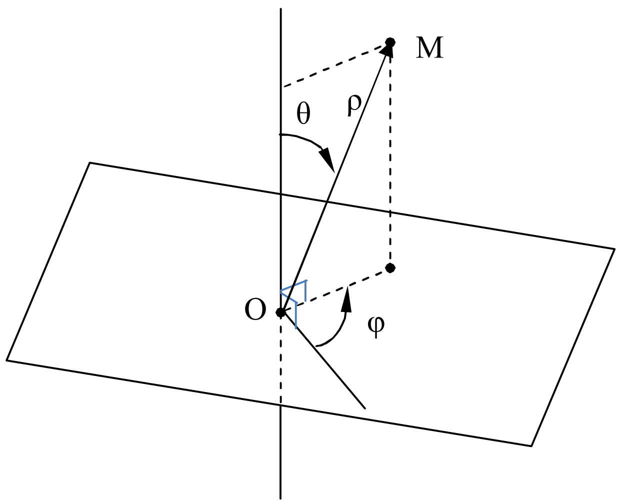


Рис. 13

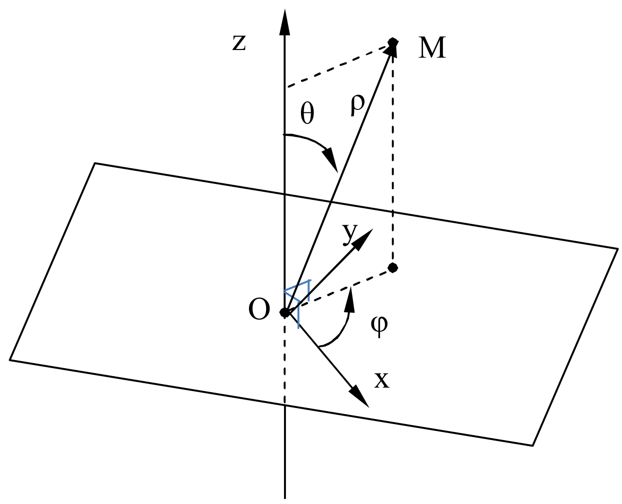


Рис. 14

Совместив сферическую систему координат с прямоугольной декартовой системой координат (начало координат с полюсом O, ось абсцисс с лучом в плоскости, ось аппликат с прямой, перпендикулярной плоскости) можно получить формулы перехода от сферической системы координат к декартовой (рис. 14):

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\theta. \end{cases}$$

Формулы перехода от прямоугольной декартовой системы координат к сферической имеют вид: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$,

$\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Упражнения

1. Найти цилиндрические координаты точек, заданных в декартовой прямоугольной системе координат: $A(0,0,1)$, $B(0,2,0)$, $C(-1,0,3)$, $D(\sqrt{3},-1,-5)$.

2. Найти сферические координаты точек, заданных в декартовой прямоугольной системе координат: $A(0,0,1)$, $B(0,2,0)$, $C(-1,0,2)$, $D(\sqrt{3},-1,-\sqrt{3})$.

3. Найти прямоугольные декартовые координаты точек, заданных в цилиндрической системе координат: $A(2,\frac{\pi}{3},-3)$, $B(1, \frac{5\pi}{6},5)$.

4. Найти прямоугольные декартовые координаты точек, заданных в сферической системе координат: $A(2,\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, $B(1, \frac{7\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$.

§ 4. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ И ЕЕ УРАВНЕНИЯ

1. Уравнение плоскости, заданной точкой и двумя направляющими векторами

2. Уравнение плоскости, заданной тремя точками

3. Уравнение плоскости, заданной точкой и вектором нормали

4. Общее уравнение плоскости

Плоскость, заданная точкой и двумя направляющими векторами (рис.15).

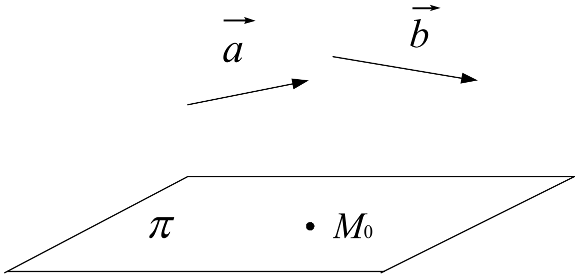


Рис. 15

Пусть в аффинной системе координат заданы своими координатами точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и два неколлинеарных вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ параллельные этой плоскости.

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости π. $M \in \pi \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}\right) = 0$. Таким образом, при данном способе задания плоскости ее уравнении имеет вид: $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$

Плоскость, заданная тремя точками (рис.16).

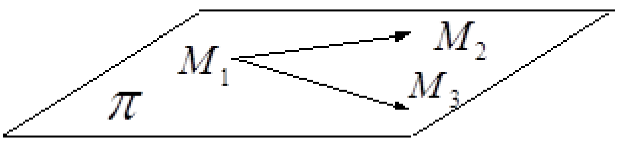


Рис.16

Пусть в некоторой аффинной системе координат даны три неколлинеарные точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Плоскость π, проходящую через точки M_1, M_2, M_3 можно определить как плоскость, проходящую через точку M_1 и имеющую направляющие векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2} \nparallel \overrightarrow{M_1M_3}$. Следовательно, уравнение данной плоскости можно записать в виде:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Плоскость, заданная точкой и вектором нормали (рис.17).

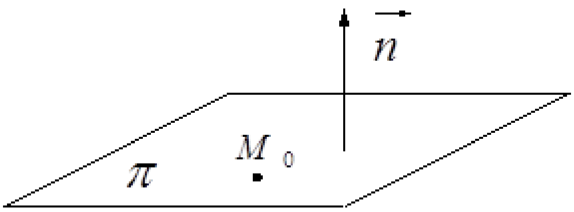


Рис. 17

Вектором нормали плоскости π называется любой не нулевой вектор $\vec{n}$, перпендикулярный этой плоскости.

Пусть в прямоугольной системе координат заданы своими координатами точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\vec{n} = (A, B, C)$. Пусть далее, точка M_0 принадлежит плоскости π, а вектор $\vec{n}$ является вектором нормали π. $M(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) = 0$. Данное равенство в координатах имеет вид: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Это и есть искомое уравнение плоскости.

Имеет место утверждения: 1) любая плоскость в пространстве определяется уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$; 2) любое уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, задает некоторую плоскость в пространстве. Уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$ называется общим уравнением плоскости. Если система координат прямоугольная, то вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ является вектором нормали плоскости. В этом состоит геометрический смысл коэффициентов *A*, *B*, *C* при неизвестных в общем уравнении плоскости.

Упражнения

1. Определить координаты любых трех точек, лежащих в плоскости $3x - 2y + z - 12 = 0$.

2. Определить координаты точки, с абсциссой 1, принадлежащей плоскостям Oxy и $2x - y + z - 6 = 0$.

3. Составить уравнение плоскости: а) проходящей через точку D(-1, 2, 0) и параллельной векторам $\vec{P_1} = (1,\ 0,\ 1)$ и $\vec{P_2} = (2,\ 1,\ 3)$; б) проходящей через три точки $M_1(1,\ 2,\ 3),\ M_2(2,\ 1,\ 3),\ M_3(0, -1,\ 2)$; в) проходящей чрез две точки $M_1(1,\ 2,\ 3),\ M_2(2,\ -1,\ 3)$ и параллельной вектору $\vec{P} = (1,\ 2,\ 2)$.

4. Плоскость проходит через две точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1),\ M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ и параллельна вектору $\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$. Показать, что уравнение данной плоскости записывается в виде: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0.$

5. Указать, как расположены плоскости по отношению к системе координат:

а) $x - z + 1 = 0$, б) $x + 2y + 3z = 0$, в) $x - y + 2 = 0$, г) $x - 3 = 0$,
д) $x + 2z = 0$, е) $y + z + 1 = 0$.

6. Найти точки пересечения плоскости $\frac{1}{2}x - 3y + z = 1 = 0$ с осями координат.

7. Пусть в некоторой аффинной системе координат дана плоскость $A_x + B_y + C_z + D = 0$ и вектор $\vec{p} = (\alpha, \beta,\ \gamma)$. Проверить справедливость следующего утверждения: для того чтобы данная плоскость была параллельна вектору $\vec{p}$, необходимо и достаточно, выполнялось условие: $A_\alpha + B_\beta + C_\gamma = 0$.

8. В общей аффинной системе координат дана плоскость: $2x - y + 3z + 5 = 0$. определить координаты нескольких векторов, параллельных данной плоскости.

9. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно вектору $\vec{k} = (0, -3, 4)$. Система координат прямоугольная декартова.

10. Найти координаты нормальных векторов плоскостей: а) $x + 2y - z + 1 = 0$, б) $x - 3z + 5 = 0$, в) $y + 1 = 0$, г) $x - 3y + z + 4 = 0$. система координат прямоугольная декартова.

11. Исследовать положение плоскости, относительной системы координат, если один из коэффициентов A,B,C,D равен нулю; два из коэффициентов A,B,C,D равны нулю; два из коэффициентов A,B,C равны нулю, D равен нулю.

12. Вывести условие принадлежности четырех точек одной плоскости.

§ 5. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Условие совпадения двух плоскостей

2. Условие пересечения двух плоскостей

3. Условие параллельности двух плоскостей

Пусть в некоторой аффинной системе координат даны плоскости π_1 и π_2 своими общими уравнениями: $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Координаты любой общей точки плоскостей π_1 и π_2 определяются из системы уравнений: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$ С другой стороны, любое решение данной системы уравнений является координатами точки, общей плоскостей π_1 и π_2.

Обозначим через r и $r^{/}$ соответственно ранги матрицы системы и расширенной матрицы системы. Очевидно, что ранг матрицы системы не превосходит ранга расширенной матрицы.

По теореме Кронекера-Капелли система уравнений $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ имеет решения тогда и только тогда, когда $r = r^{/}$.

Если $r^{/} = 1$, то уравнения $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ равносильны (в силу пропорциональности коэффициентов A_1, B_1, C_1, D_1 коэффициентам A_2, B_2, C_2, D_2). Следовательно, уравнения $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ определяют одну и ту же плоскость. Все точки π_1 являются одновременно точками π_2.

