Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Амурский государственный университет»

Н.А. Чалкина, Г.В. Литовка, Ермилова Н.А.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

Методические указания

к практическим занятиям

для направления подготовки 140400.68 «Электроэнергетика и электротехника»

Благовещенск

Издательство АмГУ

2013

ББК 22.1я73
Ч 16

Печатается по решению редакционно-издательского совета Амурского государственного университета

Разработаны в рамках реализации гранта «Подготовка высококвалифицированных кадров в сфере электроэнергетики и горно-металлургической отрасли для предприятий Амурской области» по заказу предприятия-партнера ОАО «ГЭМ»

Рецензенты:

Еремина Виктория Владимировна, канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры «Информационные и управляющие системы» АмГУ

Морозов Николай Иванович, директор пуско-наладочного управления ОАО «ГЭМ»

Ч 16 *Чалкина Н.А., Литовка Г.В., Ермилова Н.А.*

Дополнительные главы математики: методические указания к практическим занятиям для направления подготовки 140400.68 / Чалкина Н.А., Литовка Г.В. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2013. – 91 с.

Методические указания предназначены для студентов очной формы обучения направления подготовки 140400.68 – электроэнергетика и электротехника. Пособие разбито на практические занятия по темам. Каждая тема содержит цель, задачи, основные вопросы, рекомендуемую литературу и задания для выполнения.

В авторской редакции.

© Амурский государственный университет, 2013

© Чалкина Н.А., 2013

© Литовка Г.В., 2013

© Ермилова Н.А., 2013

ВВЕДЕНИЕ

Широкое применение математических методов в самых различных областях науки, техники и в практической деятельности геологов предъявляет повышенные требования к изучению математических приемов. Формированию умения использовать различные математические приемы посвящено это пособие.

В задачи курса «Дополнительные главы математики» для энергетиков входит раскрытие роли и значения математических методов исследования при решении инженерных задач; закрепление основных понятий и методов классической и современной математики; обучение студентов применению методов математического анализа для построения математических моделей реальных процессов и явлений; раскрытие роли и значения вероятностно-статистических методов исследования при решении инженерных задач.

Для эффективной работы с пособием необходима предварительная проработка теоретического материала лекций, а также учебников и пособий, представленных в списке литературы. В сопровождении с решением соответствующих задач это будет являться тем ключом, который необходим для осознанного усвоения курса и успешной сдачи зачетов и экзаменов.

В пособии приведено достаточное количество задач, которые необходимы для аудиторной и самостоятельной работы студентов.

Пособие адресовано не только студентам, но и преподавателям для использования материала на лекциях и практических занятиях.

Критерии достижения результатов обучения по блоку практических занятий

Для оценки результатов достижения результатов обучения по блоку практических работ используется рейтинговая оценка.

Рейтинговая оценка студента по дисциплине складывается из оценки за работу в семестре – 60 баллов и экзаменационной (зачетной) оценки – 40 баллов.

При пропуске рейтингового теста или контрольной работы в течении семестра по документально подтвержденной уважительной причине студент имеет право написать их в дни консультаций преподавателя группы. В случае про-

пуска теста по неуважительной причине или при неудовлетворительной оценки за тест (менее половины от максимально возможного балла), переписывание теста возможно только в течении последней недели семестра (не более двух встреч с преподавателем на все тесты и контрольные работы). Баллы, полученные студентом в таком случае, учитываются с коэффициентом 0,8.

Студент, активно участвовавший в учебном процессе (доклады, рефераты, выступления на олимпиадах и конференциях) может быть поощрен лектором потока или заведующим кафедрой дополнительными баллами (как правило, не более 5 баллов за семестр).

Минимальное количество баллов за работу в семестре, необходимое для получения студентом допуска на экзамен, равно 30 баллов, на зачет – 40 баллов. В течении семестра студенты выполняют рейтинговый мероприятия.

Методические рекомендации по проведению практических работ

В процессе обучения студент должен прослушать определенный теоретический материал и закрепить этот материал на практических занятиях, а также при выполнении домашних самостоятельных работ.

Практическое занятие должно начинаться с проверки домашнего задания. При этом допустимо некоторые, наиболее сложные задачи, с которыми не справилась большая часть студентов решить на доске. Тем самым создается прочная база для дальнейшего обучения.

При изучении новой темы необходимо постоянно обращаться к теоретическому материалу. Иногда теория оказывается заданной на самостоятельное изучение. В этом случае преподаватель-практик обязан помочь студенту в выборе литературы, разъяснить трудные и непонятные места в тексте, ответить на все вопросы. Переходить к практическим задачам возможно только после полного усвоения теории. Недопустимо повторять чтение лекции на практике, если студенты забыли конспекты лекций и не помнят их суть.

При решении задач нужно обосновать каждый этап решения исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения, то необходимо помочь ему выбрать наиболее рациональный. Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием.

Для оптимизации учебного процесса и развития практических навыков овладения математикой весьма эффективным является проведение кратких самостоятельных работ, как по практическому, так и по теоретическому материалу. При этом целесообразно формулировать вопросы по теории таким образом, чтобы для ответа не требовались долгие и сложные доказательства и выводы. Такая форма контроля позволяет выявить наличие и прочность базовых знаний по изучаемой теме. Аналогично, практические задания должны быть составлены предельно просто и ясно. При проведении таких кратких работ студенты не должны пользоваться никаким справочным материалом.

В конце занятия необходимо подвести итог, объявить тему и план следующего занятия, задать домашнее задание, указав литературу, которой желательно воспользоваться при его выполнении.

Методические указания по выполнению практических заданий

Задачей преподавателя при проведении практических занятий является грамотное и доступное разъяснение принципов и правил проведения работ, побуждение студентов к самостоятельной работе, определения места изучаемой дисциплины в дальнейшей профессиональной работе будущего специалиста.

Цель практического занятия – научить студентов самостоятельно производить необходимые действия для достижения желаемого результата.

Прежде чем приступить к выполнению заданий практического занятия, студенту необходимо ознакомиться с теоретическим материалом, соответствующим данной теме.

Выполнение заданий практического занятия целесообразно разделить на несколько этапов:

формулировка и обоснование цели работы;

определение теоретического аппарата, применительно к данной теме;

выполнение заданий;

анализ результата;

выводы.

<u>Тема.</u> Функции нескольких переменных. Линии и поверхности уровня. Частные производные

Цель: сформировать умения вычисления частных производных, построения линий и поверхностей уровня.

Задачи:

закрепить знания о способах задания функций нескольких переменных;

рассмотреть примеры по вычислению частных производных;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Понятие функции нескольких переменных
2. Область определения функций двух и трех переменных
3. Линии и поверхности уровня.
4. Графики функций двух переменных.
5. Частные производные функции нескольких переменных.
6. Полное приращение функции нескольких переменных.
7. Дифференцируемость функции нескольких переменных.
8. Дифференциал функции нескольких переменных.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

<u>Методические указания по выполнению заданий</u>

<u>Пример 1.</u> Найти частные производные функции $z = x^3 e^{y^2}$.

<u>Решение.</u> При дифференцировании по x считаем постоянной величину y.

Таким образом $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 e^{y^2}$. При дифференцировании по y считаем посто-

янной величину *x,* следовательно $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 e^{y^2} \cdot 2y = 2x^3 y e^{y^2}$.

Пример 2. Найти частные производные второго порядка функции двух переменных $z = \ln(1 + 5x + 2y)$..

Решение. Частные производные 1-го порядка имеют вид:

$$z'_x = \frac{5}{1+5x+2y}, \quad z'_y = \frac{2}{1+5x+2y}.$$

Считая их новыми функциями двух переменных, найдем их частные производные. Получаем: $z''_{xx} = -\frac{5}{(1+5x+2y)^2}$, $z''_{yy} = \frac{2}{(1+5x+2y)^2}$.

Пример 3. Найти частную производную третьего порядка $\frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2}$ от функции $U = x^3 + 2xy^2 + 3x^4 y$.

