Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Амурский государственный университет»

Н.А. Чалкина, Т.А. Юрьева

МАТЕМАТИКА

Методические указания

к практическим занятиям

для специальности 130101.65 «Прикладная геология»

Благовещенск

Издательство АмГУ

2013

ББК 22.1я73
Ч 16

Печатается по решению редакционно-издательского совета Амурского государственного университета

Разработаны в рамках реализации гранта «Подготовка высококвалифицированных кадров в сфере электроэнергетики и горно-металлургической отрасли для предприятий Амурской области»

Рецензенты:

Еремина Виктория Владимировна, канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры «Информационные и управляющие системы» АмГУ

Мельников Антон Владимирович, научный сотрудник института геологии и природопользования, к.г.-м.н.

Ч 16 *Чалкина Н.А., Юрьева Т.А.*

Математика: методические указания к практическим занятиям для специальности 130101.65 / Чалкина Н.А., Юрьева Т.А. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2013. – 106 с.

Методические указания предназначены для студентов очной формы обучения специальности 130101.65 – прикладная геология. Пособие разбито на разделы, каждый из которых разбит на практические занятия по темам. Каждая тема содержит цель, задачи, основные вопросы, рекомендуемую литературу и задания для выполнения.

В авторской редакции.

© Амурский государственный университет, 2013

© Чалкина Н.А., 2013

© Юрьева Т.А., 2013

ВВЕДЕНИЕ

Широкое применение математических методов в самых различных областях науки, техники и в практической деятельности геологов предъявляет повышенные требования к изучению математических приемов. Формированию умения использовать различные математические приемы посвящено это пособие.

В задачи курса «Математика» для геологов входит раскрытие роли и значения математических методов исследования при решении инженерных задач; ознакомление с основными понятиями и методами классической и современной математики; обучение студентов применению методов математического анализа для построения математических моделей реальных процессов и явлений; раскрытие роли и значения вероятностно-статистических методов исследования при решении инженерных задач.

Для эффективной работы с пособием необходима предварительная проработка теоретического материала лекций, а также учебников и пособий, представленных в списке литературы. В сопровождении с решением соответствующих задач это будет являться тем ключом, который необходим для осознанного усвоения курса и успешной сдачи зачетов и экзаменов.

В пособии приведено достаточное количество задач, которые необходимы для аудиторной и самостоятельной работы студентов.

Пособие адресовано не только студентам, но и преподавателям для использования материала на лекциях и практических занятиях.

Для освоения дисциплины «Математика» студентам необходимо выполнить задания по следующим практическим занятиям.

№ п/п	Раздел дисциплины	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов		Формы текущего контроля успеваемости	Компетенции
		Практические занятия	Самостоятельная работа		
1	Линейная алгебра	10	6	РГР	ОК-1, ОК-2, ОК-3, ПК-2
2	Аналитическая геометрия	8	4		ОК-1, ОК-2, ОК-3, ПК-2

3	Последовательности и ряды	6	2		ОК-1, ОК-2, ОК-3, ПК-2
4	Дифференциальное исчисление	12	6		ОК-1, ОК-2, ОК-3, ПК-2
5	Интегральное исчисление	16	14	Контрольная работа	ОК-1, ОК-2, ОК-3, ПК-2
6	Векторный анализ и элементы теории поля	8	8	Самостоятельная работа	ОК-1, ОК-2, ОК-3, ПК-2
7	Гармонический анализ	6	4	Самостоятельная работа	ОК-1, ОК-2, ОК-3, ПК-2
8	Дифференциальные уравнения	14	46	Контрольная работа	ОК-1, ОК-2, ОК-3, ПК-2
9	Численные методы. Основы вычислительного эксперимента	8	28	Самостоятельная работа	ОК-1, ОК-2, ОК-3, ПК-2
10	Функции комплексного переменного	10	32	Самостоятельная работа	ОК-1, ОК-2, ОК-3, ПК-2
11	Элементы функционального анализа	4	20	Самостоятельная работа	ОК-1, ОК-2, ОК-3, ПК-2
12	Теория вероятностей	10	18	Контрольная работа	ОК-1, ОК-2, ОК-3, ПК-2
13	Случайные процессы	4	10	Самостоятельная работа	ОК-1, ОК-2, ОК-3, ПК-2
14	Математическая статистика	6	14	Самостоятельная работа	ОК-1, ОК-2, ОК-3, ПК-2
15	Статистическое оценивание и проверка гипотез. Статистические методы обработки экспериментальных данных	4	10	ИДЗ № 1 ИДЗ № 2	ОК-1, ОК-2, ОК-3, ПК-2
16	Вариационное исчисление и оптимальное управление	4	6	Самостоятельная работа	ОК-1, ОК-2, ОК-3, ПК-2
17	Уравнения математической физики – в объеме, необходимом для владения математическим аппаратом геологических наук	2	4	Самостоятельная работа	ОК-1, ОК-2, ОК-3, ПК-2

Критерии достижения результатов обучения по блоку практических занятий

Для оценки результатов достижения результатов обучения по блоку практических работ используется рейтинговая оценка.

Рейтинговая оценка студента по дисциплине складывается из оценки за работу в семестре – 60 баллов и экзаменационной (зачетной) оценки – 40 баллов.

При пропуске рейтингового теста или контрольной работы в течении семестра по документально подтвержденной уважительной причине студент имеет право написать их в дни консультаций преподавателя группы. В случае пропуска теста по неуважительной причине или при неудовлетворительной оценки за тест (менее половины от максимально возможного балла), переписывание теста возможно только в течении последней недели семестра (не более двух

встреч с преподавателем на все тесты и контрольные работы). Баллы, полученные студентом в таком случае, учитываются с коэффициентом 0,8.

Студент, активно участвовавший в учебном процессе (доклады, рефераты, выступления на олимпиадах и конференциях) может быть поощрен лектором потока или заведующим кафедрой дополнительными баллами (как правило, не более 5 баллов за семестр).

Минимальное количество баллов за работу в семестре, необходимое для получения студентом допуска на экзамен, равно 30 баллов, на зачет – 40 баллов. В течении семестра студенты выполняют рейтинговый мероприятия.

1 семестр

Модуль	**Название**	**Кол.баллов за модуль**	**Виды работ**
1	Линейная алгебра	24	Самостоятельная работа
2	Аналитическая геометрия	8	Самостоятельная работа
3	Последовательности и ряды	8	Самостоятельная работа
4	Дифференциальное исчисление	20	Расчетно-графическая работа

2 семестр

Модуль	**Название**	**Кол. бал. за модуль**	**Виды работ**
1	Интегральное исчисление	30	Контрольная работа
2	Векторный анализ и элементы теории поля	20	Самостоятельная работа
3	Гармонический анализ	10	Самостоятельная работа

3 семестр

Модуль	**Название**	**Кол. баллов за модуль**	**Виды работ**
1	Дифференциальные уравнения	30	Контрольная работа
2	Численные методы	10	Самостоятельная работа
3	Функции комплексного переменного	12	Самостоятельная работа
4	Элементы функционального анализа	8	Самостоятельная работа

4 семестр

Модуль	**Название**	**Кол. бал. за модуль**	**Виды работ**
1	Теория вероятностей	20	Контрольная работа
2	Случайные процессы	4	Самостоятельная работа
3	Математическая статистика	12	Самостоятельная работа
4	Статистическое оценивание и проверка гипотез. Статистические методы обработки экспериментальных данных	12	ИДЗ №1 ИДЗ №2
5	Вариационное исчисление и оптимальное управление	10	Самостоятельная работа
6	Уравнения математической физики	2	Самостоятельная работа

Методические рекомендации по проведению практических работ

В процессе обучения студент должен прослушать определенный теоретический материал и закрепить этот материал на практических занятиях, а также при выполнении домашних самостоятельных работ.

Практическое занятие должно начинаться с проверки домашнего задания. При этом допустимо некоторые, наиболее сложные задачи, с которыми не справилась большая часть студентов решить на доске. Тем самым создается прочная база для дальнейшего обучения.

При изучении новой темы необходимо постоянно обращаться к теоретическому материалу. Иногда теория оказывается заданной на самостоятельное изучение. В этом случае преподаватель-практик обязан помочь студенту в выборе литературы, разъяснить трудные и непонятные места в тексте, ответить на все вопросы. Переходить к практическим задачам возможно только после полного усвоения теории. Недопустимо повторять чтение лекции на практике, если студенты забыли конспекты лекций и не помнят их суть.

При решении задач нужно обосновать каждый этап решения исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения, то необходимо помочь ему выбрать наиболее рациональный. Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием.

Для оптимизации учебного процесса и развития практических навыков овладения математикой весьма эффективным является проведение кратких самостоятельных работ, как по практическому, так и по теоретическому материалу. При этом целесообразно формулировать вопросы по теории таким образом, чтобы для ответа не требовались долгие и сложные доказательства и выводы. Такая форма контроля позволяет выявить наличие и прочность базовых знаний по изучаемой теме. Аналогично, практические задания должны быть составлены предельно просто и ясно. При проведении таких кратких работ студенты не должны пользоваться никаким справочным материалом.

В конце занятия необходимо подвести итог, объявить тему и план следующего занятия, задать домашнее задание, указав литературу, которой желательно воспользоваться при его выполнении.

Методические указания по выполнению практических заданий

Задачей преподавателя при проведении практических занятий является грамотное и доступное разъяснение принципов и правил проведения работ, побуждение студентов к самостоятельной работе, определения места изучаемой дисциплины в дальнейшей профессиональной работе будущего специалиста.

Цель практического занятия – научить студентов самостоятельно производить необходимые действия для достижения желаемого результата.

Прежде чем приступить к выполнению заданий практического занятия, студенту необходимо ознакомиться с теоретическим материалом, соответствующим данной теме.

Выполнение заданий практического занятия целесообразно разделить на несколько этапов:

формулировка и обоснование цели работы;

определение теоретического аппарата, применительно к данной теме;

выполнение заданий;

анализ результата;

выводы.

Раздел «Линейная алгебра»

Тема. Вычисление определителей 2-го, 3-го порядков

Цель: сформировать умения вычисления определителей различными способами.

Задачи:

закрепить знания о свойствах определителей;

рассмотреть примеры по вычислению определителей;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Понятие определителя второго порядка и его вычисление.
2. Понятие определителя третьего порядка и его вычисление.
3. Свойства определителей.
4. Определение минора определителя, соответствующего какому-либо элементу этого определителя.
5. Понятие алгебраического дополнения элемента определителя.
6. Методы вычисления определителей.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Задания для выполнения

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{3} & 2-\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{2} & 1-\sqrt{3} \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} a+в & a-в \\ a-в & a+в \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} 1 & \ln a^2 \\ -\ln a & \ln\frac{1}{a} \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} tg\alpha & -1 \\ 1 & tg\alpha \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 13542 & 13642 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 14 & 10 & 27 \\ 21 & -25 & -18 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix}$.

в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$;

3. Вычислить определители $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ следующими способами:

а) по правилу «треугольников»; б) путем разложения по строке; в) путем накопления нулей в первом столбце с последующим разложением по элементам этого столбца; г) путем накопления нулей ниже главной диагонали.

4. Решить уравнения:

а) $\begin{vmatrix} 1 & x-5 \\ x+4 & 0 \end{vmatrix} = 0$; в) $\begin{vmatrix} 2-x & 4 \\ -3 & 2+x \end{vmatrix} = -9$;

б) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$; г) $\begin{vmatrix} 1 & -x^2 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ -x & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$.

5. Найти значение параметра λ, при котором определитель равен нулю:

а) $\begin{vmatrix} 3\lambda & 1-\lambda \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 4 & 1+\lambda \end{vmatrix}$.

6. Найти значение параметра t, при котором определитель не равен нулю:

а) $\begin{vmatrix} t^2 & 1 \\ -1 & t \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} t & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -t+4 \end{vmatrix}$.

7. Решить неравенства:

а) $\begin{vmatrix} x-4 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0$; б) $\begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ -1 & x+1 \end{vmatrix} > 3$; в) $\begin{vmatrix} 3x & 2x \\ -2x & x \end{vmatrix} \le 7$.

8. Определить при каких значениях x определитель $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$ положителен, если $a>0$.

<u>Тема.</u> Действия над матрицами

Цель: сформировать умения выполнять действия с матрицами.

Задачи:

закрепить знания о матрицах и их видах;

рассмотреть примеры по выполнению операций над матрицами;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Понятие матрицы. Виды матриц.
2. Равенство матриц.
3. Транспонирование матриц.
4. Операция сложение матриц и ее свойства.
5. Операция умножения матрицы на действительное число и ее свойства.
6. Операция умножения матриц и ее свойства.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

<u>Задания для выполнения</u>

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 5 & -6 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $C=2A-3B$.

2. Найти $-A+2B-\frac{1}{3}C$, если $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -9 \end{pmatrix}$.

3. Найти $A+A^{\mathrm{T}}$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -9 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

4. Матрицы A и B равны, $A=\begin{pmatrix} y+2 & -4 & 2 \\ 2x-3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & z+1 & 2 \\ 3 & 0 & -t \end{pmatrix}$. Найти x, y, z, t.

5. Дано матричное равенство $2A+B-A^T\cdot B^T=\Theta+C$, где $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3a & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Найти a.

6. Дано произведение матриц $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$. Указать значения x_2, x_3, y_1.

7. Перемножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 7 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8. Найти:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^2$;

б) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^7$;

д) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}^4$.

9. Перемножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$.

<u>Тема.</u> «Обратная матрица»

Цель: сформировать умения вычисления обратной матрицы.

Задачи:

закрепить знания о свойствах обратной матрицы;

рассмотреть примеры по вычислению обратной матрицы;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Понятие невырожденной матрицы.
2. Определение обратной матрицы.
3. Нахождение обратной матрицы.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

<u>Задания для выполнения</u>

1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 4 & -6 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$. Доказать, что она имеет обратную. найти A^{-1}. Проверить результат, используя определение A^{-1}.

2. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, причем $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$. Доказать, что $A^{-1}=\dfrac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\cdot\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$.

3. Найти A^{-1}:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

е) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 12 \end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

ж) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. При каких значениях параметра α матрица:

а) $A=\begin{pmatrix} 2\alpha & 1 \\ 4 & 2\alpha \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \alpha & 0 & -\alpha \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ не имеет обратной?

5. При каких значениях параметра u матрица является вырожденной:

а) $A=\begin{pmatrix} u & -u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3u & 1 & u \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$?

6. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Найти и $(A+A^T)^{-1}$.

7. $A=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Найти $(A^2)^{-1}$, $(A^{-1})^T$.

<u>Тема.</u> Метод Крамера и матричный метод решения систем линейных уравнений

Цель: сформировать умения решения систем линейных уравнений различными способами.

Задачи:

закрепить знания о матричном методе решения систем линейных уравнений и методе Крамера;

рассмотреть примеры по решению систем уравнений;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Метод Крамера решения систем линейных уравнений.
2. Решение систем уравнений матричным методом

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Задания для выполнения

1. Показать, что система имеет единственное решение. Найти решение методом Крамера.

а) $\begin{cases} 2x - 5y = 1, \\ 3x + y = 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 7, \\ 2x_1 - 5x_2 = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

2. Решить систему матричным способом:

а) $\begin{cases} 3x + 7y + 4z - 3 = 0, \\ x + 2y + 2z - 3 = 0, \\ 2x + 3y + 5z - 10 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 = -1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

Тема. Ранг матрицы. Исследование систем линейных уравнений. Метод Гаусса

Цель: сформировать умения исследовать системы линейных уравнений.

Задачи:

закрепить знания теоремы Кронекера-Капелли, о ранге матрицы и Методе Гаусса;

рассмотреть примеры по исследованию систем линейных уравнений;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Общий вид системы линейных неоднородных уравнений.
2. Общий вид системы линейных однородных уравнений.
3. Определение решения системы линейных уравнений.

4. Определение совместной и несовместной системы линейных уравнений.

5. Понятие определенной и неопределенной системы линейных уравнений.

6. Определение ранга матрицы.

7. Теорема Кронекера-Капелли.

8. Метод Гаусса решения системы линейных уравнений.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Задания для выполнения

1. Пользуясь определением ранга матрицы, вычислить ранги матриц

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}.$$

2. Показать, что система имеет единственное решение. Найти решение методом Гаусса.

а) $\begin{cases} 2x_1+2x_2-3x_3=-8, \\ -x_1-2x_2+x_3=-1, \\ 3x_1-x_2+2x_3=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+y-z=-6, \\ 4x-3y-4z=4, \\ -2x+2y+3z=-2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2, \\ x_1+3x_2+x_3=5, \\ x_1+x_2+5x_3=-7, \\ 2x_1+3x_2-3x_3=14. \end{cases}$

3. Исследовать и решить систему. Найти общее решение и одно из частных решений в случае совместности неопределенной системы.

а) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1, \\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=2, \\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4=-1, \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1+3x_2-3x_4=1, \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3. \end{cases}$

Раздел «Аналитическая геометрия»

Тема. Решение простейших задач в координатах

Цель: сформировать умения решения простейших геометрических задач координатным методом.

Задачи:

закрепить знания о системе координат, действиях с векторами;

рассмотреть примеры по решению геометрических задач методом координат;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Аффинная система координат на плоскости
2. Определение координат вектора по координатам его начала и конца.
3. Операции с векторами в координатах.
4. Определение координат точки, делящей отрезок в данном отношении.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

Задания для выполнения

1. Построить в аффинной системе координат на плоскости точки $A(-1, 3)$, $B(0, 4)$, $C(-2, 0)$, $D(4, -5)$, выбрав базис $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$.

2. Построить в прямоугольной системе координат в пространстве точки $M(0, 4, 2)$, $K(-2, 0, 3)$, $L(3, 2, -5)$, $N(4, -3, 6)$.

3. Даны точки $M(3, -2, 4)$, $N(-1, 3, 0)$. Найти координаты векторов $2\vec{NM}$, $-3\vec{MN}$.