Если $r = r^{/} = 2$, то плоскости π_1 и π_2 не совпадают. В тоже время система уравнений имеет решение, следовательно, есть хотя бы одна общая точка у плоскостей π_1 и π_2. По аксиоме стереометрии (10 класс) плоскости пересекаются по прямой (рис. 18).

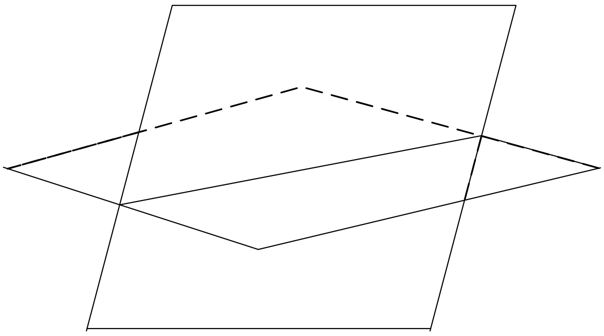


Рис. 18.

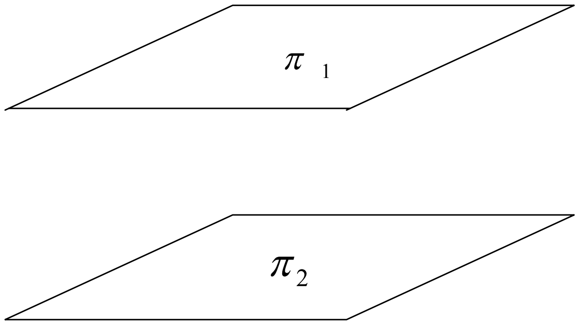


Рис. 19.

Если $r = 1$, $r' = 2$, то система $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ несовместна, поэтому плоскости π_1 и π_2 не имеет общих точек, то есть параллельны (рис. 19).

Упражнения

1. Установить взаимное расположение плоскостей: $x + y + z - 1 = 0, \quad x + y + z = 0$.

2. В аффинной системе координат даны плоскость уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не лежащая в одной плоскости. Показать, что уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 и параллельной данной плоскости, можно записать в виде $Ax + By + Cz + D_0 = 0, \quad D_0 = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

3. Составить уравнение плоскости, если она параллельна плоскости:

а) $2y - 7z + 6 = 0$ и точка (0, 0, 0);

б) $3x - y + z + 4 = 0$ и ей принадлежит точка М(2, -1, 4).

4. В прямоугольной декартовой системе координат даны плоскости, пересекающиеся по прямой, и вектор $\overrightarrow{p}$, направленный вдоль линии пересечения этих плоскостей. Показать, что $\overrightarrow{p}$ является векторным произведением векторов нормалей данных плоскостей.

5. Плоскости заданы общими уравнениями: $2x - 6y + 2z + 1 = 0, \quad 4x - y + 2z = 0$. Найти: а) какую-нибудь точку (ее координаты),

принадлежащую обеим плоскостям; б) вектор $\overrightarrow{p}$, параллельный данным плоскостями.

6. Записать аналитическое условие пересечения трех плоскостей в единственной точке.

7. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости:

1) $2x-3y+5z-7=0, \quad 2x-3e+5z+3=0;$

2) $4x+2y-4z+5=0, \quad 2x+y+2z-1=0;$

3) $x-3z+2=0, \quad 2x-6z-7=0$.

8. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют перпендикулярные плоскости:

1) $3x-y-2z-5=0, \quad x+9y-3z+2=0;$

2) $2x+3y-z-3=0, \quad x-y-z+5=0;$

3) $2x-5y+z=0, \quad x+2z-3=0$.

§ 6. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛОСКОСТИ

1. Расстояние от точки до плоскости

2. Угол между двумя плоскостями

Пусть в прямоугольной системе координат дана плоскость π общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не лежащая в этой плоскости.

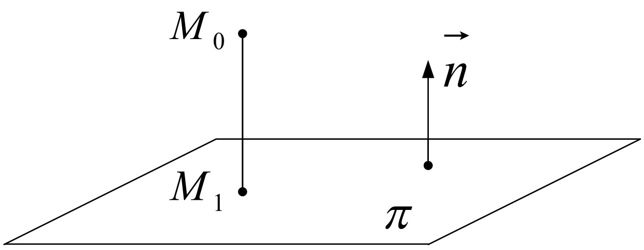


Рис. 20.

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – основание перпендикуляра, проведенного из точки M_0 к плоскости π (рис. 20).

Вектор $\vec{n}=(A, B, C)$ нормали плоскости π коллинеарен вектору $\overrightarrow{M_1M_0}=(x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1)$, тогда

$$(\overrightarrow{M_1M_0}, \vec{n}) = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| \cdot \left|\vec{n}\right| \cdot \cos(\overrightarrow{M_1M_0}\,\hat{,}\,\vec{n}) = \rho(M_0,\pi)\cdot\left|\vec{n}\right|\cdot(\pm 1) = \rho(M_0,\pi)\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot(\pm 1).$$

Отсюда следует равенство

$(x_0-x_1)\cdot A+(y_0-y_1)\cdot B+(z_0-z_1)\cdot C=\pm\rho(M_0,\pi)\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. Так как $M_1\in\pi$, то $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$, поэтому

$$(x_0-x_1)\cdot A+(y_0-y_1)\cdot B+(z_0-z_1)\cdot C=Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)=Ax_0+By_0+Cz_0+D.$$

Отсюда следует формула для вычисления расстояния от точки M_0 до плоскости π:

$$\rho(M_0,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Пусть в прямоугольной системе координат даны две пересекающиеся плоскости своими общими уравнениями:

$$\begin{aligned}\pi_1 &: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \pi_2 &: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{aligned}.$$

Углом между пересекающимися плоскостями называется меньший из четырех двугранных углов, образованных этими плоскостями. Измеряется двугранный угол с помощью линейного угла.

Векторы нормали данных плоскостей $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ образуют угол $\varphi = (\overrightarrow{n_1},^\wedge \overrightarrow{n_2})$ равный линейному углу, соответствующего двугранному углу между плоскостями π_1 и π_2. Отсюда формула для вычисления угла между плоскостями имеет следующий вид:

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Плоскости π_1 и π_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда $(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = 0$, то есть когда $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Упражнения

1. Вычислить расстояние от начала координат до плоскости:

а) $15x - 10y + 6z - 190 = 0$;

б) $2x - 3y + 5z - 3 = 0$.

2. Вычислить расстояние между следующими плоскостями:

а) $x - y + 5z + 27 = 0, \quad x - y + 5z + 1 = 0$;

б) $x - 3y + 2z + 1 = 0, \quad 2x - 5y + 4z + 3 = 0$.

3. Определить двугранные углы между следующими парами плоскостей:

а) $16x + 8y + 2z + 1 = 0, \quad 2x - 2y + z + 5 = 0$;

б) $2x + 5y + 4z + 15 = 0, \quad 6x - 3z + 2 = 0$.

4. Имеет место следующее утверждение: неравенство $Ax + By + Cz + D > 0$ задает то полупространство относительно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, которому принадлежит конец вектора нормали $\vec{n} = (A, B, C)$ этой плоскости, отложенного от некоторой точки плоскости; неравенство $Ax + By + Cz + D < 0$ задает другое полупространство относительно указанной плоскости. Проверить справедливость этого утверждения.

5. Определить положение точек $M(3, 1, -2)$ $N(5, 0, 1)$ относительно плоскости $2x - 3y + 5z - 4 = 0$.

6. Даны точки $A(1, 0, 2)$, $B(2, 5, 1)$, $C(6, 11, 3)$, $D(3, -2, -1)$. Среди указан-

ных точек выбрать те, которые расположены по ту же сторону от плоскости $x-y+z-1=0$, что и начало координат.

7. Найти расстояние от точки до плоскости в каждом из следующих случаев:

а) $M_1(1,-2,2),\quad 2x+y+2z-7=0$;

б) $M_2(3,0,4),\quad 2x+3y+8=0$;

в) $M_3(-1,2,\sqrt{2}),\quad 5x-3y+\sqrt{2}z=0$.

§ 7. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ И ЕЁ УРАВНЕНИЯ

1.Канонические уравнения прямой

2. Уравнения прямой, заданной двумя точками

3. Уравнения прямой, заданной двумя плоскостями

Пусть l – прямая в пространстве. Любой ненулевой вектор, параллельный этой прямой, называется её направляющим вектором. Прямая имеет бесконечное множество направляющих векторов, любые два из которых коллинеарны.

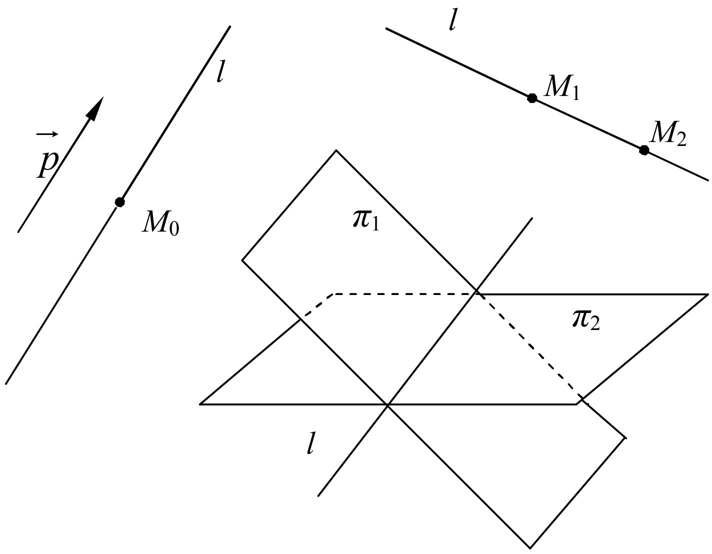


Рис. 21

4. Параметрические уравнения прямой

Положение прямой в пространстве определяется полностью, если даны: а) направляющий вектор прямой l и некоторая её точка; б) две точки прямой; в) две плоскости, пересекающиеся по прямой l (рис. 21).

1. Прямая, задана точкой и направляющим вектором.

Пусть в пространстве выбрана общая декартова система координат и в этой системе известные координаты некоторой точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и координаты направляющего вектора $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ прямой l. Точка $M(x, y, z)$ лежит на прямой l тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{p}$ коллинеарны. Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет координаты $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, а из условия коллинеарности векторов

$\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{p}$ имеем:

$$\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}=\frac{z-z_0}{p_3}.$$

Эти равенства являются уравнениями прямой l и называются каноническими уравнениями прямой.