Решение. Последовательно вычисляем частные производные первого, второго и третьего порядка по соответствующим переменным:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 2y^2 + 12x^3 y, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 4y + 12x^3, \quad \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} = 4.$$

Пример 4. Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2 z}$.

Решение. $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \ln x \cdot y^2;$$

$$du = y^2 z x^{y^2 z - 1} dx + 2x^{y^2 z} yz \ln x dy + y^2 x^{y^2 z} \ln x dz .$$

Пример 5. Вычислить приближенно значение $\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02}$, исходя из значения функции $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ при x = 1, y = 2, z = 1.

Решение. Из заданного выражения определим Δx = 1,04 – 1 = 0,04, Δy = 1,99 – 2 = -0,01, Δz = 1,02 – 1 = 0,02.

Найдем значение функции u(x, y, z) = $\sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y\cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{2\cdot 1}{2\sqrt{1}}=1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^y\ln x}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=0,\ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{1}{2}.$$

Полный дифференциал функции u равен:

$$du=0{,}04\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-0{,}01\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+0{,}02\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=1\cdot 0{,}04-0\cdot 0{,}01+\frac{1}{2}\cdot 0{,}02=0{,}04+0{,}01=0{,}05.$$

$$\sqrt{1{,}04^{1{,}99}+\ln 1{,}02}\approx u(1,2,1)+du=1+0{,}05=1{,}05.$$

Точное значение этого выражения: 1,049275225687319176.

<u>Задания для выполнения</u>

1. Найти области определения функций:

1) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$; 2) $z=\ln\left(y^2-4x+8\right)$;

3) $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$; 3) $z=\ln xy$.

2. Найти линии уровня функций:

1) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$; 2) $z=\ln\left(y^2-4x+8\right)$.

3. Найти частные производные данных функций:

1) $z=\left(y^2-4x^3y+8\right)^3$; 2) $z=\ln\left(5y^2-4x^4\right)$;

3) $z=x^y$; 4) $z=\sin^2\left(2x-4y^3\right)$;

5) $z=xye^{xy}$; 6) $z=arctg\,\frac{y}{x}$;

7) $u=x^3+yz^2+3y^4x-6x+2z$; 8) $z=\sin x^2\cos\sqrt{y}$.

3. Найти полные дифференциалы функций:

1) $z=yx^3+yx^2+3y^4-6x+2$; 2) $z=\sqrt{4x^2-3y^3}$;

3) $z=\ln\left(y^2+4x^3\right)$; 4) $z=\sin x^2y^3$.

4. Вычислить приближенно $z=\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1\right)$.

5. Найти частные производные второго порядка данных функций:

1) $z=x^3+yx^2+3xy^4-6x+2y$; 2) $z=x^y$; 3) $z=e^y\cos x^2$; 4) $z=y^{\ln x}$;

5) $z=\cos^2\left(x+2y^3\right)$; 6) $z=\ln\left(y^2+x^4\right)$.

<u>Тема.</u> Экстремум функции нескольких переменных

Цель: Сформировать умения нахождения экстремума функции нескольких переменных.

Задачи:

закрепить знания об экстремуме функции нескольких переменных;

рассмотреть примеры по нахождению экстремума функции;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Экстремумы функции нескольких переменных.
2. Наименьшее и наибольшее значение функции нескольких переменных.
3. Условные экстремумы функций нескольких переменных.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

<u>Методические указания по выполнению заданий</u>

<u>Пример 1.</u> Найти экстремум функции двух переменных $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

<u>Решение.</u>

Необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

Поверим стационарную точку: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 = A$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 = B$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 = C$,

$\Delta = A \cdot B - C^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$.

Следовательно, экстремум есть. Поскольку $A > 0$ ($B > 0$), точка (0;3) явля-

ется точкой минимума. Значение функции в точке минимума равно Z(0;3)=-9.

<u>Пример 2.</u> Дана функция $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на замкнутом множестве, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

<u>Решение.</u>

Построим для наглядности границу *D* на плоскости *x*O*y* (рис. 1).

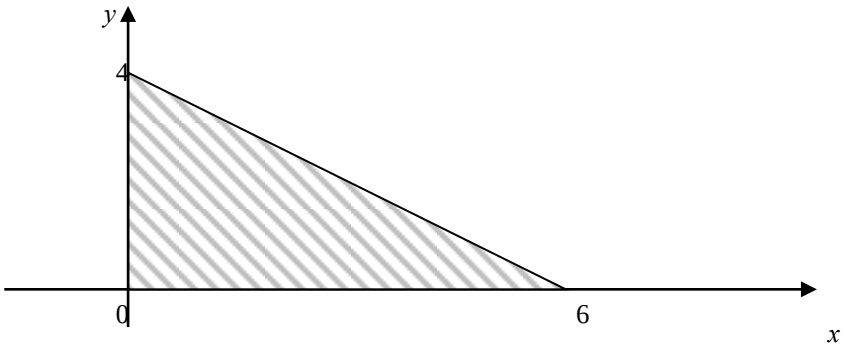

Рис. 1.

Найдём координаты стационарных точек:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8}{3} \\ y = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Найденная стационарная точка принадлежит заданной области D:

$$z(\frac{8}{3};\frac{4}{3}) = \frac{64}{9} - \frac{8}{3}\cdot\frac{4}{3} + \frac{16}{9} - \frac{4\cdot 8}{3} = -\frac{16}{3}.$$

Найдём значения функции на границах:

а) $x = 0$, $z(0, y) = y^2$, $z' = 2y = 0 \Rightarrow y = 0$

Экстремальная точка на той части границы, которая совпадает с осью O*y*, лежит на нижней границе интервала. Значение функции в этой точке $z(0;0) = 0$.

На другом конце интервала $z(0;4) = 16$.

б) $y = 0$, $z(y;0) = x^2 - 4x$, $z' = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

На этой границе, совпадающей с осью Ox, вычислим значение функции в трёх точках: (0,0); (2,0); (6,0) – правая граница интервала. В первой точке значение функции уже известно из пункта (а): $z(2;0) = -4$; $z(6;0) = 12$.

Третье аналитическое выражение для границы запишем как $y = f(x)$ и под-

ставим в исходное уравнение:

$$2x+3y-12=0,\ y=4-\frac{2}{3}x,\ z(x,4-\frac{2}{3}x)=\frac{19}{9}x^2-\frac{40}{3}x+16.$$

Значение функции на концах отрезка прямой $y=4-\frac{2}{3}x$ мы уже знаем. Это точка $z(0;4)=16$ из пункта (а) и точка $z(6;0)=12$ из пункта (б).

Найдём экстремальное значение функции (если оно есть) внутри этой границы: $z'_x=2\cdot\frac{19}{9}x-\frac{40}{3}=0\Rightarrow x=\frac{60}{19}$.

Это точка экстремума функции внутри границы $y=4-\frac{2}{3}x$. $z\left(\frac{60}{19};\frac{36}{19}\right)=-\frac{96}{19}$.

Тогда из найденных значений функций $z(\frac{8}{3};\frac{4}{3})=-\frac{16}{3}$ – наименьшее, а $z(0;4)=16$ – наибольшее.

<u>Задания для выполнения</u>

1. Исследовать функции на экстремум:

1) $z=x^2+y^2+xy-4x-5y$; 2) $z=xy(1-x-y)$;

3) $z=x^3y^2(2-x-y)$; 4) $z=x^3-xy^2+5x^2+y^2$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в областях, задаваемых неравенствами:

1) $z=x^2-xy+y^2-4x$, $2x+3y-12\le 0$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

2) $z=x+xy+y$, $x\ge 1$, $x\le 2$, $y\ge 2$, $y\le 3$.

<u>Тема.</u> Скалярные и векторные поля

Цель: сформировать умения исследования скалярных и векторных полей.

Задачи:

закрепить знания об основных характеристиках скалярных и векторных полей;

рассмотреть примеры по вычислению характеристик скалярного и векторного полей;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Понятие скалярного поля. Примеры.