4. Вычислить длину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$.

5. Вычислить угол между векторами $\vec{a} = 6\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

6. Даны векторы: $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{b}=-3\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{c}=2\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{d}=\vec{i}-1\vec{j}$. Вычислить $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}, 2\vec{d})$.

7. Дан треугольник *ABC*: *A*(1, 2), *B*(-2, 3), *C*(0, 4). Найти угол $\hat{B}$ и длины сторон треугольника. Система координат – прямоугольная.

8. Найти площадь треугольника *ABC*: *A*(-1, 3), *B*(4, -2), *C*(1, -1). Система координат – прямоугольная.

9. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}+\vec{b}$, $-\vec{b}+2\vec{n}$, $3\vec{n}+\vec{a}$, если $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{n}=-\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$.

10. Может ли точка *M* прямой *AB* делить отрезок *AB* в $\lambda=-1$?

11. На оси *Oy* найти точку, равноудаленную от точки (–8; –4) и от начала координат. Система координат – прямоугольная.

12. Отрезок *AB* четырьмя точками разделен на пять равных частей. Определить координаты ближайшей к *A* точки деления, если *A*(–3; 8), *B*(7; 8).

Тема. Прямая на плоскости

Цель: сформировать умения исследования, построения и составления уравнения прямой на плоскости.

Задачи:

закрепить знания о способах задания прямой на плоскости и видах метрических задач на прямую;

рассмотреть примеры по решению типовых задач;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Общее уравнение прямой.

2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

3. Уравнение прямой проходящей через две точки.

4. Уравнение прямой проходящей через данную точку в данном направлении.

5. Уравнение прямой в отрезках.

6. Уравнение прямой проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.

7. Основные задачи: угол между двумя прямыми, расстояние от точки до прямой.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

Задания для выполнения

1. На оси абсцисс и на оси ординат найти точки, равноудаленные от точек $A(2;3)$ и $B(5;6)$.

2. Лежат ли на одной прямой три данные точки $A(2; 0)$, $B(6; 4)$, $C(11; 9)$.

3. Даны вершины треугольника: $A(3; 5)$, $B(-3; 3)$, $C(5; -8)$. Определить длину медианы, проведенной из вершины C.

4. Найти острый угол между прямыми $4x-2y-7=0$ и $y=\frac{1}{3}\tilde{o}-11$ (в градусах).

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(5; -1)$ под углом 45° к оси Ox.

6. Даны две прямые $y=3x-2$ и $3x-y+12=0$. Составить уравнение прямой, проведенной параллельно данным на равном расстоянии между нами.

7. Какие из данных прямых перпендикулярны прямой $2x-y+3=0$:

а) $4x+8y+17=0$;

б) $4x-8y-11=0$;

в) $y=-\frac{1}{2}x+5$;

г) $y=-2x-7$.

8. Даны вершины треугольника: $A(2, 3)$, $B(6, 1)$, $C(2, -2)$. Найти: длину стороны AB; уравнения сторон AB, BC, AC; уравнение высоты из вершины A; уравнение медианы из вершины B; расстояние от точки C до прямой AB.

9. Составить уравнение прямой проходящей через точку $M(-2;-5)$, параллельно прямой $3x+4y+2=0$.

10. При каком значении параметра t прямые, заданные уравнениями $3t\,x-8y+1=0$ и $(1+t)x-2ty=0,$ параллельны?

11. Найти длины высот треугольника, стороны которого заданы уравнениями: $y-2=0,\ 2x-y-12=0,\ 4x-11y+30=0.$

12. Выяснить взаимное расположение трех прямых: $y=3,\quad x-y+5=0,$ $2y-5=0.$

13. Даны уравнения сторон треугольника $x+2y-1=0,\ 5x+4y-17=0,$ $x-4y+11=0.$ Составить: а) уравнения высот треугольника; б) уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника параллельно противоположным сторонам.

Тема. Кривые второго порядка на плоскости

Цель: сформировать умения исследования, построения и составления уравнений линий второго порядка.

Задачи:

закрепить знания о свойствах линий второго порядка и способах их построения;

рассмотреть примеры на построение и написание уравнений линий второго порядка;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Окружность.
2. Эллипс.
3. Гипербола.
4. Парабола.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

Задания для выполнения

1. Составить уравнение окружности в каждом из следующих случаев:

1) центр окружности совпадает с началом координат и ее радиус R=3;

2) окружность проходит через точку A(2; 6) и ее центр совпадает с точкой C(-1; 2);

3) точки A(3; 2) и B(-1; 6) являются концами одного из диаметров окружности;

2. Какие из нижеприведенных уравнений определяют окружности? Найти центр C и радиус R каждой из них:

а) $(x-5)^2+(y+2)^2=25$;

б) $(x-5)^2+(y+2)^2=0$;

в) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$;

г) $x^2+y^2-4y+3=0$.

3. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

а) $y=\sqrt{9-x^2}$;

б) $y=-\sqrt{4-y^2}$;

в) $y=5+\sqrt{64-x^2}$;

г) $y=-3-\sqrt{21-4x-x^2}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

4. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) его полуоси равны 5 и 2;

2) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами $2c$ = 8;

3) его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами $2c$ = 10;

5. Определить полуоси каждого из следующих эллипсов:

а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$;

б) $x^2+25y^2=25$;

в) $4x^2+9y^2=25$;

г) $25x^2+9y^2=1$.

6. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями

а) $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$;

б) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$;

в) $x=-\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}$;

г) $y=-7+\frac{2}{5}\sqrt{16+6x-x^2}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

7. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная кроме того, что:

1) ее оси $2a = 10$ и $2b = 8$;

2) расстояние между фокусами $2c = 10$ и ось $2b = 8$;

3) уравнения асимптот $y = \pm \frac{4}{3} x$ и расстояние между фокусами $2c = 20$;

8. Определить полуоси a и b каждой из следующих гипербол:

а) $16x^2 - 9y^2 = -144$;

б) $x^2 - 4y^2 = 16$;

в) $4x^2 - 9y^2 = 25$;

г) $9x^2 - 64y^2 = 1$.

9. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

а) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$;

б) $x = -\frac{4}{3}\sqrt{y^2 + 9}$;

в) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$.

Изобразить эти линии на чертеже.

10. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, найти координаты ее вершины A и изобразить эти линии на чертеже:

а) $y^2 = 4x - 8$;

б) $y^2 = 4 - 6x$;

в) $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2$;

г) $y = 4x^2 - 8x + 7$;

д) $x = 2y^2 - 12y + 14$;

е) $y = \sqrt{-x}$;

ж) $y = \sqrt{5y}$;

з) $x = -5\sqrt{-y}$;

и) $y = 3 - 4\sqrt{x - 1}$.

11. Составить уравнение осей симметрии равносторонней гиперболы, изобразить ее на чертеже $y = \frac{3x + 4}{x - 1}$.

<u>Тема.</u> Прямая и плоскость в пространстве

Цель: Сформировать умения исследовать и строить прямую и плоскость в пространстве.

Задачи:

закрепить знания о способах задания прямой и плоскости в пространстве;

рассмотреть примеры по решению типовых задач;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Плоскость в пространстве: основные виды уравнений.

2. Построение плоскостей.

3. Угол между плоскостями.

4. Условия коллинеарности и ортогональности плоскостей.

5. Прямая в пространстве: основные виды уравнений (общее, канонические, параметрические, по двум точкам).

6. Угол между прямыми, условия коллинеарности и ортогональности прямых.

7. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Условия параллельности и ортогональности прямой и плоскости.

8. Поверхности второго порядка: сфера, конус, эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды, цилиндры, параболоиды.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

Задания для выполнения

1. Найти уравнение плоскости:

а) проходящей через точку $A(0,\ 2,\ 3)$ и параллельной векторам $\vec{P_1} = (1,\ 0,\ 1)$ и $\vec{P_2} = (2,\ 1,\ 3)$;

б) проходящей через три точки $M_1(1,\ 2,\ 3)$, $M_2(2,\ 1,\ 3)$, $M_3(0, -1,\ 2)$;

в) проходящей чрез две точки $M_1(1,\ 2,\ 3)$, $M_2(2,\ -1,\ 3)$ и параллельной вектору $\vec{P} = (1,\ 2,\ 2)$.

2. Указать, что особенности расположения следующих плоскостей по отношению к системе координат:

а) $x - z + 1 = 0$;

б) $x + 2y + 3z = 0$;

в) $x - y + 2 = 0$;

г) $x - 3 = 0$;

д) $x + 2z = 0$;

е) $y + z + 1 = 0$.

3. Даны вершины тетраэдра $A(0, 0, 1)$, $B(4, 0, 2)$, $C(3,–1, 5)$, $D(4,–1, 3)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро AB и параллельный ребру.

4. Написать уравнение плоскостей:

а) проходящей через точку $K(3,–3, 2)$ и параллельной каждой из координатных плоскостей;

б) проходящей через две точки $A(0, –2, 3)$, $B(5, 1, 4)$ и параллельной каждой из координатных осей;

в) проходящих через точку $C(3, 2, –4)$ и через каждую из координатных осей.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2, -2, 4)$ и параллельной:

а) плоскости $2x-3y+z+3=0$; б) плоскости $x-4y+8=0$; в) $3y-4=0$.

6. Проверить, что три плоскости $2x-2y+z-3=0$, $3x-6y+1=0$ и $4x+5y+2z=0$ попарно перпендикулярны.

7. Вычислить расстояние от начала координат до плоскости:

а) $15x-10y+6z-190=0$; б) $2x-3y+5z-3=0$.

8. Вычислить расстояние между следующими плоскостями:

а) $x-y+5z+27=0, \quad x-y+5z+1=0$;

б) $x-3y+2z+1=0, \quad 2x-5y+4z+3=0$.

9. Определить двугранные углы между следующими парами плоскостей:

а) $16x+8y+2z+1=0, \quad 2x-2y+z+5=0$;

б) $2x+5y+4z+15=0, \quad 6x-3z+2=0$.

10. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $(2,-3,3)$ и перпендикулярной к плоскости $x-3y+4z-1=0$.

11. Дан треугольник своими вершинами $A(1,2,3)$, $B(-1,2,0)$, $C(3,4,-4)$. Написать уравнения медиан треугольника, уравнения средней линии треугольника.

12. Даны параметрические уравнения прямой: $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 3t \\ z = 5 - t \end{cases}$. Написать канонические и общие уравнения данной прямой.

13. При каком значении параметра *Д* прямая $\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0 \\ x + 4y - z + Д = 0 \end{cases}$ пересекает ось *0z*?

14. Проверить, лежит ли на одной прямой следующие три точки: $(3, 0, 1), \quad (0, 2, 4), \quad (1, \frac{4}{3}, 3)$.

15. Привести к каноническому виду уравнения прямой $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$.

16. Даны точки пересечения прямой с двумя координатными плоскостями $(x_1, y_1, 0)$ *и* $(x_2, 0, z_2)$. Вычислить координаты точки пересечения этой же прямой с третьей координатной плоскостью.

17. Написать уравнения ребер тетраэдра, вершины которого даны своими координатами: $A(0, 0, 2), \quad B(4, 0, 5), \quad C(5, 3, 0), \quad Д(-1, 4, -2)$:

а) канонические;

б) параметрические;

в) общие.

18. Доказать, что прямые:

$d_1 : \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$ *и* $d_2 : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 5z - 8 = 0 \end{cases}$ параллельны. Составить уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.

19. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $(0, 0, 1)$ и пересекающей каждую из прямых: $\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ 2x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$ и $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

20. При каких ℓ *и* C прямая $\frac{x-2}{\ell} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-3}$ перпендикулярна к плоскости $3x - 2y + Cz + 1 = 0$?

21. Найти расстояние от точки $A(1, 3, -1)$ до прямой:

а) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{3}$; б) $\begin{cases} x=3t \\ y=-1+4t \\ z=2-t \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x-y+z+5=0 \\ 3x-2y-z-4=0 \end{cases}$.

22. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми:

$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-1}$ и $\frac{x+4}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+2}{-3}$.

23. Найти угол между прямой $\frac{x}{2}=\frac{y+12}{3}=\frac{z-4}{6}$ и плоскостью $6x+15y-10z=0$.

24. Найти угол между следующими прямыми:

$\begin{cases} y+1=0 \\ x+2z-1=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=0 \\ z=1 \end{cases}$.

25. Найти расстояние от точки A до плоскости, проходящей через точки B, C, D. $A(1,-6,-5), B(-1,2,-3), C(4,-1,0), D(2,1,-2)$.

26. Найти угол между плоскостями: $4x-5y+3z-1=0, x-4y-z+9=0$.

27. Построить плоскости:

а) $y=4$;

б) $x-4y-12=0$;

в) $x-y+2x+2=0$;

г) $x-3y+2z=6$;

д) $2x+z-3=0$.

28. Написать уравнение прямой, проходящей через точки: $A(3,-2,-1)$ и $B(1,3,1)$.

29. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,4,-3)$ и параллельно вектору $\vec{s}=\{1;-2;6\}$.

30. Данные прямые параллельны или перпендикулярны?

$\frac{x+4}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-5}{-8}$, $\frac{x}{-1}=\frac{y+8}{-1}=\frac{z-6}{4}$.

31. При каком значении k данные прямые перпендикулярны?

$\frac{x+4}{-5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$, $\frac{x+7}{k}=\frac{y}{4}=\frac{z-3}{3}$.

Раздел «Последовательности и ряды»

Тема. Вычисление пределов числовых последовательностей. Второй замечательный предел

Цель: сформировать умения вычисления пределов числовых последовательностей.

Задачи:

закрепить знания о способах раскрытия неопределенностей;

рассмотреть примеры по вычислению пределов;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Определение числовой последовательности.
2. Предел числовой последовательности.
3. Бесконечно малые последовательности
4. Бесконечно большие последовательности
5. Свойства сходящихся последовательностей
6. Второй замечательный предел.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Задания для выполнения

Вычислить пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4-1}{n^2-1}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^4-3n^3+5}{3n^4-5n^2+1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3+n-1}{n^4+2n}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^5-7n+1}{3n^2+n+3}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n\cdot(n-1)!}{n!+(n+1)!}$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{n+1}$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty} (2n+1)[\ln(n+3)-\ln(n)]$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-5n}{-5n^2+n-1}$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{2n^2+n+1}{2n^2-1}\right]$;

к) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{2n^3+4}{n^2+5}\right]$;

л) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{5n+11}+\dfrac{\cos n}{10n}\right)$;

м) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

н) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\right]$;

о) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{3n}\right]$;

п) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n(\ln n-\ln(n+2))\right]$;

р) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^2-n+1})$;

с) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^2(n-\sqrt{n^2+1})\right]$.

<u>Тема.</u> Исследование на сходимость положительных числовых рядов

Цель: сформировать умения исследования числовых рядов на сходимость.

Задачи:

закрепить знания о свойствах числовых рядов и признаках их сходимости;

рассмотреть примеры по исследованию рядов;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Понятие числового ряда.
2. Необходимый признак сходимости числовых рядов.
3. Достаточные признаки сходимости числовых рядов.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Задания для выполнения

Исследовать на сходимость числовые ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n^5+4}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5+4n+1}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+4}{3n+1}\right)^n$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$;

и) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n}$;

к) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$;

л) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{2n^4+5n+1}$;

м) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[5]{\frac{n+2}{n+3}}$.

Тема. Исследование рядов на абсолютную и условную сходимость

Цель: сформировать умения исследовать знакочередующиеся ряды.

Задачи:

закрепить знания о свойствах знакочередующихся рядов, об абсолютной и условной сходимости;

рассмотреть примеры по исследованию знакочередующихся рядов;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Знакочередующиеся ряды.

2. Признак Лейбница.

4. Абсолютная и условная сходимость.

5. Сумма знакочередующегося ряда с заданной точностью.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ

«Лань» -online).

Задания для выполнения

1.Установить сходимость рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{2n+3}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{4}{7}\right)^n$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n3^n}$ с точностью 0,001.

3. Выяснить, какие из следующих рядов сходятся абсолютно:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{1}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{1}{3^n}$.

Раздел «Дифференциальное исчисление»

Тема. Вычисление пределов функций

Цель: Сформировать знания о пределах функций и способах их вычислений.

Задачи:

сообщить теоретический материал по данной теме;

привести примеры по вычислению пределов функций;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Предел функции в точке.
2. Односторонние пределы.
3. Предел функции при $x \to \infty$.
4. Бесконечно большая функция.
5. Бесконечно малые функции.
6. Первый замечательный предел.
7. Второй замечательный предел.
8. Эквивалентные бесконечно малые функции.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Задания для выполнения

1. Найти указанные пределы

1.1. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$.

1.2. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$.

1.3. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^3+8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

1.4. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2}$.

1.5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{tg3x}$.

1.6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x-1}{\sqrt{x^2+5}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

1.7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$.

1.8. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2-4}\right)^{x}$.

1.9. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin x-\sin 5}{x-5}$.

1.10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{x}$.

2. Исследовать на непрерывность и построить схематический график функций.

2.1. а) $y=2^{\frac{1}{x-5}}$; б) $y=\begin{cases}-\dfrac{x}{3}, x\le 0\\ \sin x, 0<x\le\dfrac{\pi}{2}\\ x-\dfrac{\pi}{2}, x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$.

2.2. а) $y=4^{\frac{1}{x^2-1}}$; б) $y=\begin{cases}\sqrt{1-x}, x\le 0\\ tgx, 0<x\le\dfrac{\pi}{4}\\ 1, x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$.

2.3. а) $y=x+\dfrac{1}{x}$; б) $y=\begin{cases}x-1, x\le -1\\ 4x, -1<x\le 3\\ \dfrac{1}{x}, x>3\end{cases}$.

2.4. а) $y=\dfrac{1}{x^2-9}$; б) $y=\begin{cases}-x^2, x\le -1\\ x-3, -1<x\le 4\\ \dfrac{4}{x}, x>4\end{cases}$.