2. Прямая, задана двумя точками.

Пусть в пространстве выбрана общая декартова система координат и в этой системе известны координаты двух точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ прямой l. Тогда вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ имеет координаты $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, то канонические уравнения прямой l имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

3. Прямая, задана двумя пересекающимися плоскостями.

Пусть прямая l является линией пересечения плоскостей π_1 и π_2, которые в общей декартовой системе координат заданы уравнениями: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Точка $M(x, y, z)$ лежит на прямой l тогда и только тогда, когда её координаты являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

поэтому эта система и является уравнениями прямой l. Обратно, любая система уравнений $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ представляет собой уравнения некоторой прямой пространства, если ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ равен двум. Данную систему уравнений иногда называют общими уравнениями прямой в пространстве. Для того чтобы найти канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями, надо знать координаты какой-нибудь точки M_0 этой прямой и некоторого направляющего вектора $\vec{p}$. Точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ следует выбрать так, чтобы её координаты удовлетворяли системе линейных уравнений

$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$ в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\vec{p} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix} \right)$.

4. Параметрические уравнения прямой.

Выберем какую-нибудь общую декартову систему координат в пространстве и зададим прямую l направляющим вектором $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ и точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Точка $M(x, y, z)$ пространства лежит на прямой l тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{p}$ коллинеарны, то есть когда существует такое число t, что $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{p}$. Это соотношение в координатах записывается так:

$$\begin{cases} x = x_0 + p_1t \\ y = y_0 + p_2t \\ z = z_0 + p_3t \end{cases}.$$

Данные равенства называются параметрическими уравнениями прямой, а t – параметром. Для любого действительного числа t точка с координатами (x, y, z), удовлетворяющая данным равенствам, лежит на прямой l, то найдётся такое t, что x, y, z выражаются через x_0, y_0, z_0, p_1, p_2, p_3 при помощи указанных равенств.

Упражнения

1. При каком условии прямая, заданная каноническими уравнениями, пересекает ось Ox (Oy, Oz)?

2. Определяет ли система уравнений:

$\begin{cases} x - 2y + 4z - 7 = 0 \\ \frac{1}{2}x + y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ прямую в пространстве?

3. Определить координаты точки, лежащей на прямой $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{5}$ и имеющей:

а) абсциссу, равную трем;

б) ординату, равную -1.

4. Составить уравнения прямой:

а) проходящей через две точки $M_1(2,-3,\frac{1}{2})$, $M_2(3,5,\frac{3}{2})$;

б) проходящей через точку $M_0(2,1,-3)$ и параллельной вектору $\vec{p}=(1,-3,1)$.

в) образованной пересечения плоскости $x+3y-z+1=0$ с координатной плоскостью Oxy;

г) образованной пересечением плоскости $x-y+z=0$ с плоскостью, проходящей через точки $A(2,0,3)$, $B(1,1,1)$, $C(2,4,-3)$.

5. Написать параметрические уравнения следующих прямых:

а) $\begin{cases} x-3y+z=0 \\ y=0 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x=0 \\ y+z=0 \end{cases}$.

§ 8. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Скрещивающиеся прямые
2. Пересекающиеся прямые
3. Параллельные прямые
4. Совпадающие прямые

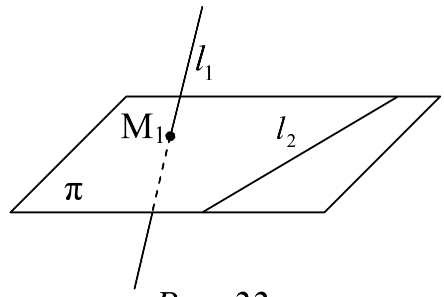


Рис. 22

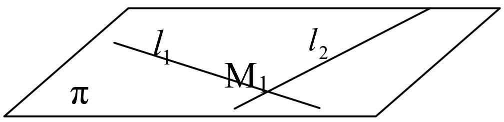


Рис. 23

Пусть в пространстве даны: прямая l_1 - точкой M_1 и направляющим вектором $\overrightarrow{p_1}$, и прямая l_2 - точкой M_2 и направляющим вектором $\overrightarrow{p_2}$. Возможны четыре случая взаимного расположения двух прямых в пространстве: 1) прямые скрещиваются (рис. 22); 2) прямые пересекаются (рис. 23); 3) прямые параллельны; 4) прямые совпадают.

Прямые l_1, l_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$ компланарны и, следовательно, имеет место равенство: $(\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{p_1},\ \overrightarrow{p_2}) = 0$.

Как известно, две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости (т.е. не существует плоскости, содержащей каждую из этих прямых). Следовательно, для того чтобы прямые l_1 и l_2 были скрещивающимися, необходимо и достаточно, чтобы для них имело место равенство $(\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{p_1},\ \overrightarrow{p_2}) \neq 0$.

Пусть прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости, и, следовательно, выполняется условие $(\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{p_1},\ \overrightarrow{p_2}) = 0$. Эти прямые пересекаются тогда и только тогда, когда их направляющие векторы не коллинеарны. Итак, прямые l_1 и l_2 пересекаются тогда и только тогда, когда $(\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{p_1},\ \overrightarrow{p_2}) = 0$, $\overrightarrow{p_1}\ \ \overrightarrow{p_2}$.

Прямые l_1 и l_2, лежащие в одной плоскости, параллельны, если не имеют общих точек. Это будет только в том случае, когда векторы $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$ коллинеарны, а векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ *и* $\overrightarrow{p_1}$ не коллинеарны.

Прямые l_1 и l_2 совпадают тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$ попарно коллинеарны.

Упражнения

1. Установить взаимное расположение следующих прямых:

а) $\begin{cases} x = 9t \\ y = 5t \\ z = -3 + t \end{cases}$ *и* $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ z - 4 = 0 \end{cases}$ *и* $\begin{cases} x + z - 8 = 0 \\ 2y + 3z - 7 = 0 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x = t \\ y = -8 - 4t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$ *и* $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$.

2. Показать, что прямые

$\ell_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$ *и* $\ell_2 : \begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0 \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$ параллельны.

3. Показать, что прямые

$\ell_1 : \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -6t \\ z = -1 - 8t \end{cases}$ *и* $\ell_2 : \begin{cases} x = 7 - 6t \\ y = 2 + 9t \\ z = 12t \end{cases}$ лежат в одной плоскости.

4. Доказать, что прямые

$\begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0 \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 \end{cases}$ *и* $\begin{cases} 2x + y + 2z - 2 = 0 \\ 2x - 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$ пересекаются

5. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты в уравнениях прямой $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$, чтобы она совпадала с осью Oy?

6. Записать аналитические условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, заданных общими уравнениями. Система координат прямоугольная декартова.

§ 9. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

1. Прямая и плоскость пересекаются
2. Прямая параллельна плоскости
3. Прямая лежит в плоскости

Пусть в пространстве дана прямая l точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющим вектором $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$, и плоскость π - общим уравнением Ax+By+Cz+D=0 в некоторой аффинной системе координат.

Возможны следующие случаи их взаимного расположения: 1) прямая и плоскость пересекаются, то есть имеют одну общую точку; 2) прямая параллельна плоскости; 3) прямая лежит в плоскости (рис. 24).

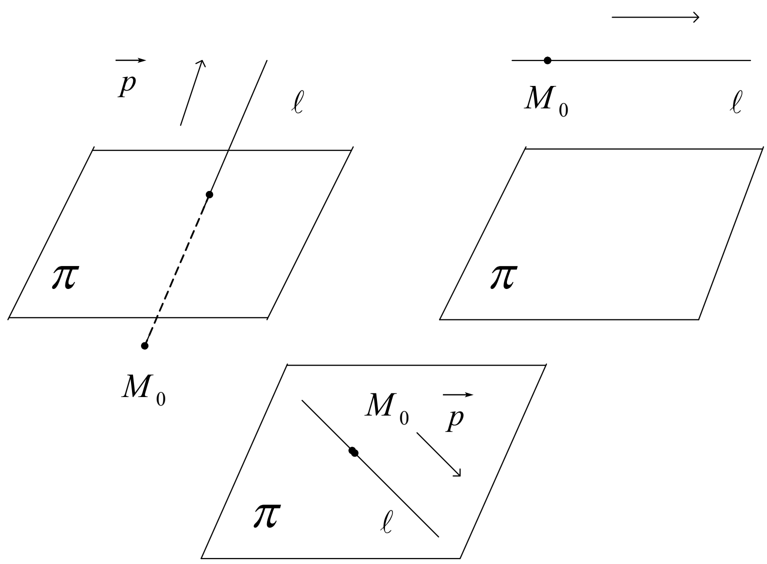


Рис. 24.

Плоскость π и прямая l пересекаются только в том случае, когда вектор $\vec{p}$, параллельный прямой l не является одновременно параллельным плоскости π. Или иначе когда $Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 \neq 0$. Координаты точки пересечения прямой и плоскости, можно найти решив систему, включающую уравнение плоскости и уравнения прямой (лучше параметрические).

Прямая l параллельна плоскости π тогда и только тогда, когда вектор $\vec{p}$ параллелен плоскости π и точка M_0 не лежит в этой плоскости. Соотношения $\begin{cases} Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}$ выражают необходимое и достаточное условие того, что прямая l параллельна плоскости π.

Если прямая l лежит в плоскости π, то это возможно только в одном случае, когда вектор нормали плоскости и направляющий вектор прямой удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}.$$

Упражнения

1. Записать аналитические условия пересечения плоскости к прямой в случае задания прямой общими уравнениями.

2. Доказать, что плоскость $x - y + 1 = 0$ и прямая $\begin{cases} x + z = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$ пересекаются. Найти координаты точки пересечения.

3. Вывести условие перпендикулярности прямой и плоскости.

4. Показать, что прямая $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$ параллельна плоскости $x - 2y + 5z - 6 = 0$, а прямая $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1}$ лежит в этой плоскости.

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2, -3, -5)$ и перпендикулярной к плоскости $6x - 3y - 5z + 2 = 0$.