2.Производная по направлению

3. Градиент и его физический смысл.

4. Понятие векторного поля. Примеры.

5. Дивергенция.

6.Ротор.

7.Потенциальное поле. Соленоидальное поле.

8. Оператор Гамильтона.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

<u>Методические указания по выполнению заданий</u>

<u>Пример 1</u>. Вычислить производную функции $z = x^2 + y^2x$ в точке А(1, 2) по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$. В (3, 0).

<u>Решение.</u> Прежде всего необходимо определить координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}$ =(3-1; 0-2) = (2; -2) = $2\vec{i} - 2\vec{j}$.

Далее определяем модуль этого вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Находим частные производные функции z в общем виде:

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2yx$; а значения этих величин в точке А: $\frac{\partial z}{\partial x} = 6$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 4$.

Для нахождения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{AB}$ производим следующие преобразования: $\vec{S} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta = \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{j}$.

За величину $\vec{S}$ принимается произвольный вектор, направленный вдоль заданного вектора, т.е. определяющего направление дифференцирования.

Отсюда получаем значения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{AB}$:

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Окончательно получаем: $\frac{\partial z}{\partial s} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ - значение производной заданной функции по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$.

<u>Пример 2.</u> Найти векторные линии поля $\overline{F} = \frac{\overline{i}}{y^2} - \frac{5\overline{j}}{x^3}$.

<u>Решение.</u> Дифференциальное уравнение векторных линий поля $\overline{F} = (P, Q)$ имеет вид: $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$.

Так как $P = \frac{1}{y^2}$, $Q = -\frac{5}{x^3}$, получим $y^2 dx = -\frac{x^3 dy}{5}$.

Разделяем переменные и интегрируем $\frac{dx}{x^3} = -\frac{dy}{5y^2}$, $\int \frac{dx}{x^3} = -\int \frac{dy}{5y^2}$, $\frac{1}{5y} = C - \frac{1}{2x^2}$. Выражая y через x, получим следующую формулу векторных линий $y = \frac{2x^2}{5(2Cx^2 - 1)}$.

<u>Пример 3.</u> Указать все соленоидальные векторные поля:

а) $\overline{F} = 2x\overline{i} - 2y\overline{j} + 2\overline{k}$; б) $\overline{F} = 3y\overline{i} + 3z\overline{j} - 3x\overline{k}$;

в) $\overline{F} = 4x\overline{i} - 2y\overline{j} - 2z\overline{k}$; г) $\overline{F} = 3y\overline{i} - 3x\overline{j} + 3z\overline{k}$.

<u>Решение.</u> Векторное поле $\overline{F} = (P, Q, R)$ соленоидально, если во всей рассматриваемой области дивергенция равна 0: $div\overline{F} = 0$.

Сама же дивергенция вычисляется по формуле $div\,\overline{F} = P'_x + Q'_y + R'_z$

Таким образом, для каждой функции необходимо проверить условие $P'_x + Q'_y + R'_z = 0$:

а) $div\,\overline{F} = (2x)'_x - (2y)'_y + 0 = 2 - 2 = 0$;

б) $div\,\overline{F} = (3y)'_x + (3z)'_y - (3x)'_z = 0$;

в) $div\,\overline{F} = (4x)'_x - (2y)'_y - (2z)'_z = 4 - 2 - 2 = 0$;

г) $div\,\overline{F} = (3y)'_x - (3x)'_y + (3z)'_z = 3 \neq 0$.

Итак, поле соленоидально в случаях а),б) и в).

<u>Пример 4.</u> Найти ротор векторного поля $\overline{F} = 3z\overline{i} - y\overline{j} + 5x\overline{k}$.

<u>Решение.</u> Ротор векторного поля $\overline{F} = (P, Q, R)$ - это вектор, определяемый формулой $rot\,\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$.

Так как $P = 3z$, $Q = -y$, $R = 5x$, получим

$$rot\,\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3z & -y & 5x \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i}\left((5x)'_y - (-y)'_z)\right) - \overline{j}\left((5x)'_x - (3z)'_z\right) + \overline{k}\left((-y)'_x - (3z)'_y\right) = -(5-3)\,\overline{j} = -2\,\overline{j}.$$

<u>Пример 5.</u> Проверить, потенциально ли поле

$$\overline{F} = (x + y + 2z)\overline{i} + (x - 2y - z)\overline{j} + (2x - y + z)\overline{k}.$$

В случае потенциальности найти его потенциал.

<u>Решение.</u> Поле $\overline{F} = (P, Q, R)$ потенциально, если его ротор равен 0. Вы-

числяем ротор по формуле:

$$rot\,\overline{F}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x+y+2z & x-2y-z & 2x-y+z\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}\left((2x-y+z)_y{}'-(x-2y-z)_z{}'\right)-\bar{j}((2x-y+z)_x{}'-(x+y+2z)_z{}')+$$

$$+\bar{k}((x-2y-z)_x{}'-(x+y+2z)_y{}')=\bar{i}((-1)-(-1))-\bar{j}(2-2)+\bar{k}(1-1)=0.$$

Итак, векторное поле $\overline{F}$ потенциально. Потенциал $U(x,y,z)$ находим по формуле:

$$U(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz.$$

В данном случае он равен

$$U(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}(x+y_0+2z_0)dx+\int_{y_0}^{y}(x-2y-z_0)dy+\int_{z_0}^{z}(2x-y+z)dz=$$

$$=(\frac{x^2}{2}+xy_0+2xz_0)\Big|_{x_0}^{x}+(xy-y^2-yz_0)\Big|_{y_0}^{y}+(2xz-yz+\frac{z^2}{2})\Big|_{z_0}^{z}=$$

$$=\frac{x^2}{2}+xy_0+2xz_0-\frac{{x_0}^2}{2}-x_0y_0-2x_0z_0+xy-y^2-yz_0-xy_0+{y_0}^2+$$

$$+y_0z_0+2xz-yz+\frac{z^2}{2}-2xz_0+yz_0-\frac{{z_0}^2}{2}=$$

$$=\frac{x^2}{2}+xy-y^2+2xz-yz+\frac{z^2}{2}-\frac{{x_0}^2}{2}-x_0y_0-2x_0z_0+{y_0}^2+y_0z_0-\frac{{z_0}^2}{2}=$$

$$=\frac{x^2}{2}+xy-y^2+2xz-yz+\frac{z^2}{2}+C,$$

где $C=-\dfrac{{x_0}^2}{2}-x_0y_0-2x_0z_0+{y_0}^2+z_0y_0-\dfrac{{z_0}^2}{2}$.

Окончательно, $U(x,y,z)=\dfrac{x^2}{2}+xy-y^2+2xz-yz+\dfrac{z^2}{2}+C$.

Пример 6. Найти $div(gradU)$ скалярного поля $U(x,y,z)=(x+3y-2z)^5$.

Решение. Градиент поля $U(x,y,z)$ есть вектор: $gradU=(U'_x,U'_y,U'_z)$.

Находим его:

$U'_x=5(x+3y-2z)^4$, $U'_y=15(x+3y-2z)^4$, $U'_z=-10(x+3y-2z)^4$.

Значит, $gradU=\left(5(x+3y-2z)^4,15(x+3y-2z)^4,-10(x+3y-2z)^4\right)$.

Дивергенция векторного поля $\overline{F}=(P,Q,R)$ вычисляется по формуле $div\,\overline{F}=P'_x+Q'_y+R'_z$.

В данном случае $\overline{F}$ – это $gradU$, а P,Q,R – проекции $gradU$. Тогда

$P'_x=\left(5(x+3y-2z)^4\right)'_x=20(x+3y-2z)^3$, $Q'_y=\left(15(x+3y-2z)^4\right)'_y=180(x+3y-2z)^3$,

$R'_z=\left(-10(x+3y-2z)^4\right)'_z=80(x+3y-2z)^3$ и $div(gradU)=280(x+3y-2z)^3$.