2.5. а) $y = \frac{|x-1|}{x-1}$; б) $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, x < 1 \\ x, 1 \le x < 2 \\ 3, 2 \le x < 3 \end{cases}$.

<u>Тема.</u> Вычисление производных с помощью правил дифференцирования и таблицы производных

Цель: сформировать знания о производной функции и способах вычисления производной с помощью правил дифференцирования и таблицы производных.

Задачи:

сообщить теоретический материал по данной теме;

привести примеры по вычислению производных функции;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Правила дифференцирования.
2. Таблица производных.
3. Производная сложной функции.
4. Дифференцирование неявно заданной функции.
5. Дифференцирование функции, заданной параметрически.
6. Логарифмическое дифференцирование.
7. Производные высших порядков.
8. Дифференциал функции.
9. Приближенные вычисления с использованием дифференциала функции.
10. Приложения производной.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Задания для выполнения

Если C – постоянное число, $u = u(x), v = v(x)$ – функции, имеющие производные.

Правила дифференцирования

1. $C' = 0$.
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
3. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$.
4. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Таблица производных

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.
2. $(a^x)' = a^x \ln a (a > 0, a \neq 1)$.
3. $(e^x)' = e^x$.
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} (a > 0, a \neq 1)$.
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
6. $(\sin x)' = \cos x$.
7. $(\cos x)' = -\sin x$.
8. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.
9. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}(x \neq k\pi)$.
10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-1 < x < 1)$.
11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
12. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$.
13. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

1. Найти производные функций:

1.1. а) $y = \frac{\cos x}{1 + 2\sin x}$; б) $y = \ln^5 \sin x$.

1.2. а) $y = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$; б) $y = e^{\sqrt{1 + \ln x}}$.

1.3. а) $y = \ln \frac{x^2}{1 - x^2}$; б) $y = \arcsin \sqrt{\sin x}$.

1.4. а) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 5}\right)$; б) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

1.5. а) $y = tgx \sin^2 3x$; б) $y = \ln\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\right)$.

1.6. а) $y = tg^3 x - 3tgx + 3x$; б) $y = arctg \frac{x+3}{x-3}$.

1.7. а) $y = \frac{\ln \sin x}{\ln \cos x}$; б) $y = arctg\sqrt{6x - 1}$.

1.8. а) $y = \arccos e^{-\frac{x^2}{2}}$; б) $y = xarctgx - \frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right)$.

1.9. а) $y=\dfrac{xtgx}{1+x^2}$; б) $y=10^{3-\sin^3 2x}$.

1.10. а) $y=\arcsin^3 e^{4x}$; б) $y=\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{x-3}{x+3}$.

2. Найти производную от неявных функций:

а) $x^3+y^3-3xy=0$;

б) $x^4-6x^2y^2+9y^4-5x^2+15y^2-100=0$;

в) $x^y-y^x=0$;

г) $x\sin y+y\sin x=0$;

д) $e^x+e^y-2^{xy}-1=0$;

ж) $\sin\left(y-x^2\right)-\ln\left(y-x^2\right)+2\sqrt{y-x^2}-3=0$.

3. Найти производную функции, заданной параметрически:

а) $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x=e^{-t}\sin t \\ y=e^{t}\cos t \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x=t^3+3t+1 \\ y=3t^5+5t^3+1 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x=t-\ln t \\ y=3t^2-2t^3 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} x=2t-\sin 2t \\ y=8\sin^3 t \end{cases}$;

е) $\begin{cases} x=arctg3t \\ y=\ln\left(1+9t^2\right) \end{cases}$;

ж) $\begin{cases} x=t^2-\ln t \\ y=2t^3+3t \end{cases}$.

4. Найти y''':

а) $y=\dfrac{x}{6(x+1)}$;

б) $y=\dfrac{1}{2}\ln^2 x$;

в) $y=(2x+3)^3\sqrt{2x+3}$;

г) $y=5-3\cos^2 x$;

д) $y=2^x+2^{-x}$.

5. Найти дифференциал функции:

а) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{49-x^2}+\dfrac{49}{2}\arcsin\dfrac{x}{7}$;

б) $y=\dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x-6}{x+6}$;

в) $y=arctge^{2x}$;

г) $y=x(\ln x-1)$;

д) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$.

6. Вычислить приближенно значение:

а) arctg 1,05; б) tg 46^0; в) $\sqrt[4]{15{,}8}$.

7. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в точке x_0.

а) $y=\sqrt{\dfrac{4-x^2}{2}}$, $x_0=-\sqrt{2}$;

б) $y=\sqrt{\dfrac{6-x^2}{3}}$, $x_0=-\sqrt{3}$;

в) $y=\sqrt{4-2x^2}$, $x_0=1$;

г) $y=-\sqrt{4-2x^2}$, $x_0=-1$.

8. Закон движения материальной точки по прямой имеет вид $x = x(t)$. Найти: а) в какие моменты времени точка находится в начале координат; б) в какие моменты времени направление ее движения совпадает с положительным направлением оси Оx; в) в какие моменты времени ее ускорение равно нулю.

а) $x = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$;

б) $x = \frac{1}{4}t^4 - 3t^3 + 9t^2$;

в) $x = \frac{1}{4}t^4 - 6t^3 + 22{,}5t^2$;

г) $x = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 5{,}5t^2$;

д) $x = \frac{1}{4}t^4 - 2t^3 + 4t^2$;

е) $x = \frac{1}{4}t^4 - 6t^3 + 28t^2$;

ж) $x = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{4}t^2$.

<u>Тема.</u> Исследование функций с помощью производных

Цель: сформировать знания об исследовании функций с помощью производных.

Задачи:

сообщить теоретический материал по данной теме;

привести примеры по исследованию функций с помощью производных;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Правила Лопиталя.
2. Критические точки функции.
3. Возрастание и убывание функции.
4. Максимум и минимум функций.
5. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
6. Выпуклость графика функции. Точки перегиба.
7. Асимптоты графика функции.
8. Общая схема исследования функции и построения графика.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. –

600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Задания для выполнения

1. Найти пределы следующих функций используя правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot ctgx$;

е) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

2. Найти интервалы возрастания и убывания функций:

а) $y=2-3x+x^3$;

б) $y=(x^2-1)^{\frac{3}{2}}$;

в) $y=xe^{-x}$;

г) $y=(2-x)(x+1)^2$.

3. Найти экстремумы функций:

а) $y=x^2(1-x\sqrt{x})$;

б) $y=x+\sqrt{3-x}$;

в) $y=\ln(x^2+1)$;

г) $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

4. Исследовать методами дифференциального исчисления функции и по результатам исследования построить графики этих функций:

а) $y=\dfrac{x}{1-x^2}$;

б) $y=2x+\dfrac{1}{x^2}$;

в) $y=\dfrac{x}{x^2-4}$;

г) $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$;

д) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$;

е) $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$.

Раздел «Интегральное исчисление»

Тема. Неопределенный интеграл

Цель: сформировать знания о неопределенном интеграле, его свойствах и способах вычисления.

Задачи:

сообщить теоретический материал по данной теме;

привести примеры по вычислению неопределенных интегралов;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Неопределенный интеграл, свойства.
2. Таблица интегралов.
3. Замена переменной в неопределенном интеграле.
4. Интегрирование по частям.
5. Интегрирование рациональных дробей.
6. Интегрирование иррациональных выражений.
7. Интегрирование тригонометрических выражений.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Задания для выполнения

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$;
2. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$;
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$;
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;
5. $\int e^x dx = e^x + C$;
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C;$

9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C;$

10. $\int shx\, dx = chx + C;$

11. $\int chx\, dx = shx + C;$

12. $\int \frac{1}{sh^2 x} dx = -cthx + C;$

13. $\int \frac{1}{ch^2 x}\ dx = thx + C;$

14. $\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = arctgx + C = -arcctgx + C;$

15. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C;$

16. $\int \frac{1}{x^2+a^2}\ dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C;$

17. $\int \frac{1}{x^2-a^2}\ dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

18. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$

20. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C;$

21. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C;$

22. $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C;$

23. $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

24. $\int tgx\, dx = -\ln|\cos x| + C;$

25. $\int ctgx\, dx = \ln|\sin x| + C.$

1. Вычислить неопределенный интеграл:

1.1. а) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{1-e^x}}$; б) $\int \frac{19-4x}{2x^2+x-3} dx$; в) $\int (5x-2)\ln x dx$; г) $\int \frac{5x^3-6x^2+7x}{2-5x} dx$;

д) $\int \frac{1}{7\sin x - 3\cos x} dx$; е) $\int \cos^5 x \sin^4 x dx$.

1.2. а) $\int x\sqrt{3-x^2} dx$; б) $\int \frac{2x+9}{x^2+5x+6} dx$; в) $\int x\cos^2(2x) dx$; г) $\int \frac{6x^3-7x^2+2}{3x+2} dx$;

д) $\int \frac{1}{3\sin x - 4\cos x} dx$; е) $\int \cos^3 x \sin^5 x dx$.

1.3. а) $\int \frac{arctgx}{1+x^2} dx$; б) $\int \frac{x+9}{x^2+2x-3} dx$; в) $\int \ln(3+x^2) dx$; г) $\int \frac{7x^3-5x^2+3x-1}{7x+2} dx$;

д) $\int \frac{1}{8+4\cos x} dx$; е) $\int \frac{3\cos x}{\sin^4 x} dx$.

1.4. а) $\int \sin 2x\sqrt{2-\cos^2 x} dx$; б) $\int \frac{2x+27}{x^2-x-12} dx$; в) $\int x \arcsin x dx$; г) $\int \frac{1}{5+4\sin x} dx$; д)

$\int \frac{9x^3+7x^2+5x+3}{3x-2} dx$; е) $\int \cos^8 x \sin^3 x dx$.

1.5. а) $\int \frac{\sin x}{1-\cos x} dx$; б) $\int \frac{4x+31}{2x^2+11x+12} dx$; в) $\int (2-x)\sin x dx$; г) $\int \frac{6x^3-5x^2+4x}{5-2x} dx$;

д) $\int \frac{1}{3+2\cos x - \sin x} dx$; е) $\int \cos 2x \sin^4 2x dx$.

1.6. а) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$; б) $\int \frac{11x-2}{x^2+x-2}dx$; в) $\int (1-\ln x)dx$; г) $\int \frac{4x^3-5x^2+1}{2x+7}dx$;

д) $\int \frac{1}{5\cos x+10\sin x}dx$; е) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$.

1.7. а) $\int \frac{1-tgx}{\cos^2 x}dx$; б) $\int \frac{17-2x}{x^2-5x+4}dx$; в) $\int (3x+4)\cos x dx$; г) $\int \frac{5x^3-7x^2+x-3}{5x+2}dx$;

д) $\int \frac{1}{5+3\cos x-5\sin x}dx$; е) $\int \cos^3 x \sin^4 x dx$.

1.8. а) $\int \frac{x^2 dx}{8+x^3}$; б) $\int \frac{9-2x}{x^2-5x+6}dx$; в) $\int arcctg(4x)dx$; г) $\int \frac{3x^3+2x^2+4}{2x-2}dx$;

д) $\int \frac{3\sin x-2\cos x}{1+\cos x}dx$; е) $\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin^3 x dx$.

1.9. а) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x+27}dx$; б) $\int \frac{4x+27}{2x^2-x-6}dx$; в) $\int x\ln^2 x dx$; г) $\int \frac{8x^3-3x^2+4x+2}{4x-2}dx$;

д) $\int \frac{1}{5-4\sin x+2\cos x}dx$; е) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx$.

1.10. а) $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2(x^3)}$; б) $\int \frac{x-13}{x^2-2x-8}dx$; в) $\int x^2 \sin 3x dx$; г) $\int \frac{7x^3+9x^2-5x}{6x+7}dx$;

д) $\int \frac{1}{5+2\sin x+3\cos x}dx$; е) $\int \cos^4 x \sin^5 x dx$.

<u>Тема.</u> Определенный интеграл

Цель: сформировать знания об определенном интеграле, его свойствах и способах вычисления.

Задачи:

сообщить теоретический материал по данной теме;

привести примеры по вычислению определенных интегралов;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Определенный интеграл, свойства.
2. Формула Ньютона-Лейбница.
3. Замена переменной в определенном интеграле.
4. Интегрирование по частям.

5. Несобственные интегралы.

6. Площадь плоской фигуры.

7. Приложения определенного интеграла.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Задания для выполнения

1. Вычислить определенные интегралы:

1.1. а) $\int_{-2}^{1} x^2\sqrt{1-x^3}\,dx$; б) $\int_{0}^{2} xe^{2x}dx$; в) $\int_{3}^{8} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$.

1.2. а) $\int_{1}^{e} \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$; б) $\int_{1}^{3} x^2\ln x\,dx$; в) $\int_{0}^{8} \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}$.

1.3. а) $\int_{0}^{2} \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+1}}$; б) $\int_{0}^{\pi/2} x^2\cos 2x\,dx$; в) $\int_{0}^{63} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt{x+1}}$.

1.4. а) $\int_{0}^{1} \frac{x^2dx}{1+x^6}$; б) $\int_{0}^{1} x^2e^{-x}dx$; в) $\int_{1}^{9} \frac{dx}{\sqrt{3x-1}+\sqrt[3]{3x-1}}$.

1.5. а) $\int_{1}^{9} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int_{1}^{4} \sqrt{x}\ln x\,dx$; в) $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[6]{x^5}}dx$.

1.6. а) $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$; б) $\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x^2}dx$; в) $\int_{0}^{7} \frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x}}$.

1.7. а) $\int_{0}^{1} (e^x-1)^4e^x dx$; б) $\int_{0}^{\pi/6} x\cos 3x\,dx$; в) $\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}$.

1.8. а) $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$; б) $\int_{0}^{e-1} \ln(x+1)dx$; в) $\int_{0}^{2} \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$.

1.9. а) $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{1+x^4}$; б) $\int_{0}^{\pi/4} x\sin 2x\,dx$; в) $\int_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$.

1.10. а) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$; б) $\int\limits_1^2 (x+1)\ln x dx$; в) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}dx$.

2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

а) $\int\limits_e^\infty \frac{dx}{x\ln^3 x}$;

б) $\int\limits_0^2 \frac{xdx}{\sqrt[5]{(x^2-1)^4}}$;

в) $\int\limits_0^\infty \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$;

г) $\int\limits_0^\infty \frac{xdx}{x^2+4}$;

д) $\int\limits_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

е) $\int\limits_1^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}dx$;

ж) $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y=x^2$, $y=2-x^2$;

б) $y=x(3-x)$, $y=x-3$;

в) $xy=5$, $x+y=6$;

г) $y=x^2$, $y=x$;

д) $y=3x-x^2$, $y=x^2-x$;

е) $xy=-2$, $y=x-3$;

ж) $y=x^3$, $y=-1$, $x=0$.

4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* кривой *L*. Сделать чертеж.

а) $y=-4x^3$, $x=0$, $y=-4$;

б) $y=2x-x^2$, $y=0$;

в) $y=-4x^3$, $x=1$, $y=0$;

г) $y^2=-2x+3$, $y=-x$;

д) $y=4x^3$, $x=0$, $y=4$;

е) $y=x^2+1$, $y=3x-1$;

ж) $y=4x^3$, $x=1$, $y=0$.

5. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y=\ln\sin x$ от $x=\frac{\pi}{3}$ до $x=\frac{\pi}{2}$;

б) $y=\frac{x^2}{2}$ от $x=0$ до $x=1$;

в) $x=\frac{t^3}{3}-t$, $y=t^2+2$ от $t=0$ до $t=3$;

г) $x=e^t\cos t$, $y=et^2+2$ от $t=0$ до $t=\ln\pi$.

6. Найти работу, совершаемую при выкачивании воды из конического сосуда, основание которого горизонтально и расположено ниже вершины, если радиус основания равен r и высота равна h.

7. Из цилиндрической цистерны выкачивается жидкость. Какую работу надо совершить при этом, если длина цистерны равна a, а диаметр равен d?

8. Скорость точи меняется по закону $v(t) = 100 + 8t$ м/с. Какой путь пройдет эта точка за промежуток времени [0, 10]?

9. Скорость точи меняется по закону $v(t) = 2(6 - t)$ м/с. Каково наибольшее удаление точки от начала движения?

Раздел «Векторный анализ и элементы теории поля»

Тема. Функции нескольких переменных. Линии и поверхности уровня. Частные производные

Цель: сформировать умения вычисления частных производных, построения линий и поверхностей уровня.

Задачи:

закрепить знания о способах задания функций нескольких переменных;

рассмотреть примеры по вычислению частных производных;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Понятие функции нескольких переменных
2. Область определения функций двух и трех переменных
3. Линии и поверхности уровня.
4. Графики функций двух переменных.
5. Частные производные функции нескольких переменных.
6. Полное приращение функции нескольких переменных.
7. Дифференцируемость функции нескольких переменных.
8. Дифференциал функции нескольких переменных.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Задания для выполнения

1. Найти области определения функций:

1) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$; 2) $z=\ln\left(y^2-4x+8\right)$;

3) $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$; 3) $z=\ln xy$.

2. Найти линии уровня функций:

1) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$; 2) $z=\ln\left(y^2-4x+8\right)$.

3. Найти частные производные данных функций:

1) $z=\left(y^2-4x^3y+8\right)^3$; 2) $z=\ln\left(5y^2-4x^4\right)$;

3) $z=x^y$; 4) $z=\sin^2\left(2x-4y^3\right)$;

5) $z=xye^{xy}$; 6) $z=arctg\dfrac{y}{x}$;

7) $u=x^3+yz^2+3y^4x-6x+2z$; 8) $z=\sin x^2\cos\sqrt{y}$.

3. Найти полные дифференциалы функций:

1) $z=yx^3+yx^2+3y^4-6x+2$; 2) $z=\sqrt{4x^2-3y^3}$;

3) $z=\ln\left(y^2+4x^3\right)$; 4) $z=\sin x^2y^3$.

