Министерство образования и науки Российской Федерации
Амурский государственный университет

Н.Н. Максимова

ТЕОРИЯ ИГР

Учебно-методическое пособие

Благовещенск

2015

УДК 519.832
ББК 22.18
М17

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензент:

Бризицкий Р.В., старший научный сотрудник Института прикладной математики ДВО РАН, канд.физ.-мат. наук.

Максимова Н.Н.
М17 Теория игр: учебно-методическое пособие / Н.Н. Максимова. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2015. – 94 с.

Учебно-методическое пособие содержит краткие теоретические сведения по курсу «Теория игр». Подробно рассмотрены методы решения матричных игровых задач, теории принятия решений и представлены образцы решения задач. Предлагаются варианты заданий для контрольной работы студентов заочного отделения. Учебный материал позволяет выработать практические навыки решения задач теории игр.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов направлений подготовки 38.03.01 «Экономика», 38.03.02 «Менеджмент», 38.03.06 «Торговое дело», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика (в рамках изучения дисциплины «Теория игр и исследование операций»).

ВВЕДЕНИЕ

Теория игр – раздел прикладной математики, в котором рассматриваются методы изучения оптимальных стратегий в играх. Под игрой понимается процесс, в котором участвуют две и более сторон, ведущих борьбу за реализацию своих интересов. Каждая из сторон имеет свою цель и использует некоторую стратегию, которая может вести к выигрышу или проигрышу – в зависимости от поведения других игроков. Теория игр помогает выбрать лучшие стратегии с учётом представлений о других участниках, их ресурсах и их возможных поступках. Чаще всего методы теории игр находят применение в экономике, чуть реже в других общественных науках. Очень важное значение она имеет для искусственного интеллекта и кибернетики, особенно с проявлением интереса к интеллектуальным агентам.

Простейшие модели принятия решений рассматриваются в курсах математического анализа и оптимизации. В этих моделях лицо, принимающее решения (ЛПР), выбирает свое действие из некоторого множества стратегий. Задана целевая функция, которая отражает интересы ЛПР и зависит от выбранной им стратегии. Задача принятия решения в этой постановке состоит, как правило, в том, чтобы найти стратегию, доставляющую экстремум целевой функции. Отличие конфликтной ситуации в том, что решение принимается не одним индивидуумом, а несколькими участниками, и функция выигрыша каждого индивидуума зависит не только от его стратегии, но также и от решений других участников. Математическая модель такого рода конфликта называется *игрой*, а участники конфликта – *игроками* [3].

Теория игр занимается исследованием математических моделей конфликтов и их формальным решением, что позволяет:

– смоделировать процесс и возможные результаты будущей игры еще до ее фактического начала;

– по результатам моделирования будущей игры принять решение о целесообразности участия и оптимальном поведении в реальном конфликте.

Другими словами, теория игр дает математический прогноз конфликта. Реальные конфликтные ситуации приводят к различным видам игр. В зависимости от вида игры разрабатывается и метод ее решения.

Если описание игры предполагает рассмотрение всех возможных стратегий каждого игрока и определение платежей, соответствующих любым возможным комбинациям стратегий всех игроков, то такую игру называют *игрой в нормальной форме*.

Классификацию игр проводят по различным признакам [7].

По числу игроков определяются игры одного игрока, двух игроков, n игроков. Игры одного игрока (типа пасьянсов) не представляют интереса и не рассматриваются в теории игр. Игры двух игроков – наиболее распространенные, их исследованию посвящено много работ. Игры трех и более игроков менее исследованы из-за возникающих принципиальных трудностей и технических возможностей получения решения.

По количеству стратегий игры делятся на конечные и бесконечные. Если в игре каждый из игроков имеет конечное число возможных стратегий, то она называется конечной. Если хотя бы один из игроков имеет бесконечное количество возможных стратегий, то такая игра называется бесконечной.

По характеру взаимоотношений игры делятся на бескоалиционные, кооперативные и коалиционные. Бескоалиционными называются игры, в которых игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции. Коалиционной игрой называется игра, в которой игроки могут вступать в соглашения, образовывать коалиции. В кооперативной игре коалиции наперед определены.

По характеру выигрышей делятся на игры с нулевой суммой и игры с ненулевой суммой. Игра с нулевой суммой будет тогда, когда сумма выигрышей всех игроков в каждой ее партии равна нулю, т.е. в игре с нулевой суммой общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками в зависимости от получающихся исходов. Примером игры с ненулевой суммой могут быть торговые взаимоотношения между странами. В таких случаях все стороны могут быть в выигрыше или оказаться в проигрыше.

По виду функций выигрышей игры делятся на матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные, типа дуэлей и др. В данном пособии рассмотрены матричные и биматричные игры.

По количеству шагов игры делятся на одношаговые и многошаговые. В одношаговых играх совершается ровно один ход. Примером многошаговых игр могут служить шашки, шахматы и карточные игры, то есть когда совершается много шагов, и каждый последующий шаг зависит от предыдущих.

Наиболее изученными являются игры двух участников, преследующих противоположные цели (или игры с нулевой суммой). Такие игры называются *антагонистическими*.

Учебно-методическое пособие состоит из введения, четырех глав, указаний по выполнению контрольной работы, заключения, библиографического списка. В первой главе рассматривается основные понятия антагонистических конфликтов, приводятся примеры построения матричных игр, исследуется возможность сокращения размерности матричных игр. Во второй главе приведены методы решения антагонистических конфликтов в зависимости от размерности игровой задачи (графические и аналитические методы). В третьей главе рассматриваются вопросы принятия решения в условиях неопределенности на основании критериев Вальда, Сэвиджа, Гурвица, Лапласа. В четвертой главе изложен графический метод решения простейшей биматричной задачи. В конце пособия представлены варианты задания контрольной работы и указания по ее выполнению. Библиографический список содержит перечень литературы по данной дисциплине.

Данное пособие может быть использован для организации и проведения лекционных, практических и лабораторных занятий, а также для самостоятельного изучения дисциплины студентами заочной формы обучения по направлениям подготовки 38.03.01 – «Экономика», 38.03.02 – «Менеджмент», 38.03.06 – «Торговое дело», 01.03.02 – «Прикладная математика и информатика» (в рамках изучения дисциплины «Теория игр и исследование операций»).

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ МАТРИЧНЫХ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ

1.1. Матричные игровые задачи

Наибольшее практическое значение имеют парные игры, поэтому основное внимание уделим рассмотрению этого класса игр [7].

Развитие игры во времени представляется состоящим из ряда последовательных «ходов». *Ходом* в теории игр называется выбор одного из предусмотренных правилами игры действий и его осуществление. Ходы бывают личные и случайные. *Личным ходом* называется сознательный выбор игроком одного из возможных вариантов действий и его осуществление. *Случайным ходом* называется выбор из ряда возможных альтернатив, осуществляемый некоторой незаинтересованной средой – назовем ее *природой.* Для каждого случайного хода правила игры определяют распределение вероятностей возможных исходов.

Задача теории игр – рекомендовать игрокам определенные «стратегии» при выборе их личных ходов.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе этого игрока, в зависимости от ситуации, сложившейся в ходе игры.

Целью теории игр является определение «оптимальной стратегии» для каждого игрока.

Оптимальной стратегией игрока называется такая стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш. При выборе этой стратегии делается расчет на противника, который делает все, чтобы помешать нам, добиться своей цели.

При постановке игровых задач должны быть определены следующие условия:

– стороны, принимающие решения (игроки);

– множество всех возможных действий (стратегий);

– выигрыши сторон для каждой ситуации (платежная функция).

В том случае, когда цели двух конкурирующих сторон являются прямо противоположными, для них можно определить единый критерий: одна из сторон будет заинтересована в увеличении значения этого критерия, а другая – в его уменьшении.

Рассмотрим игру двух игроков, скажем А и В, каждый из которых имеет конечное число стратегий. Предположим, игрок А имеет m стратегий: $A_1, A_2, \ldots, A_m$, а игрок В – n стратегий: $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Каждой паре стратегий (A_i, B_j) ставится в соответствие число a_{ij}, выражающее выигрыш игрока А за счет игрока В (если $a_{ij}>0$) или проигрыш игрока А игроку В (если $a_{ij}<0$), когда А применяет свою стратегию A_i, а В – стратегию B_j. Возможен вариант «ничьи» в случае, если $a_{ij}=0$.

В случае единого критерия данная игра полностью может быть описана матрицей размерности $m \times n$, которая называется *матрицей игры* или *платежной матрицей* (отсюда следует и название данного класса игр – *матричные игры).*

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \ldots & B_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} .$$

В данной игре один игрок выигрывает ровно столько, сколько проигрывает другой, т. е. сумма выигрышей игроков равна нулю. Поэтому игры данного класса называют *играми с нулевой суммой.*

Ценой игры называется средний выигрыш игрока А.

1.2. Примеры матричных игр. Составление модели игры

Рассмотрим несколько примеров построения платежных матриц.

Пример 1.1 (игра «Три пальца»). Пусть А и В одновременно показывают от одного до трех пальцев. Выигрыш или проигрыш определяется числом показанных пальцев. Если сумма числа пальцев четная, то А получает от В платеж (в у.е.), равный этой сумме, если сумма пальцев нечетная, то А платит В. Определить оптимальные стратегии поведения сторон.

Решение. Очевидно, что у каждого игрока по три стратегии: показывать один, два или три пальца. Элементы платежной матрицы в данной задаче могут быть рассчитаны по формуле

$$a_{ij} = (i + j)(-1)^{i+j},$$

и матрица размерности 3×3 примет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.2 (игра «Орлянка»). Первый игрок закладывает монету орлом или решкой, а второй пытается отгадать. Если второй игрок отгадает, то первый платит ему 10 рублей, если не отгадает, то он платит первому 10 рублей. Требуется определить оптимальные стратегии каждого из игроков.

Решение. У первого игрока две стратегии: A_1 и A_2 – заложить монету орлом или решкой. У второго игрока две стратегии: B_1 и B_2 – предположить, что заложен орел или решка. Получаем платежную матрицу

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -10 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Пример 1.3 (выбор ассортимента товаров). На базе торговой организации имеется n типов одного из товаров ассортиментного минимума (к примеру, n сортов яблок). В магазин должны быть завезены один или несколько типов данного товара. Если товар j-го типа $(j = 1, \ldots, n)$, будет пользоваться спросом, то магазин от его реализации получит прибыль p_j у.е. Если же этот товар не будет пользоваться спросом, то магазин понесет убытки от его хранения, порчи и т.д., которые составят l_j у.е. (табл. 1.1).

Требуется выбрать типы товара, которые целесообразно завести в магазин.

Таблица 1.1

Расчетные данные к примеру 1.3

Типы товара	1	2	3	4	5
Доход от реализации p_j у.е.	32	32	32	32	32
Убыток от хранения l_j у.е.	16	8	4	4	2

Решение. В данной задаче в качестве одной из конфликтующих сторон выступает магазин (игрок А), а в качестве другой – покупательский спрос (игрок В). Каждый из игроков имеет n стратегий. Завоз i-го товара – A_i стратегия игрока А, спрос на j-й товар – B_j стратегия игрока В.

В данном случае платежная матрица игры будет квадратной матрицей размерности $n \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} 32 & -16 & -16 & -16 & -16 \\ -8 & 32 & -8 & -8 & -8 \\ -4 & -4 & 32 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & 32 & -4 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 32 \end{pmatrix}$$

Пример 1.4. Истребитель (И) атакует один из бомбардировщиков Б$_1$ или Б$_2$, летящих один за другим. Вооружение истребителя позволяет ему обстрелять один из бомбардировщиков. Вероятность сбития бомбардировщика при этом составляет $P_1 = 0.8$. На одном из бомбардировщиков находится бомба, однако, на каком – не известно. Цель истребителя – сбить бомбардировщик с бомбой. Подлетая к бомбардировщику, истребитель подвергается обстрелу и может быть сбит с вероятностью $P_2 = 0.6$. После этого он обстреливает первый бомбардировщик или летит ко второму, подвергается обстрелу бомбардировщиком Б$_2$ и обстреливает его.

Требуется определить оптимальные стратегии поведения сторон, если истребитель (сторона А) стремится максимизировать вероятность сбития бомбардировщика с бомбой, а бомбардировщики (сторона В) стремятся эту вероятность минимизировать.

Решение. В распоряжении стороны А (истребитель) – 2 стратегии:

A_1 – обстреливать первый бомбардировщик;

A_2 – обстреливать второй бомбардировщик.

В распоряжении стороны В (бомбардировщики) также 2 стратегии:

B_1 – поместить бомбу на первый бомбардировщик;

B_2 – поместить бомбу на второй бомбардировщик.

Элементы платежной матрицы – вероятности сбития бомбардировщика с бомбой.

Очевидно, что если истребитель будет стрелять по бомбардировщику без бомбы, соответствующий элемент платежной матрицы будет равен нулю.

В результате платежная матрица примет вид:

$$A = \begin{pmatrix} (1-P_2)P_1 & 0 \\ 0 & (1-P_2)^2 P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.32 & 0 \\ 0 & 0.128 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.5. Мистер N часто ездит между двумя городами. При этом есть возможность один из двух маршрутов: скоростное шоссе или длинную обдуваемую ветром дорогу. Патрулирование дорог осуществляется ограниченным количеством полицейских. Если полицейские расположены на одном маршруте, то мистер N с его страстным желанием ездить быстро, получит штраф в 1500 рублей за превышение скорости. Если полицейские патрулируют на двух маршрутах в соотношении 50 на50, то есть 50%-я вероятность получить штраф на первом маршруте и 30%-я – на втором. Кроме того, второй маршрут длиннее, поэтому бензина расходуется на 400 рублей больше, чем на первом маршруте.

Построить матрицу игры, определить нижнюю и верхнюю цены игры и найти решение графическим методом.

Решение. Пусть элементы платежной матрицы – затраты мистера N на дорогу (с отрицательными знаками). У мистера N две стратегии: A_1 и A_2 – поехать по скоростному шоссе или по дороге. У полицейских три стратегии: B_1 – расположиться на шоссе, B_2 – расположиться на дороге, B_3 – расположиться на шоссе и дороге в соотношении 50 на 50.

Рассчитаем элементы платежной матрицы:

$p(A_1, B_1) = -1500$, $\quad p(A_1, B_2) = 0$,

$p(A_1, B_3) = -1500 \cdot 0{,}5 = -750$, $\quad p(A_2, B_1) = -(0 + 400) = -400$,

$p(A_2, B_2) = -(400 + 1500) = -1900$, $\quad p(A_2, B_3) = -(400 + 1500 \cdot 0{,}3) = -850$.

В итоге получаем платежную матрицу

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} -1500 & 0 & -750 \\ -400 & -1900 & -850 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Пример 1.6. Коммерческое предприятие заключило договор на централизованную поставку овощей из теплиц на сумму 10 000 руб. ежедневно. Если в течение дня овощи не поступают, магазин имеет убытки в размере 20 000 руб. от невыполнения плана товарооборота.

Магазин может осуществить самовывоз овощей фермера. Для этого он может сделать заказ в транспортном предприятии, что вызовет дополнительные расходы в размере 500 руб.

Однако опыт показывает, что в половине случаев посланные машины возвращаются без овощей. Можно увеличить вероятность получения овощей от фермера до 80%, если предварительно посылать туда своего представителя, что требует дополнительных расходов в размере 400 руб.

Существует возможность заказать дневную норму овощей у другого надежного поставщика – плодоовощной базы по повышенной на 50% цене. Однако в этом случае, кроме расходов на транспорт (500 руб.), возможны дополнительные издержки в размере 300 руб., связанные с трудностями реализации товара, если в тот же день поступит и централизованная поставка от фермера. Какой стратегии надлежит придерживаться магазину, если заранее неизвестно, поступит или не поступит централизованная поставка.

Решение. Построим игровую модель этой задачи. Игроками являются представители магазина и поставщика. Перечислим стратегии первого игрока – магазина:

A_1 – ожидать поставку, не принимая дополнительных мер;

A_2 – послать к поставщику свой транспорт;

A_3 – послать к поставщику представителя и транспорт;

A_4 – заказать поставку у плодоовощной базы.

У поставщика имеются две стратегии:

B_1 – поставка своевременная,

B_2 – поставки нет.

Всего возможны восемь ситуаций. В зависимости от каждой из них, магазин понесет различные затраты. Для наглядности расчеты представим в табл. 1.2.

Таблица 1.1

Затраты магазина, руб.

Ситуации	Стоимость овощей	Убытки от непоставки	Транспортные издержки	Командировочные издержки	Издержки от реализации	Всего за день
(A_1, B_1)	10000	0	0	0	0	10000
(A_1, B_2)	0	20000	0	0	0	20000
(A_2, B_1)	10000	0	500	0	0	10500
(A_2, B_2)	5000	10000	500	0	0	15500
(A_3, B_1)	10000	0	500	400	0	10900
(A_3, B_2)	8000	4000	500	400	0	12900
(A_4, B_1)	25000	0	500	0	300	25800
(A_4, B_2)	15000	0	500	0	0	15500

В итоге получаем платежную матрицу:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \begin{pmatrix} -10000 & -20000 \\ -10500 & -15500 \\ -10900 & -12900 \\ -25800 & -15500 \end{pmatrix} \end{array}.$$

1.3. Сокращение размерности игровой задачи

Прежде чем приступить к решению игровой задачи, надо проанализировать платежную матрицу на предмет сокращения ее размерности. При анализе игровой матрицы сразу можно выделить стратегии, являющиеся дублирующими или заведомо невыгодными для сторон [7].

В игре i-я стратегия дублирует j-ю стратегию, если

$a_{il} = a_{jl}$, для $\forall l \in [1, m]$ или $a_{li} = a_{lj}$ для $\forall l \in [1, n]$.

Если в матрицу игры входят дублирующие стратегии, то из них оставляется любая одна, а остальные – удаляются.

Определение заведомо невыгодных стратегий производится с помощью *отношений доминирования***,** которые заключаются в следующем.

Если каждой из стратегий стороны А поставить в соответствие вектор-строку матрицы А, то стратегия A_i *будет доминировать стратегию* A_j *при выполнении следующего условия:* $a_{il} \geq a_{jl}$ *для* $\forall l = \overline{1,n}$. *В этом случае стратегия* A_j *не будет использоваться, и соответствующая строка из платежной матрицы удаляется.*

Если каждой из стратегий стороны В поставить в соответствие вектор-столбец матрицы А, то стратегия B_j *будет доминировать над стратегией* B_i *при выполнении следующего условия* $a_{li} \leq a_{lj}$ *для* $\forall l = \overline{1,m}$. *В этом случае стратегия* B_j *не будет использоваться, и соответствующий столбец из платежной матрицы удаляется.*

Таким образом, из платежной матрицы удаляются дублирующие стратегии (кроме одной), доминируемые строки и доминирующие столбцы. Порядок удаления строк и столбцов значения не имеет.