Задания для выполнения

1. Найти градиент функции $z=f(x,y)$ и его модуль для функций в данных точках М:

1) $z=7-yx^3-y^2$; M(1; 2).

2) $z=(x-y)^2$; M(1; 3).

3) $u=x^3+yz^2+y^4x$; M(1; 1; 2).

4) $u=2xy-yz^2+y^2$; M(-1; 1; 1).

2. Вычислить производную функции $u=x^3+yz^2-6xy^2+2z$ в точке A(1, 2,1) по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$. B(3, 0, 2).

3. Вычислить производную функции $z=x^3+3xy-6x+4y$ в точке A(1, 2) по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$. B(3, 1).

4. Задано скалярное поле U = U(M). $U=2^{x+y+z}$. $M_0(1,1,-1)$, $\vec{l}=(3,-1,2)$ Требуется:

1) найти значение скалярного поля *U=U(M)* в точке M_0;

2) определить вид линий или поверхностей (гиперповерхностей) уровней

данного поля;

3) вычислить производную поля в точке M_0 по направлению вектора $\vec{l}$;

4) найти величину и направление $gradU$ в точке M_0.

5. Найти дивергенцию и ротор полей:

а) $\vec{F} = x\vec{i} + z\vec{j} - y\vec{k}$;

б) $\vec{F} = x\vec{i} + (5y+1)\vec{j} + 2z\vec{k}$;

в) $\vec{F} = z^2\vec{i} + y^2\vec{j}$;

г) $\vec{F} = (y+z)\vec{i} + (x-z)\vec{j} + z\vec{k}$;

д) $\vec{F} = zy^2\vec{i} + xz^2\vec{j} + x^2y\vec{k}$.

6. Указать свойства полей:

а) $\vec{F} = y^2\vec{i} + x\vec{j} + (x+y)\vec{k}$;

б) $\vec{F} = 3x\vec{i} - 2z\vec{j} + y\vec{k}$;

в) $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$;

г) $\vec{F} = zy^2\vec{i} + xz^2\vec{j} + x^2y\vec{k}$.

<u>Тема.</u> Двойные и криволинейные интегралы. Формула Грина

Цель: сформировать умения вычисления двойных и криволинейных интегралов.

Задачи:

закрепить знания о свойствах двойных и криволинейных интегралов, способах их вычисления и связи;

рассмотреть примеры по вычислению двойных и криволинейных интегралов;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Двойной интеграл и его свойства
2. Криволинейные интегралы первого и второго рода и их свойства
3. Формула Грина.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

<u>Методические указания по выполнению заданий</u>

<u>Пример 1.</u> Вычислить $\iint\limits_P \frac{x^2dxdy}{1+y^2}$, где Р прямоугольник [0,1;0,1].

<u>Решение.</u>

$$\iint\limits_P \frac{x^2dxdy}{1+y^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}dy\int_0^1 x^2dx = \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}\left[\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1\right] = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{3}arctg\, y\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

<u>Пример 2.</u> Р ограничена: $y^2=3x+9$, $y=3-x$. Свести $\iint\limits_P f(x;y)dxdy$ к повторным двумя способами.

Решение. Найдём точки пересечения графиков функций:

$(3-x)^2=3x+9$,

$9-6x+x^2-3x-9=0$,

$x^2-9x=0$, $x(x-9)=0$,

$x=0$, $x=9$, $y=3$, $y=-6$.

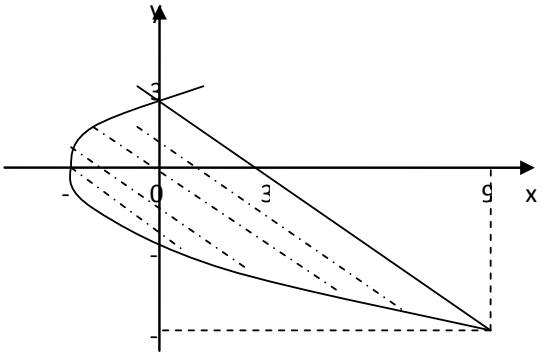

Рис. 2.

Выразим из первого уравнения

x: $3x+9=y^2-9$, $x=\dfrac{y^2-9}{3}$.

$$\iint\limits_P f(x;y)dxdy=\int\limits_{-3}^{0}dx\int\limits_{-\sqrt{3x+9}}^{\sqrt{3x+9}}f(x;y)dy+\int\limits_{0}^{9}dx\int\limits_{-\sqrt{3x+9}}^{3-x}f(x;y)=$$

$$\int\limits_{-6}^{3}dy\int\limits_{\frac{y^2-9}{3}}^{3-y}f(x;y)dx$$

Пример 3. $J=\iint\limits_G \ell^{x^2+y^2}dxdy$, G – четверть круга $x^2+y^2=1$ в первом квадранте.

Решение. Перейдем к полярным координатам:

$$J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1\ell^{\rho^2}\cdot\rho d\rho=\frac{1}{2}(\ell-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{1}{2}(\ell-1)\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}(\ell-1).$$

Пример 4. Вычислить $\int\limits_L\left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)ds$, где L - дуга астроиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, лежащей в первой четверти (рис. 3).

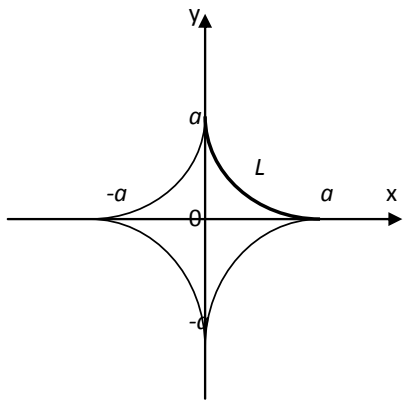

Рис. 3.

Решение. Параметрическое уравнение части астроиды, лежащей в первой четверти:

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \quad 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$x'_t=-3a\cos^2 t\sin t$, $y'_t=3a\sin^2 t\cos t$.

$$\int_L \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\frac{4}{3}} \left(\cos^4 t + \sin^4 t \right) \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t \left(\cos^2 t + \sin^2 t \right)} dt =$$

$$= 3a^{\frac{7}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^4 t + \sin^4 t \right) \cos t \sin t dt = 3a^{\frac{7}{3}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t \sin t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t \cos t dt \right) =$$

$$= 3a^{\frac{7}{3}} \left(-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t d(\cos t) + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^5 t d(\sin t) \right) = 3a^{\frac{7}{3}} \left(-\frac{\cos^6 t}{6} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sin^6 t}{6} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) =$$

$$= \frac{3a^{\frac{7}{3}}}{2} (0 + 1 + 1 - 0) = a^{\frac{7}{3}}.$$

<u>Пример 5</u>. Вычислить $I = \int_L (x^2 - y^2) dx + (3x + y) dy$, если L – дуга параболы $y=x^2$ от точки (0;0) до точки (2;4).

<u>Решение.</u> I способ. $y=x^2 \Rightarrow dy=2xdx$, $x \in [0;2]$.

$$I = \int_0^2 \left((x^2 - x^4) dx + (3x + x^2) 2x dx \right) = \int_0^2 \left(x^2 - x^4 + 6x^2 + 2x^3 \right) dx = = \int_0^2 \left(7x^2 + 2x^3 - x^4 \right) dx$$

$$= \left(7\frac{x^3}{3} + \frac{2x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^2 = \frac{56}{3} - 8 + \frac{32}{5} = \frac{256}{15} = 17\frac{1}{15}.$$

II способ. $x = \sqrt{y},\ dx = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy, \quad y \in [0,4]$.

$$I = \int_0^4 (y - y^2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} dy + (3\sqrt{y} + y) dy = \int_0^4 \left(\frac{1}{2}\sqrt{y} - \frac{1}{2} y^{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{y} + y \right) dy =$$

$$= \left(\int_0^4 \frac{7}{2} y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} y^{\frac{3}{2}} + y \right) dy = \left(\frac{7}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot y\sqrt{y} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} y^2 \sqrt{y} + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^4 = \frac{7}{3} \cdot 8 - \frac{32}{5} + 8 = 17\frac{1}{15}.$$

<u>Пример 6.</u> С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл $\oint_L (x - y) dx + (x + y) dy$, где $L -$ окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

<u>Решение.</u> $P(x, y) = x - y,\ Q(x, y) = x + y,\ \frac{\partial P}{\partial y} = -1,\ \frac{\partial Q}{\partial y} = 1.$

Тогда $\oint_L (x - y) dx + (x + y) dy = \iint_G (1 - (-1)) dxdy = 2\iint_G dxdy = 2S(G) = 2\pi R^2$.