4. Вычислить приближенно $z=\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1\right)$.

5. Найти частные производные второго порядка данных функций:

1) $z=x^3+yx^2+3xy^4-6x+2y$; 2) $z=x^y$; 3) $z=e^y\cos x^2$; 4) $z=y^{\ln x}$;

5) $z=\cos^2\left(x+2y^3\right)$; 6) $z=\ln\left(y^2+x^4\right)$.

<u>Тема.</u> Экстремум функции нескольких переменных

Цель: Сформировать умения нахождения экстремума функции нескольких переменных.

Задачи:

закрепить знания об экстремуме функции нескольких переменных;

рассмотреть примеры по нахождению экстремума функции;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Экстремумы функции нескольких переменных.
2. Наименьшее и наибольшее значение функции нескольких переменных.
3. Условные экстремумы функций нескольких переменных.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Задания для выполнения

1. Исследовать функции на экстремум:

1) $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$; 2) $z = xy(1 - x - y)$;

3) $z = x^3 y^2 (2 - x - y)$; 4) $z = x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в областях, задаваемых неравенствами:

1) $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$, $2x + 3y - 12 \le 0$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

2) $z = x + xy + y$, $x \ge 1$, $x \le 2$, $y \ge 2$, $y \le 3$.

Тема. Скалярные и векторные поля

Цель: сформировать умения исследования скалярных и векторных полей.

Задачи:

закрепить знания об основных характеристиках скалярных и векторных полей;

рассмотреть примеры по вычислению характеристик скалярного и векторного полей;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Понятие скалярного поля. Примеры.

2.Производная по направлению

3. Градиент и его физический смысл.

4. Понятие векторного поля. Примеры.

5. Дивергенция.

6.Ротор.

7.Потенциальное поле. Соленоидальное поле.

8. Оператор Гамильтона.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Задания для выполнения

1. Найти градиент функции $z = f(x, y)$ и его модуль для функций в данных точках М:

1) $z = 7 - yx^3 - y^2$; M(1; 2).

2) $z = (x - y)^2$; M(1; 3).

3) $u = x^3 + yz^2 + y^4 x$; M(1; 1; 2).

4) $u = 2xy - yz^2 + y^2$; M(-1; 1; 1).

2. Вычислить производную функции $u = x^3 + yz^2 - 6xy^2 + 2z$ в точке A(1, 2,1) по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$. B(3, 0, 2).

3. Вычислить производную функции $z = x^3 + 3xy - 6x + 4y$ в точке A(1, 2) по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$. B(3, 1).

4. Задано скалярное поле U = U(M). $U = 2^{x+y+z}$. $M_0(1,1,-1)$, $\vec{l} = (3,-1,2)$ Требуется:

1) найти значение скалярного поля *U=U(M)* в точке M_0;

2) определить вид линий или поверхностей (гиперповерхностей) уровней данного поля;

3) вычислить производную поля в точке M_0 по направлению вектора $\vec{l}$;

4) найти величину и направление $gradU$ в точке M_0.

5. Найти дивергенцию и ротор полей:

$\vec{F} = x\vec{i} + z\vec{j} - y\vec{k}$;

$\vec{F} = (y + z)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + z\vec{k}$;

$\vec{F} = x\vec{i} + (5y + 1)\vec{j} + 2z\vec{k}$;

$\vec{F} = zy^2\vec{i} + xz^2\vec{j} + x^2 y\vec{k}$.

$\vec{F} = z^2\vec{i} + y^2\vec{j}$;

6. Указать свойства полей:

$\vec{F} = y^2\vec{i} + x\vec{j} + (x+y)\vec{k}$;

$\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$;

$\vec{F} = 3x\vec{i} - 2z\vec{j} + y\vec{k}$;

$\vec{F} = zy^2\vec{i} + xz^2\vec{j} + x^2y\vec{k}$.

Тема. Двойные и криволинейные интегралы. Формула Грина

Цель: сформировать умения вычисления двойных и криволинейных интегралов.

Задачи:

закрепить знания о свойствах двойных и криволинейных интегралов, способах их вычисления и связи;

рассмотреть примеры по вычислению двойных и криволинейных интегралов;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Двойной интеграл и его свойства
2. Криволинейные интегралы первого и второго рода и их свойства
3. Формула Грина.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Задания для выполнения

1. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле. Сделать чертеж области интегрирования.

а) $\int_1^3 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy$;

б) $\int_1^7 dy \int_0^{\sqrt{8y-y^2}} f(x,y)dx$;

в) $\int_{-5}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{-6y-y^2}} f(x,y)dx$;

г) $\int_{-4}^{-2} dx \int_{-\sqrt{-6x-x^2}}^{0} f(x,y)dy$.

2. Вычислить $\iint\limits_G xydxdy$, $G=\{1\le x\le 2, 1\le y\le 2\}$.

3. Вычислить $\iint\limits_G \left(x^2+xy+2y^2\right)dxdy$, $G=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\}$.

4. Вычислить $\iint\limits_G (2x-y)dxdy$, $G=\{x+y=1, x+y=2, 2x-y=1, 2x-y=3\}$.

5. Вычислить $\iint\limits_G e^{x^2+y^2}dxdy$, G – четверть круга $x^2+y^2=1$, расположенная в I квадранте.

6. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

7. Вычислить площадь области G, ограниченной линиями $y^2=x+1$, $x=+y=1$.

8. Вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру L с помощью формулы Грина:

а) $\oint\limits_L (x-y)dx+(x+y)dy$, где L – окружность $x^2+y^2=9$;

б) $\oint\limits_L y^2dx+(x+y)^2dy$, где L – треугольник с вершинами $A(1;0), B(1;1), C(0;1)$

9. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} y^2dl$, где AB – часть окружности $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\le t\le \frac{\pi}{2}$.

10. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} ydl$, где AB – дуга параболы $y^2=2x$ от точки (0; 0) до точки (2; 2).

11. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} x^2dx+xydy$, где AB – четверть окружности $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\le t\le \frac{\pi}{2}$, A соответствует t=0, B соответствует $t=\frac{\pi}{2}$.

12. Вычислить интеграл $\oint\limits_L (x+y)dy$, где L – контур прямоугольника, образованного прямыми $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=1$.

13. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} 3x^2ydx+\left(x^3+1\right)dy$, где:

a) AB – прямая $y=x$, соединяющая точки (0; 0) и (1; 1);

b) AB – парабола $y=x^2$, соединяющая точки (0; 0) и (1; 1).

Раздел «Гармонический анализ»

Тема. Периодические величины

Цель: сформировать умения использовать элементы гармонического анализа.

Задачи:

закрепить знания о периодических функциях и частотных характеристика гармоник;

рассмотреть примеры по определению амплитуды, угловой частоты, начальной фазы гармоник;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Периодические функции. Период. График периодической функции.

2. Гармоники.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Задания для выполнения

1. Дана функция $g(x) = \sin 1{,}5x + 5\cos\frac{3}{4}x$. Найти: $g(0)$; $g(7\pi)$; $g(-12\pi)$. Доказать, что 8π является периодом функции. Найти основной период функции.

2. Найти основной период и наибольшее значение функций:

а) $y = \sin 2x \cdot \frac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x}$;

б) $y = \frac{2tgx}{1 + tg^2 x} \cdot \cos 2x$.

3. Найти амплитуду, частоту, период и начальную фазу гармонических колебаний и построить график:

а) $y=-\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2t$;

б) $y=\sqrt{3}\sin\frac{1}{2}t-\cos\frac{1}{2}t$.

4. Построить графики уравнений:

а) $|y|=|ctgx|$;

б) $|y|=\cos|x|$;

в) $y=|\sin x|$;

г) $y=\sin|x|$.

5. Докажите тождество:

$$\frac{1}{\cos 2x\cdot\cos 4x}+\frac{1}{\cos 4x\cdot\cos 6x}+\ldots+\frac{1}{\cos 18x\cdot\cos 20x}=\frac{2\sin 18x}{\sin 4x\cdot\cos 20x}.$$

6. Найти наименьший положительный период функции $f(x)=2\sin(3x+1)-5\cos(6x-2)+7\sin(9x+4)$.

7. Найти сумму значений параметра а, при котором период функции $y=tg((3a-1)x)$ равен π.

Тема. Ряд Фурье. Теорема Дирихле

Цель: Сформировать умения применять теорему Дирихле и вычислять коэффициенты Фурье.

Задачи:

закрепить знания о тригонометрических рядах и их сходимости;

рассмотреть примеры по вычислению суммы и коэффициентов ряда Фурье;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Ортогональная система функций.

2. Теорему Дирихле и условие Дирихле.

3. Формула общего члена ряда Фурье.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Шипачев, В.С.Задачник по высшей математике: учеб. пособие: доп.

Мин. обр. РФ./ В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 304с.

Задания для выполнения

1. Найти коэффициент a_0 ряда Фурье периодической функции $f(x)=2x+1$ с периодом π, заданной на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

2. Найти коэффициент a_1 ряда Фурье периодической функции $f(x)=2+4\cos x+3\sin 2x$ с периодом 2π.

3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[-\pi,\pi]$ уравнением $f(x)=\begin{cases}-2x & при \quad -\pi\le x<0,\\ 3x & при \quad 0\le x\le\pi.\end{cases}$.

2. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[0,\,2\pi]$ формулой $f(x)=\frac{x}{2}$.

3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[-\pi,\pi]$ формулой $y=|\sin x|$.

Тема. Разложение функций в ряд Фурье непериодических функций

Цель: Сформировать умения разложения в ряд Фурье непериодических функций.

Задачи:

закрепить знания о разложении функции в ряд Фурье;

рассмотреть примеры по разложению в ряд Фурье непериодических функций;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Разложение в ряд Фурье для четных функций.

2. Разложение в ряд Фурье для нечетных функций.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. –

600 с.

2. Шипачев, В.С.Задачник по высшей математике: учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ./ В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 304с.

Задания для выполнения

1. На отрезке $[-\pi,\pi]$ разложить в ряд Фурье функции $f(x)=\{1,\ \text{если}-\pi\le x<0;-1\ \text{если}\,0\le x<\pi\}$ и $f(x)=x$.

2. На отрезке $[-\pi,\pi]$ разложить в ряд Фурье функции:

а) $f(x)=\sin x$; б) $f(x)=x^2$.

3. Представить периодическую функцию $f(x)$, заданную на полупериоде $[0,l]$, рядом Фурье по синусам или косинусам. Построить график функции и график суммы полученного ряда Фурье.

а) $f(x)=\begin{cases}1+\sin x & \text{при}\quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0\quad\text{при}\quad \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$ по косинусам;

б) $f(x)=\begin{cases}0\quad\text{при}\quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ -\cos x\quad\text{при}\quad \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$ по синусам.

Раздел «Дифференциальные уравнения»

Тема. Решение дифференциальных уравнений первого порядка

Цель: сформировать знания о дифференциальных уравнениях первого порядка и методах их решения.

Задачи:

сообщить теоретический материал по данной теме;

привести примеры по решению дифференциальных уравнений первого порядка;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Понятие дифференциального уравнения.
2. Уравнения с разделяющимися переменными.
3. Однородные уравнения.
4. Линейные уравнения первого порядка.
5. Уравнение Я. Бернулли.
6. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
7. Уравнения Лагранжа и Клеро.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Шипачев, В.С.Задачник по высшей математике: учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ./ В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 304с.

Задания для выполнения

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $(2x+5)dy+ydx=0$, $y(0)=1$;

б) $y'\sqrt{1+x^2}-y=0$, $y(0)=4$;

в) $(1+y^2)xdx+(1+x^2)ydy=0$;

г) $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$, $y(1)=2$.

2. Решить однородные дифференциальные уравнения:

а) $xy'=y\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$;

б) $y'-2\frac{y}{x}=\frac{3}{x^2}$;

в) $3y'=\frac{y^2}{x^2}+8\frac{y}{x}+4$;

г) $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$.

3. Решить линейные дифференциальные уравнения:

а) $y' + 2y = e^{3x}$;

б) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}$;

в) $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$;

г) $xy' = x^3 + y$.

4. Решить уравнения Бернулли:

а) $y' + \frac{2y}{x} = 3x^2\sqrt[4]{y^3}$;

б) $y' - \frac{1}{x}y = -y^2$;

в) $y' + 2xy = 2xy^3$;

г) $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$.

5. Решить уравнения в полных дифференциалах:

а) $\left(3x - 5x^2y^2\right)dx + \left(3y^2 - \frac{10}{3}x^3y\right)dy = 0$;

б) $\left(x\cos 2y - 3\right)dx - x^2\sin 2y dy = 0$;

в) $\left(2x + ye^{xy}\right)dx + \left(1 + xe^{xy}\right)dy = 0$;

г) $\left(x^2 + 2xy + 1\right)dx + \left(x^2 + y^2 - 1\right)dy = 0$.

6. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y = \sqrt{1 - y'^2} + y'$;

б) $2yy' - x\left(y'^2 + 4\right) = 0$;

в) $y' + e - xy'^2 = 0$;

г) $xy' - y = \ln y'$.

<u>Тема.</u> Дифференциальные уравнения высших порядков

Цель: сформировать знания о дифференциальных уравнениях высших и методах их решения.

Задачи:

сообщить теоретический материал по данной теме;

привести примеры по решению дифференциальных уравнений высших порядков;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Уравнения, допускающие понижение порядка.

2. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

3. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка.

4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Шипачев, В.С.Задачник по высшей математике: учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ./ В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 304с.

Задания для выполнения

1. Найти частные решения данных дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

а) $y'' = \left(x^2 + 7x + 9\right)e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$;

б) $y'' = -2\left(2x^2 + 2x - 5\right)\cos 2x - 4(2x+1)\sin 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

в) $y'' = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + 2\cos x - x\sin x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$;

г) $y'' = \left(4x^3 + 10x^2 + 2x + 2\right)e^{2x} + 6\sin 3x + 9x\cos 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

2. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y'' - \frac{2}{x}y' = 2x^3$;

б) $x^3 y'' + x^2 y' - 1 = 0$;

в) $xy'' - y' = x^2 e^x$;

г) $(x+1)y'' = y' - 1$.

3. Найти частные решения данных дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

а) $y'' = y' \ln y'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

б) $y'' + y'\sqrt{(y')^2 - 1} = 0$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = -1$;

в) $3y'y'' = 2y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

г) $y'' = 2y^3$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

4. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y'' + y' - 12y = 0$;

б) $y'' - 8y = 0$;

в) $2y'' - 3y' - 2y = 0$;

г) $y'' + 6y' + 10y = 0$;

д) $y'' - 6y' + 9y = 0$;

е) $y'' + 36y = 0$;

ж) $y'' + 3y = 0$.

5. Найти частные решения данных дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

а) $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$;

б) $y'' + 4y' = 0$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 8$;

в) $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$;

г) $4y'' + 4y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

6. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y'' - 2y' + y = e^{2x}$;

б) $y'' + 5y' + 6y = e^{-x}$;

в) $y'' + 6y' + 9y = 9x^2 + 1$;

г) $y'' + 3y' - 4y = (x+1)e^x$;

д) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$;

е) $2y'' + 5y' = 29\cos x$;

ж) $y'' - 4y = e^{2x}\sin 2x$;

з) $y'' - 2y = 2x(\cos x - \sin x)e^x$.

7. Найти частные решения данных дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

а) $y'' + y = 4xe^x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$;

б) $y'' + y = 4\sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;

в) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$, $y(0) = \frac{26}{5}$, $y'(0) = \frac{39}{5}$;

г) $y'' + 3y' + 2y = 4\sin 3x + 2\cos 3x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Раздел «Численные методы»

Тема. Численные методы решения алгебраических уравнений

Цель: сформировать умения решать уравнения численными методами.

Задачи:

закрепить знания о приближенных методах вычислений;

рассмотреть примеры решения уравнений численными методами;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Абсолютная и относительная погрешность.
2. Метод хорд.
3. Метод касательных.
4. Комбинированный метод хорд и касательных.
5. Метод проб.
6. Интерполирование.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Шипачев, В.С.Задачник по высшей математике: учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ./ В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 304с.

Задания для выполнения

1. Оценить абсолютную и относительную погрешность для значения функции $y = \ln x^2$, при $x = 2 \pm 0{,}1$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешность для значения функции $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$, при $x = 2 \pm 0{,}1$.

3. Решить уравнение $\ln x - \sin x = 2$ с точностью $\delta_0 = 0{,}01$.

4. Решить уравнение $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ с точностью $\delta_0 = 0{,}01$.

5. Решить уравнение $x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 1$ с точностью $\delta_0 = 0{,}01$.

6. Задана табличная функция

x	-2	-1	1	3
y	1	1	2	-2

Построить многочлен Лагранжа.

Тема. Численные методы решения систем алгебраических уравнений

Цель: сформировать умения решать системы уравнений численными методами.

Задачи:

закрепить знания о приближенных методах вычислений;

рассмотреть примеры решения систем уравнений численными методами;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Точные методы.

2. Метод простых итераций.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Задания для выполнения

Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} 7x+5y+2z=18 \\ x-y-z=3 \\ x+y+2z=-2 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x-2y-2z=3 \\ x+y-2z=3 \\ x-y-z=1 \end{cases}$.

<u>Тема.</u> Приближенное вычисление интегралов

Цель: сформировать умения применять численные методы к вычислению интегралов.

Задачи:

закрепить знания о приближенных методах интегрирования;

рассмотреть примеры приближенного вычисления интегралов;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Формулы прямоугольников.
2. Формула Симпсона.
3. Формула трапеций.
4. Метод Монте-Карло.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

<u>Задания для выполнения</u>

1. Найти численное решение интеграла Римана $I=\int_0^2 (x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})dx$ с шагом h=0,5.

2. Найти численное решение интеграла Римана $I=\int_1^3 (\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})dx$ с шагом h=0,5.

3. Найти численное решение интеграла Римана $I=\int_0^2 \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,dx$ с шагом h=0,5.