Пример 1.7. Рассмотрим игру со следующей платежной матрицей:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 6 & 10 & 11 \\ 9 & 5 & 8 \\ 3 & 7 & 5 \\ 9 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array} \end{array}$$

Решение. Как видно из матрицы, стратегии A_3, A_5 являются дублирующими, и одна из них, скажем A_5, из матрицы A может быть удалена:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 6 & 10 & 11 \\ 9 & 5 & 8 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \end{array}$$

Элементы i-й строки матрицы A являются выигрышами стороны А при применении ею своей i-й стратегии. Если сравнить стратегию A_1 со стратегией A_3, можно заметить, что независимо от того, какую стратегию применяет сторона В, выигрыш стороны А при применении ею своей третьей стратегии всегда будет больше, чем при использовании первой стратегии. Следовательно, стратегия A_1 является невыгодной по сравнению со стратегией A_3, и соответствующая строка может быть удалена из платежной матрицы. Аналогично, если сравнить стратегию A_2 со стратегией A_4, можно заметить, что A_4 невыгодна по сравнению с A_2, и соответствующая строка может быть удалена. Следовательно, мы имеем:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 9 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_2 \\ A_3 \end{array} \end{array}$$

Рассмотрим данную игру с позиции стороны В. Для стороны В элементы *j-го* столбца платежной матрицы являются проигрышами при применении ею своей стратегии B_j. Естественно, выгодной для В является та стратегия, которая дает ей меньший проигрыш, независимо от образа действий стороны А. Если сравнить стратегии B_2 и B_3, то видно, что независимо от того, какую стратегию применит сторона А, проигрыш стороны В будет больше при стратегии B_3, и, следовательно, соответствующий столбец может быть удален из платежной матрицы:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_2 \\ A_3 \end{array} \end{array}$$

Пример 1.8. Рассмотрим применение отношений доминирования к матрице вида:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & 3 & 6 \\ 6 & 1 & 10 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 10 \\ 3 & 2 & 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}$$

Решение. Столбец 3 – доминирующий по отношению к столбцу 1, а столбцы 2 и 5 – доминирующие по отношению к столбцу 4.

Преобразованная матрица:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 0 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}$$

Строки 3 и 4 – доминируемые по отношению к строке 1.

Преобразованная матрица:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array}$$

Столбец B_1 – доминирующий по отношению к B_4:

$$A = \begin{array}{c} B_4 \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array}$$

Строка A_2 – доминируемая по отношению к A_1

$$A = \begin{array}{c} B_4 \\ (3) \end{array} \; A_1$$

1.4. Решение игровых задач в «чистых» стратегиях. Принцип минимакса

В некоторых ситуациях равновесная ситуация может быть определена непосредственно. В матричных играх ситуация (k, l) является равновесной, если для $\forall i = \overline{1, m}$ и для $\forall j = \overline{1, n}$ выполняется неравенство

$$a_{il} \le a_{kl} \le a_{kj}.$$

Прежде всего, это касается ситуаций, когда в результате применения от-

ношения доминирования в платежной матрице остается единственный элемент. Номера строки и столбца, где этот элемент находится, и определяют равновесную ситуацию или решение игры в «чистых» стратегиях, т.е. четко указывают, какие стратегии должны принять стороны.

Другой случай наличия решения в «чистых» стратегий связан с существованием седловой точки.

Определение седловых точек производится по следующей схеме:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} a_1^{\min} \\ a_2^{\min} \\ \dots \\ a_m^{\min} \end{array} \Rightarrow \alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$\begin{array}{cccc} a_1^{\max} & a_2^{\max} & \dots & a_m^{\max} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

Поставим задачу: определить наилучшую из стратегий игрока А при условии, что игрок В будет действовать наихудшим для нее способом.

Элементы i-й строки матрицы А являются выигрышами стороны А при выборе ею своей стратегии A_i. Сторона А считает, что в ответ на любую ее стратегию сторона В ответит той стратегией, которая наименее выгодна для А, т.е. дает А наименьший выигрыш. Поэтому в каждой строке находим минимальный элемент:

$$a_i^{\min} = \min_j a_{ij}.$$

Далее сторона А должна выбрать ту стратегию, которая обеспечит ей наибольший выигрыш из имеющихся гарантированных минимумов:

$$\alpha = \max_i a_i^{\min} = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Величина α называется *нижней ценой игры* или *максиминным выигрышем*, или *максимином*. Стратегия игрока А, соответствующая максимину α, называется *максиминной стратегией*. **Если игрок А будет придерживаться своей максиминной стратегии, то при любом действии противника, ему**

гарантирован выигрыш, не меньший α.

Рассмотрим теперь игру с позиции игрока В и выберем для него оптимальную стратегию. Элементы j-го столбца платежной матрицы являются проигрышами стороны В при применении им стратегии B_j. Сторона В считает, что в ответ на любую ее стратегию B_j игрок А ответит той стратегий, которая наименее выгодна для В, т.е. дает В наибольший проигрыш. Поэтому в каждом столбце находим максимальный элемент:

$$a_j^{\max} = \max_i a_{ij}.$$

Выбирая стратегию B_j, сторона В рассчитывает на то, что в результате любых действий противника он проиграет не больше, чем $a_j^{\max}$. Далее в интересах В выбрать ту стратегию, при которой он получит наименьший проигрыш из набора ожидаемых максимумов:

$$\beta = \min_j a_j^{\max} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Величина β называется *верхней ценой игры*, или *минимаксным выигрышем*, или *минимаксом*. Стратегия игрока В, соответствующая минимаксу, называется *минимаксной стратегией*. **Если игрок В будет придерживаться своей минимаксной стратегии, то при любом поведении стороны А, ему гарантирован проигрыш, не превышающий величину β.**

Очевидно, что нижняя цена α и верхняя цена β игры всегда связаны неравенством:

$$\alpha \le \beta.$$

Игры, в которых нижняя цена игры строго меньше верхней ее цены, называются *играми без седловых точек*. В этом случае каждый из игроков может ухучшить свое положение, отступив от своей максиминной (минимаксной) стратегии.

Особое место в теории игр занимают игры, в которых нижняя цена равна верхней

$$\alpha = \beta \qquad \text{или} \qquad \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Эти игры называются *играми с седловой точкой*. В матрице такой игры существует элемент, являющийся одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце. Такой элемент называется седловой точкой.

Общее обозначение нижней и верхней цены игры

$$\alpha = \beta = v$$

называется чистой ценой игры. Соответствующие седловой точке стратегии A_i и B_j называются оптимальными, они образуют равновесную ситуацию или *решение игры*.

Решение игры с седловой точкой обладает свойством: *если один из игроков отклоняется от своей оптимальной стратегии, то для другого не может быть выгодным отклонение от своей оптимальной стратегии.*

Замечание. В платежной матрице может быть несколько седловых точек, и все они имеют одно и то же значение; в этом случае имеется несколько оптимальных стратегий.

Пример 1.9. Определить решение и цену игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 7 \\ -9 & -6 & 16 \\ 14 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение. Нижняя цена игры равна

$$\alpha = \max_i \min_j \begin{pmatrix} 10 & 6 & 7 \\ -9 & -6 & 16 \\ 14 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \max_i \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix} = 6.$$

Верхняя цена игры равна

$$\beta = \min_j \max_i \begin{pmatrix} 10 & 6 & 7 \\ -9 & -6 & 16 \\ 14 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \min_j \begin{pmatrix} 14 & 6 & 16 \end{pmatrix} = 6.$$

Получили, что верхняя цена игры равна нижней, следовательно, это игра с седловой точкой. Оптимальное решение имеет вид (A_1, B_2), чистая цена игры $v^* = 6$.

Вернемся к рассмотренным ранее примерам, и определим верхнюю и нижнюю цены игры, а также наличие или отсутствие седловой точки в платежных матрицах.

Пример 1.1. Нижняя цена игры равна

$$\alpha = \max_i \min_j \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} = \max_i \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = -3.$$

Верхняя цена игры равна

$$\beta = \min_j \max_i \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} = \min_j \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} = 4.$$

Получили, что верхняя $\alpha < \beta$, следовательно, это игра без седловой точки. Стратегия A_1 – это максиминная стратегия первого игрока (показывать один палец), стратегии B_1 и B_2 – минимаксные стратегии второго игрока (показывать один или два пальца).

Пример 1.5. Нижняя цена игры равна

$$\alpha = \max_i \min_j \begin{pmatrix} -1500 & 0 & -750 \\ -400 & -1900 & -850 \end{pmatrix} = \max_i \begin{pmatrix} -1500 \\ -1900 \end{pmatrix} = -1500.$$

Верхняя цена игры равна

$$\beta = \min_j \max_i \begin{pmatrix} -1500 & 0 & -750 \\ -400 & -1900 & -850 \end{pmatrix} = \min_j \begin{pmatrix} -400 & 0 & -750 \end{pmatrix} = -750.$$

Получили, что верхняя $\alpha < \beta$, следовательно, это игра без седловой точки. Стратегия A_1 – это максиминная стратегия первого игрока (мистеру N выбрать проезд по скоростному шоссе), стратегия B_3 – минимаксная стратегия второго игрока (полицейским разделиться в соотношении 50/50 на шоссе и трассе).

Пример 1.6. Нижняя цена игры равна

$$\alpha = \max_i \min_j \begin{pmatrix} -10000 & -20000 \\ -10500 & -15500 \\ -10900 & -12900 \\ -25800 & -15500 \end{pmatrix} = \max_i \begin{pmatrix} -20000 \\ -15500 \\ -12900 \\ -25800 \end{pmatrix} = -12900.$$

Верхняя цена игры равна

$$\beta = \min_j \max_i \begin{pmatrix} -10000 & -20000 \\ -10500 & -15500 \\ -10900 & -12900 \\ -25800 & -15500 \end{pmatrix} = \min_j \begin{pmatrix} -10000 & -12900 \end{pmatrix} = -12900.$$

Получили, что верхняя цена игры равна нижней, следовательно, это игра с седловой точкой. Оптимальное решение имеет вид (A_3, B_2). Это означает, что магазину следует послать к поставщику представителя и транспорт. При этом затраты магазина составят 12900 руб.

1.5. Понятие смешанных стратегий

В тех случаях, когда равновесная ситуация не может быть найдена при помощи исключения доминируемых строк и доминирующих столбцов и не выполняются условия существования седловой точки, ситуация равновесия в чистых стратегиях отсутствует. В этом случае каждая из сторон может использоваться свои стратегии с некоторой вероятностью в предположении, что игра, определяемая платежной матрицей A, повторяется достаточное количество раз [1, 7, 12].

Задача состоит в том, чтобы определить эти вероятности таким образом, чтобы они обеспечивали максимально гарантированный выигрыш при учете действий противоположной стороны.

Обозначим через x вектор-столбец размерности m, где m – число стратегий стороны A:

$$x = x_{[m\times 1]} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Элемент этого вектора x_i определяет вероятность применения стороной A своей i-й стратегии.

Через у обозначим n-мерный вектор-столбец, где n – число стратегий стороны B:

$$y = y_{[n\times 1]} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Элемент этого вектора y_j определяет вероятность применения стороной *B* своей *j*-й стратегии.

Элементы этих векторов должны удовлетворять условиям:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \qquad x_i \geq 0, \qquad i = 1,\dots,m;$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \qquad y_j \geq 0, \qquad j = 1,\dots,n.$$

Очевидно, что каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии: когда все стратегии, кроме данной, имеют нулевые вероятности, а данная – единичную вероятность.

В условиях смешанных стратегий каждая обычная ситуация (в чистых стратегиях) $\{A_i, B_j\}$ является случайным событием и ввиду независимости наборов вероятностей $\{x_i\}$, $\{y_j\}$ реализуется с вероятностью $x_i y_j$. В ситуации $\{A_i, B_j\}$ игрок *A* получает выигрыш a_{ij}. Таким образом, математическое ожидание выигрыша (*функция выигрыша первого игрока* или, что то же самое, *функция проигрыша второго игрока*) игрока *A* в условиях смешанных стратегий будет определяться следующим образом:

$$v_a(x, y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j .$$

Это число принимается за средний выигрыш игрока *A* при смешанных стратегиях.

Пример 1.10. Составим функцию выигрыша в игре с платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ -9 & 5 & 4 \\ 4 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение1 Для удобства припишем к платежной матрице справа компоненты вектора смешанной стратегии первого игрока, снизу – компоненты вектора смешанной стратегии второго игрока:

$$\begin{array}{cc} A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ -9 & 5 & 4 \\ 4 & -5 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \quad\; y_1 & y_2 & y_3 \end{array} & \end{array}$$

Запишем функцию выигрыша:

$$\begin{aligned} v_a(x, y) = \; & 1\cdot x_1 y_1 + 6\cdot x_1 y_2 + 3\cdot x_1 y_3 - \\ & -9\cdot x_2 y_1 + 5\cdot x_2 y_2 + 4\cdot x_2 y_3 + \\ & +4\cdot x_3 y_1 - 5\cdot x_3 y_2 - 1\cdot x_3 y_3. \end{aligned}$$

При различных допустимых векторах смешанных стратегий игроков можно получить конкретные значения для функции выигрыша. Например, пусть смешанная стратегия первого игрока определяется вектором $x^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, второго игрока – вектором $y^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$, тогда значение функции выигрыша будет следующим

$$\begin{aligned} v_a(x, y) = \; & 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7} + 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7} + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7} - \\ & -9\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{7} + 5\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{7} + 4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{7} + \\ & +4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{7} - 5\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{7} - 1\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{7} = \\ & = \frac{2 + 24 + 24 - 9 + 10 + 16 + 4 - 10 - 4}{28} = \frac{57}{28}. \end{aligned}$$

Следует отметить, что и чистые стратегии также можно представить в виде векторов. Так, например, чистая стратегия A_2 первого игрока определяется вектором $x^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, чистая стратегия B_1 второго игрока – вектором $y^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, и т.п. Нетрудно посчитать соответствующий выигрыш:

$$\begin{aligned} v_a(x, y) = \; & 1\cdot 0\cdot 1 + 6\cdot 0\cdot 0 + 3\cdot 0\cdot 0 - \\ & -9\cdot 1\cdot 1 + 5\cdot 1\cdot 0 + 4\cdot 1\cdot 0 + \\ & +4\cdot 0\cdot 1 - 5\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot 0\cdot 0 = -9. \end{aligned}$$

Отметим, что это значение совпадает (и должно совпадать) с элементом (-9), стоящим на пересечении второй строки и первого столбца платежной матрицы.

Стратегии $x^{*T} = \begin{pmatrix} x_1^* & x_2^* & \dots & x_m^* \end{pmatrix}$, $y^{*T} = \begin{pmatrix} y_1^* & y_2^* & \dots & y_n^* \end{pmatrix}$ называют *оптимальными смешанными стратегиями* игроков A и B соответственно, если выполняется двустороннее неравенство:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j^* \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j^* \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j . \qquad (1.1)$$

Решением игры называется пара x^*, y^*, в общем случае смешанных, обладающих свойством: если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то другому не может быть выгодно отступать от своей оптимальной.

Левое неравенство в (1.1) означает, что если второй игрок придерживается своей оптимальной стратегии, а первый будет отклоняться от своей оптимальной стратегии, то это повлечет уменьшение выигрыша для второго игрока. Аналогично для правого неравенства.

Выигрыш, соответствующий решению, называется *ценой игры*; обозначим ее через v^* (как чистую цену):

$$v^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j^* .$$

В векторно-матричной форме последнее неравенство будет выглядеть следующим образом:

$$v^* = x^{*T} A y^* .$$

Цена игры всегда лежит между нижней и верхней ценами игры:

$$\alpha \le v^* \le \beta .$$

Если $v^* \ge 0$, то игра выгодна первому игроку; если $v^* \le 0$ – второму игроку; при $v^* = 0$ игра «честная» или «справедливая», т.е. одинаково выгодная для обоих участников.

Основная теорема теории игр. Каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно решение, возможно, в области смешанных стратегий.

Активными стратегиями игрока называются те стратегии, которые входят в его оптимальную стратегию с отличными от нуля вероятностями. В противном случае стратегия называется *пассивной*.

Теорема об активных стратегиях. Если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то выигрыш первого игрока (проигрыш второго игрока) остается неизменным и равным цене игры v^*, независимо от того, что делает другой игрок, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий.

Смысл этой теоремы состоит в том, что если один из игроков начнет последовательно придерживаться своей оптимальной смешанной стратегии, то противостоящий ему игрок уже не сможет изменить исход игры.

Эта теорема имеет большое практическое значение: она дает конкретные методы нахождения оптимальных стратегий при отсутствии седловой точки.

Задания для самостоятельной работы

1. Определить нижнюю и верхнюю цены игры, заданной матрицей; упростить матрицу игры, удалив заведомо невыгодные стратегии:

а) $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 & 3 & 7 \\ 6 & 9 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 9 \\ 4 & 6 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 8 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 6 & 6 \\ 10 & 2 & 9 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

2. Определить наличие седловых точек в следующих матрицах, найти решение в играх с седловой точкой.

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 7 \\ 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 9 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \\ 8 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

ГЛАВА 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГРОВЫХ КОНФЛИКТОВ

2.1. Методы решения матричных игр размерности 2×2

Наиболее простым случаем конечной игры является игра 2×2, когда у каждого игрока по две стратегии:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}$$

2.1.1. Аналитический метод

Предположим, что у платежной матрицы A нет седловой точки, следовательно, решение должно быть в смешанных стратегиях. Определим это решение, т.е. найдем пару оптимальных смешанных стратегий $x^{*T} = \begin{pmatrix} x_1^* & x_2^* \end{pmatrix}$, $y^{*T} = \begin{pmatrix} y_1^* & y_2^* \end{pmatrix}$ и цену игры ν^*.

Сначала определим смешанную стратегию первого игрока $x^{*T} = \begin{pmatrix} x_1^* & x_2^* \end{pmatrix}$.

Согласно теореме об активных стратегиях, если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то его выигрыш остается неизменным и равным цене игры ν, независимо от образа действий противника, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий. В игре 2×2 обе стратегии противника являются активными (в противном случае игра имела бы седловую точку). Значит, если первый игрок придерживается своей оптимальной стратегии x^*, его противник может, не меняя выигрыша, применять любую из своих чистых стратегий.