Задания для выполнения

1. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле. Сделать чертеж области интегрирования.

а) $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy$;

б) $\int\limits_{1}^{7} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{8y-y^2}} f(x,y)dx$;

в) $\int\limits_{-5}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-6y-y^2}} f(x,y)dx$;

г) $\int\limits_{-4}^{-2} dx \int\limits_{-\sqrt{-6x-x^2}}^{0} f(x,y)dy$.

2. Вычислить $\iint\limits_{G} xydxdy$, $G=\{1\le x\le 2, 1\le y\le 2\}$.

3. Вычислить $\iint\limits_{G} \left(x^2+xy+2y^2\right)dxdy$, $G=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\}$.

4. Вычислить $\iint\limits_{G} (2x-y)dxdy$, $G=\{x+y=1, x+y=2, 2x-y=1, 2x-y=3\}$.

5. Вычислить $\iint\limits_{G} e^{x^2+y^2}dxdy$, G – четверть круга $x^2+y^2=1$, расположенная в I квадранте.

6. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

7. Вычислить площадь области G, ограниченной линиями $y^2=x+1$, $x=+y=1$.

8. Вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру L с помощью формулы Грина:

а) $\oint\limits_{L} (x-y)dx+(x+y)dy$, где L – окружность $x^2+y^2=9$;

б) $\oint\limits_{L} y^2dx+(x+y)^2dy$, где L – треугольник с вершинами $A(1;0), B(1;1), C(0;1)$

9. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} y^2dl$, где AB – часть окружности $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\le t\le \frac{\pi}{2}$.

10. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} ydl$, где AB – дуга параболы $y^2=2x$ от точки (0; 0) до точки (2; 2).

11. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} x^2dx + xydy$, где AB – четверть окружности $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, A соответствует t=0, B соответствует $t = \frac{\pi}{2}$.

12. Вычислить интеграл $\oint\limits_{L} (x + y)dy$, где L – контур прямоугольника, образованного прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$.

13. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} 3x^2ydx + \left(x^3 + 1\right)dy$, где:

a) AB – прямая $y = x$, соединяющая точки (0; 0) и (1; 1);

b) AB – парабола $y = x^2$, соединяющая точки (0; 0) и (1; 1).

Тема. Периодические величины

Цель: сформировать умения использовать элементы гармонического анализа.

Задачи:

закрепить знания о периодических функциях и частотных характеристика гармоник;

рассмотреть примеры по определению амплитуды, угловой частоты, начальной фазы гармоник;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Периодические функции. Период. График периодической функции.

2. Гармоники.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Методические указания по выполнению заданий

Пример 1. Составить уравнение гармонического колебания, если амплитуда равна 10, период равен 0,5 с, а начальная фаза равна 1,5.

Решение. Находим $\omega=2\pi/0{,}5=4\pi$. Подставляя $A=10$, $\varphi=1{,}5$, $\omega=4\pi$, получим $y=10\sin(4\pi t+1{,}5)$.

Пример 2. Найти период, амплитуду и начальную фазу функции $y=3\sin(2x-\frac{\pi}{6})$.

Решение. $A=3$, $\omega=2$, $\varphi=-\pi/6$. Период находим из соотношения $T=2\pi/\omega=\pi$.

Задания для выполнения

1. Дана функция $g(x)=\sin 1{,}5x+5\cos\frac{3}{4}x$. Найти: $g(0)$; $g(7\pi)$; $g(-12\pi)$. Доказать, что 8π является периодом функции. Найти основной период функции.

2. Найти основной период и наибольшее значение функций:

а) $y=\sin 2x\cdot\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}$;

б) $y=\frac{2tgx}{1+tg^2x}\cdot\cos 2x$.

3. Найти амплитуду, частоту, период и начальную фазу гармонических колебаний и построить график:

а) $y=-\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2t$;

б) $y=\sqrt{3}\sin\frac{1}{2}t-\cos\frac{1}{2}t$.

4. Построить графики уравнений:

а) $|y|=|ctgx|$;

б) $|y|=\cos|x|$;

в) $y=|\sin x|$;

г) $y=\sin|x|$.

5. Докажите тождество:

$$\frac{1}{\cos 2x\cdot\cos 4x}+\frac{1}{\cos 4x\cdot\cos 6x}+\ldots+\frac{1}{\cos 18x\cdot\cos 20x}=\frac{2\sin 18x}{\sin 4x\cdot\cos 20x}.$$

6. Найти наименьший положительный период функции $f(x)=2\sin(3x+1)-5\cos(6x-2)+7\sin(9x+4)$.

7. Найти сумму значений параметра а, при котором период функции $y=tg((3a-1)x)$ равен π.

<u>Тема.</u> Ряд Фурье. Теорема Дирихле

Цель: Сформировать умения применять теорему Дирихле и вычислять коэффициенты Фурье.

Задачи:

закрепить знания о тригонометрических рядах и их сходимости;

рассмотреть примеры по вычислению суммы и коэффициентов ряда Фурье;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Ортогональная система функций.
2. Теорему Дирихле и условие Дирихле.
3. Формула общего члена ряда Фурье.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Шипачев, В.С.Задачник по высшей математике: учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ./ В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 304с.

<u>Методические указания по выполнению заданий</u>

<u>Пример 1</u>. Пусть функция $f(t)=e^{-2t}\sin\frac{t}{2}$, заданная на отрезке $[-\pi;\pi]$, разложена в ряд Фурье. К какому числу сходится ряд Фурье этой функции при $t=8{,}5\pi$?

<u>Решение.</u> Ряд Фурье для функции f(t), заданной на отрезке $[-\pi;\pi]$ – это ряд Фурье для ее периодического продолжения $\varphi(t)$ с периодом 2π, которое совпадает с f(t), только для $t\in[-\pi;\pi]$. Следовательно, сумма ряда Фурье при $t=8{,}5\pi$ определяется следующим образом:

$$S(8{,}5\pi)=\varphi(8{,}5\pi)=\varphi\left(8\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{-2\cdot\frac{\pi}{2}}\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi}.$$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию периода 2π, заданную на интервале $-\pi < x \le \pi$ формулой: $f(x) = x$ (рис. 4).

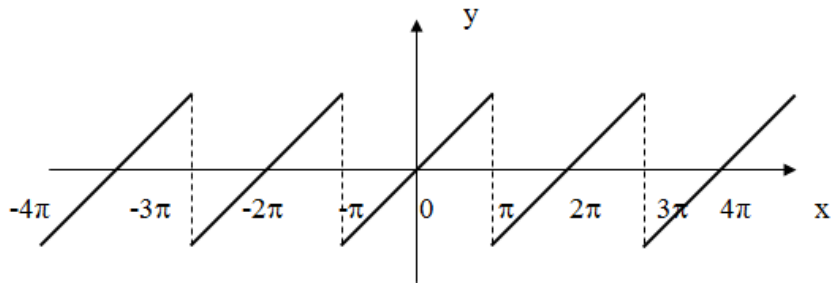

Рис. 4.