4. Найти численное решение интеграла Римана $I=\int_0^{\pi} \sin(\sin x)dx$ с шагом $h=\frac{\pi}{4}$.

<u>Тема.</u> Приближенное решение дифференциальных уравнений

Цель: Сформировать умения применять численные методы к решению дифференциальных уравнений.

Задачи:

закрепить знания о приближенных методах решения дифференциальных уравнений;

рассмотреть примеры приближенного решения дифференциальных уравнений;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Метод Эйлера.

2. Метод Рунге-Кутта.

3. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

4. Метод Пикара последовательных приближений.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Шипачев, В.С.Задачник по высшей математике: учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ./ В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 304с.

<u>Задания для выполнения</u>

1. Найти решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию: $y' + 2y^2 = e^x,\ y(0) = 0$.

2. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию: $y' + x \cdot y = 2e^y,\ y(0) = 0$.

3. Найти решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию: $y' + 3x \cdot y^3 = x^3,\ y(0) = 1$.

Раздел «Функции комплексного переменного»

Тема. Действия с комплексными числами

Цель: сформировать умения выполнять операции с комплексными числами в алгебраической форме.

Задачи:

закрепить знания о свойствах операций с комплексными числами;

рассмотреть примеры выполнения операций с комплексными числами;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Алгебраическая форма записи комплексного числа. Графическое изображение.

2. Сложение и вычитание комплексных чисел.

3. Умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме.

4. Решение алгебраических уравнений над полем комплексных чисел.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Шипачев, В.С.Задачник по высшей математике: учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ./ В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 304с.

Задания для выполнения

1. Выполнить действия:

а) $(3+5i)+(2+i)$;

б) $(3+5i)-(2+i)$;

в) $(1+4i)-(-1-4i)$;

г) $5(2-3i)$;

д) $(\sqrt{3}+i\sqrt{2})(3-i\sqrt{2})$;

е) $(3-2i)^2$;

ж) $(5-i)(5+i)$;

з) $\frac{10}{2i}$;

и) $\frac{21-i}{1+2i}$;

к) $\frac{1+i}{3-i}$;

л) $\frac{1-4i}{3-2i}$;

м) $\dfrac{6+2i}{5+2i}$;

н) $4i^{15}+4i^{24}-6i^{3}-4$;

о) $i^{16}+4i^{9}-7i^{17}-1$;

п) $6i^{48}+i^{27}-9i^{10}+3$;

р) $5i^{12}+3i^{94}-7i^{13}+6$.

2. Найти решение уравнений:

а) $(1+i)x+(2+i)y=5+3i$;

б) $(3-y+x)(1+i)+(x-y)(2+i)=6-3i$.

3. Решить квадратные уравнения:

а) $x^2-4x+13=0$;

б) $x^2+3x+4=0$;

в) $x^2+2x+2=0$;

г) $2{,}5x^2+x+1=0$.

4. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел z_1 и z_2, изобразить геометрически данные числа и результаты операций:

а) $z_1=-2+i$, $z_2=3-i$;

б) $z_1=2-i$, $z_2=2i$;

в) $z_1=2-2i$, $z_2=-1+i$.

<u>Тема.</u> Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа

Цель: сформировать умение выполнять операции с комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

Задачи:

закрепить знания о свойствах операций с комплексными числами;

рассмотреть примеры выполнения операций с комплексными числами;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Модуль и аргумент комплексного числа.
2. Тригонометрическая форма комплексного числа.
3. Показательная форма комплексного числа.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. –

600 с.

2. Шипачев, В.С.Задачник по высшей математике: учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ./ В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 304с.

Задания для выполнения

1. Найти модуль и аргумент комплексного числа, записать каждое число в тригонометрической и показательной формах:

а) $1+i$;

б) $-\sqrt{3}-i$;

в) $-\sqrt{3}+i$;

г) $1+\sqrt{3}i$;

д) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$;

е) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$;

ж) $1-\sqrt{3}i$;

з) -4;

и) $4i$;

к) $-2i$.

2. Выполнить умножение:

а) $3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

б) $\frac{1}{2}(\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ)\cdot 8(\cos 25^\circ+i\sin 25^\circ)$.

3. Выполнить деление:

а) $6(\cos 70^\circ+i\sin 70^\circ):3(\cos 25^\circ+i\sin 25^\circ)$;

б) $2(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ):4(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)$;

в) $\sqrt{6}(\cos 70^\circ+i\sin 70^\circ):\sqrt{3}(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ)$.

4. Дано: $z_1=-1+\sqrt{3}i$, $z_2=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$. Перевести z_1 и z_2 в тригонометрическую форму и выполнить:

а) $(z_1)^6$;

б) $(z_2)^8$;

в) $(z_1\cdot z_2)^{12}$;

г) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{24}$.

<u>Тема.</u> Понятие функции комплексного переменного

Цель: сформировать умение находить значения функций комплексного переменного.

Задачи:

закрепить знания о свойствах функций комплексного переменного;

рассмотреть примеры вычисления значений функций комплексного переменного;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Понятие функции комплексного переменного.
2. Степенная функция
3. Показательная функция
4. Логарифмическая функция
5. Тригонометрические функции
6. Гиперболические функции
7. Обратные тригонометрические функции

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

<u>Задания для выполнения</u>

1. Представить в алгебраической форме:

а) $tg\left(\frac{\pi}{3}+i\right)$;

б) $(-1+i)^{-3i}$;

в) $Arctg\left(\frac{3+i2\sqrt{3}}{3}\right)$;

г) $Ln(4+i)$.

2. Изобразить область, заданную неравенствами $|z-i|\le 2,\ 0<\operatorname{Im} z<2$.

3. Вычислить значение функции в точке:

а) $w=sh(z^2+1)$ в точке $z_0=2-i.$

б) $w=e^{-3iz}+e^z$ в точке $z_0=-3+i.$

в) $w=\ln(2z-i)$ в точке $z_0=0.5i+\sqrt{3}.$

<u>Тема.</u> Дифференцирование функции комплексного переменного

Цель: Сформировать умение выполнять дифференцирование функции комплексного переменного.

Задачи:

закрепить знания о дифференцируемости функции комплексного переменного;

рассмотреть примеры дифференцирования функции комплексного переменного;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Производная функции комплексного переменного.
2. Теоремы о дифференцируемости функции комплексного переменного.
3. Аналитические и гармонические функции, связь между ними.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Шипачев, В.С.Задачник по высшей математике: учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ./ В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 304с.

<u>Задания для выполнения</u>

1. Проверить условие Коши-Римана и, если возможно, вычислить производную функций:

а) $f(z) = e^{z^2-1}$;

б) $f(z) = \dfrac{\operatorname{Im} z}{z}$;

в) $f(z) = sh(z\bar{z} - i)$;

г) $f(z) = \bar{z}\operatorname{Re} z + \dfrac{1}{z}$;

д) $f(z) = \cos(2z - i)$;

е) $f(z) = \cos(z^2)$.

2. Восстановить голоморфную в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x, y)$ или мнимой части $v(x, y)$ и начальному значению $f(z_0)$: $v = x^2 - y^2 + 2x + 1,\ f(0) = i$.

<u>Тема.</u> Интегрирование функции комплексного переменного

Цель: Сформировать умение интегрировать функции комплексного переменного.

Задачи:

закрепить знания о способах интегрирования функции комплексного переменного;

рассмотреть примеры интегрирования функции комплексного переменного;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Интеграл функции комплексного переменного, его свойства.

2. Интегральная формула Коши, следствия.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

<u>Задания для выполнения</u>

1. Вычислить интеграл от функции комплексной переменной $\int\limits_{-i}^{1}(2\bar{z}-3z)dz$, где l – дуга параболы $y=x^2-1$.

2. Вычислить интеграл от функции комплексной переменной $\int\limits_{-2i}^{2}(\bar{z}-3z^2)dz$, где l – прямая, соединяющая точки.

3. Вычислить интеграл от функции комплексной переменной $\int\limits_{0}^{1-i}(2\bar{z}\operatorname{Re}z-3)dz$, где l – дуга $y=-\sqrt{x}$.

4. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данному пути: $\int\limits_{L}|z|\cdot\bar{z}dz;\ L=\{z:|z|=4,\ \operatorname{Re}z\geq 0\}$

5. Вычислить интегралы с помощью интегральной формулы Коши.

а) $\int\limits_{|z|=3}\frac{\cos(z+\pi i)}{z(e^z+2)}dz$;

б) $\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{(z^2+2)(z+3)}$;

в) $\int\limits_{|z|=2}\frac{\sin iz}{z^2-4z+3}dz$;

г) $\int\limits_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz$.

Раздел «Элементы функционального анализа»

Тема. Линейное пространство. Линейный оператор

Цель: сформировать умение решать задачи функционального анализа.

Задачи:

закрепить знания о свойствах линейных пространств;

рассмотреть примеры нахождения матрицы линейного оператора;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Понятие линейного пространства
2. Размерность линейного пространства
3. Понятие линейного оператора
4. Собственные векторы и собственные числа линейного оператора

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Задания для выполнения

1. Проверить линейность оператора A: $R_3 \to R_3$, если $A\vec{x}=(x_1+x_3,\ x_2,\ 2x_1+x_3)$ для $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)\in R_3$.

2. Проверить линейность преобразования $A\vec{x}=\vec{x}+\vec{a}$, если $\vec{x}$, $\vec{a}\in V_3$, $\vec{a}$ – фиксированный вектор.

3. Написать матрицу оператора A: $R_3 \to R_3$ для $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)\in R_3$ в стандартном базисе $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$:

а) $A\vec{x}=(x_1+x_3, x_2, 2x_1+x_3)$;

б) $A\vec{x}=(x_3,\ x_1, x_2)$.

4. Найти координаты образа $\vec{y} = A\vec{x}$, $A\vec{x}=(x_1+x_3,\ x_2,\ 2x_1+x_3)$, $\vec{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)=(3.\ -1,\ 2)\in R_3$ в стандартном базисе $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$.

5. Найти собственные числа:

а) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A:

а) $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

<u>Тема.</u> Решение уравнений и систем методом сжимающих отображений

Цель: сформировать умение решать уравнения и системы на основе принципа сжимающих отображений.

Задачи:

закрепить знания о принципе сжимающих отображений;

рассмотреть примеры решения уравнений и систем методом итераций;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Метод итераций и метод простых итераций как частные случаи применения принципа сжимающих отображений.

2. Сведение исходного уравнения к виду, пригодному для применения метода итераций.

3. Суть и обоснование метода итераций.

4. Условие окончания вычислений в методе итераций.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ

/ В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Задания для выполнения

1. Определить, применим ли метод итераций для уравнений:

а) $X = \ln(3X + 2)$ на отрезке [0,5]. *А* на отрезке [1,5]?

б) $X = e^{X-9}$ на отрезке [10,12]. *А* на отрезке [0,1]?

2. Свести к виду, пригодному для применения метода итераций уравнения:

а) $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ на отрезке [2, 3];

б) $xtg\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = 0$ на отрезке [-1, 1];

в) $9 - x^2 - e^x = 0$ на отрезке [1, 2].

3. Доказать, что в условиях из неравенства $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon \cdot \frac{1-q}{q}$ вытекает неравенство $|x_{k+1} - c| < \varepsilon$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 5 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 4 = 0. \end{cases}$

Раздел «Теория вероятностей»

Тема. События и их классификация. Классическое определение вероятности

Цель: сформировать знания о событиях ,вероятности события, изучить классическое определение вероятности.

Задачи:

сообщить теоретический материал по данной теме;

привести примеры по решению задач на классическое определение вероятности;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Случайные события.
2. Вероятность.
3. Операции над событиями.
4. Основные формулы комбинаторики.
5. Классическое определение вероятности.
6. Противоположные события.
7. Геометрическая вероятность.

Рекомендуемая литература

1. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – СПб: Изд-во «Лань», 2009. – 688 с. (ЭСБ «Лань» -online).

2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб.пособие: / П.Е. Данко [и др.]. – 6-е изд. – Часть 2. – М.: ОНИКС 21 век: Мир и образование, 2006. – 416 с.

Задания для выполнения

1. Из 40 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент знает 30. Найти вероятность того, что среди наугад выбранных вопросов студент знает: а) 3 вопроса; б) 2 вопроса; в) 1 вопрос.

2. В партии из 100 изделий 10 бракованных. Какова вероятность того, что среди взятых 4 изделий 3 будут не бракованными?

3. Найти вероятность того, что ребёнок, не умеющий читать, играя с кубиками, на которых нарисованы буквы К, Н, И, Г, А составит слово КНИГА.

4. В группе 10 юношей и 10 девушек. Для дежурства на вечере путем жеребьевки выделяют 5 человек. Какова вероятность того, что в число дежурных войдут: 5 юношей; б) 2 юноши и 3 девушки?

5. На плоскость, разграфлённую параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на 6 см, наудачу брошен круг радиуса 1 см. Найти вероятность того, что круг не пересечёт ни одной прямой.

6. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях будет меньше 6.

7. В круг радиуса R помещен меньший круг, радиус r которого в два раза меньше R. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в больший круг, попадёт в меньший круг, если попадание точки в любое место большого круга равновозможное.

8. В квадратном броневом щите размерами 1,5 на 1,5 метра имеется невидимая для противника амбразура размерами 10 на 20 см. Определить вероятность того, что пуля, попавшая в щит, попадет в амбразуру, если попадание в любую точку щита равновозможное.

Тема. Основные теоремы

Цель: сформировать знания о теоремах теории вероятностей.

Задачи:

сообщить теоретический материал по данной теме;

привести примеры по решению задач на применение теорем сложения и умножения вероятностей, условную вероятность;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Теорема сложения вероятностей.

2. Теорема умножения вероятностей.

3. Условная вероятность.

4. Вероятность появления хотя бы одного события.

5. Формула полной вероятности.

6. Формулы Бейеса.

Рекомендуемая литература

1. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – СПб: Изд-во «Лань», 2009. – 688 с. (ЭСБ «Лань» -online).

2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб.пособие: / П.Е. Данко [и др.]. – 6-е изд. – Часть 2. – М.: ОНИКС 21 век: Мир и образование, 2006. – 416 с.

Задания для выполнения

1. Для сигнализации о возгорании установлены два независимо работающих датчика. Вероятности того, что при возгорании датчик сработает, для первого и второго датчиков соответственно равны 0,9 и 0,95. Найти вероятность того, что при пожаре сработает: а) один датчик; б) оба датчика; в) хотя бы один датчик.

2. Вероятность попадания в некоторую цель при стрельбе из первого орудия равна 0,8, при стрельбе из другого орудия – 0,7. Найти вероятность поражения цели при одновременном выстреле обоих орудий. Цель будет поражена, если будет хотя бы одно попадание из какого – либо орудия.

3. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором, третьем справочнике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что формула содержится: а) только в одном справочнике; б) только в двух справочниках; в) во всех трех справочниках.

4. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

5. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0,4.

Произведены 3 независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них допущенная ошибка превысит заданную точность.

6. В первой бригаде проводятся в три раза больше продукции, чем во второй. Вероятность того, что производимая продукция окажется стандартной, для первой бригады равна 0,7, для второй – 0,8. а) найти вероятность того, что взятая наугад единица продукции будет стандартной; б) взятая наугад единица продукции будет стандартной. Взятая наугад единица продукции оказалась стандартной. Какова вероятность того, что она произведена второй бригадой?

7. Среди студентов института – 30% первокурсники, 35% студентов учатся на 2-м курсе, на 3-м и 4-м курсе их 20% и 15% соответственно. По данным деканатов известно, что на первом курсе 20% студентов сдали сессию только на отличные оценки, на 2-м – 30%, на 3-м – 35%, на 4-м – 40% отличников. а) найти вероятность того, что случайно выбранный студент сдал сессию на отлично; б) наудачу вызванный студент оказался отличником. Какова вероятность того, что он (или она) – третьекурсник?

8. Покупатель с равной вероятностью посещает каждый из трех магазинов. Вероятность того, что покупатель купит товар в первом магазин, равна 0,4, во втором – 0,6 и в третьем – 0,8. а) найти вероятность того, что покупатель купит товар; б) покупатель купил товар. Какова вероятность того, что он купил его во втором магазине?

9. Два предприятия выпускают однотипные изделия. Причем второе выпускает 55% всех изделий. Вероятность нестандартного изделия первым предприятием равна 0,1, вторым – 0,15. а) определить вероятность того, что взятое наудачу изделие окажется нестандартным; б) взятое изделие оказалось нестандартным. Какова вероятность того, что оно выпущено на втором предприятии.

10. В магазин поступают телевизоры четырех заводов. Вероятность того, что в течение года телевизор не будет иметь неисправность, равна: для первого завода – 0,9; для второго – 0,8; для третьего – 0,8; для четвертого – 0,99. а) найти вероятность того, что случайно выбранный телевизор выйдет из строя в течении года; б) случайно выбранный телевизор в течение года вышел из строя. Какова вероятность того, что он изготовлен на первом заводе?

Тема. Повторение испытаний

Цель: сформировать знания о формуле Бернулли, теоремах Лапласа.

Задачи:

сообщить теоретический материал по данной теме;

привести примеры по решению задач на применение формулы Бернулли и теорем Лапласа;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Формула Бернулли.

2. Локальная теорема Лапласа.

3. Интегральная теорема Лапласа.

4. Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях.

5. Формула Пуассона.

Рекомендуемая литература

1. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – СПб: Изд-во «Лань», 2009. – 688 с. (ЭСБ «Лань» -online).

2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб.пособие: / П.Е. Данко [и др.]. – 6-е изд. – Часть 2. – М.: ОНИКС 21 век: Мир и образование, 2006. – 416 с.

Задания для выполнения

1. По мишени произведено 3 выстрела. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Найти вероятность n попаданий в мишень, где n=0, 1, 2, 3.

2. Пусть вероятность того, что студент опоздает на лекцию, равна 0,08. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 96 студентов.