Чтобы составить систему уравнений, вспомним, что цена игры – это математическое ожидание выигрыша при оптимальных стратегиях. Будем искать ее как математическое ожидание дискретной случайной величины – выигрыша игрока А. Пусть игрок В применяет свою стратегию B_1, а игрок А – смешанную

стратегию $x^{*T} = \begin{pmatrix} x_1^* & x_2^* \end{pmatrix}$. С вероятностью x_1^* выигрыш первого игрока составит a_{11}, с вероятностью x_2^* – выигрыш будет a_{21}. Цену игры (или средний выигрыш, соответствующий решению) получим, умножая значение выигрыша на вероятность соответствующего выигрыша и складывая полученные произведения:

$$a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* = \nu^*.$$

Аналогично составляется уравнение для стратегии B_2. Следовательно, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* = \nu^*, \\ a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* = \nu^*, \end{cases}$$

из которой с учетом условия нормировки $x_1^* + x_2^* = 1$ получим *формулы для расчета оптимальной стратегии первого игрока и цены игры*:

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \\ x_2^* = \dfrac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \\ \nu = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \end{cases}$$

Аналогично получаются *формулы для расчета оптимальной стратегии второго игрока и цены игры*:

$$\begin{cases} y_1^* = \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \\ y_2^* = \dfrac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \\ \nu = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \end{cases}$$

Следует отметить, что можно и не запоминать формулы, по которым находятся оптимальные смешанные стратегии каждого из игроков. Можно поступать проще: составлять соответствующие системы линейных уравнений и находить их решение.

Пример 2.1. Найти решение игры, определяемой матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Данная игра седловой точки не имеет: $\alpha = 4,\ \beta = 5$. Поэтому решение игры ищем в смешанных стратегиях. Для удобства запишем платежную матрицу в виде:

$$\begin{array}{cccc} & B_1 & B_2 & \\ A_1 & \left(\begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} 7 \\ 2 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \\ A_2 & & & \\ & y_1 & y_2 & \end{array}$$

Составим следующие системы линейных уравнений (с помощью теоремы об активных стратегиях и условия нормировки). Пусть второй игрок поочередно принимает свои чистые стратегии, а первый игрок – свою смешанную стратегию. Получим систему

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = v^*, \\ 7x_1 + 2x_2 = v^*, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Найдем решение системы любым известным способом и получим:

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{2},\ v^* = \frac{9}{2}.$$

Аналогично составим систему для определения оптимальной стратегии второго игрока: первый игрок поочередно принимает свои чистые стратегии, а второй игрок – свою смешанную стратегию. Имеем

$$\begin{cases} 4y_1 + 7y_2 = v^*, \\ 5y_1 + 2y_2 = v^*, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases}$$

Откуда находим $y_1 = \frac{5}{6},\ y_2 = \frac{1}{6},\ v^* = \frac{9}{2}$.

Окончательно получаем решение задачи: $x^{*T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ – оптимальная стратегия первого игрока, $y^{*T} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ – оптимальная стратегия второго игрока, $v^* = \frac{9}{2}$ – цена игры.

2.2.2. Метод, основанный на понятии равновесия по Нэшу

Равновесие по Нэшу есть точка $m^H = \begin{pmatrix} m_1{}^H & m_2{}^H & \ldots & m_n{}^H \end{pmatrix}$ такая, что для всех $i = 1, \ldots, n$ достигается оптимум $h_i\left(m^H\right) = \max\limits_{m_i} h_i(m)$.

Точка m^H определяется из решения системы уравнений

$$\frac{\partial h_i(m)}{\partial m_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим игру 2×2, не имеющую седловой точки

$$\begin{array}{cccc} & B_1 & B_2 & \\ A = & \left(\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix}\right) & \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{array}$$

Пусть игрок А использует свою стратегию A_1 с вероятностью x, а стратегию A_2 – с вероятностью $1–x$. Пусть игрок В использует свою стратегию B_1 с вероятностью y, а стратегию B_2 – с вероятностью $1–y$.

$$\begin{array}{cccc} A = & \left(\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix}\right) & \begin{matrix} x \\ 1-x \end{matrix} \\ & y & 1-y & \end{array}$$

Тогда математическое ожидание выигрыша игрока А будет определяться функцией

$$v_a(x, y) = a_{11}xy + a_{12}x(1-y) + a_{21}(1-x)y + a_{22}(1-x)(1-y).$$

Очевидно $v_b(x, y) = -v_a(x, y)$. Точка Нэша $\left(x^H, y^H\right)$ определяется из уравнений

$$\frac{\partial v_a(x,y)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v_a(x,y)}{\partial y} = 0.$$

С математической точки зрения точка Нэша $\left(x^H, y^H\right)$ определяет такие две координаты, что при фиксированном $x = x^H$ функция $v_a(x^H, y)$ достигает минимума при $y = y^H$ (второй игрок минимизирует свой проигрыш), а при фиксированном $y = y^H$ функция $v_a(x, y^H)$ достигает максимума при $x = x^H$ (первый игрок максимизирует свой выигрыш).

Зная точку Нэша $\left(x^H, y^H\right)$, можно легко определить оптимальные стратегии $x^* = \left(x^H \quad 1 - x^H\right)^T$, $y^* = \left(y^H \quad 1 - y^H\right)^T$ и цену игры $v^* = v_a(x^H, y^H)$.

Пример 2.2. Найти решение игры, определяемой матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, используя понятие равновесия по Нэшу.

Решение. Для удобства запишем платежную матрицу в виде:

$$\begin{array}{ccc} & B_1 \quad B_2 & \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x \\ 1-x \end{array} \\ & y \quad 1-y & \end{array}$$

и запишем функцию выигрыша

$$v_a(x,y) = 4xy + 7x(1-y) + 5(1-x)y + 2(1-x)(1-y).$$

Отметим, что нет необходимости преобразовывать эту функцию. Определим точку Нэша:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_a(x,y)}{\partial x} = 4y + 7(1-y) + 5(-1)y + 2(-1)(1-y) = 0, \\ \dfrac{\partial v_a(x,y)}{\partial y} = 4x + 7x(-1) + 5(1-x) + 2(1-x)(-1) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6y + 5 = 0, \\ -6x + 3 = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y^H = 5/6, \\ x^H = 1/2. \end{cases}$$

Тем самым, $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right)$ – точка равновесия Нэша. Тогда оптимальные стратегии каждого из игроков $x^{*T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $y^{*T} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ и цена игры равна

$$v^* = v_a\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} + 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{5}{6}\right) + 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{5}{6} + 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{5}{6}\right) =$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} + 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{20 + 7 + 25 + 2}{12} = \frac{54}{12} = \frac{9}{2}.$$

Как можно увидеть, решение совпадает с результатами, полученными аналитическим методом.

2.2.3. Графический метод решения игр размерности 2×2

Решению игры 2×2 можно удобную геометрическую интерпретацию. Пусть имеется игра 2×2 с платежной матрицей

$$\begin{array}{ccc} & B_1 \quad B_2 & \\ A = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \end{array}$$

Предположим, что решение игры в чистых стратегиях отсутствует. Предположим, игрок А выбрал смешанную стратегию $\left(x_1 \quad x_2\right)$, а игрок В – свою чистую стратегию B_j, тогда средний выигрыш игрока А определяется по формуле математического ожидания

$$v_{B_j} = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 = a_{1j} + \left(a_{2j} - a_{1j}\right)x, \qquad j = 1, 2,$$

где $x = x_2 = 1 - x_1$.

Каждая из функций соответствует прямой линии в прямоугольной системе координат. Изобразим эти прямые на плоскости (рис. 2.1).

В системе координат XOY на оси абсцисс отложим отрезок A_1A_2 длиной, равной единице. Левый конец отрезка (при $x = 0$) соответствует стратегии A_1, правый конец (при $x = 1$) – стратегии A_2. Все промежуточные точки – смешанные стратегии игрока А. Через точки A_1 и A_2 проведем два перпендикуляра к оси абсцисс. На первой оси будем откладывать выигрыш при стратегии A_1, а на второй оси – выигрыш при стратегии A_2.

Пусть противник применяет стратегию B_1, тогда $v_{B_1} = a_{11} + (a_{21} - a_{11})x$. При A_1 выигрыш будет равен a_{11}, а при A_2 выигрыш будет равен a_{21}. Отложим эти точки на перпендикулярных осях соответственно, обозначим их B_1 и проведем через эти точки прямолинейный отрезок, назовем этот отрезок «стратегия B_1». Аналогично строим отрезок, соответствующей «стратегии B_2».

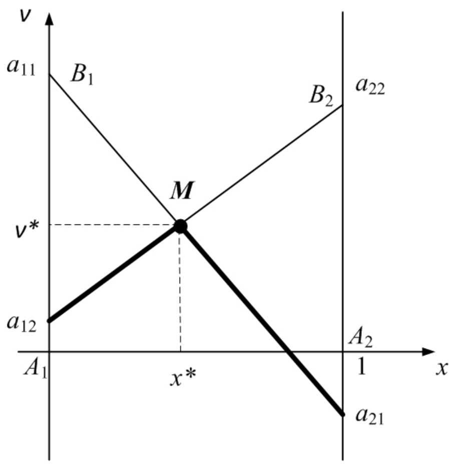


Рис. 2.1. Иллюстрация к графическому методу

Далее согласно принципу максимина определим оптимальную стратегию. Поскольку цель игрока В – минимизировать выигрыш игрока А за счет выбора своих стратегий, построим нижнюю границу выигрыша при стратегиях B_1, B_2 (ломанная отмечена на рисунке жирной линией). На этой ломанной будет лежать минимальный выигрыш игрока А при любой его смешанной стратегии. Поскольку цель игрока А – максимизировать свой выигрыш за счет выбора соотношения $x_2 : x_1$, ищем верхнюю точку нижней границы выигрыша. Точка M, в которой этот выигрыш достигает своего максимального значения, определяет решение и цену игры. Ордината точки M – цена игры v^*, ее абсцисса равна x_2^*, а расстояние до правого конца участка – x_1^*.

В рассмотренном примере решение игры определяется точкой пересечения стратегий B_1 и B_2, но это не всегда так, решение игры определяется именно верхней точкой нижней границы, а эта точка не всегда совпадает с точкой пересечения стратегий.

Рассмотрим два примера. На рис. 2.2 представлен случай, когда оптимальной стратегией первого игрока является стратегия A_2, т.е. $x^{*T} = (0, 1)$. Здесь стратегия A_2 явно выгоднее стратегии A_1 независимо от поведения противника.

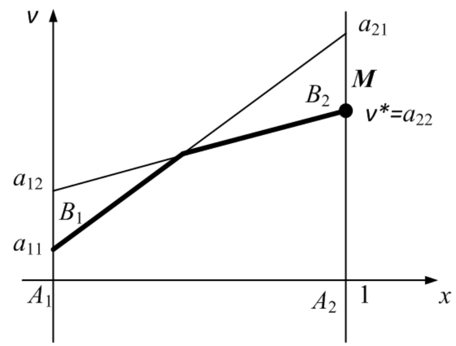


Рис. 2.2. Иллюстрация к графическому методу

На рис. 2.3 представлен случай, когда заведомо невыгодная стратегия имеется у противника. Для этого случая $x^{*T} = (1, 0)$.

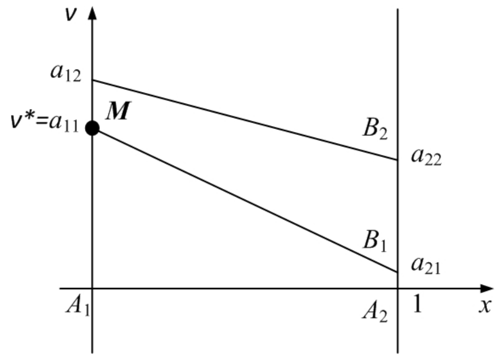


Рис. 2.3. Иллюстрация к графическому методу

Рассмотрим теперь, как определяется оптимальная смешанная стратегия второго игрока $y^{*T} = \begin{pmatrix} y_1^* & y_2^* \end{pmatrix}$. Для ее нахождения можно использовать такой же подход: построить и изобразить на плоскости функции выигрыша первого игрока при различных допустимых стратегиях второго игрока:

$$v_{A_i} = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 = a_{i1} + (a_{i2} - a_{i1})y, i = 1,2,$$

где $y = y_2 = 1 - y_1$. Только в данном случае точка равновесия выбирается как нижняя точка верхней границы выигрыша.

Однако можно поступить иначе (и проще). В самом общем случае при отсутствии решения в чистых стратегиях, каждая из стратегий первого игрока будет активной, а тогда возможно применение теоремы об активных стратегиях. Т.е., если первый игрок будет применять любую из своих чистых (активных) стратегий, а второй игрок – свою оптимальную стратегий, то выигрыш будет оставаться неизменным и равным цене игры. Тогда можно составить и решить следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v, \end{cases}$$

где v – это найденное ранее значение цены игры. Следует отметить, что вычисленные из системы значения y_1^*, y_2^* должны удовлетворять условию нормировки, т.е. $y_1^* + y_2^* = 1$.

Пример 2.3. Найти графически решение игры, определяемой матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Определим прямые

$$v_{B_1} = 2 + (-3 - 2)x = 2 - 5x, \qquad v_{B_2} = -3 + (4 + 3)x = -3 + 7x$$

и построим их на графике (рис. 2.4).

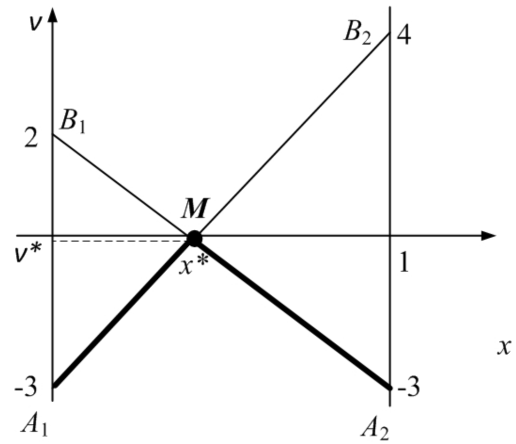


Рис. 2.4. Иллюстрация к примеру 2.3

Тем самым, точка M является верхней точкой нижней границы. Определим ее координаты:

$$v_{B_1} = v_{B_2}, \quad 2 - 5x = -3 + 7x, \quad 12x = 5, \qquad x = \frac{5}{12}.$$

Таким образом, $x^{*T} = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$ и $v^* = -\frac{1}{12}$.

Найдем оптимальную смешанную стратегию второго игрока. Для этого составим систему:

$$\begin{cases} 2y_1 - 3y_2 = -\frac{1}{12}, \\ -3y_1 + 4y_2 = -\frac{1}{12}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1^* = \frac{7}{12}, \\ y_2^* = \frac{5}{12}. \end{cases}$$

Таким образом, $y^{*T} = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$.

2.3. Графический метод решения игр размерности $2 \times n$ и $m \times 2$

Для решения матричных игр, в которых число стратегий хотя бы одного из игроков равно двум, эффективным является графический способ, аналогичный способу решения игр 2×2.

2.3.1. Игры размерности $2 \times n$

Рассмотрим игру $2 \times n$ с платежной матрицей

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \ldots & B_n \end{array} & \\
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array}
\end{array}
$$

У игрока А – 2 стратегии, у игрока В – n стратегий. Дадим геометрическую интерпретацию: изобразим n стратегий игрока В в виде n прямых, уравнения которых имеют вид:

$$v_{B_i} = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 = a_{1i} + (a_{2i} - a_{1i})x, \ i = 1, \ldots, n.$$

Далее определяем нижнюю границу выигрыша (ломанная $B_1B_2B_5$) и верхнюю точку этой нижней границы – точку M (рис. 2.5).

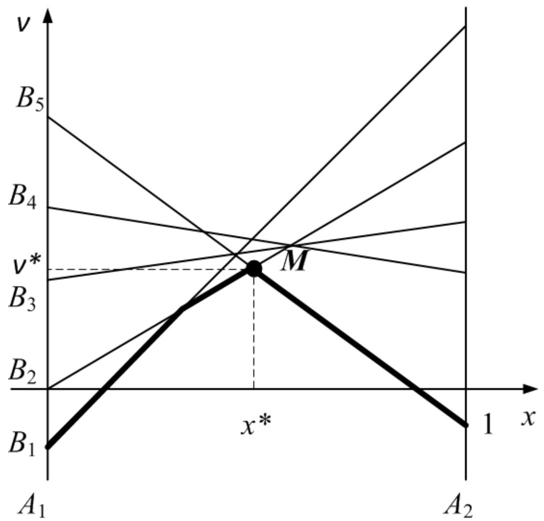


Рис. 2.5. Иллюстрация к графическому методу

Ордината этой точки и будет ценой игры, абсцисса этой точки равна вероятности x_2^*, а расстояние от точки M до правого конца участка – x_1^*.

Чтобы получить оптимальную смешанную стратегию игрока В, определя-

ем, в результате каких стратегий получена верхняя точка нижней границы, – эти стратегии называются активными, остальные стратегии – пассивные. На рис. 2.5 активными являются стратегии B_2 и B_5. Далее аналогично, как и в предыдущем пункте, вычисляется оптимальная стратегия второго игрока с учетом, что вероятности пассивных стратегий равны нулю.

Остановимся подробнее на некоторых частных случаях, которые могут иметь место при определении оптимальных стратегий.

1. Верхняя точка нижней границы выигрыша имеет координаты $(0, v^*)$ (рис. 2.6, а).

В этом случае оптимальной стратегией игрока А является чистая стратегия A_1, поскольку $x_1^* = 1, x_2^* = 0$. Игроку В выгодно применять чистую стратегию, соответствую прямой, проходящей через точку $(0, v^*)$ и имеющей наибольший отрицательный наклон. Цена игры равна v^*.

2. Верхняя точка нижней границы выигрыша имеет координаты $(1, v^*)$ (рис. 2.6, б).

В этом случае оптимальной стратегией игрока А является чистая стратегия A_2, поскольку $x_1^* = 0, x_2^* = 1$. Игроку В выгодно применять чистую стратегию, соответствую прямой, проходящей через точку $(1, v^*)$ и имеющей наименьший положительный наклон. Цена игры равна v^*.

3. Нижняя граница выигрыша имеет горизонтальный участок (рис. 2.6, в).

В этом случае максимум нижней границы будет не в одной точке, а на участке MM', ордината которого равна цене игры v^*. Решение для игрока А в этом случае будет неоднозначным: он может применять любую из своих смешанных стратегий, соответствующих точкам оси абсцисс от x до x'. Таким образом, у игрока А существует бесконечное множество оптимальных стратегий $x^{*T} = (x_1^* \quad x_2^*)$, где $x_2^* \in [x, x']$, $x_1^* = 1 - x_2^*$.

Решение для игрока В определяется с помощью граничных точек участка

MM' по тем же правилам, как и ранее. Нетрудно убедиться, что стратегия игрока B, которой соответствует горизонтальный участок, является его чистой оптимальной стратегией.