Решение. Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. Найдем коэффициенты Фурье $\left(\textit{интегрируем по частям} \left| \begin{matrix} x = u, & \sin nx\,dx = dv \\ dx = du, & v = -\dfrac{1}{n}\cos nx \end{matrix} \right| \right)$:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx \right] = -\frac{2}{\pi}\cos n\pi = -\frac{2(-1)^n}{n},$$

т.к. $-\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = -\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$.

Следовательно, ряд Фурье функции $f(x)$ будет иметь вид: $2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n}\sin nx + \ldots\right]$

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[-\pi, \pi]$ формулой $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0;\ \ a < x \le \pi \\ 1, & 0 < x < a \\ \frac{1}{2}, & x = 0,\ x = a \end{cases}$.

Решение. Функция удовлетворяет условиям Дирихле. Находим коэффициенты Фурье

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^a dx = \frac{x}{\pi}\Big|_0^a = \frac{a}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^a 1\cdot\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_0^a = \frac{\sin na}{n\pi},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^a f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^a 1\cdot\sin\ nx\ dx = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\left(-\cos\ nx\right)\Big|_0^a = \frac{\cos\ nx}{\pi n}\Big|_0^a = \frac{1-\cos na}{n\pi}.$$

Разложение в ряд Фурье $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \frac{a}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n\pi}\cdot\cos nx + \frac{1-\cos na}{n\pi}\cdot\sin na.$$

<u>Задания для выполнения</u>

1. Найти коэффициент a_0 ряда Фурье периодической функции $f(x) = 2x+1$ с периодом π, заданной на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

2. Найти коэффициент a_1 ряда Фурье периодической функции $f(x) = 2+4\cos x+3\sin 2x$ с периодом 2π.

3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[-\pi,\pi]$ уравнением $f(x) = \begin{cases} -2x & при \quad -\pi \le x < 0, \\ 3x & при \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$.

2. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[0, 2\pi]$ формулой $f(x) = \frac{x}{2}$.

3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[-\pi,\pi]$ формулой $y = |\sin\ x|$.

<u>Тема.</u> Разложение функций в ряд Фурье непериодических функций

Цель: Сформировать умения разложения в ряд Фурье непериодических функций.

Задачи:

закрепить знания о разложении функции в ряд Фурье;

рассмотреть примеры по разложению в ряд Фурье непериодических функций;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Разложение в ряд Фурье для четных функций.

2. Разложение в ряд Фурье для нечетных функций.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Шипачев, В.С.Задачник по высшей математике: учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ./ В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 304с.

<u>Методические указания по выполнению заданий</u>

<u>Пример 1.</u> Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[0,2]$ уравнением $f(x)=x-\frac{x^2}{2}$.

<u>Решение.</u> Функция может быть разложена в ряд Фурье бесчисленным количеством способов. Рассмотрим два наиболее важных варианта разложения.

а) Доопределим функцию на отрезке $[-2,0]$ четным образом (рис. 5).

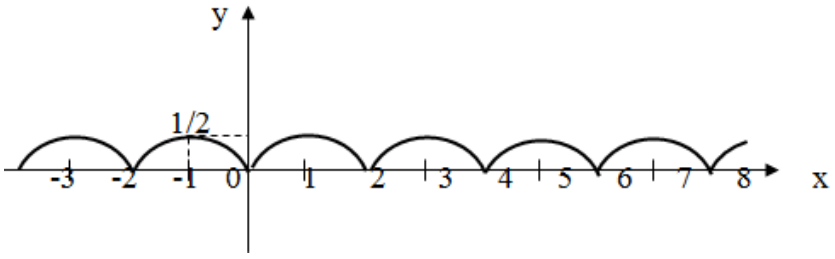

Рис. 5

Имеем $\ell = 2$. $a_0 = \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^3 \right)\Big|_0^2 = \frac{2}{3}$;

$$a_n = \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2 \right) \cos\frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2}{n\pi}\left(x - \frac{1}{2}x^2 \right)\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 (1-x)\sin\frac{n\pi x}{2} dx = = -\frac{2}{n\pi}\int_0^2 (1-x)\sin\frac{n\pi x}{2} dx \cdot$$

Еще раз интегрируем по частям:

$$a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}(1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2} dx =$$

$$= -\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi - \frac{4}{n^2\pi^2} = -\frac{4}{n^2\pi^2}\left[1 + (-1)^n\right] \qquad b_n = 0.$$

Итак, $f(x) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2} = \frac{1}{3} - \frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\pi x + \frac{1}{4^2}\cos 2\pi x + \frac{1}{6^2}\cos 3\pi x + \ldots \right)$.

б) Доопределим функцию на отрезке $[2,0]$ нечетным образом (рис. 6).

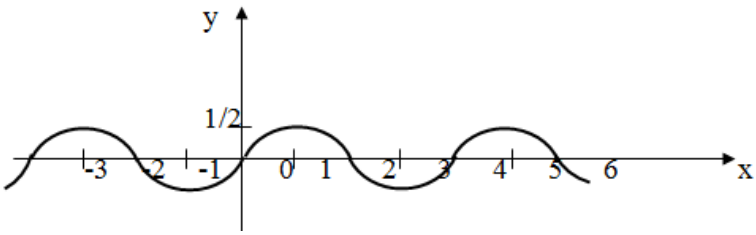

Рис. 6.

$$b_n = \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2 \right)\sin\frac{n\pi x}{2} dx = -\frac{2}{n\pi}\left(x - \frac{1}{2}x^2 \right)\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 (1-x)\cos\frac{n\pi x}{2} dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_0^2 (1-x)\cos\frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2}{n\pi}\left[(1-x)\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}(-dx) \right] =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2} dx = = \frac{-8}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 = -\frac{8}{n^3\pi^3}\left[\cos n\pi - 1\right] = \frac{8}{n^3\pi^3}\left[1 - (-1)^n\right].$$

Итак, $a_n = 0,\ a_0 = 0$.

$$f(x) = \frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1^0)^n}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{2} = \frac{16}{\pi^3}\left(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^3}\sin\frac{5\pi x}{2} + \ldots \right).$$

<u>Задания для выполнения</u>

1. На отрезке $[-\pi,\pi]$ разложить в ряд Фурье функции $f(x) = \{1,\ \text{если} -\pi \le x < 0; -1\ \text{если}\ 0 \le x < \pi\}$ и $f(x) = x$.

2. На отрезке $[-\pi,\pi]$ разложить в ряд Фурье функции:

а) $f(x) = \sin x$; б) $f(x) = x^2$.

3. Представить периодическую функцию $f(x)$, заданную на полупериоде $[0,l]$, рядом Фурье по синусам или косинусам. Построить график функции и график суммы полученного ряда Фурье.

а) $f(x)=\begin{cases} 1+\sin x \quad \text{при} \quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \quad \text{при} \quad \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi \end{cases}$ по косинусам;

б) $f(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ -\cos x \quad \text{при} \quad \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi \end{cases}$ по синусам.

Тема. Численные методы решения алгебраических уравнений

Цель: сформировать умения решать уравнения численными методами.

Задачи:

закрепить знания о приближенных методах вычислений;

рассмотреть примеры решения уравнений численными методами;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Абсолютная и относительная погрешность.
2. Метод хорд.
3. Метод касательных.
4. Комбинированный метод хорд и касательных.
5. Метод проб.
6. Интерполирование.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Шипачев, В.С.Задачник по высшей математике: учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ./ В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 304с.

Методические указания по выполнению заданий

Пример 1. Оценить абсолютную и относительную погрешность приближенного значения 1,41 для числа $\sqrt{2}$.

Решение. $\delta=|x-x^*|=|1{,}41-1{,}4142\ldots|\leq|1{,}41-1{,}415|=0{,}005$.

$\varepsilon=\delta/|x^*|\leq 0{,}005/|1{,}4142\ldots|\leq 0{,}005/|1{,}414|=0{,}003536\ldots\leq 0{,}004$.

Пример 2. $y=\sin x+\cos x$. $x=0{,}5\pm 0{,}2$. Оценить абсолютную и относительную погрешность для y.