§ 10. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Угол между прямыми в пространстве
2. Угол между прямой и плоскостью в пространстве
3. Расстояние от точки до прямой в пространстве
4. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми

Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат $\{O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$ и даны две непараллельные прямые l_1 и l_2. Возьмем произвольную точку A пространства и проведем через неё прямые l'_1 и l'_2, соответственно параллельные прямым l_1 и l_2. Прямые l'_1 и l'_2 образуют четыре угла с вершиной А. Каждый из этих углов называется углом между прямыми l_1 и l_2 (рис. 25).

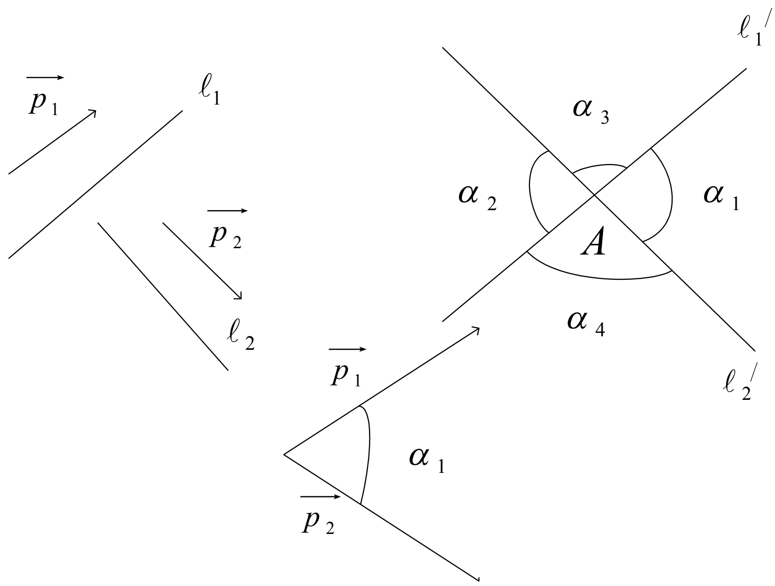


Рис. 25.

Если известен один из четырех указанных углов, то легко можно найти остальные три угла. Но один из этих четырех углов есть в точности угол между направляющими векторами этих прямых. Если $\overrightarrow{p_1}$ и $\overrightarrow{p_2}$ – направляющие векторы данных прямых d_1 и d_2, то угол α между этими прямыми вычисляют по формуле: $cos\alpha = \dfrac{(\overrightarrow{p_1},\ \overrightarrow{p_2})}{|\overrightarrow{p_1}|\cdot|\overrightarrow{p_2}|}$.

Отсюда получаем условие перпендикулярности двух прямых: $(\overrightarrow{p_1},\ \overrightarrow{p_2}) = 0 \quad (\alpha = 90^0)$. Две взаимно перпендикулярные прямые в пространстве могут быть как скрещивающимися, так и пересекающимися.

Если прямая l не перпендикулярна к плоскости π, то углом между прямой l и плоскостью π называется острый угол между прямой l и её проекцией на плоскость π.

Если же прямя перпендикулярна к плоскости, то угол между прямой и плоскостью считается равными 90^0.

Предположим, что прямая l пересекает плоскость π и не перпендикулярна к ней. Пусть в прямоугольной системе координат прямая l имеет направляющий вектор $\vec{p} = (p_1,\ p_2,\ p_3)$, а плоскость π – уравнение Ax+By+Cz+D=0, $\vec{n} = (A, B, C)$ – вектор нормали плоскости π. (рис. 26).

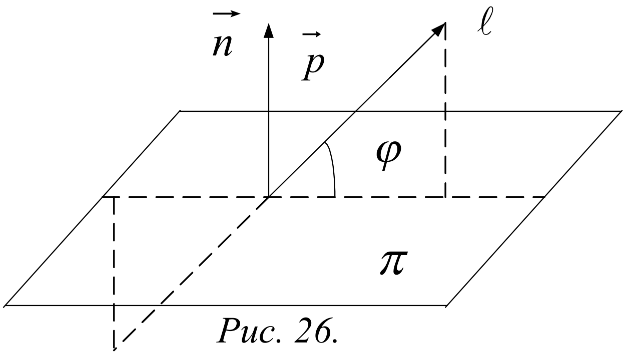


Рис. 26.

Тогда угол φ определяется равенством:

$$\sin\varphi = \frac{\left|\left(\vec{n}, \vec{p}\right)\right|}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\vec{p}\right|} \quad \text{или} \quad \sin\varphi = \frac{\left|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}.$$

Формула остается верной и в случае перпендикулярности прямой и плоскости (когда $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\vec{p}$ и $\vec{n}$ коллинеарны).

Пусть прямая определяется точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{p}$. Если точка M не лежит на прямой l, то расстояние от точки M до прямой l может быть найдено по формуле:

$$\rho(M, l) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0 M}, \vec{p}\right]\right|}{\left|\vec{p}\right|}.$$

Пусть даны скрещивающиеся прямые l_1 и l_2, M_1 и $\vec{p}_1$ – точка и направляющий вектор прямой l_1, M_2 и $\vec{p}_2$ – точка и направляющий вектор прямой l_2. Тогда расстояние между прямыми l_1 и l_2 может быть найдено по формуле:

$$\rho(\ell_1, \ell_2) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1 M_2}, \overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}\right)\right|}{\left|\left[\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}\right]\right|}.$$

Упражнения

1. Записать аналитическое условие перпендикулярности прямой и плоскости.

2. При каких значениях коэффициентов A, B плоскость $Ax + By + Cz - 7 = 0$ перпендикулярна к прямой $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z+1}{3}$?

3. Вывести формулу для вычисления расстояния от точки до прямой, заданной общими уравнениями.

4. Дана точка $A(1, 3, -1)$ вычислить расстояние от нее до прямой:

а) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{3}$;

б) $\begin{cases} x = 3t \\ y = -1 + 4t \\ z = 2 - t \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 2x - y + z + 5 = 0 \\ 3x - 2y - z - 4 = 0 \end{cases}$.

5. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми:

$\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-1}$ и $\frac{x+4}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+2}{-3}$.

6. Найти угол между прямой $\frac{x}{2} = \frac{y+12}{3} = \frac{z-4}{6}$ и плоскостью $6x + 15y - 10z = 0$.

7. Найти угол между следующими прямыми:

$\begin{cases} y + 1 = 0 \\ x + 2z - 1 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$.

§ 11. ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

1. Понятие поверхности вращения

2. Уравнение поверхности вращения в декартовой прямоугольной системе координат

Пусть некоторая точка пространства вращается вокруг прямой l. Если все точки полученной окружности принадлежат некоторой поверхности и других точек, кроме полученных аналогичным образом, на поверхности нет, то такую поверхность называют поверхностью вращения. Все сечения поверхности вращения плоскостями, перпендикулярными прямой l, являются окружностями, называемыми параллелями. Сечения поверхности вращения плоскостями, проходящими через прямую l называют меридианами. Сама l называется осью вращения. Если точка М лежит на прямой l, то окружность, полученная вращением точки М вокруг прямой l, имеет нулевой радиус и состоит из самой точки М.

Поверхность вращения может быть образована следующим образом. Пусть в плоскости π даны прямая l и линия γ. Поверхность, образованная вращением линии γ вокруг прямой l, есть поверхность вращения с осью вращения l. Каждая точка линии γ, вращаясь вокруг прямой l образует параллель этой поверхности (Рис. 27).

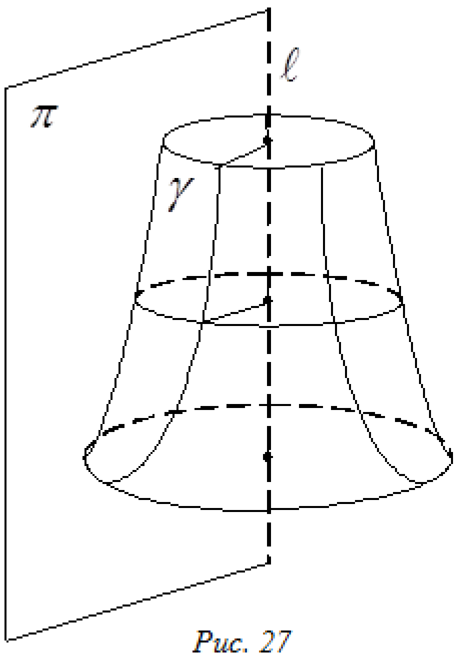


Рис. 27

Справедливо следующее утверждение. В прямоугольной системе координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ $x^2 + y^2 = f^2(z)$ является уравнением поверхности вращения, полученной вращением вокруг оси Oz кривой, определяемой уравнениями: $\begin{cases} x = f(z) \\ y = 0 \end{cases}$.

Аналогично в прямоугольной системе координат уравнение $z^2 + y^2 = g^2(x)$ определяет поверхность вращения, образованную вращением вокруг оси Ox линии, заданной уравнениями: $\begin{cases} y = g(x) \\ z = 0 \end{cases}$, а уравнение $x^2 + z^2 = h^2(y)$ определяет поверхность, образованную вращением вокруг оси Oy линии, заданной уравнениями: $\begin{cases} x = h(y) \\ z = 0 \end{cases}$.

Упражнения

1. Написать уравнение поверхности, образованной вращением окружности $\begin{cases} y^2 + z^2 = 4 \\ x = 0 \end{cases}$ вокруг оси Oy.

2. Написать уравнение поверхностей, образованных вращением вокруг оси Oz следующих линий:

а) эллипса $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0$;

б) гиперболы $-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0$;

в) параболы $y^2 = 2pz, \quad x = 0$.

3. Доказать, что поверхность, заданная уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$, является поверхностью вращения. Найти образующую кривую и ось вращения.

4. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат дана линия L уравнениями: $x = f_1(z), \quad y = f_2(z)$. Доказать, что поверхность, образованная вращением L вокруг оси Oz, имеет уравнение $x^2 + y^2 = f_1^2(z) + f_2^2(z)$.

§ 12. ЭЛЛИПСОИД

1. Сжатие пространства
2. Трехосный эллипсоид
3. Каноническое уравнение эллипсоида
4. Исследование формы эллипсоида методом сечений

Пусть в пространстве задана некоторая плоскость π.

Введем в пространстве прямоугольную декартовую систему координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ так, чтобы координатная плоскость Oxy совпала с заданной плоскостью π.