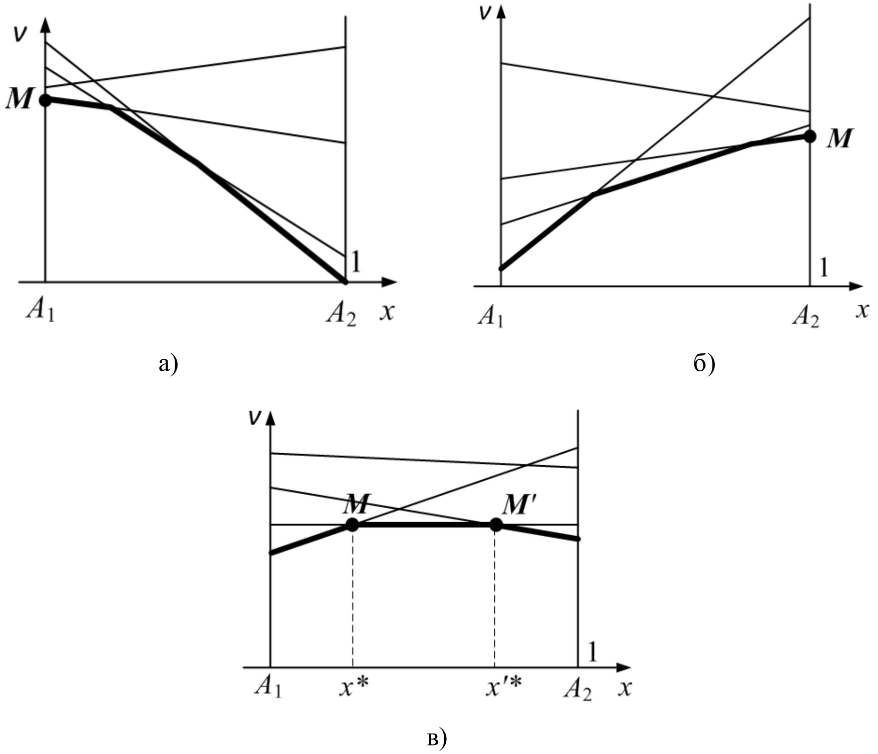


Рис. 2.6. Иллюстрации к частным случаям графического метода

Пример 2.4. Определить графическим методом решение игры, определяемой матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 10 \\ 3 & 1 & -4 & -6 \end{pmatrix}$.

Решение. Определим функции выигрыша

$v_{B_1} = 2 + (3-2)x = 2 + x, \qquad v_{B_2} = -5 + (1+5)x = -5 + 6x,$

$v_{B_3} = 4 + (-4-4)x = 4 - 8x, \qquad v_{B_4} = 10 + (-6-10)x = 10 - 16x$

и построим их на графике (рис. 2.7).

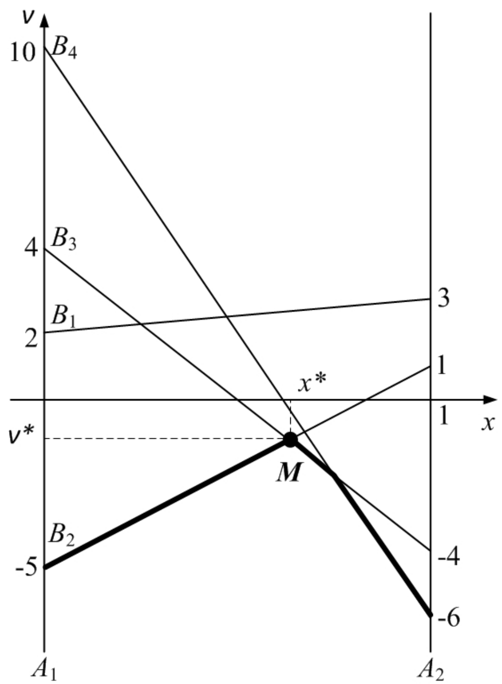


Рис. 2.7. Иллюстрация к примеру 2.4

Из рисунка видно, что верхней точкой нижней границей является точка M – точка пересечения стратегий B_2 и B_3, найдем ее координаты:

$$v_{B_2} = v_{B_3}, \quad -5 + 6x = 4 - 8x, \quad 14x = 9, \qquad x = \frac{9}{14}, \qquad v = -\frac{8}{7}.$$

Тем самым, $x^{*T} = \begin{pmatrix} \frac{5}{14} & \frac{9}{14} \end{pmatrix}, \; v^* = -\frac{8}{7}$.

Определим оптимальную смешанную стратегию игрока B. Пассивными являются стратегии B_1 и B_4, поэтому $y_1^* = y_4^* = 0$. Найдем вероятности активных стратегий. Для этого составим систему и найдем ее решение:

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 - 5 \cdot y_2 + 4 \cdot y_3 + 10 \cdot 0 = -\dfrac{8}{7}, \\ 3 \cdot 0 + 1 \cdot y_2 - 4 \cdot y_3 - 6 \cdot 0 = -\dfrac{8}{7}, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_2^* = \dfrac{4}{7}, \\ y_3^* = \dfrac{3}{7}. \end{cases}$$

Таким образом, $y^{*T} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 \end{pmatrix}$ – оптимальная стратегия второго игрока.

Пример 2.5. Определить графическим методом решение игры, определяемой матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Определим функции выигрыша

$v_{B_1} = 2 + (7-2)x = 2 + 5x, \qquad v_{B_2} = 5 + (5-5)x = 5,$

$v_{B_3} = 9 + (3-9)x = 9 - 6x$

и построим их на графике (рис. 2.8).

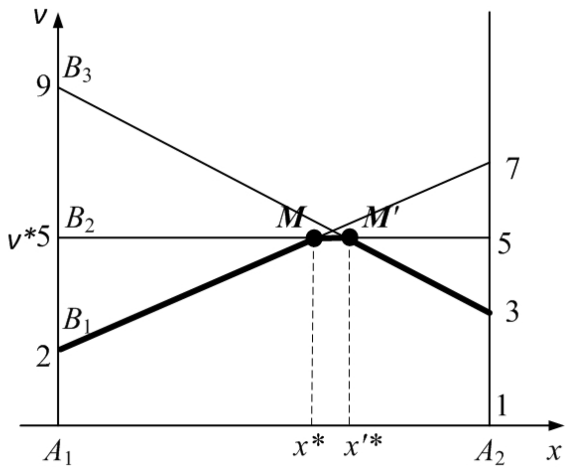


Рис. 2.8. Иллюстрация к примеру 2.5

Получили, что максимум нижней границы выигрыша достигается на участке MM'. Определим координаты границ этого промежутка:

$M: \ 2 + 5x = 5, \quad 5x = 3, \quad x = 3/5, \quad v^* = 5;$

$M': \ 9 - 6x = 5, \quad 6x = 4, \quad x = 2/3, \quad v^* = 5.$

Очевидно, что стратегия B_2 является оптимальной чистой стратегией второго игрока.

Тем самым получаем решение задачи: $x^{*T} = (1 - x^* \quad x^*)$, где $x^* \in \left[\frac{3}{5}, \frac{2}{3}\right]$, $y^{*T} = (0 \quad 1 \quad 0)$, $v^* = 7$.

2.3.2. Игры размерности $m \times 2$

Пусть теперь в матричной игре игрок B имеет две стратегии, игрок A – m стратегий. Платежная матрица такой игры имеет вид

$$A = \begin{array}{cc} B_1 & B_2 & \\ \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{array}\right) & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_m \end{array} \end{array}$$

Анализ такой игры во многом повторяет рассуждения, описанные для игры $2 \times n$.

Изобразим m стратегий игрока A в виде m прямых, уравнения которых имеют вид

$$v_{A_j} = a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 = a_{j1} + (a_{j2} - a_{j1})y, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

где $y = y_2 = 1 - y_1$ (рис. 2.9).

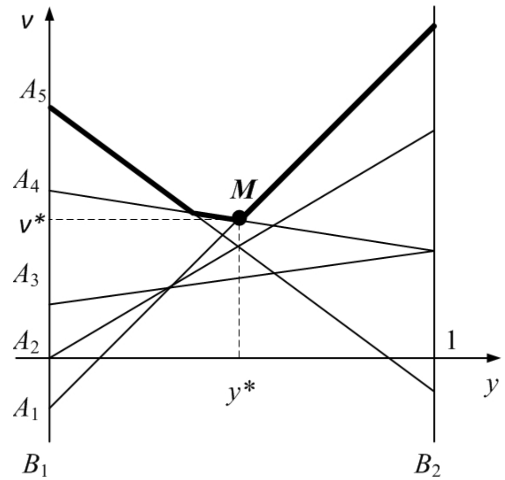


Рис. 2.9. Иллюстрация к графическому методу

Далее определяем верхнюю границу (ломанная $A_5A_4A_1$) и нижнюю точку верхней границы – точку *M*. Такой подход соответствует принципу минимакса: второму игроку из наихудших вариантов (максимальные проигрыши) следует выбрать наилучший (наименьший из наибольших выигрышей первого игрока). Ордината этой точке равна цене игры v^*, абсцисса этой точки – вероятности y_2^* стратегии B_2, при этом вероятность стратегии B_1 равна $y_1^* = 1 - y_2^*$. В целом оптимальная смешанная стратегия второго игрока $y^{*T} = \begin{pmatrix} y_1^* & y_2^* \end{pmatrix}$.

После этого определяем оптимальную смешанную стратегию игрока А. Для этого смотрим, какие стратегии пересекаются в точке *M*, эти стратегии называются активными стратегиями, Остальные стратегии – пассивные (их вероятности равны нулю). На рис. 2.9 активными являются стратегии A_1 и A_4.

Далее определяем оптимальную стратегию первого игрока способом, описанным ранее.

Пример 2.6. Определить графическим методом решение игры, определяемой матрицей $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & 1 \\ 4 & -2 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. Определим функции выигрыша

$$v_{A_1} = 6 + (-4 - 6)y = 6 - 10y, \quad v_{A_2} = 3 + (1 - 3)y = 3 - 2y,$$
$$v_{A_3} = 4 + (-2 - 4)y = 4 - 6y, \quad v_{A_4} = 0 + (5 - 0)y = 5y,$$
$$v_{A_5} = -1 + (6 + 1)y = -1 + 7y$$

и построим их на графике (рис. 2.10).

Минимум верхней границы достигается в точке *M*, в которой пересекаются стратегии A_2 и A_4. Найдем координаты этой точки:

$$v_{A_2} = v_{A_4}, \quad 3 - 2y = 5y, \qquad 7y = 3, \qquad y = \frac{3}{7}, \qquad v = \frac{15}{7}.$$

Тем самым, получаем оптимальную смешанную стратегию второго игрока $y^{*T} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$ и цену игры $v^* = \frac{15}{7}$.

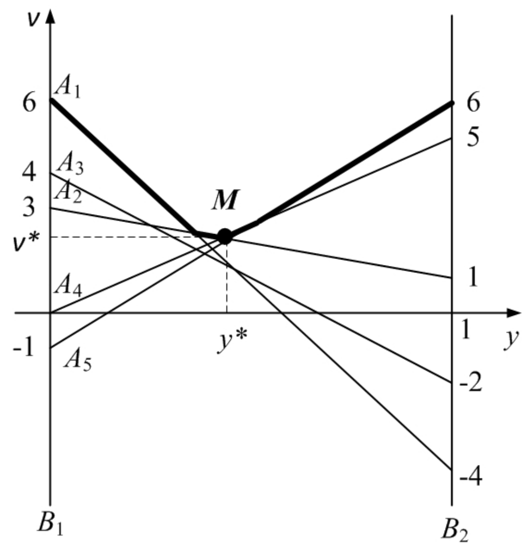


Рис. 1.10. Иллюстрация к примеру 2.6

Пассивными являются стратегии A_1, A_3 и A_5, следовательно, $x_1^* = y_3^* = y_5^* = 0$. Найдем вероятности активных стратегий:

$$\begin{cases} 3 \cdot x_2 + 0 \cdot x_4 = \frac{15}{7}, \\ 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_4 = \frac{15}{7}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2^* = \frac{5}{7}, \\ x_4^* = \frac{2}{7}. \end{cases}$$

Таким образом, получаем оптимальную смешанную стратегию первого игрока $x^{*T} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{7} & 0 & \frac{2}{7} & 0 \end{pmatrix}$.

2.4. Решение игр размерности $m \times n$ методом линейного программирования

Решение любой матричной игры $m \times n$ сводится к задаче линейного программирования.

Рассмотрим игру $m \times n$ с m стратегиями $A_1, A_2, ..., A_m$ игрока А и n стратегиями $B_1, B_2, ..., B_n$ игрока В, которая задается матрицей

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{array} \end{array}$$

Требуется определить оптимальные стратегии игроков $x^{*T} = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $y^{*T} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ и цену игры ν^*.

Сначала найдем оптимальную стратегию игрока А. Эта стратегия должна обеспечивать выигрыш, не меньший цены игры, при любом поведении второго игрока и выигрыш, равный цене игры, при его оптимальной стратегии. Цена игры нам неизвестна, поэтому зададим ее в виде некоторого положительного числа ν. Для того что выполнялось условие ν>0 достаточно, чтобы все элементы платежной матрицы были неотрицательными. Этого всегда можно добиться, если воспользоваться аффинным правилом, определяющим допустимые правила преобразования матрицы игры и ее цену.

Аффинное правило. Оптимальные стратегии у матричных игр, элементы матриц A и C которых связаны равенством

$$c_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu, \; i = 1, ..., m, \; j = 1, ..., n,$$

где $\lambda > 0$, а μ – произвольно, имеют одинаковые равновесные ситуации (либо в чистых, либо в смешанных стратегиях), а их цены удовлетворяют условию

$$\nu_C = \lambda \nu_A + \mu.$$

Согласно приведенному аффинному правилу, если прибавить ко всем элементам платежной матрицы одно и то же число, цена игры увеличится на это число, а решение не изменится.

Таким образом, будем считать, что условие ν>0 выполнено, в противном случае ко всем элементам платежной матрицы прибавить положительное число, а в конце решения выполнить соответствующую корректировку.

Положительность элементов платежной матрицы гарантирует положи-

тельность цены игры, поэтому ко всем элементам матрицы можно прибавить наименьшее из отрицательных значений платежной матрицы, взятое с обратным знаком $(-\min\{a_{ij}\})$. Можно поступить иначе: прибавить нижнюю цену игры, взятую с противоположным знаком $(-\alpha)$, если она отрицательна, поскольку имеет место неравенство $\alpha < \nu < \beta$.

Пусть игрока А применяет свою оптимальную смешанную стратегию $(x_1, x_2, ..., x_m)$, а игрок В – только чистые стратегии. Поскольку оптимальная стратегия игрока А такова, что при любом поведении противника обеспечивает выигрыш, не меньший цены игры, можно записать следующие условия:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \ge \nu, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \ge \nu, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \ge \nu, \\ x_1 + x_2 + ... + x_m = 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Разделим каждое из неравенств (2.1) на положительное число ν и введем новые переменные

$$\frac{x_i}{\nu} = z_i, \; i = 1, ..., m. \quad (2.2)$$

Тогда условия (2.1) запишутся в виде

$$\begin{cases} a_{11}z_1 + a_{21}z_2 + ... + a_{m1}z_m \ge 1, \\ a_{12}z_1 + a_{22}z_2 + ... + a_{m2}z_m \ge 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{1n}z_1 + a_{2n}z_2 + ... + a_{mn}z_m \ge 1, \\ z_1 + z_2 + ... + z_m = \dfrac{1}{\nu}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Игрок А хочет сделать свой выигрыш ν максимальным, а значит, величину $\frac{1}{\nu}$ минимальной. Тем самым, задача сводится к минимизации правой части последнего соотношения в (2.3).

Таким образом, задача определения оптимальной смешанной стратегии игрока А сводится к следующей задаче линейного программирования.

(I) Определить неотрицательные переменные $z_1, z_2, ..., z_m$ *так, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям вида*

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i \geq 1, \quad j = 1,..,n, \tag{2.4}$$

и при этом их линейная функция f достигала минимума

$$f = \sum_{i=1}^{m} z_i \to \min . \tag{2.5}$$

Отсюда видно, что задача определения оптимальной стратегии $x^{*T} = (x_1, x_2, ..., x_m)$ сводится к типовой задаче линейного программирования.

Оптимальная смешанная стратегия $(y_1, y_2, ..., y_n)$ игрока B определяется аналогично. Однако при этом необходимо учесть, что цена игры ν для игрока B есть проигрыш, и, следовательно, он стремится ее минимизировать, а значит, минимизировать величину 1/ν.

Оптимальная стратегия игрока B должна обеспечивать проигрыш, не больший цены игры ν, при любом поведении игрока B и проигрыш, равный цене игры ν, при его оптимальном поведении.

Линейные ограничения в данном случае будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11} w_1 + a_{12} w_2 + ... + a_{1n} w_n \leq 1, \\ a_{21} w_1 + a_{22} w_2 + ... + a_{2n} w_n \leq 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1} w_1 + a_{m2} w_2 + ... + a_{mn} w_n \leq 1, \end{cases} \tag{2.6}$$

где $w_j = \dfrac{y_j}{\nu}$ – неотрицательные переменные, удовлетворяющие условию

$$w_1 + w_2 + ... + w_n = \frac{1}{\nu}, \tag{2.7}$$

которое вытекает из условия нормировки.

Поскольку для игрока B цена игры ν – это проигрыш, то задача сводится к максимизации правой части в (2.7).

Таким образом, задача определения оптимальной смешанной стратегии

игрока B свелась к следующей задаче линейного программирования.

(II) Требуется определить неотрицательные значения переменных $w_1, w_2, ..., w_n$ *так, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям вида*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \leq 1, \quad i = 1,..,m, \tag{2.8}$$

и обращали в максимум линейную функцию

$$g = \sum_{j=1}^{n} w_j \to \max . \tag{2.9}$$

Не сложно увидеть, что задачи (I) и (II) представляют собой пару двойственных задач.

Рассмотрим алгоритм решения задачи на конкретном примере.

Пример 2.7. Определить с помощью методов линейного программирования решение игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (игра «Камень, ножницы, бумага»).

Решение. Определим нижнюю и верхнюю цены игры: $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Седловой точки нет, следовательно, решение ищем в смешанных стратегиях.

Поскольку среди элементов платежной матрицы есть отрицательные, то прибавим ко всем элементам матрицы такое положительное число γ=1, чтобы элементы матрицы стали неотрицательными. Получаем новую платежную матрицу $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Составим пару двойственных задач линейного программирования, определяющих решение исходной задачи.

$$f = z_1 + z_2 + z_3 \to \min$$

$$\begin{cases} z_1 + 2z_3 \ge 1, \\ 2z_1 + z_2 \ge 1, \\ 2z_2 + z_3 \ge 1, \\ z_{1,2,3} \ge 0. \end{cases} \quad \text{(I)}$$

$$g = w_1 + w_2 + w_3 \to \max$$

$$\begin{cases} w_1 + 2w_2 \le 1, \\ w_2 + 2w_3 \le 1, \\ 2w_1 + w_3 \le 1, \\ w_{1,2,3} \ge 0. \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Симплекс-методом определим решение задачи (II). Приведем ограничения задачи к каноническому виду; для этого к левой части каждого ограничения прибавим неотрицательные переменные $w_{4,5,6}$. Получаем новую задачу, эквивалентную задаче (II):

$$g = w_1 + w_2 + w_3 \to \max$$

$$\begin{cases} w_1 + 2w_2 + w_4 = 1, \\ w_2 + 2w_3 + w_5 = 1, \\ 2w_1 + w_3 + w_6 = 1, \\ w_j \ge 0, \ j = 1,\dots,6. \end{cases}$$

Составим симплекс-таблицу (табл. 2.1) и выполним ее преобразования, пока не выполнится критерий оптимальности – неотрицательность элементов нижней строки.