Решение. $y(0{,}5)=\sin 0{,}5+\cos 0{,}5=0{,}48+0{,}88=1{,}36$.

$y'=\cos x-\sin x$.

$y'(0{,}5)=\cos 0{,}5-\sin 0{,}5=0{,}878-0{,}479=0{,}399$.

$\delta y \le |y'(x^*)|\ \delta x = 0{,}399 \cdot 0{,}2 = 0{,}0798 \le 0{,}08$.

$\varepsilon y \le \delta y / |y| \le 0{,}08/1{,}36 = 0{,}059 \le 0{,}06$.

<u>Пример 3.</u> Решить уравнение $\cos x = x^2$ с точностью $\delta 0 = 0{,}1$.

<u>Решение.</u> $f(x) = \cos x - x^2$, $a=0$, $b=\pi/2=1{,}57$

1. $a=0$, $b=1{,}57$, $c=(0+1{,}57)/2=0{,}785$, $f(a)=f(0)=1-0=1$, $f(c)=f(0{,}785)=0{,}707-0{,}616=0{,}091$, $f(a)f(c)>0$, $a=c=0{,}785$, $\delta=(b-a)/2=(1{,}57-0{,}785)/2=0{,}393$, $\delta>0{,}1$

2. $a=0{,}785$, $b=1{,}57$, $c=(0{,}785+1{,}57)/2=1{,}18$, $f(a)=f(0{,}785)=0{,}707-0{,}616=0{,}091$, $f(c)=f(1{,}18)=0{,}381-1{,}39=-1{,}01$, $f(a)f(c)<0$, $b=c=1{,}18$, $\delta=(b-a)/2=(1{,}18-0{,}785)/2=0{,}198$, $\delta>0{,}1$

3. $a=0{,}785$, $b=1{,}18$, $c=(0{,}785+1{,}18)/2=0{,}983$, $f(a)=f(0{,}785)=0{,}707-0{,}616=0{,}091$, $f(c)=f(0{,}983)=0{,}555-0{,}966=-0{,}411$, $f(a)f(c)<0$ $b=c=0{,}983$, $\delta=(b-a)/2=(0{,}983-0{,}785)/2=0{,}099$, $\delta<0{,}1$.

$x^*=(b+a)/2=(0{,}983+0{,}785)/2=0{,}884$, $x^*=0{,}884\pm0{,}1$.

<u>Пример 4.</u> Задана табличная функция

x	-1	0	2	3
y	-2	1	2	2

Построить многочлен Лагранжа.

<u>Решение.</u> $$L_3(x) = (-2)\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(-1-0)(-1-2)(-1-3)} + 1\frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(0+1)(0-2)(0-3)} +$$

$$+2\frac{(x+1)(x-0)(x-3)}{(2+1)(2-0)(2-3)} + 2\frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(3+1)(3-0)(3-2)} = \frac{1}{6}(x^3-5x^2+6x) +$$

$$+\frac{1}{6}(x^3-4x^2+x+6) - \frac{1}{3}(x^3-2x^2-3x) + \frac{1}{6}(x^3-x^2-2x) = \frac{1}{6}(x^3-6x^2+11x+6) =$$

$$= \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 1\frac{5}{6}x + 1.$$

$$L_3(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 1\frac{5}{6}x + 1.$$

<u>Задания для выполнения</u>

1. Оценить абсолютную и относительную погрешность для значения функции $y = \ln x^2$, при $x = 2 \pm 0{,}1$.

2. Оценить абсолютную и относительную погрешность для значения функции $y = \frac{2x}{1-x^2}$, при $x = 2 \pm 0{,}1$.

3. Решить уравнение $\ln x - \sin x = 2$ с точностью $\delta_0 = 0{,}01$.

4. Решить уравнение $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ с точностью $\delta_0 = 0{,}01$.

5. Решить уравнение $x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 1$ с точностью $\delta_0 = 0{,}01$.

6. Задана табличная функция

x	-2	-1	1	3
y	1	1	2	-2

Построить многочлен Лагранжа.

<u>Тема.</u> Численные методы решения систем алгебраических уравнений

Цель: сформировать умения решать системы уравнений численными методами.

Задачи:

закрепить знания о приближенных методах вычислений;

рассмотреть примеры решения систем уравнений численными методами;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Точные методы.

2. Метод простых итераций.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

<u>Методические указания по выполнению заданий</u>

<u>Пример 1.</u> Показать, что для данной системы итерационный процесс сходится и определить, сколько итераций следует выполнить, чтобы найти неизвестные с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}01x_1 + 0{,}15x_2 - 0{,}26x_3 \\ x_2 = -0{,}02x_1 + 0{,}32x_2 + 0{,}21x_3 + 0{,}41 \\ x_3 = -0{,}07x_1 - 0{,}04x_2 + 0{,}29x_3 - 0{,}13 \end{cases}$$

<u>Решение.</u> $\|\alpha\| = \max\{0{,}42;\ 0{,}55;\ 0{,}4\} < 1$

$\|\alpha\| = 0{,}55$ – итерационный процесс сходится.

Найдем количество итераций, которое необходимо выполнить, чтобы найти неизвестные с точностью $\varepsilon = 10–4$.

$\|\beta\| = 0{,}41$, $\quad \dfrac{\|\alpha\|^{k+1}}{1-0{,}55} \cdot 0{,}41 < 10^{-4}$

$\frac{0{,}53^{k+1} \cdot 0{,}41}{0{,}45} < 10^{-4}$, (k + 1) lg 0,55 + lg 0,41 – lg 0,45 < – 4;

(k + 1) lg 0,55 < – 4 – lg 0,41 + lg 0,45;

$(k+1) > \frac{-4 - \lg 0{,}41 + \lg 0{,}45}{\lg 0{,}55}$.

<u>Задания для выполнения</u>

Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} 7x + 5y + 2z = 18 \\ x - y - z = 3 \\ x + y + 2z = -2 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x - 2y - 2z = 3 \\ x + y - 2z = 3 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$.

Тема. Приближенное вычисление интегралов

Цель: сформировать умения применять численные методы к вычислению интегралов.

Задачи:

закрепить знания о приближенных методах интегрирования;

рассмотреть примеры приближенного вычисления интегралов;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Формулы прямоугольников.
2. Формула Симпсона.
3. Формула трапеций.
4. Метод Монте-Карло.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Методические указания по выполнению заданий

Пример 1. Найти численное решение интеграла Римана $I=\int_0^{\pi} x\sin x dx$ с шагом h=π/4.

Решение. Воспользуемся формулой Симпсона.

$$n=\frac{b-a}{h}=\frac{\pi-0}{\frac{\pi}{4}}=\frac{4\pi}{\pi}=4.$$

$x_0=0$. $f_0=f(x_0)=f(0)=0\sin 0=0$.

$x_1=x_0+1h=0+1\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$. $f_1=f(x_1)=f(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

$$x_2 = x_0 + 2h = 0 + 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.\ f_2 = f(x_2) = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot 1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$x_3 = x_0 + 3h = 0 + 3\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.\ f_3 = f(x_3) = f(\frac{3\pi}{4}) = \frac{3\pi}{4}\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}.$$

$$x_4 = x_0 + 4h = 0 + 4\cdot\frac{\pi}{4} = \pi.\ f_4 = f(x_4) = f(\pi) = \pi\sin\pi = \pi\cdot 0 = 0.$$

$$I_h = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4) = \frac{\pi}{12}(0 + 4\frac{\pi}{4\sqrt{2}} + 2\frac{\pi}{2} + 4\frac{3\pi}{4\sqrt{2}} + 0) =$$

$$= \frac{\pi}{12}(\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{12}\cdot\frac{(4+\sqrt{2})\pi}{\sqrt{2}} = \frac{(4+\sqrt{2})\pi^2}{12\sqrt{2}} \approx 3{,}15$$

$$I = \int_0^{\pi} x\sin x dx \approx I_h \approx 3{,}15$$

<u>Задания для выполнения</u>

1. Найти численное решение интеграла Римана $I = \int_0^2 (x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})dx$ с шагом h=0,5.