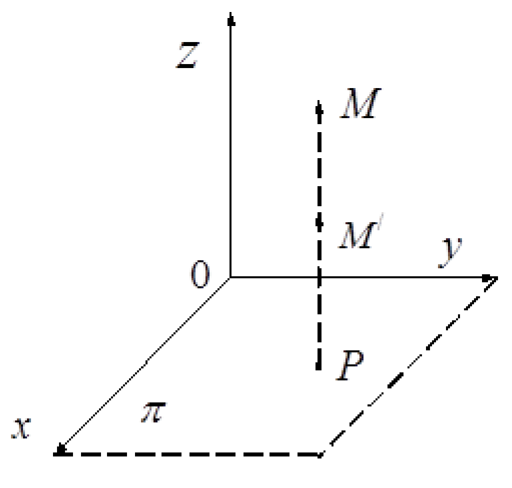


Рис. 28

Пусть далее k – положительное число, не равное нулю.

Рассмотрим отображение f, которое каждой точке M пространства ставит в соответствие точку $M^{/}$ этого же пространства так, что $\overrightarrow{PM^{/}} = k\overrightarrow{PM}$, где P – ортогональная проекция точки M на плоскость π (рис. 28).

Отображение f является преобразованием пространства, которое называется сжатием пространства к плоскости π. Плоскость π называется плоскостью сжатия, а число k – коэффициентом сжатия.

Если точка M(x, y, z) – произвольная точка пространства, а точка $M^{/}(x^{/}, y^{/}, z^{/})$ – её образ при отображении f, то $\begin{cases} x^{/} = x \\ y^{/} = y \\ z^{/} = k \cdot z \end{cases}$.

Аналогично формулы сжатия к координатным плоскостям Oxz и Oyz записываются соответственно в виде: $x^{/} = x, \quad y^{/} = k \cdot y, \quad z^{/} = z, \quad x^{/} = k \cdot x, \quad y^{/} = y, \quad z^{/} = z$, где k – коэффициент сжатия.

Поверхность, образованная вращением эллипса вокруг одной из его осей симметрии, называется эллипсоидом вращения.

Трехосным эллипсоидом (эллипсоидом), называется поверхность, в которую переходит эллипсоид вращения при сжатии к плоскости, проходящей через его ось вращения.

Эллипсоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат определяется уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Это уравнение называется каноническим уравнением эллипсоида.

Пусть в плоскости xOz прямоугольной системе координат $\{O,\vec{i},\ \vec{j},\vec{k}\}$ задан эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Из уравнения данного эллипса находим: $x=\pm a\cdot\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$. Знаку «+» соответствует одна часть эллипса, а знаку «-» другая часть данного эллипса. Ясно, что при вращении вокруг оси Oz каждой из этих частей эллипса получается та же поверхность, что и при вращении всего эллипса. Поэтому в качестве линии, которую будем вращать вокруг оси Oz выберем:

$$x=a\cdot\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}},\quad y=0.$$

Уравнение поверхности, образованной вращением выбранной линии, лежащей в плоскости xOz, вокруг оси Oz имеет вид: $x^2+y^2=(a\cdot\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}})^2$, или $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

В результате имеем уравнение эллипсоида вращения. Далее, воспользуемся формулами сжатия пространства к плоскости xOz с коэффициентом сжатия $k=\frac{b}{a}$. Тогда результатом будет каноническое уравнение трехосного эллипсоида (эллипсоида).

Рассмотрим каноническое уравнение эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Положительные числа a, b, c называются полуосями эллипсоида.

Из уравнения эллипсоида следует, что для каждой точки M(x, y, z) эллипсоида выполняются соотношения: $\frac{x^2}{a^2} \le 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \le 1, \quad \frac{z^2}{c^2} \le 1$, следовательно, $|x| \le a, \quad |y| \le b, \quad |z| \le c$. Отсюда получается, что все точки эллипсоида лежат внутри прямоугольного параллелепипеда, длина ребер которого соответственно равны $2a$, $2b$, $2c$.

Если точка M(x, y, z) принадлежит эллипсоиду, то и точки M_1(-x, y, z), M_2(x, -y, z), M_3(x, y, -z), M_4(-x, -y, z), M_5(-x, y, -z), M_6(x, -y, -z), M_7(-x, -y, -z) принадлежат эллипсоиду. Следовательно, координатные плоскости xOy, xOz, yOz являются плоскостями симметрии эллипсоида, оси координат Ox, Oy, Oz – осями симметрии эллипсоида, начало координат – центром симметрии эллипсоида.

Оси симметрии эллипсоида называется его осями, центр симметрии эллипсоида называется его центром. Каждая из осей пересекает эллипсоид в двух точках, которые называются его вершинами.

У трехосного эллипсоида шесть вершин: $A_1(a, 0, 0), \quad A_2(-a, 0, 0), \quad B_1(0, b, 0), \quad B_2(0, -b, 0), \quad C_1(0, 0, c), \quad C_2(0, 0, -c)$.

Изучим форму эллипсоида методом сечений.

Пусть в $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ эллипсоид определяется уравнением:

$$\Phi : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Тогда сечение поверхности Ф координатной плоскостью xOy (z=0), представляет собой эллипс:

$$\gamma : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}.$$

Сечение координатной плоскостью yOz (x=0) является эллипсом:

$$\gamma_1 : \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Сечение координатной плоскостью xOz (y=0) является эллипсом:

$$\gamma_2:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0.\end{cases}$$

В сечении эллипсоида Ф плоскостью z=h, параллельной координатной плоскости xOy, образуется линия $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}\\ z=h\end{cases}$, которая является эллипсом, если $|h|<c$; двумя мнимыми прямыми, пересекающимися в точке (0, 0, c), если $|h|=c$ и мнимым эллипсом, если $|h|>c$.

Аналогично исследуется сечения эллипсоида плоскостями, параллельными координатными плоскостям yOz и xOz.

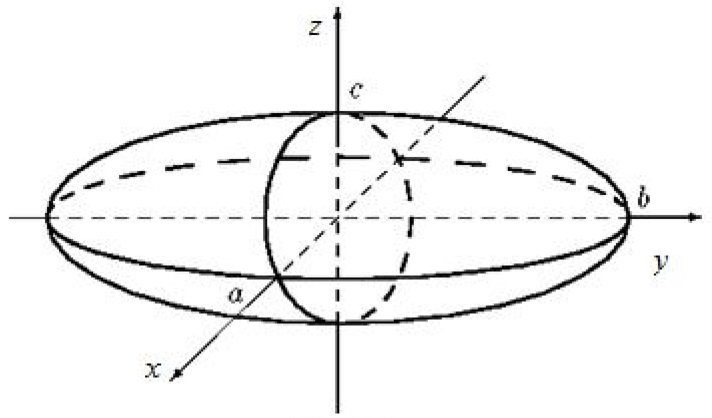


Рис. 29

Изображение эллипсоида дано на рис. 29.

Если все три полуоси эллипсоида равны: $a=b=c=r$, то он представляет собой сферу: $x^2+y^2+z^2=r^2$, радиуса r и центром (0, 0, 0).

Следовательно, сфера есть частный случай эллипсоида.

Если центр эллипсоида помещен в точку (x_0, y_0, z_0), то его уравнение примет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1.$$

В частности, уравнение сферы с центром в точке (x_0, y_0, z_0) и радиуса r, записывается в форме: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$.

Упражнения

1. Эллипсоид задан уравнением $x^2+4y^2+36z^2=144$. Найти полуоси, координаты вершин, сечения эллипсоида координатными плоскостями. Построить эллипсоид.

2. Написать уравнение эллипсоида, проходящего через точки A(5, 0, 0), B(0, 3, 0), C(0, 0, -2), для которого координатные плоскости данной прямоугольной системы координат являются плоскостями симметрии.

3. Пользуясь методом сечений, построить изображение эллипсоида $3x^2+4y^2+12z^2-48=0$, заданного в прямоугольной системе координат.

4. Доказать, что сечение эллипсоида $x^2+2y^2+z^2+4x-8=0$ плоскостью $z+3=0$ является эллипс. Найти его полуоси и вершины. Построить эллипсоид и сечение его данной плоскостью.

5. Составить уравнение сферы радиуса 5, центр которой находится в точке: а) $C_1(-1, 2, 5)$, б) $C_2(3, 0, 4)$, в) $C_3(-5, 0, 0)$, г) $C_4(0, 0, 0)$.

6. Определить координаты центра и радиус r сферы:

а) $(x-5)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$;

б) $x^2+(y-3)^2+(z+4)^2=9$;

в) $2x^2+2y^2+2z^2+4x+8y+12z+3=0$.

7. Найти необходимое и достаточное условие того, что плоскость $Ax+By+Cz+Д=0$ касается эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

8. Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на сфере $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$. Составить уравнение касательной плоскости к этой сфере в точке M_0.

§ 13. ГИПЕРБОЛОИДЫ

1. Однополостный гиперболоид
2. Каноническое уравнение однополостного гиперболоида
3. Исследование формы однополостного гиперболоида методом сечений
4. Двуполостный гиперболоид
5. Каноническое уравнение двуполостного гиперболоида
6. Исследование формы двуполостного гиперболоида методом сечений

I. Однополостный гиперболоид.

Поверхность, образованная вращением гиперболы вокруг её мнимой оси, называется однополостным гиперболоидом вращения.

Однополостным гиперболоидом называется поверхность Ф, в которую переходит однополостный гиперболоид вращения при сжатии пространства к плоскости, проходящей через ось его вращения. Вывод канонического уравнения однополостного гиперболоида аналогичен таковому в случае эллипсоида. И поэтому в некоторой прямоугольной системе координат однополостный гиперболоид определяется следующим каноническим уравнением:

$$\Phi: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Положительные числа a, b, c называются полуосями однополостного гиперболоида. Так как в уравнении поверхности Ф x, y, z входят в четных степенях, то поверхность симметрична относительно координатных плоскостей, осей координат (оси поверхности) и начала координат (центр поверхности). Ось Ox пересекает поверхность в точках $A_1(a, 0, 0)$, $A_2(-a, 0, 0)$. Ось 0y пересекает поверхность в точках $B_1(0, b, 0)$, $B_2(0, -b, 0)$. Эти оси называются действительными осями однополостного гиперболоида, а указанные точки – его вершинами.