Тем самым, получили оптимальное решение $w_1 = \frac{1}{3}, w_2 = \frac{1}{3}, w_3 = \frac{1}{3}, g = 1.$ По этому решению определяем цену игры и оптимальную смешанную стратегию игрока В:

$$v^* = \frac{1}{g} - \gamma = 0, \ y_1^* = v\,w_1 = \frac{1}{3}, \ y_2^* = v\,w_2 = \frac{1}{3}, \ y_3^* = v\,w_3 = \frac{1}{3}$$

или $y^{*T} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

По последней строке симплекс-таблицы (коэффициенты целевой функции при $w_{4,5,6}$) определяем оптимальное решение первой задачи: $z_1 = \frac{1}{3}, z_2 = \frac{1}{3}, z_3 = \frac{1}{3}$. Отсюда получаем оптимальную смешанную стратегию первого игрока $x^{*T} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Таблица 2.1

Расчетная симплекс-таблица примера 2.7

БП	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	СК	δ_i
w_4	1	2	0	1	0	0	1	1
w_5	0	1	2	0	1	0	1	
w_6	**2**	0	1	0	0	1	1	1/2
g	-1	-1	-1	0	0	0	0	
w_4	0	**2**	-1/2	1	0	-1/2	1/2	1/4
w_5	0	1	2	0	1	0	1	1/2
w_1	1	0	1/2	0	0	1/2	1/2	
g	0	-1	-1/2	0	0	1/2	1/2	
w_2	0	1	-1/4	1/2	0	-1/4	1/4	
w_5	0	0	**9/4**	-1/2	1	1/4	3/4	1/3
w_1	1	0	1/2	0	0	1/2	1/2	1
g	0	0	-3/4	1/2	0	1/4	3/4	
w_2	0	1	0	4/9	1/9	-2/9	1/3	
w_3	0	0	1	-2/9	4/9	1/9	1/3	
w_1	1	0	0	1/9	-2/9	4/9	1/3	
g	0	0	0	1/3	1/3	1/3	1	

С практической точки зрение полученное решение означает, что каждому из игроков с равной вероятностью можно принимать любую из своих стратегий (показывать «Камень», «Ножницы» или «Бумага»), при этом значение выигрыша $v^* = 0$ означает, что в равновесной ситуации соответствует ничья.

2.5. Практическое применение смешанных стратегий

Рассмотрим практическое применение смешанных стратегий на примере конкретных конфликтных ситуаций.

Пример 2.8 (планирование посевов). Фермер, имеющий ограниченный участок земельных угодий, может его засадить тремя различными культурами A_1, A_2, A_3. Урожай этих культур зависит главным образом от погоды («природы»), которая может находиться в трёх различных состояниях: B_1, B_2, B_3. Фермер имеет информацию (статистические данные) о средней урожайности этих культур (количество центнеров культуры, получаемого в одного гектара земли) при трёх различных состояниях погоды, которая отражена в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Расчетная данные для примера 2.8

Виды культур	Возможные состояния природы			Цена (у.е./ц.)
	B_1	B_2	B_3	
A_1	20	15	10	5
A_2	7	15	5	7
A_3	0	5	10	10

Определить оптимальную стратегию фермера при планировании засевов.

Решение. В качестве платежной матрицы выберем матрицу доходов, которые получит фермер одного гектара земли, если он посеет соответствующую культуру при соответствующей погоде:

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 75 & 50 \\ 49 & 105 & 35 \\ 0 & 50 & 100 \end{pmatrix}.$$

Данная задача может быть сведена к антагонистической игре. В данном случае в качестве первого игрока выступает фермер, а в качестве второго игрока – природа. Будем предполагать, что природа, как игрок, может вести себя таким образом, чтобы максимально навредить фермеру, преследуя тем самым противоположные интересы (эти предположения позволяют оценить тот доход, который он может получить в том случае, если погодные условия будут для него максимально неблагоприятные). В этом случае фермер имеет в своём распоряжении три чистые стратегии:

– первая чистая стратегия предполагает, что весь участок земли буде засеян культурой A_1;

– вторая чистая стратегия предполагает, что весь участок земли будет засеян культурой A_2;

– третья чистая стратегия предполагает, что весь участок будет засеян культурой A_3.

Как игрок, природа может также использовать три возможные стратегии:

– засушливую погоду, которая соответствует первой чистой стратегии B_1;

– нормальную погоду, которая соответствует второй чистой стратегии B_2;

– дождливую погоду, которая соответствует третьей чистой стратегии B_3.

Составим пару двойственных задач линейного программирования, определяющих решение исходной задачи.

$$f = z_1 + z_2 + z_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 100z_1 + 49z_2 \geq 1, \\ 75z_1 + 105z_2 + 50z_3 \geq 1, \\ 50z_1 + 35z_2 + 100z_3 \geq 1, \\ z_{1,2,3} \geq 0. \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

$$g = w_1 + w_2 + w_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 100w_1 + 75w_2 + 50w_3 \leq 1, \\ 49w_1 + 105w_2 + 35w_3 \leq 1, \\ 50w_2 + 100w_3 \leq 1, \\ w_{1,2,3} \geq 0. \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Симплекс-методом определим решение задачи (II). Приведем ограничения задачи к каноническому виду; для этого к левой части каждого ограничения прибавим неотрицательные переменные $w_{4,5,6}$. Получаем новую задачу, эквивалентную задаче (II):

$$g = w_1 + w_2 + w_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 100w_1 + 75w_2 + 50w_3 + w_4 = 1, \\ 49w_1 + 105w_2 + 35w_3 + w_5 = 1, \\ 50w_2 + 100w_3 + w_6 = 1, \\ w_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

Составим симплекс-таблицу (табл. 2.3) и выполним ее преобразования, пока не выполнится критерий оптимальности – неотрицательность элементов нижней строки.

Таблица 2.3

Расчетная симплекс-таблица примера 2.8

БП	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	СК	δ_i
w_4	**100**	75	50	1	0	0	1	1/100
w_5	49	105	35	0	1	0	1	1/49
w_6	0	50	100	0	0	1	1	
L'	-1	-1	-1	0	0	0	0	
w_1	**1**	3/4	1/2	1/100	0	0	1/100	
w_5	0	273/4	21/2	-49/100	1	0	51/100	
w_6	0	50	100	0	0	1	1	
L'	0	-1/4	-1/2	1/100	0	0	1/100	
w_1	1	3/4	1/2	1/100	0	0	1/100	1/50
w_5	0	273/4	21/2	-49/100	1	0	51/100	51/1050
w_6	0	50	**100**	0	0	1	1	1/100
L'	0	-1/4	-1/2	1/100	0	0	1/100	
w_1	1	1/2	0	1/100	0	-1/200	1/200	
w_5	0	63	0	-49/100	1	-21/200	81/200	
w_3	0	1/2	1	0	0	1/100	1/100	
L'	0	0	0	1/100	0	1/200	3/200	

Таким образом, получили оптимальное решение: $w_1 = \frac{1}{200}, w_2 = 0, w_3 = \frac{1}{100}, g = \frac{3}{200}$. По этому решению определяем цену игры и оптимальную смешанную стратегию игрока В: $v^* = \frac{1}{g} = \frac{200}{3},\ y^{*T} = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$

По последней строке симплекс-таблицы (коэффициенты целевой функции при $w_{4,5,6}$) определяем оптимальное решение первой задачи: $z_1 = \frac{1}{100}, z_2 = 0, z_3 = \frac{1}{200}$. Отсюда получаем оптимальную смешанную стратегию первого игрока $x^{*T} = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$.

В соответствии с полученными результатами фермеру гарантирован средний доход в размере 66,67 единиц с каждого гектара используемой под культурами земли при самых неблагоприятных условиях. Оптимальная стратегия для него – выращивание двух культур, A_1 и A_3, причём, под первую культуру ему следует отвести 0,67 часть всей земли, а под третью культуру 0,33 часть всей земли. Природа «грозит» фермеру жарой 0,33 часть сезона возделывания культур и 0,67 часть сезона дождями.

Пример 2.9. Директор транспортной компании А, оказывающей транспортные услуги по перевозке пассажиров в областном центре, планирует открыть один или несколько маршрутов: A_1, A_2, A_3 и A_4. Для этого было закуплено 100 микроавтобусов. Он может поставить весь транспорт на одном из маршрутов (наиболее выгодном), либо распределить по нескольким маршрутам. Спрос на транспорт, а соответственно и прибыль компании во многом зависит от того, какие маршруты в ближайшее время откроет главный конкурент – компания В. Ее руководство полностью владеет ситуацией и может открыть несколько из пяти маршрутов B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5. Оценки прибыли компании А (млн. руб.) при любом ответе В представлена платежной матрицей:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 6 & 9 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 8 \\ 7 & 6 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \end{array}$$

Составить оптимальное распределение автобусов по маршрутам игрока А.

Решение. Сократим размерность игры с помощью отношений доминирования:

$$\begin{array}{ccccc|c} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 6 & 9 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 8 \\ 7 & 6 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{matrix} \to \overset{B_3\ B_4\ B_5}{\begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \\ 6 & 7 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}}\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{matrix} \to \overset{B_3\ B_4\ B_5}{\begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}}\begin{matrix} A_1 \\ A_3 \end{matrix} \to \overset{B_3\ B_5}{\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}}\begin{matrix} A_1 \\ A_3 \end{matrix}$$

Окончательно получаем матрицу игры

$$A = \overset{B_3\ B_5}{\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}}\begin{matrix} A_1 \\ A_3 \end{matrix}$$

Найдем оптимальные смешанные стратегии игроков и цену игры (воспользуемся готовыми расчетными формулами из пп. 2.1.1):

$$\left.\begin{aligned} x_1^* &= \frac{a_{35}-a_{33}}{a_{13}+a_{35}-a_{15}-a_{33}} = \frac{5-6}{4+5-9-6} = \frac{1}{6}, \\ x_3^* &= \frac{a_{13}-a_{15}}{a_{13}+a_{35}-a_{15}-a_{33}} = \frac{4-9}{4+5-9-6} = \frac{5}{6}, \end{aligned}\right\} \quad x^{*T} = \left(\frac{1}{6}, 0, \frac{5}{6}, 0\right);$$

$$\left.\begin{aligned} y_3^* &= \frac{a_{35}-a_{15}}{a_{13}+a_{35}-a_{15}-a_{33}} = \frac{5-9}{4+5-9-6} = \frac{2}{3}, \\ y_5^* &= \frac{a_{13}-a_{33}}{a_{13}+a_{35}-a_{15}-a_{33}} = \frac{4-6}{4+5-9-6} = \frac{1}{3}, \end{aligned}\right\} \quad y^{*T} = \left(0, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right);$$

$$v^* = \frac{a_{13}a_{35}-a_{15}a_{33}}{a_{13}+a_{35}-a_{15}-a_{33}} = \frac{20-54}{4+5-9-6} = \frac{17}{3}.$$

Тем самым, оптимальным транспортной компании будет распределение 17 автобусов на первый маршрут, 83 автобусов – на третий маршрут, второй и четвертый маршрут использовать не выгодно. При этом прибыль составит 5,7 млн. р. независимо от ответа конкурента.

Пример 2.10. Швейное предприятие реализуется свою продукцию через магазин. Сбыт зависит от состояния погоды. В условиях теплой погоды предприятие реализует 100 костюмов и 230 платьев, а при прохладной погоде – 240 костюмов и 70 платьев. Затраты на изготовление одного костюма равны 3000, а

платья – 2000 рублям, цена реализации соответственно равна 5500 рублей и 3500 рублей. Определить оптимальную стратегию предприятия.

Решение. Игрок А (швейное предприятие) располагает двумя стратегиями – расчет на теплую и холодную погоду (A_1 и A_2 соответственно); и игрок В («природа») имеет две стратегии – погода будет теплой или холодной (B_1 и B_2 соответственно).

Матрица игры представляет собой матрицу доходов швейного предприятия в зависимости от принятой им стратегии и от погоды. Вычислим соответствующие прибыли:

$$\Pi(A_1, B_1) = 100\cdot(5500-3000) + 230\cdot(3500-2000) = 595000,$$
$$\Pi(A_1, B_2) = 100\cdot(5500-3000) + 70\cdot(3500-2000) - 2000\cdot(230-70) = 35000,$$
$$\Pi(A_2, B_1) = 100\cdot(5500-3000) + 70\cdot(3500-2000) - 3000\cdot(240-100) = -65000,$$
$$\Pi(A_2, B_2) = 240\cdot(5500-3000) + 70\cdot(3500-2000) = 705000.$$

Получаем платежную матрицу $\Pi = \begin{pmatrix} 595000 & 35000 \\ -65000 & 705000 \end{pmatrix}$.

Вычислим оптимальные смешанные стратегии игроков и цену игры:

$$\left.\begin{aligned} x_1^* &= \frac{705000-(-65000)}{595000+705000-35000-(-65000)} = \frac{770}{1330} = \frac{11}{19}, \\ x_2^* &= \frac{595000-35000}{595000+705000-35000-(-65000)} = \frac{560}{1330} = \frac{8}{19}, \end{aligned}\right\} \quad x^{*T} = \left(\frac{11}{19}, \frac{8}{19}\right),$$

$$v^* = \frac{595000\cdot705000-(-65000)\cdot35000}{595000+705000-35000-(-65000)} = \frac{421750000}{1330} = \frac{6025000}{19} \approx 317105.$$

По найденному решению вычислим оптимальное количество костюмов и платьев. Предприятию следует пошить $\frac{11}{19}\cdot100 + \frac{8}{19}\cdot240 = \frac{3020}{19} \approx 159$ костюмов и $\frac{11}{19}\cdot230 + \frac{8}{19}\cdot70 = \frac{3090}{19} \approx 163$ платья; тем самым оно обеспечит себе прибыль в 317105 руб. независимо от поведения природы.

Задания для самостоятельной работы

1. С помощью отношений доминирования сократить размерность игры, заданной матрицей, и найти решения игры:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Найти графически решение матричных игр:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \\ -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & -5 \\ -5 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Определить с помощью методов линейного программирования решение игры со следующими матрицами:

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -5 \\ 5 & 0 & 7 & 5 \\ 5 & -5 & 0 & 15 \end{pmatrix}$.

3. С помощью методов линейного программирования определить решение игры «Три пальца» (пример 1.1 в п. 1.2).

ГЛАВА 3. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИТУАЦИЯХ

3.1. Элементы теории статистических решений

Теория статистических решений (ТСР) [7] отличается от теории игр тем, что рассматривает неопределенность ситуации без конфликтной «окраски» – никто никому сознательно не противодействует. В задачах ТСР неизвестные условия операции зависят не от сознательно действующего «противника», а от объективной незаинтересованной действительности, которую в ТСР принято называть «природой», «поведение» которой неизвестно, но, во всяком случае, не злонамеренно. Например, могут быть заранее неизвестны: погода в некотором районе, покупательский спрос на определенного вида продукцию, объем перевозок, который придется выполнять на железной дороге, положение на рынке FOREX, экономическая и финансовая политика государства, реформы в системе налогообложения, курс валют, инфляция и т.д. Соответствующие ситуации часто называют «играми с природой».

Отсутствие сознательного противодействия со стороны природы, на первый взгляд, упрощает задачу выбора решения: лицу, принимающему решения (ЛПР), в «игре с природой» легче добиться успеха, ведь ему никто не мешает. Но ему труднее обосновать свой выбор. В игре против сознательного противника элемент неопределенности отчасти снимается тем, что противник такой же, как ЛПР, он думает за противника теми же категориями, принимает за него решение на основе одинаковой логики и правил. В «игре с природой» такая концепция не подходит: никто не знает, какое сопротивление будет оказано принятому решению, каковы, в конечном счете, правила этой игры. Недаром говорят, что природа «слепа».

Отметим, что игры с «природой» являются вырожденным случаем антагонистической игры двух лиц, когда одна сторона (ЛПР) имеет возможность строить осмысленные стратегии поведения, а вторая сторона («природа») лишена такой возможности.

Рассмотрим такого рода ситуацию. Пусть у стороны А есть m возможных стратегий A_1, A_2, …, A_m; что касается обстановки, то о ней можно сделать n предположений Π_1, Π_2, …, Π_n – рассмотрим их как стратегии «природы». Выигрыш a_{ij} при каждой паре стратегий A_i, Π_j задан матрицей

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{array} \end{array}$$

Требуется выбрать такую стратегию игрока А (чистую или смешанную), которая является более предпочтительной (выгодной) по сравнению с другими.

Наиболее простым случаем выбора решений в условиях неопределенности является случай, когда какая-то из стратегий игрока А оказывается доминирующей над всеми остальными, – ее-то и рекомендуется выбрать. Но даже если в матрице такой стратегии не оказывается, прежде чем приступать к решению, необходимо заведомо удалить невыгодные или дублирующие стратегии игрока А. Что же касается стратегий «природы», то здесь заведомо невыгодные стратегии удалять нельзя, так как «природа» свои стратегии не выбирает.

В дальнейшем будем считать, что отношения доминирования к стороне А применены.

Игроку А можно выбрать стратегию поведения, исходя их принципа крайнего оптимизма или крайнего пессимизма. В первом случае из его стратегий выбирается та, которая соответствует наибольшему выигрышу ($\max\limits_{i,j} a_{ij}$), во втором – наименьшему выигрышу ($\min\limits_{i,j} a_{ij}$). Очевидно, что такое поведение нерационально.

В ТСР представляется желательным ввести такие показатели, которые не просто давали бы выигрыш в каждой ситуации, а описывали бы степень удачности применений конкретной стратегии в конкретной ситуации с учетом того, насколько вообще эта ситуация благоприятна для нас. С этой целью в ТСР вводится важной понятие «риска».

Риском r_{ij} игрока при использовании стратегии A_i в условиях Π_j называется разность между выигрышем, который он получил бы, если бы знал Π_j, и выигрышем, который он получит в тех же условиях, применяя стратегию A_i. Иначе, *риск* – мера несоответствия между разными возможными результатами принятия определенных стратегий (действий).

Выразим риск r_{ij} через элементы матрицы выигрышей a_{ij}. Очевидно, что если бы игрок заранее знал состояние «природы» Π_j, он выбрал бы ту стратегию, которой соответствует максимальной выигрыш в данном (столбце максимум столбца). Обозначим его $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$. Тогда согласно определению *риск рассчитывается по формуле*

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}.$$

Соответствующая матрица рисков $R = \{r_{ij}\}$ зачастую дает более наглядную картину неопределенной ситуации, чем матрица выигрышей $A = \{a_{ij}\}$.