3. Вероятность выигрыша по билету лотереи равна 0,125. Найти вероятность выиграть не менее чем по двум билетам из пяти.

4. Сколько раз надо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число выпадений шестерки было равно 5?

5. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена: а) 125 раз; б) не менее 100 и не более 160 раз.

6. Чему равна вероятность того, что среди 100 случайных прохожих окажутся 32 женщины. Предполагается, что число мужчин и женщин в городе одинаково.

7. Вероятность того, что пассажир опоздает на отправлению поезда, равна 0,2. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 625 пассажиров и вероятность этого события.

8. Вероятность наступления события А в каждом из 100 независимых испытаний Равна 0,8. Найти вероятность того, что событие А появится в этих испытаниях: 1) 90 раз; 2) не менее 80 и не более 90 раз.

9. Игральную кость подбрасывают 320 раз. Какова вероятность того, что цифра 5 при этом выпадет: а) ровно 245 раз; б) не менее 70 и не более 83 раз?

10. Вероятность появления бракованных деталей при их массовом производстве равна 0,01. Определить вероятность того, что в партии из 300 деталей будет: а) ровно 7 бракованных; б) не более 7 бракованных.

11. К пульту охранной системы подключено 4000 датчиков, причём вероятность появления тревожного сигнала на каждом из них равна 0,0005. Определить вероятность тревоги (для чего достаточно хотя бы одного сигнала).

12. Корректура книги объёмом в 400 страниц имеет 50 опечаток. Определить вероятность того, что на случайно выбранной странице окажется: а) ни одной опечатки; б) не более трёх опечаток.

13. Вероятность появления бракованных деталей при их массовом производстве равна 0,003. Определить вероятность того, что в партии из 2000 деталей будет: а) ровно 6 бракованных; б) не более 6 бракованных.

14. Вероятность появления бракованных деталей при их массовом производстве равна 0,05. Определить вероятность того, что в партии из 100 деталей будет: а) ровно 5 бракованных; б) не более 5 бракованных.

15. Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,004. Какова вероятность того, что из 750 проверяемых изделий не выдержат испытания: а) 6 изделий; не более 6 изделий?

<u>Тема.</u> Дискретные случайные величины

Цель: сформировать знания о дискретных случайных величинах.

Задачи:

сообщить теоретический материал по данной теме;

привести примеры по решению задач на нахождение числовых характеристик дискретных случайных величин, на составление ряда распределения;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Понятие случайной величины.
2. Дискретная случайная величина.
3. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины.
4. Функция распределения дискретной случайной величины.
5. Числовые характеристики дискретной случайной величины.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб.пособие: / П.Е. Данко [и др.]. – 6-е изд. – Часть 2. – М.: ОНИКС 21 век: Мир и образование, 2006. – 416 с.

<u>Задания для выполнения</u>

1. В команде 16 спортсменов, из которых 6 перворазрядников. Наудачу выбирают двух спортсменов. Построить ряд распределения и функцию распределения числа перворазрядников среди выбранных.

2. Задана функция распределения случайной величины *X*. Найти ряд распределения, а также вероятности: $P\{X=1\}$, $P\{1<X\le 8\}$.

а) $F(x)=\begin{cases}0; & \text{при } x\le 0\\ 0{,}3, & \text{при } 0<x\le 1\\ 1, & \text{при } x>1\end{cases}$;

б) $F(x)=\begin{cases}0; & \text{при } x\le 1\\ 0{,}2, & \text{при } 1<x\le 3\\ 0{,}35, & \text{при } 3<x\le 8\\ 1, & \text{при } x>8\end{cases}$

3. Дискретная случайная величина *X* задана рядом распределения

x_i	1,1	1,4	1,7	2,0	2,3
p_i	0,1	0,2	03	0,3	0,1

Построить многоугольник распределения, график функции распределения, найти вероятности: $P\{X>1{,}4\}$, $P\{1{,}4\le X\le 2{,}3\}$.

4. Заданы распределения двух независимых случайных величин *X* и *Y*.

x_i	0	1	2
p_i	0,2	0,4	0,4

y_i	2	3	4
p_i	0,3	0,3	0,4

Построить ряд распределения случайных величин: а) $Z=X+Y$; б) $W=X-Y$.

5. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Имеется три патрона. При попадании в мишень стрельба прекращается. Дискретная случайная величина – число израсходованных патронов. Найти закон распределения, числовые характеристики, функцию распределения и построить её график.

6. Из 10 телевизоров на выставке 4 оказались фирмы «Sony». Наугад для осмотра выбрано 3 телевизора. Составить закон распределения X – числа телевизоров фирмы «Sony» среди трех отобранных. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Найти и построить функцию распределения $F(X)$.

7. По каналу связи передаются последовательно три сообщения, каждое их которых может быть искажено. Вероятности искажения первого, второго и третьего сообщений соответственно равны 0,1, 0,15 и 0,2. Дискретная случайная величина – число правильно переданных сообщений. Найти закон распределения, числовые характеристики, функцию распределения и построить её график.

8. В партии из 6 деталей имеется 4 стандартные. Наудачу отобраны 3 детали. Дискретная случайная величина – число стандартных деталей среди отобранных. Найти закон распределения, числовые характеристики, функцию распределения и построить её график.

9. Устройство состоит из трёх независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Дискретная случайная величина – число отказавших элементов в одном опыте. Найти закон распределения, числовые характеристики, функцию распределения и построить её график.

10. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Имеется 4 патрона. При попадании в мишень стрельба прекращается. Дискретная случайная величина – число израсходованных патронов. Найти закон распределения, числовые характеристики, функцию распределения и построить её график.

<u>Тема.</u> Непрерывные случайные величины

Цель: сформировать знания о непрерывных случайных величинах.

Задачи:

сообщить теоретический материал по данной теме;

привести примеры по решению задач на нахождение числовых характеристик непрерывных случайных величин, плотности распределения;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Непрерывная случайная величина.
2. Функция распределения.
3. Плотность распределения.
4. Свойства плотности распределения.
5. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.
6. Биномиальное распределение.
7. Равномерное распределение.
8. Показательное распределение.
9. Нормальное распределение.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – СПб: Изд-во «Лань», 2009. – 688 с. (ЭСБ «Лань» -online).

2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб.пособие: / П.Е. Данко [и др.]. – 6-е изд. – Часть 2. – М.: ОНИКС 21 век: Мир и образование, 2006. – 416 с.

<u>Задания для выполнения</u>

1. Функция распределения некоторой непрерывной случайной величины задана следующим образом: $F(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,1)\\ ax+b, & x\in[1,3]\\ 1, & x\in(3,+\infty)\end{cases}$. Определить параметры a и b, найти плотность вероятности, числовые характеристики и вероятность попадания случайной величины в интервал [2, 3]. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

2. Случайная величина задана функцией распределения. Найти: 1) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3})$; 2) функцию плотности распределения вероятностей *f(x)*; 3) числовые характеристики случайной величины X – $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 4) построить графики *F(x)* и *f(x)*:

а) $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \frac{x}{7} \text{ при } 0<x\le 7,;\\ 1 \text{ при } x>7.\end{cases}$

б) $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \frac{x^2}{4} \text{ при } 0<x\le 2,;\\ 1 \text{ при } x>2.\end{cases}$

в) $F(x)=\begin{cases}0,\ x<0\\ \frac{3x^3}{8},\ 0\le x\le 2;\\ 1,\ x>2\end{cases}$

г) $F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ \frac{x^2}{16},\ 0<x\le 4\cdot\\ 1,\ x>4\end{cases}$

4. Заданы математическое ожидание 11 и среднее квадратическое отклонение 3 нормально распределенной случайной величины x. Найти: 1) вероятность того, что x примет значение, принадлежащее интервалу (17; 26); 2) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|x-11|$ окажется меньше 12.

5. Математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение нормально распределённой случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытаний случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (15, 25).

<u>Тема.</u> Предельные теоремы теории вероятностей

Цель: сформировать знания о предельных теоремах теории вероятностей.

Задачи:

сообщить теоретический материал по данной теме;

привести примеры по решению задач на предельные теоремы теории вероятностей;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Неравенство Чебышева.

2. Теорема Чебышева.

3. Неравенство Маркова.

4. Теорема Бернулли.

5. Центральная предельная теорема.

Рекомендуемая литература

1. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – СПб: Изд-во «Лань», 2009. – 688 с. (ЭСБ «Лань» -online).

2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб.пособие: / П.Е. Данко [и др.]. – 6-е изд. – Часть 2. – М.: ОНИКС 21 век: Мир и образование, 2006. – 416 с.

Задания для выполнения

1. В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет включена, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом (математическим ожиданием) включенных ламп за время T окажется: а) меньше трех; б) не меньше трех.

2. Вероятность появления события в каждом испытании равна $\frac{1}{4}$. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события будет заключено в пределах от 150 до 250, если будет произведено 800 испытаний.

3. В урне 80 белых и 20 черных шаров. Сколько шаров (с возвращением)нужно вынуть из урны, чтобы с вероятностью 0,95 можно было ожидать, что частота появления белого шара будет отклоняться от вероятности меньше чем на 0,1?

4. Всхожесть семян некоторой культуры равна 0,85. Оценить вероятность того, что из 400 посеянных семян число взошедших будет заключено в пределах от 300 до 380.

5. Число дождливых дней в году для данной местности является случайной величиной X с $M(X)=100$. Оценить вероятность того, что в следующем году в данной местности будет меньше 140 дождливых дней.

6. Игральная кость подбрасывается 1200 раз. Оценить вероятность отклонения относительной частоты выпадения 6 очков от вероятности этого события (по модулю) на величину, меньшую, чем 0,02.

7. Дисперсия каждой из 2000 независимых случайных величин не превышает 2. Оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий меньше 0,04.

8. Поезд состоит из 49 вагонов. Вес вагона – случайная величина X, для которой $M(X)$=60 т, $\sigma(X)$=7 т. Локомотив может везти поезд, если масса последнего не превосходит 3000 т. В противном случае подцепляется дополнительный локомотив. Какова вероятность того, что этого делать не придется?

Раздел «Случайные процессы»

Тема. Понятие случайного процесса. Марковский случайный процесс. Цепи Маркова

Цель: сформировать умение определять матрицу перехода состояний системы.

Задачи:

закрепить знания о Марковских случайных процессах;

рассмотреть примеры вычисления матрицы перехода;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Понятие случайного процесса
2. Понятие марковского случайного процесса.
3. Марковские процессы с дискретным временем.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

3. Шипачев, В.С.Задачник по высшей математике: учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ./ В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 304с.

Задания для выполнения

1. Задана матрица вероятностей перехода для цепи Маркова за один шаг. Найти матрицу перехода данной цепи за два шага $\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

2. Задана матрица вероятностей перехода для цепи Маркова за один шаг. Найти матрицу перехода данной цепи за два шага $\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

Тема. Марковские процессы с непрерывным временем

Цель: сформировать умение определять вероятности состояний равновесия марковского случайного процесса.

Задачи:

закрепить знания о марковских процессах с непрерывным временем и процессах размножения и гибели как частном случае марковских случайных процессов;

рассмотреть примеры вычисления интенсивности переходов;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Марковские процессы с непрерывным временем.

2. Процессы размножения и гибели.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

3. Шипачев, В.С.Задачник по высшей математике: учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ./ В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 304с.

Задания для выполнения

1. В процессе эксплуатации ЭВМ может рассматриваться как физическая система *S,* которая в результате проверки может оказаться в одном из следующих состояний: S_1 – ЭВМ полностью исправна; S_2 – ЭВМ имеет неисправности в оперативной памяти, при которых она может решать задачи; S_3 – ЭВМ имеет существенные неисправности и может решать ограниченный класс задач; S_4 – ЭВМ полностью вышла из строя.

В начальный момент времени ЭВМ полностью исправна (состояние S_1). Проверка ЭВМ производится в фиксированные моменты времени t_1, t_2, t_3. Про-

цесс, протекающий в системе *S,* может рассматриваться как однородная марковская цепь с тремя шагами (первая, вторая, третья проверки ЭВМ). Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\|P_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}0 \end{Vmatrix}.$$

Определите вероятности состояний ЭВМ после трёх проверок.

2. Определить вероятности состояний равновесия марковского случайного процесса с четырьмя возможными состояниями E_0, E_1, E_2, E_3 и матрицей интенсивностей переходов

$$\mathbf{Q} = \begin{array}{c} \\ E_0 \\ E_1 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_0 & E_1 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix} \end{array}.$$

Раздел «Математическая статистика»

Тема. Точечные и интервальные оценки параметров распределения

Цель: сформировать умение выполнять первичную статистическую обработку данных.

Задачи:

закрепить знания о свойствах точечных оценок;

рассмотреть примеры вычисления точечных и интервальных оценок;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Числовые характеристики вариационных рядов.
2. Точечные оценки и их свойства.
3. Гистограмма и полигон частот.
4. Доверительный интервал
5.. Интервальные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

3. Шипачев, В.С.Задачник по высшей математике: учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ./ В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 304с.

Задания для выполнения

1. Имеются данные объемного веса 24 проб грунта: 2,00 1,69 1,86 1,96 1,84 1,68 1,58 1,94 1,78 1,86 1,94 2,02 1,81 1,72 1,68 1,56 1,92 2,00 1,69 1,76 1,68 1,84 1,63 1,98. Построить сгруппированный статистический ряд. Вычислить основные статистические характеристики инженерно-геологического элемента: нормативное значение, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации, ошибку нормативного значения, показатель точности, ошибка среднего квадратичного отклонения, показатели ассиметрии и эксцесса и их ошибки.

2. Предприятие получает сырье, характеризующееся процентным содержанием в нем полезного вещества *A,* а также стабильностью этого показателя. Для поступившей партии сырья были произведены анализы концентрации вещества *A* по 40 опытам: 2,17; 2,27; 2,60; 2,76; 2,81; 3,00; 3,05; 3,06; 3,22; 3,28; 3,37; 3,60; 3,63; 3,68; 3,69; 3,90; 4,27; 4,39; 4,67; 4,69; 4,84; 5,02; 5,02; 5,02; 5,17; 5,29; 5,35; 5,61; 5,62; 5,62; 6,01; 6,64; 6,68; 7,07; 7,12; 7,35; 7,36; 7,40; 7,99; 8,19.

Требуется: построить сгруппированный вариационный ряд; построить сгруппированный статистический ряд; построить эмпирическую функцию распределения; построить гистограмму и полигон относительных частот; найти выборочные точечные характеристики: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, эксцесс, асимметрию, моду, коэффициент вариации.

3. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания m нормального закона с надежностью 0,9; зная выборочную среднюю $\overline{X} = 78{,}64; n = 70; \sigma = 10$.

4. Имеются данные объемного веса 24 проб грунта: 2,00 1,69 1,86 1,96 1,84 1,68 1,58 1,94 1,78 1,86 1,94 2,02 1,81 1,72 1,68 1,56 1,92 2,00 1,69 1,76 1,68 1,84 1,63 1,98.Найти доверительный интервал, покрывающий математическое ожидание с заданной доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha - 0{,}95$, считая σ неизвестным; найти доверительный интервал, покрывающий среднее квадратическое отклонение σ с заданной доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha - 0{,}95$.

<u>Тема.</u> Корреляционно-регрессионный анализ

Цель: сформировать умение выполнять операции с комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

Задачи:

закрепить знания о корреляционном и регрессионном анализе;

рассмотреть примеры вычисления коэффициента корреляции и построения линейной регрессии.

<u>Основные вопросы</u>

1. Понятие регрессии, регрессионные зависимости.
2. Виды регрессионной зависимости.
3. Ковариация. Коэффициент корреляции.

4. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

3. Шипачев, В.С.Задачник по высшей математике: учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ./ В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 304с.

Задания для выполнения

1. Изучается зависимость себестоимости одного изделия (Y, р.) от величины выпуска продукции (X, тыс. шт.) по группе предприятий за отчётный период. Получены следующие данные:

X	2	3	4	5	6
Y	1,9	1,7	1,8	1,6	1,4

Провести корреляционно-регрессивный анализ зависимости себестоимости одного изделия от выпуска продукции.

2. По заданной выборке найти линейную функцию методом наименьших квадратов. Построить чертеж. Обосновать правильность выбора степени многочлена, если относительная погрешность данных равна одному проценту среднего значения зависимой переменной.

x_i	68	62	65	70	63	63	67	68	55	66	58
y_i	-264	-240	-253	-275	-248	-243	-264	-267	-213	-218	-223

3. Найти выборочное уравнение прямой $\overline{y_x} - \overline{y} = r_b \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$ регрессии $У$ на X по данной корреляционной таблице:

Y	X						
	5	10	15	20	25	30	n_y
10	2	3	-	-	-	-	5
20	-	7	3	-	-	-	10
30	-	-	2	50	2	-	54
40	-	-	1	10	6	-	17
50	-	-	-	4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	$n = 100$

Тема. Метод наименьших квадратов

Цель: сформировать умение нахождения параметров функциональной зависимости методом наименьших квадратов.

Задачи:

закрепить знания о свойствах операций с комплексными числами;

рассмотреть примеры выполнения операций с комплексными числами;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Назначение и суть метода наименьших квадратов.

2. Формулы для нахождения параметров линейной зависимости методом наименьших квадратов.

3. Назначение и суть линеаризации функции.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Задания для выполнения

1. По заданной выборке найти линейную функцию методом наименьших квадратов. Построить чертеж. Обосновать правильность выбора степени многочлена, если относительная погрешность данных равна одному проценту среднего значения зависимой переменной.

x	90	95	88	86	71	87	77	48	82
y	69	79	59	91	27	57	27	14	43

2. По заданной выборке установить вид функциональной зависимости. Найти параметры эмпирической формулы.

x	0	1	2	3	4	5
y	4.81	3.01	1.70	1.12	0.62	0.40

Раздел «Статистическое оценивание и проверка гипотез. Статистические методы обработки экспериментальных данных»

Тема. Обработка экспериментальных данных

Цель: сформировать умение применять статистические критерии для обработки экспериментальных данных.