Третья ось (ось Oz) не имеет общих точек с однополостным гиперболоидом и называется его мнимой осью.

Положительные числа a, b – действительные полуоси, число c – мнимая полуось.

Изучим форму однополостного гиперболоида методом сечений.

Пусть в прямоугольной системе координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ однополостный гиперболоид определяется уравнением:

$$\Phi: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Тогда сечение поверхности Ф координатной плоскостью xOy (z=0) представляет собой эллипс: $\gamma: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$, с полуосями a и b, который называется горловым эллипсом однополостного гиперболоида.

Сечение поверхностью Ф координатной плоскостью xOz (y=0) является гипербола с мнимой осью Oz: $\gamma_1: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$.

А сечение поверхности Ф координатной плоскостью yOz (x=0) есть гипербола: $\gamma_2: \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$, мнимая ось которой Oz.

В сечении однополостного гиперболоида Ф плоскостью z=h, параллельной координатной плоскости xOy, образуется линия: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases}$, которая определяет эллипс в плоскости z=h.

При неограниченном возрастании $|h|$ полуоси эллипса $a' = a \cdot \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$, $b' = b \cdot \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$ неограниченно возрастает.

Если поверхность Ф пересечь плоскостью x=h, координатной плоскости yOz, то в результате получаем линию: $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{h^2}{a^2} \\ x = h \end{cases}$, которая является гиперболой с мнимой осью Oz, при $|h| < a$; парой прямых, пересекающихся в начале координат, при $|h| = a$ и гиперболой с мнимой осью Оу, при значениях $|h| > a$.

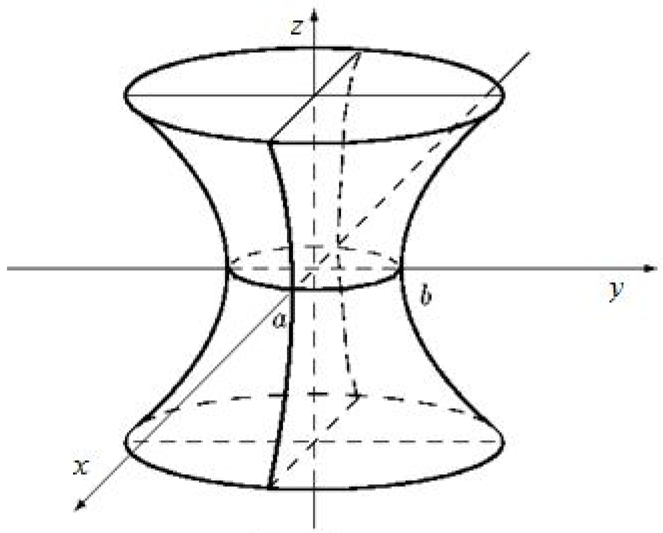


Рис. 30

Аналогичный результат мы получим и при пересечении однополостного гиперболоида Ф плоскостью y=h.

Изображение однополостного гиперболоида дано на рис. 30.

Уравнение однополостного гиперболоида с центром в точке (x_0, y_0, z_0) имеет вид: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$.

II. Двуполостный гиперболоид.

Поверхность, образованная вращением гиперболы вокруг её действительной оси, называется двуполостным гиперболоидом вращения.

Двуполостным гиперболоидом называется поверхность, в которую переходит двуполостный гиперболоид вращения при сжатии пространства к плоскости, проходящей через ось его вращения.

В прямоугольной системе координат двуполостный гиперболоид определяется каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ или}$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Из данного уравнения следует, что поверхность симметрична относительно плоскостей координат, осей координат (оси поверхности) и начала координат (центр поверхности). Ось Oz пересекает поверхность в двух точках $C_1(0, 0, c)$ и $C_2(0, 0, -c)$ называемых вершинами двуполостного гиперболоида; сама эта прямая называется вещественной осью. Оси Ox и Oy не имеют общих точек с поверхностью двуполостного гиперболоида.

Сечение двуполостного гиперболоида Ф плоскостью x=h, параллельной координатной плоскости yOz, образуется линия: $\begin{cases} -\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{h^2}{a^2}+1 \\ x=h \end{cases}$, которая определяет гиперболу в плоскости x=h с мнимой осью Oy.

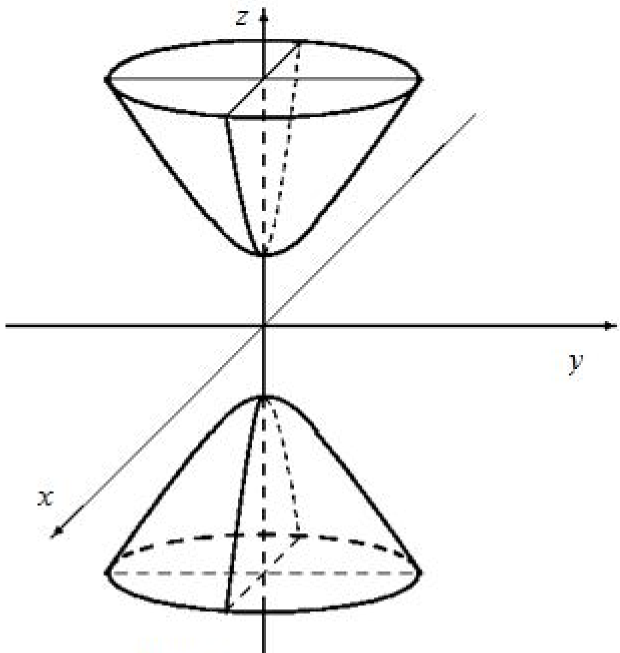


Рис. 31

В сечении поверхности Ф плоскостью y=h, параллельной координатной плоскости xOz, есть гипербола: $\begin{cases} -\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{h^2}{b^2}+1 \\ y=h \end{cases}$, с мнимой осью Ox.

Изображение двуполостного гиперболоида дано на рис. 31.

Если центр двуполостного гиперболоида помещен в точку (x_0, y_0, z_0), то его уравнение примет вид: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{в^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1$.

Упражнения

1. Составить каноническое уравнение однополостного гиперболоида, если мнимая ось его совпадает с осью Ox (Oy), мнимая полуось равна 1, а действительные полуоси равны 2 и 3.

2. Составить каноническое уравнение двуполостного гиперболоида, вещественная ось которого совпадает с осью Ox (Oy), вещественная полуось равна 3, а мнимые полуоси равны соответственно 5 и 7.

3. Найти полуоси, координаты вершин, действительные и мнимые оси, сечения гиперболоида координатными плоскостями, если он задан уравнением: а) $9x^2-36y^2+4z^2=36$; б) $x^2+y^2-z^2=1$; в) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{4}=-1$;

г) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{12}-\frac{z^2}{4}=1$.

4. Определить вид следующих поверхностей второго порядка, заданных следующими уравнениями: а) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2x + 4y - 6z = 0$,

в) $4x^2 - y^2 + 4z^2 + 4y + 32z + 56 = 0$.

5. Определить полуоси и вершины горлового эллипса однополостного гиперболоида $2x^2 + 4y^2 - 16z^2 = 16$.

§ 14. ПАРАБОЛОИДЫ

1. Понятие эллиптического параболоида
2. Уравнение эллиптического параболоида
3. Исследование формы эллиптического параболоида методом сечений
4. Уравнение гиперболического параболоида
5. Исследование формы гиперболического параболоида методом сечений

I. Эллиптический параболоид.

Поверхность, образованная вращением параболы вокруг её оси, называется, параболоидом вращения.

Поверхность, в которую переходит параболоид вращения при сжатии пространства к плоскости, проходящей через его вращения, называется эллиптическим параболоидом.

Вывод канонического уравнения эллиптического параболоида аналогичен таковому в случае эллипсоида.

И поэтому в некоторой прямоугольной системе координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ эллиптический параболоид определяется следующим каноническим уравнением:

$$\Phi : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \, .$$

Так как x и y входят в уравнение поверхности Ф в четных степенях, то эллиптический параболоид симметричен относительно плоскостей xOz и yOz и относительно оси Oz (ось поверхности). Эта поверхность не симметрична относительно плоскости xOy, относительно осей Ox, Oy и начала координат.

Точка O(0, 0, 0) – начало системы координат является точкой пересечения эллиптического параболоида с его осью и называется вершиной эллиптического параболоида.

Из канонического уравнения поверхности Ф следует соотношение $z \geq 0$, причем z=0 выполняется только для вершины, откуда заключаем, что все точки эллиптического параболоида, кроме его вершины, расположены по одну сторону от плоскости xOy.

Изучим форму эллиптического параболоида методом сечений.

Пусть в прямоугольной системе координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ эллиптический параболоид определяется уравнением:

$$\Phi : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z .$$

Тогда сечение поверхности Φ координатной плоскостью xOy (z=0) представляет собой одну точку O(0, 0, 0) $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, вершину эллиптического параболоида.

Сечение поверхности Φ координатной плоскостью xOz (y=0) является парабола с вершиной в точке (0, 0, 0) и осью симметрии Oz.

$$\gamma : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = 2z \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2 = 2a^2 z \\ y = 0 \end{cases}.$$

В сечении поверхности Φ координатной плоскостью yOz (x=0), образуется парабола с вершиной в точке (0, 0, 0) и осью симметрии Oz.

$$\gamma_1 : \begin{cases} y^2 = 2b^2 z \\ x = 0 \end{cases}.$$

Сечение эллиптического параболоида Φ плоскостью z=h, параллельной координатной плоскости xOy есть линия $\gamma_2 : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2h \\ z = h \end{cases}$, которая определяет эллипс с полуосями $a\sqrt{2h}$ и $b\sqrt{2h}$, если $h > 0$ и мнимый эллипс, если $h < 0$.