Чтобы понять значение риска, рассмотрим пример.

Пример 2.1. Планируется операция в заранее неясных условиях, например, рыночной конъюнктуры. Относительно этих условий можно сделать различные предположения: $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$. Ожидаемая прибыль в чистых стратегиях A_i для различных условий Π_j задана матрицей выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 & 11 \\ 5 & 10 & 6 & 5 \\ 6 & 8 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Простроим матрицу рисков $R = \{r_{ij}\} = \{\beta_j - a_{ij}\}$. Вычислим максимальные элементы каждого столбца: $\beta_1 = 6$, $\beta_2 = 10$, $\beta_3 = 8$, $\beta_4 = 11$. Получаем

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

При анализе этой матрицы становятся яснее некоторые черты игры с «природой». Так в матрице выигрышей во второй строке равны первый и четвертый элементы $a_{21} = a_{24} = 5$. Однако эти выигрыши совсем не равноценны друг другу в смысле того, насколько удачно выбрана стратегия. При состоянии природы Π_1 мы могли бы выиграть самое большее 6, т.е. при выборе стратегии A_2 выигрыш составляет 5 по 6-балльной шкале, что очень даже неплохо, до максимума не добираем 1 балл. А вот при состоянии «природы» Π_4 максимально возможный выигрыш составляет 11, а выбирая стратегию A_2 мы получаем 5 по 11-балльной шкале и не добираем 6 баллов, т.е. выбор стратегии A_2 очень плох. Это выражается элементами матрицы рисков $r_{21} = 1$, $r_{24} = 6$. Аналогичный анализ при выборе третьей стратегии показывает, что эта стратегия лучше второй. Так, для равных элементов $a_{32} = a_{33} = 8$ соответствующие им риски $r_{32} = 2$ и $r_{33} = 0$, однако этой же строке соответствует наибольший риск $r_{34} = 7$.

3.2. Критерии принятия решений в играх с природой

При выборе оптимальной стратегии используется ряд критериев.

1. Максиминный критерий Вальда. При максиминном критерии Вальда оптимальной считается та стратегия ЛПР, которая обеспечивает ему максимум минимального выигрыша:

$$W = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij}.$$

Этот критерий отражает принцип гарантированного результата, т.е. ЛПР выбирает такую стратегию, которая максимизировала бы его выигрыш в самой неблагоприятной ситуации. Критерием Вальда, главным образом, пользуются в случаях, когда необходимо обеспечить успех при любых возможных условиях

2. Критерий минимаксного риска Сэвиджа. Данный критерий предполагает, что оптимальной стратегией является та стратегия, при которой величина риска в наихудшем случае минимальна. Этот критерий также называется

критерием минимального риска. Согласно критерию Сэвиджа ЛПР пытается выбрать действие, при котором величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации, т.е.

$$W = \min_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} r_{ij}.$$

Критерий Сэвиджа, так же как и критерий Вальда, является критерием крайнего пессимизма.

3. Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица. Этот критерий рекомендует при выборе решения не руководствоваться ни крайним оптимизмом, ни крайним пессимизмом.

Критерий Гурвица рекомендует стратегию, которая определяется по формуле:

$$W = \max_{1 \le i \le m} \left[\alpha \min_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1-\alpha) \max_{1 \le j \le n} a_{ij} \right],$$

где $\alpha \in [0,1]$ – степень пессимизма.

Если $\alpha = 0$, получим максимаксный критерий «крайнего оптимизма». При $\alpha = 1$ приходим к пессимистическому максиминному критерию Вальда.

Выбор конкретного значения параметра определяется, скорее всего, субъективными факторами: чем опаснее ситуация, тем больше надо «подстраховываться» и тем ближе к единице нужно брать значение α к единице. При отсутствии каких-либо явных предпочтений вполне логично выбрать $\alpha = 0{,}5$.

4. Критерий Лапласа. При неизвестных вероятностях состояний «природы» можно принять, что все они равновероятны, т.е. $p(\Pi_j) = 1/n, j = 1,...,n$, и выбор решения определяется критерием Лапласа, при котором ЛПР выбирает такую стратегию A_i, что

$$W = \max_{1 \le i \le m} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right).$$

Выбор критерия принятия решения является наиболее сложным и ответственным этапом. Если рекомендации, вытекающие из различных критериев, совпадают – тем лучше, можно смело выбирать рекомендуемое ими решение.

Если эти рекомендации противоречат друг другу, анализ матрицы игры «с природой» с точки зрения разных критериев часто дает лучшее представление о ситуации, о достоинствах и недостатках каждого решения, чем непосредственное рассмотрение матрицы, особенно высокой размерности.

Пример 2.2. Условия игры «с природой» задаются в виде матрицы выигрышей (доходов)

$$A=\begin{pmatrix}6&3&9&5\\3&4&5&13\\9&6&4&11\end{pmatrix}.$$

Требуется сделать выбор действия по критериям Вальда, Сэвиджа, Гурвица при $\alpha=0{,}5$, Лапласа.

Решение. *Критерий Вальда:* вычислим

$$W=\max_{1\le i\le m}\min_{1\le j\le n}a_{ij}=\max_{1\le i\le m}\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}=4,$$

следовательно, следует выбрать стратегию A_3.

Критерий Сэвиджа: построим матрицу рисков

$$R=\begin{pmatrix}3&3&0&8\\6&2&4&0\\0&0&5&2\end{pmatrix}$$

и вычислим

$$W=\min_{1\le i\le m}\max_{1\le j\le n}r_{ij}=\min_{1\le i\le m}\begin{pmatrix}8\\6\\5\end{pmatrix}=5,$$

следовательно, следует также выбрать стратегию A_3.

Критерий Гурвица:

$$W=\max_{1\le i\le m}\left[\alpha\min_{1\le j\le n}a_{ij}+(1-\alpha)\max_{1\le j\le n}a_{ij}\right]=\max_{1\le i\le m}\left[0{,}5\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}+(1-0{,}5)\begin{pmatrix}9\\13\\11\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\max_{1\le i\le m}\begin{pmatrix}6\\8\\7{,}5\end{pmatrix}=8,$$

следовательно, следует выбрать стратегию A_2.

Критерий Лапласа: вычислим

$$W=\max_{1\le i\le m}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)=\max_{1\le i\le m}\begin{pmatrix}23/4\\25/4\\30/4\end{pmatrix},$$

следовательно, следует выбрать стратегию A_3.

Поскольку рекомендации трех из четырех рассмотренных критериев сводятся к выбору стратегии A_3, целесообразно остановиться на этом решении.

Пример 2.3. В приморском городе решено открыть яхт-клуб. Годовой абонемент стоит 100 денежных единиц. Цена яхты – 170 денежных единиц. Аренда помещения и хранение яхт обходится в 730 денежных единиц в год. Сколько следует закупить яхт (из расчета: одна яхта на 5 человек), если предполагаемое число членов клуба колеблется от 10 до 25 человек?

Решение. Несомненно, что имеет смысл рассматривать количество приобретаемых яхт в диапазоне от двух до пяти (4 варианта) и количество потенциальных яхтсменов от 10 до 25. Однако объем перебора будет велик, и потому ограничимся вариантами 10, 15, 20, 25 (если полученные выводы для смежных вариантов будут существенно разниться, можно провести дополнительный, уточняющий расчет). Получаем стратегии $A_i, i=1,2,3,4$, которые состоят в том, что в яхт-клуб будет закуплено две, три, четыре или пять яхт, и стратегии $\Pi_j, j=1,2,3,4$, состоящие в том, что количество членов яхт-клуба будет равно 10, 15, 20 ил 25.

Для того чтобы начать поиск решения, построим матрицу выигрышей, элементы которой показывают прибыль при принятии *i*-го решения при *j*–ом количестве членов яхт-клуба. Рассчитаем элементы этой матрицы (при расчете следует учитывать, что максимально возможное количество членов яхт-клуба равно количеству яхт, умноженному на 5):

$$p(A_1,\Pi_j)=10\cdot100-2\cdot170-730=-70,\ \ j=1,2,3,4,$$

$$p(A_2,\Pi_1)=10\cdot100-3\cdot170-730=-240,$$

$$p(A_2,\Pi_j)=15\cdot100-3\cdot170-730=260,\ \ j=2,3,4,$$

$p(A_3,\Pi_1)=10\cdot 100-4\cdot 170-730=-410$,

$p(A_3,\Pi_2)=15\cdot 100-4\cdot 170-730=90$,

$p(A_3,\Pi_j)=20\cdot 100-4\cdot 170-730=590,\ \ j=3,4$,

$p(A_4,\Pi_1)=10\cdot 100-5\cdot 170-730=-580$,

$p(A_4,\Pi_2)=15\cdot 100-5\cdot 170-730=-80$,

$p(A_4,\Pi_3)=20\cdot 100-5\cdot 170-730=420$,

$p(A_4,\Pi_4)=25\cdot 100-5\cdot 170-730=920$.

Окончательно получаем матрицу доходов

$$A=\begin{pmatrix} -70 & -70 & -70 & -70 \\ -240 & 260 & 260 & 260 \\ -410 & 90 & 590 & 590 \\ -580 & -80 & 420 & 920 \end{pmatrix}.$$

Определим наилучшую из стратегий с использованием критериев принятия решений.

Критерий Вальда: вычислим

$$W=\max_{1\le i\le m}\min_{1\le j\le n} a_{ij}=\max_{1\le i\le m}\begin{pmatrix} -70 \\ -240 \\ -410 \\ -580 \end{pmatrix}=-70,$$

следовательно, следует выбрать стратегию A_1, то есть принимая решение по критерию Вальда, яхт-клубу следует закупить 2 яхты и максимум ожидаемого убытка не превысит 70 д.е.

Критерий Сэвиджа: в каждом столбце вычислим максимальный элемент

$$\max_{1\le i\le m}\begin{pmatrix} -70 & -70 & -70 & -70 \\ -240 & 260 & 260 & 260 \\ -410 & 90 & 590 & 590 \\ -580 & -80 & 420 & 920 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -70 & 260 & 590 & 920 \end{pmatrix},$$

построим матрицу рисков

$$R=\begin{pmatrix} 0 & 330 & 660 & 990 \\ 170 & 0 & 330 & 660 \\ 340 & 170 & 0 & 330 \\ 510 & 340 & 170 & 0 \end{pmatrix}$$

и вычислим

$$W=\min_{1\le i\le m}\max_{1\le j\le n} r_{ij}=\min_{1\le i\le m}\begin{pmatrix} 990 \\ 660 \\ 340 \\ 510 \end{pmatrix}=340,$$

следовательно, следует выбрать стратегию A_3; это означает, что покупая 4 яхты для открываемого яхт-клуба, мы уверены, что в худшем случае убытки клуба не превысят 340 д.е.

Критерий Лапласа: вычислим

$$W=\max_{1\le i\le m}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)=\max_{1\le i\le m}\begin{pmatrix} -70 \\ 135 \\ 215 \\ 170 \end{pmatrix}=215,$$

следовательно, следует выбрать стратегию A_3, то есть в условиях равновероятности возникновения той или иной величины спроса на членство в яхт-клубе следует закупить 4 яхты и при этом можно рассчитывать на прибыль в размере 215 д.е.

Критерий Гурвица:

При $\alpha=0{,}2$ получаем

$$W=\max_{1\le i\le m}\left[0{,}2\cdot\begin{pmatrix} -70 \\ -240 \\ -410 \\ -580 \end{pmatrix}+0{,}8\cdot\begin{pmatrix} -70 \\ 260 \\ 590 \\ 920 \end{pmatrix}\right]=\max_{1\le i\le m}\begin{pmatrix} -70 \\ 160 \\ 390 \\ 620 \end{pmatrix}=620,$$

что соответствует стратегии A_4.

При $\alpha=0{,}5$ получаем

$$W = \max_{1\le i\le m}\left[0{,}5\cdot\begin{pmatrix}-70\\-240\\-410\\-580\end{pmatrix}+0{,}5\cdot\begin{pmatrix}-70\\260\\590\\920\end{pmatrix}\right]=\max_{1\le i\le m}\begin{pmatrix}-70\\10\\90\\170\end{pmatrix}=170,$$

что соответствует стратегии A_4.

При $\alpha = 0{,}8$ получаем

$$W = \max_{1\le i\le m}\left[0{,}8\cdot\begin{pmatrix}-70\\-240\\-410\\-580\end{pmatrix}+0{,}2\cdot\begin{pmatrix}-70\\260\\590\\920\end{pmatrix}\right]=\max_{1\le i\le m}\begin{pmatrix}-70\\-140\\-210\\-280\end{pmatrix}=-70,$$

что соответствует стратегии A_1.

Таким образом, согласно критерия Гурвица при $\alpha = 0{,}2$ и при $\alpha = 0{,}5$ следует закупить 5 яхт и ожидать прибыль порядка, не меньшую 620 д.е. и 170 д.е. соответственно (надеемся на широкую популярность нашего клуба и определенную финансовую состоятельность любителей), а при $\alpha = 0{,}8$ не следует закупать более 2 яхт (мы более осторожны в своих прогнозах и, скорее всего, предпочтем отказаться от создания клуба).

Окончательно получаем, что рассмотренные критерии приводят к различным решениям и дают тем самым информацию к размышлению (принятое решение здесь будет существенно зависеть от психологии и интуиции субъекта решения).

Задания для самостоятельной работы

1. В сельскохозяйственном районе с посевной площадью 1430 га решено построить элеватор. Имеются типовые проекты элеватора мощностью на 20, 30, 40, 50 и 60 тыс. ц зерна. Привязка проекта обойдется в 37 тысяч денежных единиц. Стоимость материалов и оборудования элеватора мощностью 20 тыс. ц равна 60 тыс. денежных единиц и возрастает на 10% с ростом мощности элеватора на 10 тыс.ц. Затраты на эксплуатацию элеватора мощностью 20 тыс.ц. составляют 10 тыс. д.е. и уменьшаются на 10% при увеличении мощности на 10

тыс. ц. За хранение зерна на счет элеватора вносится плата в размере 10 д. е. за 1 ц. Урожай в данном районе колеблется от 14 до 20 ц с 1 га. Какой элеватор выгоднее построить?

2. Организуются пригородные автобусные рейсы. Число пассажиров колеблется от 300 до 450 чел., из которых 10% имеют право бесплатного проезда. Цена билета 6 руб. Вместимость автобуса – 30 чел. Эксплуатационные затраты на один рейс – 50 руб. Оплата шофера за одну поездку - 60 руб. Сколько следует организовать рейсов?

3. Ежедневный спрос на булочки в продовольственном магазине колеблется от 1000 до 1500. Булочки покупаются лотками по 100 штук по цене 16 руб. и продаются по цене 22 руб. за штуку. Непроданные булочки распродаются по цене 8 руб. на следующее утро. Какое количество булочек следует закупать магазину?

4. Прядильная фабрика ежемесячно получает от 35 до 50 т хлопка повышенной влажности. Один сушильный агрегат может высушить 5 т. Затраты на техническое обслуживание агрегата 1000 руб. (независимо от его использования или простоя). Потери от 1 т невысушенного хлопка - 7000 руб. Сколько агрегатов разумно иметь на фабрике?

ГЛАВА 4. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИХ КОНФЛИКТАХ

4.1. Биматричные игровые задачи

Теория антагонистических игр применима лишь в тех случаях, когда можно определить общий критерий эффективности для двух конкурирующих сторон, одна из которых заинтересована в увеличении, а другая – в уменьшении значения этого критерия. Однако значительно чаще встречаются ситуации, в которых интересы игроков хотя и не совпадают, но уже не обязательно являются противоположными. Например, при встрече боевых единиц двух воюющих сторон их обоюдное стремление уничтожить друг друга не выражает антагонистичности конфликта. В антагонистическом конфликте цели сторон оказываются строго противоположными: стремлению одной стороны уничтожить другую противоположным будет стремление избежать уничтожения. Если для оценки действий каждой стороны необходимо определить отдельный критерий эффективности, игра имеет ненулевую сумму. В случае, когда участников конфликта – два, и критерии для конкурирующих сторон различны, ситуация описывается в классе биматричных игровых задач [7].

Биматричной называется конечная игра двух лиц с ненулевой суммой.

Такая игра описывается матрицами выигрышей конфликтующих сторон. Пусть у игрока А имеется m стратегий, а у игрока В – n стратегий. Выигрыши игроков задаются матрицами:

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \ldots & B_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_m \end{array}; \qquad B=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \ldots & B_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_m \end{array}.$$

Иногда биматричные игры записывают в виде одной матрицы следующего вида

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \ldots & B_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} (a_{11},b_{11}) & (a_{12},b_{12}) & \ldots & (a_{1n},b_{1n}) \\ (a_{21},b_{21}) & (a_{22},b_{2}) & \ldots & (a_{2n},b_{2n}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_{m1},b_{m1}) & (a_{m2},b_{m2}) & \ldots & (a_{mn},b_{mn}) \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_m \end{array},$$

однако для наглядности удобнее рассматривать матрицы отдельно.

Здесь A – это платежная матрица игрока А, а B – платежная матрица игрока В. Размерности этих матриц обязательно совпадают. Пусть, к примеру, игрок А применяет свою стратегию A_2, а игрок В – стратегию B_1. Тогда выигрыши игроков в данной ситуации будут находиться в соответствующих платежных матрицах на пересечении второй строки и первого столбца: выигрыш игрока А составит a_{21}, а выигрыш игрока В – b_{21}. Отрицательные элементы платежных матриц означают величину проигрыша игрока в соответствующей ситуации.

Пара стратегий (A_i, B_j) является *ситуацией равновесия в чистых стратегиях в биматричной игре*, если выполняются неравенства:

$$a_{ij} \ge a_{kj}, \ \forall k=\overline{1,m},$$
$$b_{ij} \ge b_{il}, \ \forall l=\overline{1,n}.$$

Это означает, что элемент a_{ij} является наибольшим в j-м столбце, а элемент b_{ij} – наибольшим в i-й строке.

Все ситуации равновесия в чистых стратегиях, если они имеются, можно найти способом, аналогичным способу определения седловой точки матрицы в играх с нулевой суммой. В каждом столбце матрицы A следует отметить (например, звездочкой) максимальные элементы, затем также отметить максимальные элементы в каждой строке платежной матрицы B. Пары стратегий (A_i, B_j), для которых оба элемента a_{ij} и b_{ij} отмечены, и будут соответствовать решению игры в чистых стратегиях. Следует отметить, что в решение задачи следует записывать две цены игры, v_A^* и v_B^*, выигрыши каждого из игроков. В случае решения в чистых стратегиях эти значения будут равны $v_A^* = a_{ij}$ и $v_B^* = b_{ij}$.

Рассмотрим примеры построения биматричных игр.