Задачи:

закрепить знание алгоритма проверки статистических гипотез;

рассмотреть примеры проверки статистических гипотез;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Статистические гипотезы.

2. Статистический критерий проверки нулевой гипотезы. Наблюдаемое значение критерия.

3. Критическая область. Критические точки и их нахождение.

4. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей.

5. Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых известны.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

Задания для выполнения

1. По двум выборкам нормальных законов распределения проверить гипотезу о равенстве дисперсий (при конкурирующей гипотезе об их неравенстве) при уровне значимости 0.1.

Первая выборка: 39.5 53.9 59.0 29.8 73.9 42.7 40.5 47.0 45.3 59.1

Вторая выборка: 61.4 50.3 78.7 16.6 77.0 34.3 101.6 21.9 40.1 130.9

Определить: дисперсию первой выборки; дисперсию второй выборки; вычисленное значение критерия; теоретическое значение критерия; вывод о принятии или не принятии гипотезы.

2. По данным двух выборок нормального закона распределения проверить гипотезу о равенстве генеральных средних (при конкурирующей гипотезе об их неравенстве) при уровне значимости $\alpha = 0.030$.

Найти: выборочное среднее для первой выборки; выборочное среднее для второй выборки; вычисленное значение критерия; табличное значение; вывод о принятии или не принятии гипотезы.

Выборка 1: 13.2 115.7 68.9 13.1 58.1 110.7 48.1 35.9 8.6 109.4

Выборка 2: 24.3 88.9 79.6 8.8 58.0 56.0 64.6 34.2 36.9 48.2 66.0 65.1 58.5

3. По данным двух выборок нормального закона распределения (первая - с дисперсией S_1^2, вторая – с дисперсией S_2^2) проверить гипотезу о равенстве средних значений при уровне значимости α (при конкурирующей гипотезе об их неравенстве). $S_1 = 38$, $S_2 = 24$, $\alpha = 0.020$. В ответе привести: выборочное среднее для первой выборки; выборочное среднее для второй выборки; вычисленное значение критерия; критическое значение; вывод о принятии или не принятии гипотезы.

Выборка 1: 139.3 31.2 131.2 112.1 54.0 77.3 24.9 106.0 96.4 22.2 92.8 111.0 49.6 61.3 95.9 52.1 124.0 57.8 99.5 71.0 79.3 99.6 133.9 1.7 122.0 41.3 27.0 -6.7 27.8 60.8 78.6 171.0 78.4 56.7 50.0 46.3 91.6 151.7 115.4 21.9 42.8 78.0 114.9 91.2 107.8 100.9 97.0 52.3 34.4 49.1 111.6 77.4 1.2 28.0 55.7 58.0 55.1 41.5 97.1 81.9 48.3 113.9 33.3 41.5 50.2 148.5 45.0 98.3 7.9 75.3 67.3 106.5 65.9 104.4 17.1 63.9 108.5 58.6 33.0 115.5 -13.3 60.3 71.1 56.3 34.9 61.5 65.2 71.8 87.4 57.8 63.1 56.9 126.0 90.9 70.6 132.5 86.3 108.2 82.0 56.4

Выборка 2: 116.0 65.5 115.1 89.5 62.7 92.7 63.9 71.8 73.7 70.1 88.6 81.5 70.5 102.8 76.8 83.2 105.0 88.5 85.5 105.6 54.6 85.5 60.1 76.8 47.8 48.3 119.7 109.4 42.6 46.1 43.0 53.1 86.3 65.4 61.0 21.1 59.7 70.1 101.9 59.4 70.0 53.7 59.5 82.3 111.8 74.3 52.9 82.5 86.4 49.1 112.8 83.1 69.1 39.1 42.0 40.1 37.8 76.7 74.7 118.7 65.4 84.1 54.9 13.5 23.4 75.8 87.4 56.9 48.9 35.0 66.0 98.0 81.6 91.2 74.3 87.4 81.6 80.9 47.3 62.1 65.2 57.1 31.0 81.4 81.7 42.2 93.1 62.4 65.7 87.9 67.0 65.3 64.2 69.5 78.5 111.8 38.7 54.2 56.3 63.0

4. При проведении n_1 испытаний в первой серии число благоприятных исходов равнялось m_1. Во второй серии из n_2 испытаний число благоприятных

исходов равнялось m_2. Проверить гипотезу о равенстве вероятностей благоприятного исхода в двух сериях (при конкурирующей гипотезе об их неравенстве) при уровне значимости α. В ответе привести: вычисленное значение критерия; критическое значение; вывод о принятии или не принятии гипотезы. $n_1 = 500$, $m_1 = 391$, $n_2 = 700$, $m_2 = 523$, $\alpha = 0.040$.

Тема. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Критерий согласия Пирсона

Цель: сформировать умение применять статистические критерии для проверки гипотез о законах распределения.

Задачи:

закрепить знания о свойствах нормального распределения;

рассмотреть примеры проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Примеры и свойства законов распределения.

2. χ^2 – критерий Пирсона.

3. Критерий Колмогорова-Смирнова.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Задания для выполнения

Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить, согласуется ли гипотеза H_0 о нормальном законе распределения генеральной совокупности X с эмпирическом распределением выборки объема n.

-10; -6	-6; -2	-2; 2	2; 6	6; 10	10; 14
5	8	12	8	5	2

Раздел «Вариационное исчисление и оптимальное управление»

Тема. Функционал, его вариация

Цель: Сформировать умение определять вариацию функционала.

Задачи:

закрепить знания о свойствах операций с комплексными числами;

рассмотреть примеры выполнения операций с комплексными числами;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Понятие о функционале.
2. Расстояние между функциями.
3. Приращение и вариация функционала.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Задания для выполнения

1. Найти значения функционала $J(\acute{o}) = \int_0^1 \acute{o}dx$, если $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = 1 - (x-1)^2$.

2. Найти расстояние между функциями $y = x^2$ и $y = x^3$ в классах $C[0,1]$ и классах $C_1[0,1]$.

3. Для функционала $J[y(x)] = \int_0^1 xy^2 y'dx$ найти приращение и вариацию если $y(x) = x^2$, $\delta y = x - 2$.

4. $J(u) = \int_2^4 \left(xu'^4 - 2uu'^3\right)dx$, $u(2) = 1$, $u(4) = 5$. Найти первую вариацию.

5. $J(u) = \int_0^2 \left(xu' + u'^2\right)dx$, $u(0) = 1$, $u(2) = 0$. Найти первую вариацию.

<u>Тема.</u> Экстремумы функционалов

Цель: сформировать умение находить экстремали функционала.

Задачи:

закрепить знания о частных способах решения уравнения Эйлера;

рассмотреть примеры нахождения экстремалей;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Понятие экстремума функционала.

2. Уравнение Эйлера.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

<u>Задания для выполнения</u>

1. Найти экстремаль функционала $V[y(x)]=\int_0^1[(y')^2-y^2]dx$, $y(0)=0$, $y(1)=1$.

2. Решить задачу о максимальной площади между двумя кривыми.

3. Найти экстремали функционала $V[y(x)]=\int_0^1[y+xy'+(y')^2]dx$, $y(0)=0$, $y(1)=c$.

4. Найти экстремаль $\int_0^1 y'^2dx$, $y(0)=1$, $y(1)=6$ и $\int_0^1 y(t)dt=3$.

5. Найти экстремали изопериметрической задачи $V[y(x)]=\int_0^1(y')^2dx$, $\int_0^1 ydx=0$, $y(0)=1$, $y(1)=0$.

Раздел «Уравнения математической физики»

Тема. Уравнения математической физики

Цель: сформировать умение решать уравнения математической физики.

Задачи:

закрепить знания о типах дифференциальных уравнений в частных производных;

рассмотреть примеры решения уравнений;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Типы уравнений второго порядка в частных производных.
2. Уравнение колебания струны.
3. Уравнение теплопроводности.
4. Задача Дирихле для круга.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Задания для выполнения

1. Определить тип дифференциального уравнения

а) $u''_{xx} + 2u''_{xy} + 5u''_{yy} - 3u'_y + 4u = 0$;

б) $xu''_{xx} - 4u''_{xy} + 2u''_{yy} + u'_y - 3u = 0$.

2. Привести к каноническому виду уравнения

а) $u'_{xx} + 8u''_{xy} + 16u_{yy} + 6u'_x - u'_y + u = 0$;

б) $u''_{xx} + 2u''_{xy} + 5u''_{yy} - 3u'_y + 4u = 0$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения $u''_{xx} = x^3 y - 3x^2$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения $u''_{xx} - 5\,u''_{xy} + 4\,u''_{yy} = 0$.

5. Решить смешанную задачу для волнового уравнения $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$, $x \in [0,l], u(x,t)\big|_{t=0} = 0$, $u'_t(x,t)\big|_{t=0} = \frac{1}{6}\sin\frac{3\pi x}{l}$, $u(x,t)\big|_{x=0} = 0$, $u(x,t)\big|_{x=l} = 0$ при $l = 2$ и определить закон движения точки с абсциссой $x = \frac{1}{9}$.

6. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности бесконечного стержня: $u'_t = a^2 u''_{xx}$, $x \in (-\infty,+\infty), u(x,t)\Big|_{t=0} = \begin{cases} 4, x \in (0,3) \\ 0, x \notin (0,3) \end{cases}$ и найти решение при $a = \frac{1}{2}, x = 0, t = 2$.

7. Найти стационарное распределение температуры в тонкой пластине, имеющей форму круга радиуса 2, если на границе круга задано условие $u(r,\varphi)\big|_{r=2} = 6\cos\varphi$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Задание 1. Решить систему уравнений: а) по формулам Крамера; б) матричным способом; в) методом Гаусса.

Вариант		Вариант	
1	$\begin{cases} 5x+8y-z=-7 \\ x+2y+3z=1 \\ 2x-3y+2z=9 \end{cases}$	11	$\begin{cases} x+y-z=-2 \\ 4x-3y+z=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$	12	$\begin{cases} x+4y-3z=-7 \\ x-3y+2z=0 \\ 2x-5y-z=-1 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$	13	$\begin{cases} 3x+2y+2z=1 \\ 2x-3y-z=3 \\ x+y+2z=-2 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 4x+2y+4z=31 \\ 5x+y+2z=29 \\ 3x-y+z=10 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 4x+5y-2z=-3 \\ x+2y+3z=0 \\ x+y-2z=-1 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 4x-3y+2z=9 \\ 2x+5y-3z=4 \\ 5x+6y-2z=18 \end{cases}$	15	$\begin{cases} x+y-2z=16 \\ 2x+3y-7z=16 \\ 5x+2y+z=16 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ 3x+4y-2z=11 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 2x-3y+z=-7 \\ x+4y+2z=-1 \\ x-4y=-7 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$	17	$\begin{cases} x+y-3z=0 \\ 3x+2y+2z=-1 \\ x-y+5z=-2 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 3x-y=5 \\ -2x+y+z=0 \\ 2x-y+4z=15 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 3x-2y-z=-5 \\ x+3y+2z=2 \\ 5x-2y+4z=-7 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 3x-y+z=4 \\ 2x-5y-3z=-17 \\ x+y-z=0 \end{cases}$	19	$\begin{cases} 2x+4y-3z=2 \\ x+y+2z=0 \\ 3x-2y+z=-5 \end{cases}$
10	$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y-6z=-1 \\ 3x-2y=8 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 3x-y+4z=2 \\ x+2y+3z=7 \\ 5x+3y+2z=8 \end{cases}$

Задание 2. Даны координаты вершин треугольника АВС. Найти: 1) длину стороны АВ; 2) уравнения сторон АВ и АС и их угловые коэффициенты; 3) угол А в радианах с точностью до двух знаков; 4) уравнение высоты СД и ее длину; 5) уравнение медианы АМ; 6) уравнение прямой, проходящей через точку В параллельно АС. Сделать чертеж.

Вариант		Вариант	
1	А(7; 1), В(–5; –4), С(–9; –1)	11	А(–9; 6), В(3; –3), С(7; 19)
2	А(0; 5), В(12; 0), С(18; 8)	12	А(1; 0), В(13; –9), С(17; 13)
3	А(8; 0), В(–4; –5), С(–8; –2)	13	А(–4; 10), В(8; 1), С(12; 23)
4	А(1; 5), В(13; 0), С(19; 8)	14	А(2; 5), В(14; –4), С(18; 18)
5	А(6; 5), В(–6; 0), С(–10; 3)	15	А(–1; 4), В(11; –5), С(15; 17)
6	А(–8; –3), В(4; –12), С(8; 10)	16	А(–2; 7), В(10; –2), С(8; 12)
7	А(–12; –1), В(0; –10), С(4; 12)	17	А(–6; 8), В(6; –1), С(4; 13)
8	А(0; 2), В(12; –7), С(16; 15)	18	А(3; 6), В(15; –3), С(13; 11)
9	А(–5; 7), В(7; –2), С(11; 20)	19	А(–10; 5), В(2; –4), С(0; 10)
10	А(–10; 9), В(2; 0), С(6; 22)	20	А(–4; 12), В(8; 3), С(6; 17)

Задание 3. Даны координаты вершин пирамиды АВСД. Найти: 1) записать векторы АВ, АС, АД в системе орт и найти их длины; 2) угол между векторами АВ и АС; 3) площадь грани АВС; 4) уравнение прямых АВ и АС; 5) уравнение плоскости АВС; 6) объем пирамиды.

Вариант	
1	А(0; 3; 2), В(–1; 3; 6), С(–2; 4; 2), Д(0; 5; 4)
2	А(–1; 2; 0), В(–2; 2; 4), С(–3; 3; 0), Д(–1; 4; 3)
3	А(2; 2; 3), В(1; 2; 7), С(0; 3; 3), Д(2; 4; 5)
4	А(0; –1; 2), В(–1; –1; 6), С(–2; 0; 2), Д(0; 1; 4)
5	А(3; 0; 2), В(2; 0; 6), С(1; 1; 2), Д(3; 2; 4)
6	А(0; 2; –1), В(–1; 2; 3), С(–2; 3; -1), Д(0; 4; 1)
7	А(2; 3; 2), В(1; 3; 6), С(0; 4; 2), Д(2; 5; 4)
8	А(–1; 0; 2), В(–2; 0; 6), С(–3; 1; 2), Д(–1; 2; 4)

9	A(2; 0; 3), B(1; 0; 7), C(0; 1; 3), Д(2; 2; 5)
10	A(2; –1; 2), B(1; –1; 6), C(0; 0; 2), Д(2; 1; 4)
11	A(1; –3; 1), B(–1; 2; –3), C(–3; –3; 3), Д(–2; 0; –4)
12	A(1; –1; 6), B(4; 5; –2), C(–1; 3; 0), Д(6; 1; 5)
13	A(1; 1; 1), B(3; 4; 0), C(–1; 5; 6), Д(4; 0; 5)
14	A(–2; 3; –2), B(2; –3; 2), C(2; 2; 0), Д(1; 5; 5)
15	A(3; 1; 1), B(7; 4; 1), C(7; 1; 7), Д(3; 4; –1)
16	A(4; 3; –2), B(2; 2; 3), C(2; –2; –3), Д(–1; –2; 3)
17	A(4; 4; 10), B(7; 10; 2), C(2; 8; 4), Д(9; 6; 9)
18	A(4; 6; 5), B(6; 9; 4), C(2; 10; 10), Д(7; 5; 9)
19	A(3; 5; 4), B(8; 7; 4), C(5; 10; 4), Д(4; 7; 9)
20	A(2; –3; 1), B(6; 1; –1), C(4; 8; –9), Д(2; –1; 2)

Задание 4. Построить линии.

Вариант		Вариант	
1	а) $2x^2-y+5-8x=0$ б) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$ с) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$	11	а) $3x^2+18x-y+31=0$ б) $36x^2+4y^2+144x-40y+100=0$ с) $-9x^2+4y^2+54x+8y-113=0$
2	а) $x^2+y-4x+3=0$ б) $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$ с) $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$	12	а) $7y^2-14y-x+2=0$ б) $6x^2+8y^2+12x+32y-10=0$ с) $x^2-y^2-10x+4y+20=0$
3	а) $y^2-y-x+2=0$ б) $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$ с) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$	13	а) $4y^2-16y-x+17=0$ б) $5x^2+y^2-10x-6y+9=0$ с) $4x^2-y^2+8x+6y+3=0$
4	а) $x^2+y-2x-2=0$ б) $x^2+y^2-3x+2y-3=0$ с) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2-x+\frac{2}{3}y-1=0$	14	а) $5y^2-30y-x+40=0$ б) $4x^2+9y^2-32x-18y+37=0$ с) $-9x^2+12{,}25y^2+36x+24{,}5y-134=0$

5	а) $y^2+4y-x+5=0$ б) $x^2+y^2-8x+2y+12=0$ с) $x^2-y^2-6x+10=0$	15	а) $3y^2+12y+x+11=0$ б) $-25x^2+9y^2-25x+18y-22{,}25=0$ с) $25x^2+36y^2-150x-675=0$
6	а) $y^2+6y-4x+17=0$ б) $9x^2+25y^2-54x-200y+256=0$ с) $9x^2-4y^2+18x-16y+29=0$	16	а) $2x^2+24x+y+69=0$ б) $4x^2+2{,}25y^2+16x-4{,}5y+9{,}25=0$ с) $-9x^2+25y^2+36x+150y-36=0$
7	а) $y^2-2y-4x+13=0$ б) $9x^2+16y^2+90x-64y+145=0$ с) $4x^2-9y^2-16x-54y-101=0$	17	а) $4x^2+16x-y+14{,}5=0$ б) $9x^2+6{,}25y^2-18x+25y-22{,}25=0$ с) $4x^2-6y^2-24x+48y-84=0$
8	а) $y^2+4y+6x+10=0$ б) $16x^2+49y^2+32x-196y-572=0$ с) $y^2-2x^2-20x+2y-53=0$	18	а) $x^2+10x-3y+28=0$ б) $12{,}25x^2+4y^2+24{,}5x-24y-0{,}75=0$ с) $4y^2-9x^2-90x-16y-245=0$
9	а) $x^2+2x-8y+17=0$ б) $25x^2+4y^2-200x-16y+216=0$ с) $x^2-y^2+2x+2=0$	19	а) $y^2-4y-5x-11=0$ б) $9x^2+2{,}56y^2-72x-10{,}24y+131{,}2=0$ с) $x^2-4y^2-16y-17{,}25-3x=0$
10	а) $5x^2-y-30x+43=0$ б) $x^2+36y^2+10x-72y+25=0$ с) $25x^2-6{,}25y^2-200x+12{,}5y+237{,}5=0$	20	а) $x^2+2y+2x+9=0$ б) $64x^2+25y^2-256x+50y-1319=0$ с) $9x^2-9y^2-36x-72y-189=0$

Задание 5.