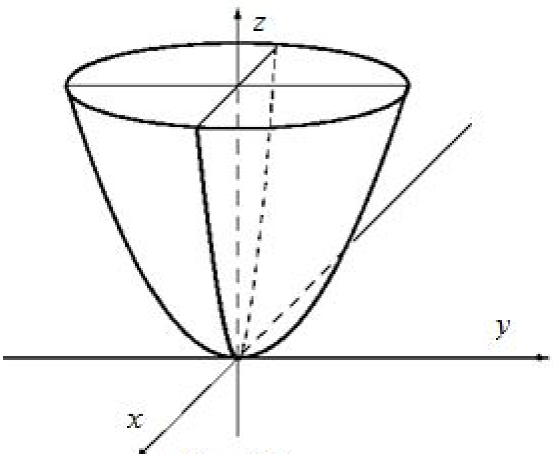


Рис. 32

Если данную поверхность Φ пересечь плоскостями, параллельными координатным плоскостям xOz и yOz, соответственно y=h и x=h, то в сечении получим параболы:

$$\gamma_3 : \begin{cases} x^2 = 2a^2 z - \frac{a^2}{b^2} h^2 \\ y = h \end{cases} \quad и \quad \gamma_4 : \begin{cases} y^2 = 2b^2 z - \frac{b^2}{a^2} h^2 \\ x = h \end{cases}$$

Изображение эллиптического параболоида дано на рис. 32.

Если вершину поверхности эллиптического параболоида поместить в точку (x_0, y_0, z_0), то его уравнение примет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=2(z-z_0).$$

II. Гиперболический параболоид.

Гиперболическим параболоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат определяется уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z.$$

Это уравнение называется каноническим уравнением гиперболического параболоида.

Из уравнения гиперболического параболоида следует, что поверхность симметрична относительно плоскостей xOz, yOz и относительно оси Oz (ось поверхности). Эта поверхность не симметрична относительно плоскости xOy, осей Ox, Oy и начала координат.

Точка (0, 0, 0) пересечения гиперболического параболоида с его осью называется вершиной.

Изучим форму гиперболического параболоида методом сечений.

Пусть в $\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ гиперболический параболоид определяется уравнением:

$$Ф:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z.$$

Тогда сечение поверхности Ф координатной плоскостью xOy (z=0), представляет собой пару прямых, пересекающихся в вершине (0, 0, 0) поверхности:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0,\\ z=0,\end{cases}\text{ то есть }\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0.$$

Сечение поверхности Ф координатной плоскостью yOz (x=0), является парабола $\gamma_1:\begin{cases}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z\\ x=0\end{cases}$, $\begin{cases}y^2=-2b^2z\\ x=0\end{cases}$, с осью симметрии Oz и вершиной (0, 0, 0).

А сечение гиперболического параболоида Ф координатной плоскостью xOz (y=0), есть парабола $\gamma_2 : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = 2z \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x^2 = 2a^2 z \\ y = 0 \end{cases}$, с осью симметрии Oz и вершиной в точке (0, 0, 0).

Рассмотрим сечение гиперболического параболоида Ф плоскостью z=h, параллельной координатной плоскости xOy: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h \\ z = h \end{cases}$.

Полученная линия определяет гиперболу с вещественной осью параллельной Ox, если $h > 0$ и гиперболу с действительной осью параллельной Oy, если $h < 0$.

Если поверхность Ф пересечь плоскостью y=h (или плоскостью x=h), то в сечении получим параболу.

Изображение гиперболического параболоида дано на рис. 33.

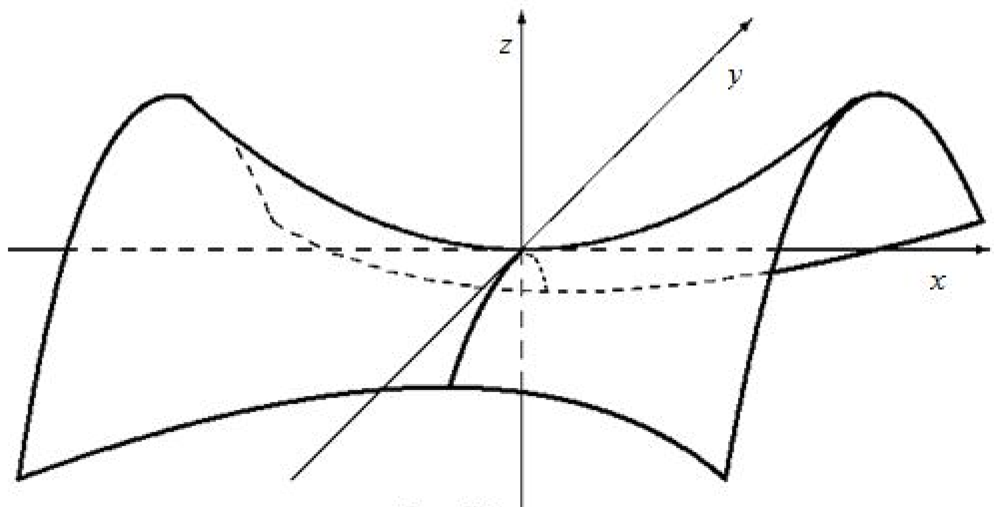


Рис. 33

Если вершина гиперболического параболоида помещена в точку (x_0, y_0, z_0), то его уравнение примет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 2(z - z_0).$$

Упражнения

1. Написать уравнение эллиптического параболоида, вершина которого расположена в начале координат, а его ось совпадает с осью Ox (осью Oy).

2. Написать уравнение гиперболического параболоида, ось симметрии которого 0y, а плоскости z=0 x=0 пересекают поверхность по линиям: $\begin{cases} x^2 = 2a^2 y \\ z = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} z^2 = -2b^2 y \\ x = 0 \end{cases}$.

3. Определить вид поверхностей второго порядка, заданных следующими уравнениями:

а) $z = x^2 + 3y^2 - 6y - 1$;

б) $y^2 - 2z^2 - 4y - 12z - x = 16$.

4. Доказать, что эллиптический параболоид нельзя пересечь плоскостью по гиперболе.

5. Доказать, что гиперболический параболоид нельзя пересечь плоскостью по эллипсу.

6. Найти полуоси, координаты вершин сечения эллиптического параболоида $2y^2 + 3z^2 + 3 - 6z - 4x = 0$ плоскостью $x - 3 = 0$.

§ 15. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И КОНИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

1. Понятие цилиндрической поверхности
2. Уравнение цилиндрической поверхности
3. Классификация цилиндров
4. Понятие конической поверхности
5. Уравнение конической поверхности

Пусть в пространстве задан некоторый ненулевой вектор $\vec{p}$.

Поверхность, обладающая тем свойством, что с любой точкой М она содержит прямую, заданную точкой М и направляющим вектором $\vec{p} \neq \vec{0}$, называется цилиндрической поверхностью (цилиндром).

Эти прямые называются образующими этой цилиндрической поверхности.

Цилиндрическую поверхность можно задать иначе. Если γ – некоторая кривая второго порядка и $\vec{p} \neq \vec{0}$.

Все прямые, проходящие через точки линии γ, имеющие направляющий вектор $\vec{p}$, образуют цилиндрическую поверхность. Кривая γ называется направляющей линией цилиндрической поверхности (рис. 34). А все прямые, проходящие через некоторую точку линии γ параллельно ненулевому вектору $\vec{p}$, называются образующими цилиндрической поверхности.

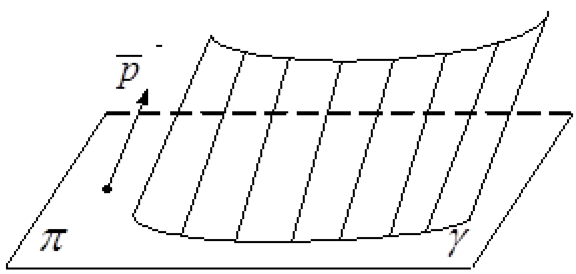


Рис. 34

Теорема. Пусть в плоскости xOy прямоугольной системы координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ задана линия γ уравнением $F(x, y) = 0$ определяет в пространстве цилиндрическую поверхность S с направляющей линией γ и образующими, параллельными вектору $\vec{k}$ (оси Oz). (Без доказательства).

Уравнение $G(x, z) = 0$ в плоскости xOz в прямоугольной системе координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ определяет линию γ_1 и то же уравнение в пространстве определяет цилиндрическую поверхность, для которой линия γ_1 служит направляющей, а образующие параллельны оси Oy.

Точно так же, если уравнение H(y, z)=0 в плоскости yOz в системе $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ определяет линию γ_2, то это же уравнение в пространстве определяет цилиндрическую поверхность с направляющей γ_2 и образующими, параллельными оси Ox.

Если направляющая γ цилиндрической поверхности является линией второго порядка, а именно, эллипсом, гиперболой, параболой, то цилиндрическая поверхность называется цилиндром второго порядка, соответственно эллиптическим, гиперболическим, параболическим.

Если направляющая γ цилиндрической поверхности распадается на пару прямых (пересекающихся, параллельных, слившихся), то цилиндр распадается на пару плоскостей.

Если прямоугольную систему координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ выбрать так, чтобы образующие цилиндрической поверхности второго порядка имели направляющий вектор $\vec{k}$, а направляющая γ в системе $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ имела каноническое уравнение, то указанные выше цилиндрические поверхности классифицируют:

1. Эллиптический цилиндр.

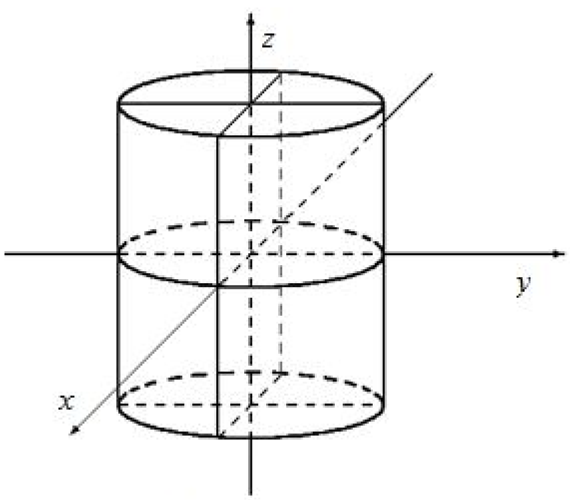


Рис. 35

Линия $\gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0$ – эллипс в плоскости xOy, который является направляющей цилиндрической поверхности S.

Тогда уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в пространстве задает эллиптический цилиндр S с направляющей – эллипсом и образующими, параллельными оси Oz.

Изображение эллиптического цилиндра дано на рис. 35.

2. Параболический цилиндр.