Пример 4.1 («Студент-преподаватель»). Рассмотрим следующую ситуацию. Студент (Игрок А) готовится к зачету, который будет принимать Преподаватель (игрок В). Можно считать, что у студента две стратегии – подготовиться к сдаче зачета (+) и не подготовиться (–). У преподавателя тоже две стратегии – поставить зачет [+] или не поставить [–].

Составим модель биматричной игры. В основу значений матриц выигрыша игроков положим следующие соображения (табл. 4.1 и табл. 4.2).

Таблица 4.1

Выигрыш студента

	[+]	[–]
(+)	оценка заслужена	очень обидно
(–)	удалось обмануть	оценка заслужена

Таблица 4.2

Выигрыш преподавателя

	[+]	[–]
(+)	все нормально	был неправ
(–)	дал себя обмануть	опять придет

Количественно это можно выразить, например, следующим образом:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}[+] & [-]\end{array} \\ & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ (+) \\ (-) \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc}[+] & [-]\end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ (+) \\ (-) \end{array}$$

Попробуем найти решение игры в чистых стратегиях. Отметим в каждом столбце первой матрицы максимальные элементы в каждом столбце, во второй матрице – максимальные элементы в каждой строке:

$$A = \begin{pmatrix} 2^* & -1 \\ 1 & 0^* \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2^* & -3 \\ -2 & -1^* \end{pmatrix}.$$

Как видим, в игре имеет месте быть две седловые точки. Они соответствуют следующим ситуациям: студент готовится к зачету и преподаватель ставит зачет, студент не готовится к зачету и преподаватель не ставит зачет. Если записывать ответ на математическом языке, то это выглядит следующим образом: первый ответ – $(A_1, B_1) = ((+),[+]), v_A = 2, v_B = 2$, второй ответ – $(A_2, B_2) = ((-),[-]), v_A = 0, v_B = -1$.

Пример 4.2 («Семейный спор»). Муж (игрок А)и жена (игрок В) договариваются о развлечениях. У них есть два варианта – пойти на футбол (стратегии A_1 и B_1) и пойти в театр (стратегии A_2 и B_2). Очевидно, что если пойдут вместе на одно мероприятие, то один из них получит большее удовольствие, и не получит ни один, если муж один пойдет в театр, а жена – одна на футбол. В виде пары платежных матриц данную игру можно представить следующим образом:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}$$

Нетрудно убедиться, что решение игры будет в чистых стратегиях: $(A_1, B_2), v_A = v_B = 2$, то есть мужу и жене следует развлекаться отдельно друг от друга.

Пример 4.3 («Дилемма заключенного»). Два заключенных находятся в разных камерах и подозреваются в совершении одного и того же преступления. Каждый из них располагает двумя стратегиями поведения: кооперативными (молчать и не давать показания) A_1 и B_1, и некооперативными (давать показания на другого) A_2 и B_2. Данную игру можно представить в виде следующих платежных матриц:

$$\begin{array}{c} \\ A= \end{array}\begin{array}{cc} B_1 & B_2 \\ \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ B= \end{array}\begin{array}{cc} B_1 & B_2 \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -10 & -6 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}$$

В этом случае решение также будет в чистых стратегиях. Действительно, отметим максимальные элементы в каждом столбце первой матрицы и в каждой строке второй матрицы

$$\begin{array}{c} \\ A= \end{array}\begin{array}{cc} B_1 & B_2 \\ \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 0^* & -6^* \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ B= \end{array}\begin{array}{cc} B_1 & B_2 \\ \begin{pmatrix} -1 & 0^* \\ -10 & -6^* \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}$$

и получим решение $(A_2, B_2), v_A = v_B = -6$. Это означает, что каждому из заключенных лучше давать показания.

Пример 4.4 («Конкурирующие фирмы»). Здесь также у игроков (конкурирующих фирм) по две стратегии: стратегии сохранения цен на продаваемый ими товар A_1, B_1 и стратегии снижения цен A_2, B_2. Выигрышем в данном случае будет увеличение продаж и, следовательно, дохода. Платежные матрицы, например, можно представить следующим образом:

$$\begin{array}{c} \\ A= \end{array}\begin{array}{cc} B_1 & B_2 \\ \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 8 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ B= \end{array}\begin{array}{cc} B_1 & B_2 \\ \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}$$

Также возможен вариант различных доходов:

$$\begin{array}{c} \\ A= \end{array}\begin{array}{cc} B_1 & B_2 \\ \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 9 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ B= \end{array}\begin{array}{cc} B_1 & B_2 \\ \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}$$

Предлагаем читателю самостоятельно определить наличие или отсутствие в задаче седловой точки.

Пример 4.5 («Рефлексивная игра»). Пусть имеется фирма, состоящая из двух отделов – производственного (П), в задачу которого входит производство некоторого товара, и транспортного (Т), который должен доставить произведенный товар потребителю. Известно, что доход отдела П от выпуска продукции в объеме одной единицы равен a денежных единиц, затраты отдела Т на

отправку потребителю одной единицы продукции равен c денежных единиц, а затраты на хранение на складе продукции в объеме одной единицы составляют b денежных единиц и делятся поровну между отделами П и Т.

Пусть также известно, что в интересующий период времени (например за рабочий день) отдел П может произвести продукции в объеме 5 или 10 ед., а отдел Т для ее перевозки выделить малую автоколонну (на 4 ед.), большую автоколонну (7 ед.), две малые автоколонны (8 ед.) или одну большую и одну малую автоколонны (11 ед.).

Моделью описанной ситуации может быть биматричная игра.

$$\begin{array}{c} \\ \Pi= \end{array}\begin{array}{cccc} T(4) & T(7) & T(8) & T(11) \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 4a-b/2 & 5a & 5a & 5a \\ 4a-3b & 7a-3b/2 & 8a-b & 10a \end{pmatrix}} \end{array}\begin{array}{c} \\ \Pi(5) \\ \Pi(10) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ T= \end{array}\begin{array}{cccc} T(4) & T(7) & T(8) & T(11) \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} -4c-b/2 & -7c & -8c & -11c \\ -4c-3b & -7c-3b/2 & -8c-b & -11c \end{pmatrix}} \end{array}\begin{array}{c} \\ \Pi(5) \\ \Pi(10) \end{array}$$

Пример 4.6 («Microscape против Netsoft»). Каждая из фирм теряет 2 млн. долларов за период, если обе продают интернет-браузеры. Когда у фирмы нет соперника, то она, став монополистом, будет зарабатывать 10 млн. долларов за период. Фирмы могут уйти с рынка в 2015 г. (с нулевым доходом) и в 2016 г., или остаться до 2017 г.

Построим платежные матрицы для каждого из игроков, исходя их условий задачи (табл. 4.3). В данной таблице доходы (в млн. долларов) фирм Microscape и Netsoft обозначены в скобках через запятую.

Таблица 4.3

Доходы фирм

		Netsoft		
		2015	2016	2017
Microscape	2015	(0, 0)	(0, 10)	(0, 20)
	2016	(10, 0)	(–2, –2)	(–2, 8)
	2017	(20, 0)	(8, –2)	(–4, –4)

Определим наличие или отсутствие седловой точки в данной задаче:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0^* \\ 10 & -2 & -2 \\ 20^* & 8^* & -4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 10 & 20^* \\ 0 & -2 & 8^* \\ 0^* & -2 & -4\end{pmatrix}.$$

Тем самым, получили две ситуации равновесия – (A_1, B_3) и (A_3, B_1), то есть одна из фирм уходит с рынка в 2015 году с нулевым доходом, а вторая остается до 2017 года и получает максимальный доход в 20 млн. долларов.

Перейдем к построению моделей биматричных игр [7].

Будем считать полный набор вероятностей применения игроком А своих чистых стратегий $x^T=(x_1, x_2, ..., x_m)$ смешанной стратегией игрока А; соответственно $y^T=(y_1, y_2, ..., y_n)$ – смешанная стратегия игрока В. Смешанные стратегии должны удовлетворять очевидным условиям:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \qquad x_i \ge 0, \qquad i=1,...,m;\\ &\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \qquad y_j \ge 0, \qquad j=1,...,n.\end{aligned} \tag{4.1}$$

С помощью смешанных стратегий рассчитываются средние выигрыши v_A, v_B игроков А и В соответственно по формулам:

$$v_A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = x^T A\, y;$$

$$v_B=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j = x^T B\, y.$$

Далее возникает естественный вопрос: всегда ли в биматричной игре существует равновесная ситуация (т.е. такая ситуация, отклонение от которой любого из игроков может лишь привести к уменьшению его выигрыша при условии, что второй игрок сохраняет свой выбор)? Ответ на этот вопрос дает теорема Нэша.

Теорема Нэша (основная теорема биматричных игр). Каждая биматричная игра имеет хотя бы одну ситуацию равновесия, возможно, в смешанных стратегиях.

Ситуация равновесия для биматричной игры представляет собой такую пару смешанных стратегий (x^*, y^*), которые удовлетворяют неравенствам:

$$A\,y^* \le \left(x^{*T} A\, y^*\right)(1)_{m\times 1} = v_A (1)_{m\times 1}, \tag{4.2}$$

$$B^T x^* \le \left(x^{*T} B\, y^*\right)(1)_{n\times 1} = v_B (1)_{n\times 1}. \tag{4.3}$$

Для определения равновесной ситуации необходимо решить систему неравенств (4.2), (4.3) относительно $x^{*T}=(x_1, x_2, ..., x_m)$, $y^{*T}=(y_1, y_2, ..., y_n)$ при условиях нормировки (4.1).

4.2. Графический метод решения биматричных задач 2×2

Предположим, что заведомо невыгодные стратегии из платежных матриц удалены, следовательно, можно приступить к определению ситуации равновесия.

Пусть каждый игрок имеет по две стратегии. В этом случае матрицы игры имеют вид:

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2\end{array} \qquad B=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2\end{array}$$

Смешанные стратегии игроков в игре 2×2 имеют вид:

$x^T=(x \quad 1-x)$, $y^T=(y \quad 1-y)$, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$.

Средние выигрыши игроков рассчитываются следующим образом:

$$\begin{aligned} H_A &= x^T A\, y = (x \quad 1-x)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y\end{pmatrix} = \\ &= \left((a_{11}-a_{21})x + a_{21} \quad (a_{12}-a_{22})x + a_{22}\right)\begin{pmatrix} y \\ 1-y\end{pmatrix} = \\ &= (a_{11}-a_{21}-a_{12}+a_{22})xy + (a_{12}-a_{22})x + (a_{21}-a_{22})y + a_{22}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$H_B = x^T B y = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (b_{11} - b_{21})x + b_{21} & (b_{12} - b_{22})x + b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = \tag{4.5}$$

$$= (b_{11} - b_{21} - b_{12} + b_{22})xy + (b_{12} - b_{22})x + (b_{21} - b_{22})y + b_{22}.$$

Запишем условия равновесия (4.2), (4.3) для данной задачи:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} \le \nu_A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} \le \nu_B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Перепишем условия в развернутом виде:

$$\begin{cases} (a_{11} - a_{12})y + a_{12} \le \nu_A, \\ (a_{21} - a_{22})y + a_{22} \le \nu_A. \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\begin{cases} (b_{11} - b_{21})x + b_{21} \le \nu_B, \\ (b_{12} - b_{22})x + b_{22} \le \nu_B. \end{cases} \tag{4.7}$$

Подставляя цену игры ν_A из (4.4) в условия (4.6), получим:

$$\begin{cases} (a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22})(1-x)y + (a_{12} - a_{22})(1-x) \le 0, \\ (a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22})xy + (a_{12} - a_{22})x \ge 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Введя замену переменных

$$\begin{cases} a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22} = a_1, \\ a_{22} - a_{12} = a_2, \end{cases}$$

перепишем (4.8) в виде

$$\begin{cases} a_1(1-x)y - a_2(1-x) \le 0, & (4.9) \\ a_1 xy - a_2 x \ge 0. & (4.10) \end{cases}$$

Таким образом, множество всех приемлемых стратегий для игрока А удовлетворяет условиям (4.9), (4.10).Чтобы найти их, рассмотрим три случая:

1) если $x = 0$, то условие (4.10) справедливо при всех *y*, а условие (4.9) перепишется в виде:

$$a_1 y - a_2 \le 0; \tag{4.11}$$

2) если $x = 1$, то условие (4.9) справедливо при всех *y*, а условие (4.10) перепишется в виде:

$$a_1 y - a_2 \ge 0; \tag{4.12}$$

3) если $0 < x < 1$, разделим левую и правую часть неравенства (4.9) на $1 - x$, левую и правую часть неравенства (4.10) на x, в результате получим:

$$\begin{cases} a_1 y - a_2 \le 0, \\ a_1 y - a_2 \ge 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_1 y - a_2 = 0. \tag{4.13}$$

Тем самым, множество решений системы, содержащей условия (4.9), (4.10), – обозначим его *K* – будет определяться следующим образом:

1) $(0, y)$, если $a_1 y - a_2 \le 0$, $0 \le y \le 1$;

2) (x, y), если $a_1 y - a_2 = 0$, $0 \le y \le 1$, $0 < x < 1$;

3) $(1, y)$, если $a_1 y - a_2 \ge 0$, $0 \le y \le 1$.

Если $a_1 = a_2 = 0$, то решением будет весь единичный квадрат $\{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, так как условия (4.11)-(4.13) удовлетворяются при всех значениях *x* и *y*.

Если $a_1 = 0, a_2 \ne 0$, то выполняется либо условие (4.11), либо условие (4.12), поэтому решением будет либо $x = 0$, либо $x = 1$ соответственно.

Если $a_1 > 0$, то получаем следующие решения:

а) из соотношения (4.11) получаем $x = 0$, $y \le \dfrac{a_2}{a_1} = \alpha$;

б) из соотношения (4.12) получаем $x = 1$, $y \ge \dfrac{a_2}{a_1} = \alpha$;

в) из соотношения (4.13) получаем $0 < x < 1$, $y = \dfrac{a_2}{a_1} = \alpha$.

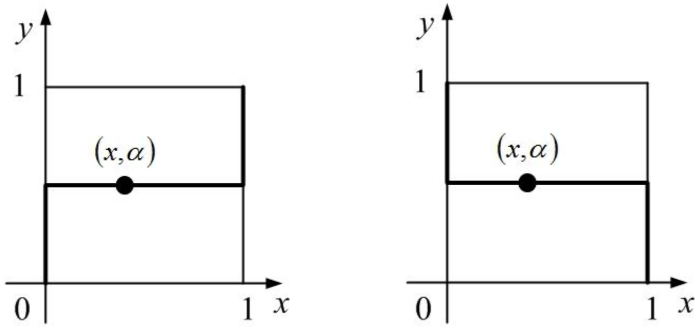
Если $a_1 < 0$, то получаем следующие решения:

а) из соотношения (4.11) получаем $x = 0$, $y \ge \dfrac{a_2}{a_1} = \alpha$;

б) из соотношения (4.12) получаем $x = 1$, $y \le \dfrac{a_2}{a_1} = \alpha$;

в) из соотношения (4.13) получаем $0 < x < 1$, $y = \dfrac{a_2}{a_1} = \alpha$.

Графическая интерпретация множества решений *K* игрока А представлена на рис. 4.1.



а) б)

Рис. 4.1. Графическая интерпретация множества решений игрока А (а) – при $a_1 > 0$, б) – при $a_1 < 0$)

Для игрока В исследования будут аналогичны. Подставим выражение (4.5) в условие (4.7) для v_B и введем обозначения:

$$\begin{cases} b_{11} - b_{21} - b_{12} + b_{22} = b_1, \\ b_{22} - b_{21} = b_2. \end{cases}$$

Тогда множество *L* приемлемых для игрока В решений определяется следующим образом:

1) $(x,0)$, если $b_1 x - b_2 \le 0$, $0 \le x \le 1$;

2) (x,y), если $b_1 x - b_2 = 0$, $0 \le x \le 1$, $0 < y < 1$;

3) $(x,1)$, если $b_1 x - b_2 \ge 0$, $0 \le x \le 1$.

Если $b_1 = b_2 = 0$, то решением будет весь единичный квадрат $\{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

Если $b_1 = 0, b_2 \ne 0$, то решением будет либо $y = 0$, либо $y = 1$.

Если $b_1 > 0$, то получаем следующие решения:

а) $y = 0$, $x \le \dfrac{b_2}{b_1} = \beta$;

б) $y = 1$, $x \ge \dfrac{b_2}{b_1} = \beta$;

в) $0 < y < 1$, $x = \dfrac{b_2}{b_1} = \beta$.

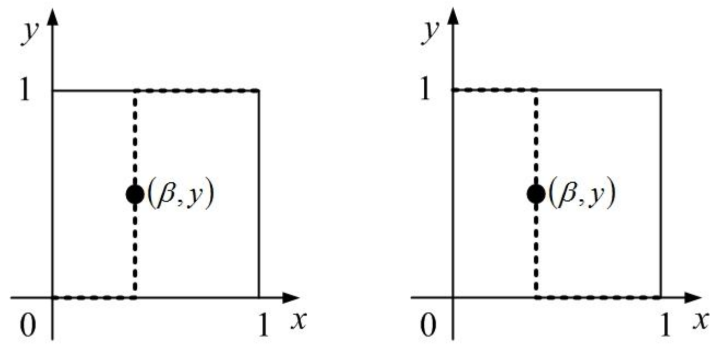
Если $b_1 < 0$, то получаем следующие решения:

а) $y = 0$, $x \ge \dfrac{b_2}{b_1} = \beta$;

б) $y = 1$, $x \le \dfrac{b_2}{b_1} = \beta$;

в) $0 < y < 1$, $x = \dfrac{b_2}{b_1} = \beta$.

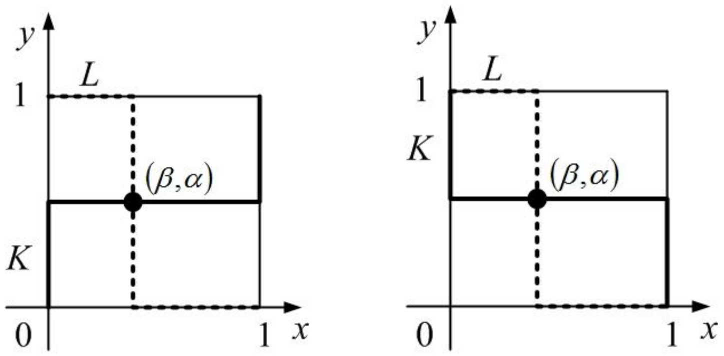
Графическая интерпретация множества решений *L* игрока В представлена на рис. 4.2.



а) б)

Рис. 4.2. Графическая интерпретация множества решений игрока В (а) – при $b_1 > 0$, б) – при $b_1 < 0$)

Решением игры является пересечение множеств *K* и *L*, т.е. те значения *x* и *y*, которые являются общими для этих множеств. Графическая интерпретация решения биматричной игры представлена на рис. 4.3.