а) Исследовать числовой ряд на сходимость.

б) Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд.

Вари-ант		Вариант	
1	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+5}$	11	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^{n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n+2}$
2	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n5^{n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^3+3}$	12	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n+2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$
3	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$	13	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+2)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+2)^2}$

4	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n+2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$	14	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$
5	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$	15	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$
6	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)7^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n^2+1}$	16	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+2}$
7	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{\sqrt{n}}$	17	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}$
8	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3}{n+2}$	18	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^{n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$
9	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}$	19	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+5}}$
10	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+3}$	20	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+3}$

Задание 6. Вычислить пределы функций, не пользуясь правилами Лопиталя.

Вариант	
1	а) $\lim_{x\to-3}\frac{\cos(x-3)+2x}{x+3}$; б) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{3x^2-3x+2}$; в) $\lim_{x\to-0,5}\frac{6x^2+5x+1}{2x^2-x-1}$; г) $\lim_{x\to4}(5-x)^{\frac{2}{x-4}}$
2	а) $\lim_{x\to1}\frac{x-2}{tg\pi x}$; б) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+1}{2x^2-2x+7}$; в) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{2x^2-x-6}$; г) $\lim_{x\to-3}(7+2x)^{\frac{-4}{x+3}}$
3	а) $\lim_{x\to0}\frac{x^2-5}{x+1}$; б) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x-4}{4x^2+3x+2}$; в) $\lim_{x\to-0,5}\frac{2x^2+3x+1}{6x^2+x-1}$; г) $\lim_{x\to0}(1-\sin^2 2x)^{\frac{1}{1-\cos4x}}$
4	а) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4x+5}{x+2}$; б) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+3x^2-2}{x^3-x-6}$; в) $\lim_{x\to2}\frac{2x^2-5x+2}{x^2-x-2}$; г) $\lim_{x\to0}(1-\sin3x)^{\frac{1}{1-\cos2x}}$
5	а) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot(tgx+x)$; б) $\lim_{x\to\infty}\frac{8x^3+11}{7x^3-5x^2+x}$; в) $\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{3x^2+4x+1}{3x^2-5x-2}$; г) $\lim_{x\to3}(10-3x)^{\frac{1}{3(3-x)}}$
6	а) $\lim_{x\to0}(2+x)^{\frac{1}{x^2}}$; б) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^3+5x-10}$; в) $\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{3x^2+7x+2}{3x^2-2x-1}$; г) $\lim_{x\to-2}(5+2x)^{\frac{1}{x+2}}$
7	а) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x^2-1}}{arctgx}$; б) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-8}{3x^2-5x-2}$; в) $\lim_{x\to0,5}\frac{2x^2+x-1}{6x^2-x-1}$; г) $\lim_{x\to2}(9-x^3)^{\frac{4}{x-2}}$

8	а) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\cos 3x-2}{ctgx}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+8}{3x^2+6x-15}$; в) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{2x^2+7x+6}{x^2+x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to1}\left(3-2x^2\right)^{\frac{1}{2(1-x)}}$
9	а) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{e^{x+2}-1}{\ln\lvert x+2\rvert}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{14x^3+9x^2+17}{21x^3+10x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{3x^2-7x+2}{3x^2+11x-4}$; г) $\lim\limits_{x\to-4}(9+2x)^{\frac{-1}{2(x+4)}}$
10	а) $\lim\limits_{x\to-1}(4-x)^{\frac{1}{(x+1)^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+9x^2+2x}{3x^3-8x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to0,5}\frac{6x^2-5x+1}{2x^2-3x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to-1}(4+3x)^{\frac{3}{x+1}}$
11	а) $\lim\limits_{x\to3}\frac{4x+3}{2x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{0,1x^7+3x^4+5x}{1000x^2+5}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^4-2x^2-8}{x^3-4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{x-2}$
12	а) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{3x+7}{2x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^6+3x^5-4x}{0,01x^9+6}$; в) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{2x^2+5x+2}{2x^3+7x^2+6x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{5x-3}\right)^{2x+1}$
13	а) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x-5}{3x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^6-4x^3+3x}{2x^7+x^6}$; в) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{3x^3+4x^2+x}{2x^3-2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x-1}\right)^{6x+4}$
14	а) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{6x-3}{2x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{10}+4x^3+2}{1000x^9+3x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to-5}\frac{x^2+2x-15}{2x^2+7x-15}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+2}\right)^{2x+1}$
15	а) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{5x-4}{3x^2+6x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^{11}-x^6+4}{3x^6-9x^8}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-3x-2}{x^4-4x-8}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+4}\right)^{x-1}$
16	а) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+1}{x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^7-4x^3+2}{3x^5-6x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^3-8x^2+5x+50}{x^3-11x^2+35x-25}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{4-x}$
17	а) $\lim\limits_{x\to2}\frac{4x^5+3x-1}{2x^4+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^9+4x^6+3}{3x^7+6x^9}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^3-3x+1}{x^3-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x-4}\right)^{2x}$
18	а) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{4x^2+6x+1}{3x^2+7x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^6-x^7}{3x^4+8x^7}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^6+6x-7}{x^4-2x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x-3}\right)^{1-2x}$
19	а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{4x^2-8x+1}{x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{11}-7x^7+4}{4x^3+9x^9}$; в) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{3x^4+4x+1}{x^4-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-1}\right)^{3-x}$
20	а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2+4x-1}{16x^3+3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^6+2x^3+3}{3x+7x^7}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^5-3x^2+2}{4x^4-x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{4x+1}\right)^{2x-3}$

Задание 7. Функция задается разными аналитическими выражениями для данных областей изменения независимой переменной. Требуется: а) найти точки разрыва функции, если они существуют; б) сделать схематический чертеж.

Вариант		Вариант	

1	$f(x)=\begin{cases}-x+3, & x<1\\ x^2+1, & 1\le x<2\\ 5x, & x\ge 2\end{cases}$	11	$f(x)=\begin{cases}x+2, & x<1\\ x^2+2, & 1\le x\le 3\\ 4x, & x>3\end{cases}$
2	$f(x)=\begin{cases}3x+1, & x<0\\ x^2+1, & 0\le x<1\\ 0, & x\ge 1\end{cases}$	12	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ tgx, & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ x, & x\ge\frac{\pi}{2}\end{cases}$
3	$f(x)=\begin{cases}x-1, & x\le 0\\ x^2, & 0<x<2\\ 2x, & x\ge 2\end{cases}$	13	$f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ (x+1)^2, & 0\le x<2\\ -x+4, & x\ge 2\end{cases}$
4	$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & \frac{\pi}{2}<x<\pi\\ \frac{\pi}{2}, & x\ge\pi\end{cases}$	14	$f(x)=\begin{cases}4x-x^2, & x\le 1\\ 2-x, & 1<x<2\\ x-5, & x\ge 2\end{cases}$
5	$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ x, & 0\le x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$	15	$f(x)=\begin{cases}-2(x+1), & x\le -1\\ (x+1)^3, & -1<x<0\\ x, & x\ge 0\end{cases}$
6	$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0\\ x^2, & 0<x\le 2\\ x+1, & x>2\end{cases}$	16	$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 1\\ 4-x, & 1<x<3\\ x, & x\ge 3\end{cases}$
7	$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 0\\ 0, & 0<x\le 2\\ x-2, & x>2\end{cases}$	17	$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le -1\\ 3-x, & -1<x\le 2\\ 2x-3, & x>2\end{cases}$
8	$f(x)=\begin{cases}x-3, & x<0\\ x+1, & 0\le x\le 4\\ 3+\sqrt{x}, & x>4\end{cases}$	18	$f(x)=\begin{cases}4x^2, & x<-1\\ 2x+6, & -1\le x<1\\ 2x, & x\ge 1\end{cases}$
9	$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\le 1\\ 2x, & 1<x\le 3\\ x+2, & x>3\end{cases}$	19	$f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\le 0\\ x^2-1, & 0<x<2\\ -x+5, & x\ge 2\end{cases}$

10	$f(x)=\begin{cases}-x,\ x\le 0\\ -(x-1)^2,\ 0<x<2\\ x-3,\ x\ge 2\end{cases}$	20	$f(x)=\begin{cases}x+2,\ x\le 0\\ x^2-1,\ 0<x<2\\ -x+5,\ x\ge 2\end{cases}$

Задание 8. Найти производную функции.

Вариант	
1	а) $y=3x^5-\sin x$; б) $y=\sqrt{x}\cdot tgx$; в) $y=\dfrac{\ln x}{4-3\cos x}$; г) $y=\ln^3(1-3x)-\arcsin\sqrt[4]{x}$
2	а) $y=4x^4+e^x$; б) $y=\sin x\cdot\ln x$; в) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{ctgx}$; г) $y=x^2\arccos\dfrac{2-x}{3}+tg^3\dfrac{x}{2}$
3	а) $y=3\sqrt[3]{x}-\ln x$; б) $y=e^x\cdot\arcsin x$; в) $y=\dfrac{ctgx}{x^4}$; г) $y=arctg\dfrac{1}{x}-0{,}5\sin\dfrac{x}{2}$
4	а) $y=5x^2-\arcsin x$; б) $y=\sqrt[3]{x^2}\cdot\ln x$; в) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{e^x}$; г) $y=2^{\sin^2 x}+\dfrac{1}{3}e^{-x}$
5	а) $y=4\sqrt[4]{x}+arctgx$; б) $y=x^5\cdot e^x$; в) $y=\dfrac{tgx}{\ln x}$; г) $y=\cos(\ln^3 3x)+x^5\cdot\sin^2\dfrac{x}{2}$
6	а) $y=10x^3+2\cos x$; б) $y=\sqrt[4]{x}\cdot\sin x$; в) $y=\dfrac{\ln x}{\arcsin x}$; г) $y=5^{3-x^2}+\cos^2\dfrac{1}{x}$
7	а) $y=5\sqrt[5]{x}-7arcctgx$; б) $y=\cos x\cdot(3x-1)$; в) $y=\dfrac{3x^5}{e^x}$; г) $y=4^{\cos^2 x}+2e^{3-2x}$
8	а) $y=6\sqrt[3]{x^2}-7tgx$; б) $y=e^x\cdot\arccos x$; в) $y=\dfrac{ctgx}{2x^4}$; г) $y=e^{\cos^4 5x}+\dfrac{3}{2}tg^2\dfrac{x}{3}$
9	а) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x}}+3ctgx$; б) $y=\ln x\cdot arctgx$; в) $y=\dfrac{e^x}{arctgx}$; г) $y=arctg^3(1-x)+2\ln tg\dfrac{x}{2}$
10	а) $y=7x^6+2\arccos x$; б) $y=e^x\cdot ctgx$; в) $y=\dfrac{5\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}$; г) $y=x\cdot\arcsin\dfrac{1-2x}{5}+\cos^2\dfrac{x}{2}$
11	а) $y=4\sin x-\arccos x$; б) $y=\sqrt[5]{x}\cdot\ln x$; в) $y=\dfrac{tgx}{x^2}$; г) $y=\left(3^{\sin 2x}-\cos^2 2x\right)^3$
12	а) $y=10x^2+tgx$; б) $y=\sqrt[6]{x}\cdot\cos x$; в) $y=\dfrac{\ln x}{\cos x}$; г) $y=\left(2^{arctgx}+\ln(1+x^2)\right)^4$
13	а) $y=6\sqrt[6]{x}-\cos x$; б) $y=tgx\cdot\arcsin x$; в) $y=\dfrac{\sin x}{x^2}$; г) $y=\left(3^{\cos 3x}+\sin^2 3x\right)^9$

14	а) $y = ctgx - \cos x$; б) $y = e^x \cdot tgx$; в) $y = \frac{\arccos x}{\sqrt{x+1}}$; г) $y = \left(2^{\arcsin x} + \arccos x\right)^4$
15	а) $y = \sqrt[4]{x^3} + tgx$; б) $y = \left(x^3 + 4\right) \cdot \sin x$; в) $y = \frac{e^x}{\ln x}$; г) $y = \left(5^{tg\,2x} - x^2\right)^3$
16	а) $y = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^5} + arctgx$; б) $y = \ln x \cdot \left(x^2 + 8\right)$; в) $y = \frac{\sin x + 4}{\cos x}$; г) $y = \left(4^{tg\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)^3$
17	а) $y = 4\sqrt[4]{x^3} - \arcsin x$; б) $y = x^2 arcctgx$; в) $y = \frac{arcctgx}{x}$; г) $y = \left(3^{arctg2x} - \ln\left(1 + 4x^2\right)\right)^4$
18	а) $y = x^5 + arctgx$; б) $y = x \cdot \arccos x$; в) $y = \frac{\sin x}{\arcsin x}$; г) $y = \left(2^{\cos^2 x} + \sin^2 x\right)^3$
19	а) $y = e^x + \ln x$; б) $y = arctgx \cdot \ln x$; в) $y = \frac{x^3}{e^x}$; г) $y = \left(4^{\arccos 2x} - \sqrt{1 - 4x^2}\right)^3$
20	а) $y = tgx + ctgx$; б) $y = e^x \cdot x^2$; в) $y = \frac{x^3}{\ln x}$; г) $y = \left(6^{arctg\,3x} + arctg\,3x\right)^4$

Задание 9. Закон движения материальной точки по прямой имеет вид $x = x(t)$. Найти: а) в какие моменты времени точка находится в начале координат; б) в какие моменты времени направление ее движения совпадает с положительным направлением оси Оx; в) в какие моменты времени ее ускорение равно нулю.

Вариант		Вариант	
1	$x = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$	11	$x = \frac{1}{4}t^4 - 6t^3 + 22{,}5t^2$
2	$x = \frac{1}{4}t^4 - 3t^3 + 9t^2$	12	$x = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 5{,}5t^2$
3	$x = \frac{1}{4}t^4 - 2t^3 + 4t^2$	13	$x = \frac{1}{4}t^4 - 6t^3 + 28t^2$
4	$x = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{4}t^2$	14	$x = \frac{1}{4}t^4 - 9t^3 + 63t^2$
5	$x = \frac{1}{4}t^4 - \frac{5}{2}t^3 + \frac{25}{4}t^2$	15	$x = \frac{1}{4}t^4 - 5t^3 + 25t^2$
6	$x = \frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^3 + \frac{9}{4}t^2$	16	$x = \frac{1}{4}t^4 - 8t^3 + 64t^2$
7	$x = \frac{1}{4}t^4 - 6t^3 + 36t^2$	17	$x = \frac{1}{4}t^4 - 9t^3 + 81t^2$

8	$x=\frac{1}{4}t^4-\frac{7}{2}t^3+\frac{49}{4}t^2$	18	$x=\frac{1}{4}t^4-2t^3+4t^2$
9	$x=\frac{1}{4}t^4-\frac{9}{2}t^3+\frac{81}{4}t^2$	19	$x=\frac{1}{4}t^4-16t^3+256t^2$
10	$x=\frac{1}{4}t^4-7t^3+49t^2$	20	$x=\frac{1}{4}t^4-36t^3+1296t^2$

Задание 10. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Вариант		Вариант		Вариант		Вариант	
1	$y=\frac{x^2}{x+1}$	6	$y=\frac{x^3}{x^2-4}$	11	$y=\frac{x-1}{x-2}$	16	$y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x^2}$
2	$y=\frac{x^4}{3-x^2}$	7	$y=\frac{3-x^2}{x+2}$	12	$y=\frac{8x}{(x-2)^2}$	17	$y=\frac{1}{x^2+1}$
3	$y=\frac{x+2}{x^3}$	8	$y=\frac{2x^2}{3-x}$	13	$y=\frac{x^2}{2(x-1)}$	18	$y=\frac{4x^2}{x^3-1}$
4	$y=\frac{x^2}{x^2-1}$	9	$y=\frac{4-x^2}{x+3}$	14	$y=\frac{2(x-1)^2}{x^2}$	19	$y=\frac{x^3}{3-x^2}$
5	$y=\frac{x^2}{x-1}$	10	$y=\frac{x(x-3)^2}{2}$	15	$y=\frac{2x^2}{2x-1}$	20	$y=\frac{x^2-2}{x-2}$

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 3
Методические рекомендации по проведению практических работ 6
Методические указания по выполнению практических заданий 7
Линейная алгебра 8
Аналитическая геометрия 16
Последовательности и ряды 26
Дифференциальное исчисление 30
Интегральное исчисление 37
Векторный анализ и элементы теории поля 43
Гармонический анализ 49
Дифференциальные уравнения 53
Численные методы 57
Функции комплексного переменного 61
Элементы функционального анализа 67
Теория вероятностей 70
Случайные процессы 82
Математическая статистика 85
Статистическое оценивание и проверка гипотез. Статистические методы обработки экспериментальных данных 89
Вариационное исчисление и оптимальное управление 92
Уравнения математической физики 94
Задания для расчетно-графической работы 96

Наталья Анатольевна Чалкина,
канд. пед. наук, доц. кафедры общей математики и информатики АмГУ;

Татьяна Александровна Юрьева,
канд. пед. наук, доц. кафедры общей математики и информатики АмГУ;