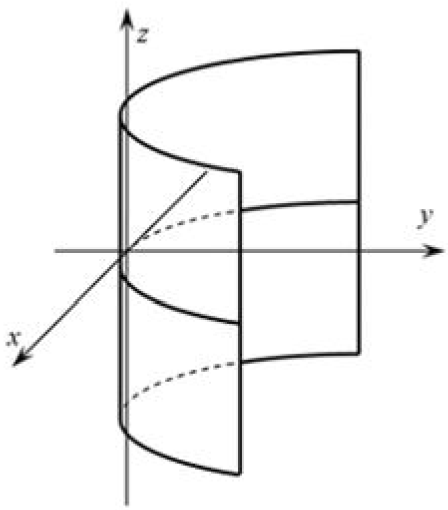


Рис. 36

Линия $\gamma : y^2 = 2px, \quad z = 0$ – парабола в плоскости xOy, которая является направляющей цилиндра S. Тогда уравнение $y^2 = 2px$ в пространстве, есть уравнение параболического цилиндра S с направляющей параболой γ и образующими параллельными оси Oz.

Изображение параболического цилиндра дано на рис. 36.

3. Гиперболический цилиндр.

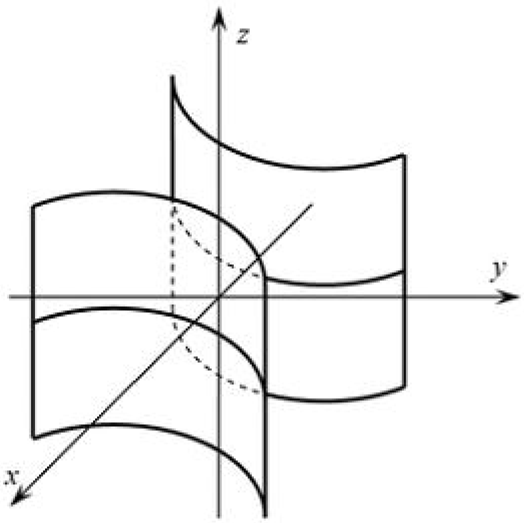


Рис. 37

Линия $\gamma : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0$ – это гипербола в плоскости xOy, которая является направляющей цилиндрической поверхности S. Тогда уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в пространстве определяет гиперболический цилиндр с направляющей гиперболой γ и образующими, параллельными оси Oz.

Изображение гиперболического цилиндра дано на рис. 37.

4. Цилиндр, распавшийся на пару пересекающихся по оси Oz плоскостей.

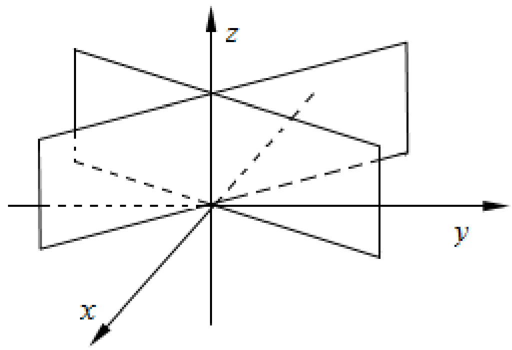


Рис. 38

Линия $\gamma : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0, \quad z = 0$, определяет направляющую цилиндрической поверхности S в плоскости xOy – пару пересекающихся в точке (0, 0) прямых: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0$ и $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0$.

Тогда цилиндр S: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ представляет собой пару пересекающихся по оси Oz плоскостей (рис. 38).

5. Цилиндр, распавшийся на пару параллельных плоскостей.

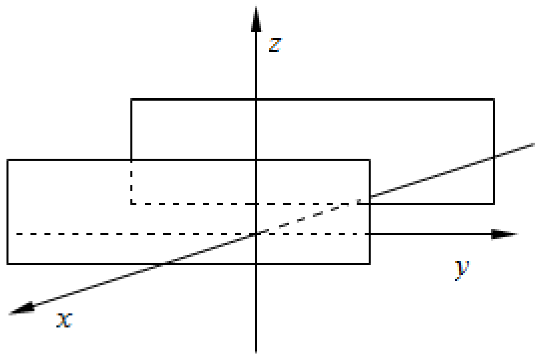


Рис. 39

Линия $\gamma: x^2 - a^2 = 0, \quad (a \neq 0), \quad z = 0$ - направляющая на плоскости xOy, представляет собой пару параллельных прямых: $x - a = 0$ и $x + a = 0$.

Тогда уравнение цилиндра $S: x^2 - a^2 = 0$ представляет собой пару параллельных плоскостей.

Изображение данной поверхности на рис. 39.

6. Цилиндр, представляющий собой пару слившихся плоскостей.

Линия $\gamma: x^2 = 0, \quad z = 0$ – направляющая на плоскости xOy, представляет собой пару прямых: $x = 0$ и $x = 0$.

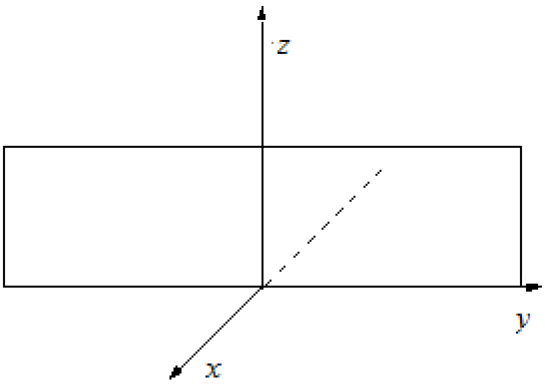


Рис. 40

Тогда в пространстве уравнение $x^2 = 0$ определяет цилиндрическую поверхность S, которая представляет собой пару слившихся плоскостей, то есть $x = 0$ - плоскость yOz в пространстве.

Изображение данного цилиндра на рис. 40.

Конической поверхностью (конусом) с вершиной в точке M_0 называется поверхность, которая с любой своей точкой M, не совпадающей с M_0 содержит прямую M_0M.

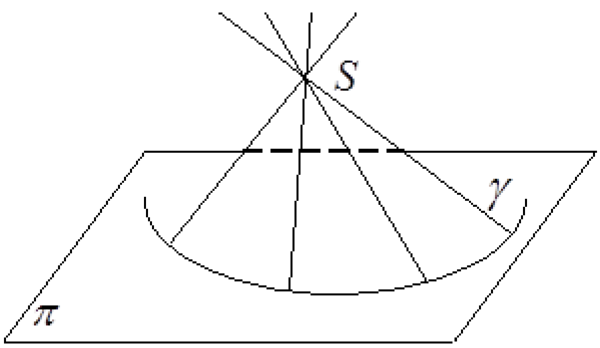


Рис. 41

Такие прямые называются образующими конической поверхности.

Коническую поверхность можно получить следующим образом. Пусть в пространстве есть некоторая кривая γ, точка $M_0 \notin \gamma$ (рис. 41).

Все прямые, проходящие через точку M_0 и точку кривой γ, образуют конус с вершиной M_0.

Если вершина конуса находится в начале прямоугольной системе координат, а его направляющей γ служит эллипс $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c \end{cases}$, то уравнение конуса имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

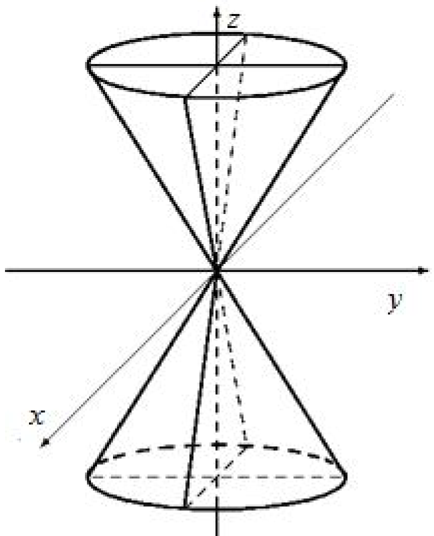


Рис. 42

Это уравнение называется каноническим уравнением конуса второго порядка. Если направляющей конической поверхности является окружность $(a = b)$, то конус называется круговым (рис. 42).

Упражнения

1. Написать уравнение цилиндрической поверхности, если направляющая её лежит в плоскости Oyz и имеет уравнение $y^2 - yz + 5 = 0$, а образующие параллельны оси Ox.

2. Написать уравнение цилиндров, образующие которых параллельны оси 0y, а направляющие заданы уравнениями: а) $\begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 \\ y = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2 - 4x - z^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 4x^2 - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. Построить изображение этих цилиндров.

3. Написать уравнение конической поверхности, если направляющая её в плоскости xOy задана уравнением $x^2 + y^2 = 16$, а координаты вершины (0, 0, 1).

4. Какие поверхности в пространстве задают следующие уравнения:

а) $x^2 + \frac{y^2}{5} = 1$; б) $-x^2 + y^2 = 1$; в) $y^2 + z^2 = 3$; г) $x^2 = 2z$; д) $z^2 - 2y^2 = 0$; е) $y^2 - z = 0$. Построить изображения поверхностей.

5. Определить вид поверхности: а) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2x + 4y - 6z = 0$;

б) $-z^2 = -x^2 + 3y^2 - 6y + 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Атанасян Л.С.* Аналитическая геометрия. М.: Просвещение. Ч. 1, 1967.

2. *Атанасян Л.С., Атанасян В.А.* Сборник задач по геометрии. М.: Просвещение. Ч. 1, 1973.

3. *Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П.* Геометрия. М.: Просвещение. Ч. 1, 1973.

4. *Костенко С.В., Литовка Г.В., Филимонова А.П., Юрьева Т.А.* Элементы аналитической геометрии в пространстве. АмГУ, 2008.

5. *Костенко С.В., Филимонова А.П., Юрьева Т.А.* Векторная алгебра с элементами аналитической геометрии. АмГУ, 2013.

6. *Погорелов А.В*. Геометрия. М.: Наука, 1983.

7. *Филимонова А.П., Юрьева Т.А.* Векторная алгебра с приложениями. Благовещенск: АмГУ, 2010.

СОДЕРЖАНИЕ

Татьяна Александровна Юрьева,
канд. пед. наук, доц. кафедры общей математики и информатики АмГУ;

Анна Павловна Филимонова,
канд. физ-мат. наук, доц. кафедры общей математики и информатики АмГУ;

Наталья Николаевна Двоерядкина,
канд. пед. наук, доц. кафедры общей математики и информатики АмГУ.

Геометрия в пространстве. Учебно-методическое пособие.

Заказ 783.