а) б)

Рис. 4.3. Графическая интерпретация решения биматричной игры (а) – зигзаги противоположно направлены, б) – зигзаги одинаково направлены)

При этом зигзаги K и L могут быть как противоположной (рис. 4.3, а), так и одинаковой направленности (рис. 4.3, б). В первом случае зигзаги имеют три точки пересечения, а во втором – одну. Средние выигрыши при этом определяются по формулам (4.4), (4.5), если в них подставить полученные значения x и y. Очевидно, что α входит в смешанную стратегию игрока В, хотя зависит только от выигрышей игрока А, а β входит в смешанную стратегию игрока А, хотя зависит только от выигрышей игрока В.

Пример 4.7. Министерство желает построить одно из двух объектов на территории города. Городские власти могут принять предложение министерства или отказать. Министерство – игрок А – имеет две стратегии: строить объект 1, строить объект 2. Город – игрок В – тоже имеет две стратегии: принять предложение министерства или отказать. Свои действия они применяют независимо друг от друга, и результаты определяются прибылью (выигрышем) согласно матрицам:

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Нетрудно убедиться, что в игре отсутствует решение в чистых стратегиях. Определим множество решений K игрока А. Для этого рассчитаем

коэффициенты:

$$a_1 = a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22} = -8 - 2 - 3 - 2 = -15,$$
$$a_2 = a_{22} - a_{12} = -2 - 3 = -5,$$
$$\alpha = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}.$$

Так как $a_1 < 0$, то множество решений K имеет вид:

$$K = \begin{cases} (1, y) & при \quad 0 \le y \le \frac{1}{3}, \\ \left(x, \frac{1}{3}\right) & при \quad 0 < x < 1, \\ (0, y) & при \quad \frac{1}{3} \le y \le 1. \end{cases}$$

Определим множество решений L игрока В. Для этого рассчитаем коэффициенты:

$$b_1 = b_{11} - b_{21} - b_{12} + b_{22} = 6 + 2 + 3 + 2 = 13,$$
$$b_2 = b_{22} - b_{21} = 2 + 2 = 4,$$
$$\beta = \frac{b_2}{b_1} = \frac{4}{13}.$$

Так как $b_1 > 0$, то множество решений L имеет вид:

$$L = \begin{cases} (x, 0) & при \quad 0 \le x \le \frac{4}{13}, \\ \left(\frac{4}{13}, y\right) & при \quad 0 < y < 1, \\ (x, 1) & при \quad \frac{4}{13} \le x \le 1. \end{cases}$$

Изобразим эти множества графически (рис. 4.4). Точка пересечения множеств K и L есть точка $C\left(\frac{4}{13}, \frac{1}{3}\right)$. Тогда оптимальными стратегиями игроков будут смешанные стратегии

$$x^{*T} = \left(\frac{4}{13}, \frac{9}{13}\right), \; y^{*T} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

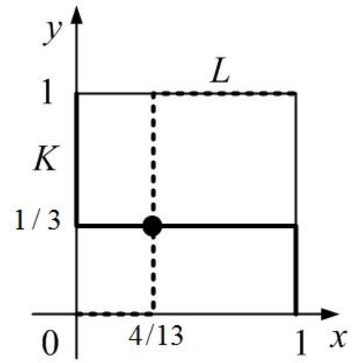


Рис. 4.4. Графическое решение игры из примера 4.7

При этом выигрыши сторон будут равны:

$$v_A = x^T A y = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{9}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{13} & -\frac{6}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = -\frac{2}{3},$$

$$v_B = x^T B y = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{9}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{13} & \frac{6}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{6}{13}.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Две конкурирующих сети ресторанов хотят определить свой рекламный бюджет на следующий год. Их суммарный объем продаж равен 240 млн. рублей. Каждая из них может выделить на рекламу 6, 7, 8, 9 или 10 млн. рублей. Если одна из сетей тратит на рекламу больше, то она продаст на 190 млн. рублей. Если обе сети тратят на рекламу поровну, то и продадут они поровну. Продали на 1 рубль дают доход 0,1 рубля. Каждая сеть старается максимизировать свой доход (доход с продаж минус затраты на рекламу). Построить платежные матрицы по условиям задачи. Имеется ли ситуация равновесия в чистых стратегиях, приемлемая для обеих ресторанных сетей?

2. Две компании Pepsi и Coke имеют по автомату в некоторой столовой. Каждой из фирм нужно решить, каким напитком наполнить свой автомат: диетическим, классическим или обоими. В зависимости от выбранных стратегий, доходы фирм следующие (табл. 4.4). Определить все ситуации равновесия в чистых стратегиях.

Таблица 4.4

Доходы фирм

		Coke		
		Диет.	Оба	Класс.
Pepsi	Диет.	25, 25	50, 30	50, 20
	Оба	30, 50	15, 15	30, 20
	Класс.	20, 50	20, 30	10, 10

3. Две фирмы арендуют смежные участки земли над резервуаром нефти объемом 100 млн. тонн. Стоимость одной тонны – 300 долларов. Каждая из фирм должна решить бурить ли ей скважину, и если бурить, то какого размера? Пробурить и обслуживать узкую скважину стоит 100 млн. долларов, широкую – 300 млн. долларов. Но при этом через широкую скважину будет выкачиваться нефти в три раза больше. Построить платежные матрицы по условиям задачи. Имеется ли ситуация равновесия в чистых стратегиях?

4. Найти графически решения задач из примеров 4.1-4.4.

УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Выполнение контрольной работы является обязательным элементом при изучении дисциплины студентом. Варианты контрольного задания студент выбирает в соответствии с порядковым номером в списке группы.

При выполнении и оформлении контрольной работы необходимо руководствоваться следующим:

1) перед решением каждой задачи записать полностью условие задачи;

2) решения задач излагать подробно;

3) решения располагать в порядке номеров, указанных в варианте;

4) оформлять контрольную работу можно как с помощью текстовых редакторов на компьютере, так в рукописном варианте (при этом писать следует разборчиво).

Крайний срок сдачи студентом контрольной работы – дата зачета. В случае если студент не сдает работу в указанный срок, зачет не выставляется и назначается дата перезачета.

Задание 1. Найти решение игры, заданной матрицей A:

а) аналитическим методом;

б) используя понятие равновесия по Нэшу;

в) графическим методом.

1	$A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 6 & -2\end{pmatrix}$	2	$A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 1\end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}$	4	$A=\begin{pmatrix}-8 & 3\\ 4 & -5\end{pmatrix}$
5	$A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 7 & -2\end{pmatrix}$	6	$A=\begin{pmatrix}7 & 9\\ 8 & 2\end{pmatrix}$
7	$A=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 6 & 3\end{pmatrix}$	8	$A=\begin{pmatrix}-7 & 1\\ 6 & -2\end{pmatrix}$
9	$A=\begin{pmatrix}4 & -5\\ -10 & 2\end{pmatrix}$	10	$A=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 6 & 2\end{pmatrix}$
11	$A=\begin{pmatrix}10 & 3\\ 6 & 7\end{pmatrix}$	12	$A=\begin{pmatrix}7 & -3\\ -6 & 10\end{pmatrix}$
13	$A=\begin{pmatrix}-8 & 3\\ 6 & -7\end{pmatrix}$	14	$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 4 & 3\end{pmatrix}$
15	$A=\begin{pmatrix}3 & 9\\ 6 & 4\end{pmatrix}$	16	$A=\begin{pmatrix}-6 & 7\\ 9 & -5\end{pmatrix}$
17	$A=\begin{pmatrix}-3 & 9\\ 4 & -2\end{pmatrix}$	18	$A=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 7 & 5\end{pmatrix}$
19	$A=\begin{pmatrix}4 & 10\\ 5 & 2\end{pmatrix}$	20	$A=\begin{pmatrix}4 & -7\\ -10 & 3\end{pmatrix}$

Задание 2. Найти графическим методом решение игр, заданными матрицами (задачи .1 и .2).

1.1	$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 3\\ -2 & 5 & 1 & -4\end{pmatrix}$	1.2	$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & 5\\ 1 & 4\end{pmatrix}$
2.1	$A=\begin{pmatrix}-1 & -3 & -2 & 3\\ 2 & 5 & 1 & 0\end{pmatrix}$	2.2	$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$
3.1	$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & 3\\ -2 & 5 & 1 & -4\end{pmatrix}$	3.2	$A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$
4.1	$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 2 & -2\\ -2 & 5 & -3 & 0\end{pmatrix}$	4.2	$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\\ 3 & -6\end{pmatrix}$

5.1	$A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2 & 1\\ -2 & 5 & -3 & -1\end{pmatrix}$	5.2	$A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 5 & -2\\ 4 & 2\end{pmatrix}$
6.1	$A=\begin{pmatrix}4 & 2 & -1 & 0\\ -2 & -2 & 3 & -1\end{pmatrix}$	6.2	$A=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 3 & 2\\ -2 & 6\end{pmatrix}$
7.1	$A=\begin{pmatrix}4 & 2 & -3 & -2\\ 0 & -3 & 3 & -1\end{pmatrix}$	7.2	$A=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 3 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$
8.1	$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 1\\ -2 & -3 & 3 & -1\end{pmatrix}$	8.2	$A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 2 & 5\\ 4 & 2\end{pmatrix}$
9.1	$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -4 & -3\\ -2 & -3 & 3 & 1\end{pmatrix}$	9.2	$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}$
10.1	$A=\begin{pmatrix}4 & -3 & -4 & -3\\ -2 & 2 & 5 & -1\end{pmatrix}$	10.2	$A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 3 & 5\\ 1 & 6\end{pmatrix}$
11.1	$A=\begin{pmatrix}4 & 0 & -2 & 3\\ 3 & 2 & 5 & 1\end{pmatrix}$	11.2	$A=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 2 & 14\\ 5 & 9\end{pmatrix}$
12.1	$A=\begin{pmatrix}-4 & -3 & 2 & -3\\ 6 & 2 & -5 & 1\end{pmatrix}$	12.2	$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -4\\ 0 & 3\end{pmatrix}$
13.1	$A=\begin{pmatrix}4 & -3 & -1 & 3\\ -1 & 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$	13.2	$A=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ -2 & 7\\ 2 & -3\end{pmatrix}$
14.1	$A=\begin{pmatrix}0 & -3 & -2 & 3\\ -1 & 4 & 5 & -2\end{pmatrix}$	14.2	$A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 6\\ 4 & -1\end{pmatrix}$

15.1	$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2 & 3\\ -1 & 5 & -5 & 4\end{pmatrix}$	15.2	$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$
16.1	$A=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1 & 1\\ -2 & 4 & -1 & 4\end{pmatrix}$	16.2	$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\\ 4 & -5\end{pmatrix}$
17.1	$A=\begin{pmatrix}0 & -3 & -2 & 1\\ -1 & 2 & -3 & -5\end{pmatrix}$	17.2	$A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 6 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}$
18.1	$A=\begin{pmatrix}3 & -3 & 2 & -2\\ -1 & 5 & -3 & 2\end{pmatrix}$	18.2	$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -5\\ -2 & 6\end{pmatrix}$
19.1	$A=\begin{pmatrix}2 & -4 & -3 & 1\\ -1 & 5 & 2 & -3\end{pmatrix}$	19.2	$A=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 2 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$
20.1	$A=\begin{pmatrix}-2 & -5 & -2 & 1\\ -1 & 6 & 4 & -3\end{pmatrix}$	20.2	$A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & 6\\ 5 & -1\end{pmatrix}$

Задание 3. Найти методом линейного программирования решение игры, заданной матрицей A.

1	$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 2\\ 4 & 6 & -5\\ -4 & 5 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$	2	$A=\begin{pmatrix}2 & 6 & -5 & 6\\ -9 & 4 & 5 & -3\\ 2 & -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 9 & -1\\ 5 & 3 & -1 & 2\\ -3 & -1 & 2 & 4\end{pmatrix}$	4	$A=\begin{pmatrix}1 & -6 & 5\\ 3 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ -3 & 4 & 4\end{pmatrix}$

5	$A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 8 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$	6	$A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$
7	$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	8	$A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -4 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
9	$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	10	$A=\begin{pmatrix} 8 & 1 & -5 & 3 \\ 4 & -1 & -3 & -3 \\ -4 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$
11	$A=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	12	$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -4 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$
13	$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$	14	$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
15	$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	16	$A=\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
17	$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 4 & -5 & 6 \\ 6 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	18	$A=\begin{pmatrix} 9 & 6 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

19	$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	20	$A=\begin{pmatrix} -2 & -6 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Задание 4. Магазин имеет некоторый запас товаров ассортиментного минимума. Если запас товаров недостаточен, то необходимо завести его с базы; если запас превышает спрос, то магазин несет расходы по хранению нереализованного товара. Пусть спрос на товары лежит в пределах S=5-8 единиц, расходы по хранению одной единицы товара составляют *c* руб., а расходы по завозу единицы товара *k* руб., цена за единицу товара составляет *p* руб. Составить платежную матрицу, элементами которой является прибыль магазина (доход от продажи с учетом расходов по хранению или по завозу). Определить оптимальную стратегию магазина по завозу товаров, используя критерии Вальда, Сэвиджа, Гурвица при $\alpha = 0.5$, Лапласа.

1	$p = 300,$	$c = 50,$	$k = 70$	**2**	$p = 350,$	$c = 60,$	$k = 70$
3	$p = 400,$	$c = 50,$	$k = 90$	**4**	$p = 210$	$c = 70,$	$k = 60$
5	$p = 410,$	$c = 50,$	$k = 80$	**6**	$p = 290$	$c = 40,$	$k = 60$
7	$p = 250$	$c = 30,$	$k = 90$	**8**	$p = 210$	$c = 20,$	$k = 60$
9	$p = 320,$	$c = 40,$	$k = 90$	**10**	$p = 310$	$c = 40,$	$k = 70$
11	$p = 410,$	$c = 50,$	$k = 70$	**12**	$p = 250$	$c = 50,$	$k = 60$
13	$p = 180$	$c = 50,$	$k = 40$	**14**	$p = 340$	$c = 40,$	$k = 50$
15	$p = 420,$	$c = 40,$	$k = 90$	**16**	$p = 330$	$c = 30,$	$k = 50$
17	$p = 320,$	$c = 50,$	$k = 40$	**18**	$p = 210$	$c = 50,$	$k = 40$
19	$p = 400$	$c = 30,$	$k = 60$	**20**	$p = 300$	$c = 40,$	$k = 50$

Задание 5. Найти решение биматричной игры, заданной парой матриц.

1	$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 6\end{pmatrix}$	**2**	$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 6\end{pmatrix}$	**4**	$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 5\end{pmatrix}$
5	$A=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$	**6**	$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 6 & 4\end{pmatrix}$
7	$A=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 5 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 8\end{pmatrix}$	**8**	$A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$
9	$A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$	**10**	$A=\begin{pmatrix}7 & 2\\ 4 & 7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$
11	$A=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 8\end{pmatrix}$	**12**	$A=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$
13	$A=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}$	**14**	$A=\begin{pmatrix}8 & 4\\ 3 & 9\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}7 & 2\\ 5 & 8\end{pmatrix}$
15	$A=\begin{pmatrix}9 & 4\\ 5 & 8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$	**16**	$A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$
17	$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 6\end{pmatrix}$	**18**	$A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 5\end{pmatrix}$
19	$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$	**20**	$A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 5 & 6\end{pmatrix}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном пособии рассмотрены краткие теоретические сведения по дисциплине «Теория игр», которая изучается студентами экономических направлений на 2-3 курсах. Учебно-методическое пособие будет полезно студентам направления подготовки «Прикладная математика и информатика» в рамках освоения дисциплины «Теория игр и исследования операций».

Издание состоит из введения, четырех глав, указаний по выполнению контрольной работы, заключения, библиографического списка. В первой главе рассматривается основные понятия антагонистических конфликтов, приводятся примеры построения матричных игр, исследуется возможность сокращения размерности матричных игр. Во второй главе приведены методы решения антагонистических конфликтов в зависимости от размерности игровой задачи (графические и аналитические методы). В третьей главе рассматриваются вопросы принятия решения в условиях неопределенности на основании критериев Вальда, Сэвиджа, Гурвица, Лапласа. В четвертой главе изложен метод решения простейшей биматричной задачи. Каждая глава дополнена заданиями для самостоятельного выполнения и закрепления пройденного материала. В конце пособия представлены варианты задания контрольной работы и указания по ее выполнению.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Акимов, В.П. Основы теории игр: учеб. пособие / В.П. Акимов. – М.: МГИМО-Университет, 2008. – 158 с.

2. Балдин, К.В. Математическое программирование: учеб. / К.В. Балдин, Н.А. Брызгалов, А.В. Рукосуев; под ред. К.В. Балдина. – М.: Дашков и К, 2009. – 219 с.

3. Васин, А.А. Исследование операций: учеб. пособие: рек. НМС / А.А. Васин, П.С. Краснощеков, В.В. Морозов. – М.: Академия, 2008. – 464 с.

4. Горлач, Б.А. Исследование операций: Учебное пособие / Б.А. Горлач. – СПб.: Лань, 2013. – 448 с.

5. Исследование операций в экономике: учеб. пособие: рек. Мин. обр. РФ / под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Маркет ДС, 2007. – 408 с.

6. Киреев, А.П. Микроэкономика для продвинутых: задачи и решения: учеб. пособие / А.П. Киреев, П.А. Киреев. – М.: Вуз. учебник: ИНФРА-М, 2013. – 160 с.

7. Колобашкина, Л.В. Основы теории игр: учеб. пособие / Л.В. Колобашкина. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 164 с.

8. Красс, М.С. Основы математики и её приложения в экономическом образовании: учеб.: рек. Мин. обр. РФ / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – 2- изд., испр., 4-е изд., испр.3-е изд., испр. . – М.: Дело, 2001, 2003, 2002. – 688 с.

9. Мазалов, В.В. Математическая теория игр и приложения: Учебное пособие / В.В. Мазалов. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.

10. Писарук, Н.Н. Введение в теорию игр / Н.Н. Писарук. – Минск: БГУ, 2010. – 108 с.

11. Печерский, С.Л. Теория игр для экономистов: вводный курс: Учеб. пособие / С.Л. Печерский, А.А. Беляева. – СПб.: Изд-во Европ. Ун-та в С.-Петербурге, 2001. – 343 с.

12. Тарасов, Л.В. Закономерности окружающего мира: в 3 кн. / Л.В. Тарасов. – М.: Физматлит, 2004. – Кн. 2 : Вероятность в современном обществе. – 2004. – 360 с.

13. Фомин, Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: учебник: рек. Мин. обр. РФ / Г.П. Фомин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 616 с.

14. Шеллинг, Т. Стратегия конфликта: пер. с англ. / Т. Шеллинг. – М.: ИРИСЭН, 2007. – 374 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Надежда Николаевна Максимова,

доцент кафедры математического анализа и моделирования,

канд. физ.-мат. наук

Теория игр. Учебно-методическое пособие.

Заказ 656.