2. Найти численное решение интеграла Римана $I = \int_1^3 (\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})dx$ с шагом h=0,5.

3. Найти численное решение интеграла Римана $I = \int_0^2 \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}\,dx$ с шагом h=0,5.

4. Найти численное решение интеграла Римана $I = \int_0^{\pi} \sin(\sin x)dx$ с шагом $h = \frac{\pi}{4}$.

Тема. Приближенное решение дифференциальных уравнений

Цель: Сформировать умения применять численные методы к решению дифференциальных уравнений.

Задачи:

закрепить знания о приближенных методах решения дифференциальных уравнений;

рассмотреть примеры приближенного решения дифференциальных уравнений;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Метод Эйлера.
2. Метод Рунге-Кутта.
3. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.
4. Метод Пикара последовательных приближений.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Шипачев, В.С.Задачник по высшей математике: учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ./ В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 304с.

Методические указания по выполнению заданий

Пример 1. Написать несколько членов разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ уравнения $y'' + xy' + y = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Решение. Полагаем $y(x) = y(0) + y'(0)\,x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 \ldots$, где $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Из уравнения получаем $y'' = -xy' - y$. Отсюда $y''(0) = -y(0) = 0$.

Дифференцируя последовательно уравнение будем иметь

$y''' = -xy'' - 2y'$, $y^{IV} = -xy''' - 3y''$, $y^{V} = -xy^{IV} - 4y'''$.

Из этих равенств вытекает, что $y'''(0) = -2\cdot 1 = -2$, $y^{IV}(0) = -3\cdot 0 = 0$,

$y^V(0) = -4\cdot(-2) = 8.$

Следовательно, $y(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \ldots$.

Пример 2. Методом последовательных приближений найти приближенное решение дифференциального уравнения y’ = x – y, удовлетворяющее начальному условию y(0) = 1.

Решение. В качестве начального приближения возьмем $y_0(x) = 1$. Так как $y = 1 + \int_0^x (x - y)dx$, то будем иметь $y_1 = 1 + \int_0^x (x-1)dx = 1 - x + \frac{x^2}{2}$.

Аналогично $y_2 = 1 + \int_0^x \left(x - 1 + x - \frac{x^2}{2} \right) dx = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{6}$.

Подобным же образом получим $y_3 = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}$, $y_4 = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{120}$ и т.д.

Пример 3. Найти, используя метод Эйлера, значения функции y, определяемой дифференциальным уравнением $y' = \frac{y-x}{y+x}$, при начальных условиях y(0) = 1, принимая h = 0,1. Ограничиться отысканием первых четырех значений y.

Решение. При h = 0,1 последовательные значения аргумента будут:

x0 = 0, x1 = 0,1, x2 = 0,2, x3 = 0,3, … . Вычислим соответствующие значения исходной функции:

$$y_1 = y_0 + h\cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1\cdot\frac{1-0}{1+0} = 1{,}1$$

$$y_2 = y_1 + h\cdot f(x_1, y_1) = 1{,}1 + 0{,}1\cdot\frac{1{,}1-0{,}1}{1{,}1+0{,}1} = 1{,}183$$

$$y_3 = y_2 + h\cdot f(x_2, y_2) = 1{,}183 + 0{,}1\cdot\frac{1{,}183-0{,}2}{1{,}183+0{,}2} = 1{,}254$$

$$y_4 = y_3 + h\cdot f(x_3, y_3) = 1{,}254 + 0{,}1\cdot\frac{1{,}254-0{,}3}{1{,}254+0{,}3} = 1{,}315$$

Таким образом, получаем таблицу:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,1	1,183	1,254	1,315

Пример 4. Методом Рунге-Кутта вычислить на отрезке [0; 0,5] интеграл дифференциального уравнения $y' = x + y$, $y(0) = 1$, приняв шаг $h = 0,1$.

Решение. Покажем начало процесса.

Вычисление y_1. Последовательно имеем:

$k_1^{(0)} = (0 + 1)\cdot 0,1 = 0,1$; $k_2^{(0)} = (0,05 + 1 + 0,05)\cdot 0,1 = 0,11$;

$k_3^{(0)} = (0,05 + 1 + 0,055)\cdot 0,1 = 0,1105$; $k_4^{(0)} = (0,1 + 1 + 0,1105)\cdot 0,1 = 0,12105$

Отсюда $\Delta y_0 = \frac{1}{6}(0,1 + 2\cdot 0,11 + 2\cdot 0,1105 + 0,12105) = 0,1103$ и, следовательно $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0,1103 = 1,1103$.

Аналогично вычисляют дальнейшие приближения. Результаты вычислений приведены в таблице.

i	x	y	k = 0,1(x + y)	Δy
0	0 0,05 0,05 0,1	1 1,05 1,055 1,1105	0,1 0,11 0,1105 0,1210	0,1000 0,2200 0,2210 0,1210
				$\frac{1}{6}\cdot 0,6620 = 0,1103$
1	0,1 0,15 0,15 0,2	1,1103 1,1708 1,1763 1,2429	0,1210 0,1321 0,1326 0,1443	0,1210 0,2642 0,2652 0,1443
				$\frac{1}{6}\cdot 0,7947 = 0,1324$
2	0,2 0,25 0,25 0,3	1,2427 1,3149 0,3209 1,3998	0,1443 0,1565 0,1571 0,1700	0,1443 0,3130 0,3142 0,1700
				$\frac{1}{6}\cdot 0,9415 = 0,1569$
3	0,3 0,35 0,35 0,4	1,3996 1,4846 1,4904 1,5836	0,1700 0,1835 0,1840 0,1984	0,1700 0,3670 0,3680 0,1984
				$\frac{1}{6}\cdot 1,1034 = 0,1840$
4	0,4 0,45 0,45 0,5	1,5836 1,6828 1,6902 1,7976	0,1984 0,2133 0,2140 0,2298	0,1984 0,4266 0,4280 0,2298
				$\frac{1}{6}\cdot 1,2828 = 0,2138$
5	0,5	1,7974		

Таким образом, $y(0,5) = 1,7974$.

Задания для выполнения

1. Найти решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию: $y' + 2y^2 = e^x$, $y(0) = 0$.

2. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию: $y' + x \cdot y = 2e^y$, $y(0) = 0$.

3. Найти решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию: $y' + 3x \cdot y^3 = x^3$, $y(0) = 1$.

<u>Тема.</u> Понятие функции комплексного переменного

Цель: сформировать умение находить значения функций комплексного переменного.

Задачи:

закрепить знания о свойствах функций комплексного переменного;

рассмотреть примеры вычисления значений функций комплексного переменного;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Понятие функции комплексного переменного.
2. Степенная функция
3. Показательная функция
4. Логарифмическая функция
5. Тригонометрические функции
6. Гиперболические функции
7. Обратные тригонометрические функции

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

<u>Методические указания по выполнению заданий</u>

<u>Пример 1.</u> Дана функция $w = z^2 + z$. Найти её значение при $z = 1 + i$.

<u>Решение.</u> $w = (1 + i)^2 + (1 + i) = 1 + 3i$.

<u>Пример 2.</u> В какие кривые отображаются линии $y = x$, $x^2 + y^2 = 2$ с помощью функции $w = 1/z$?

<u>Решение.</u> $w = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \Rightarrow u = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v = \frac{-y}{x^2+y^2}$. Для точек прямой $y = x$ переход к новым координатам упрощается $u = \frac{1}{2x}, v = \frac{-1}{2y}$. Обратное преобразование $x = \frac{1}{2u}, y = \frac{-1}{2v}$.Преобразование уравнения линии $y = x \Rightarrow u = -v$, т.е. биссектриса 1 четверти переходит в биссектрису 3 четверти.

Для точек окружности $x^2 + y^2 = 2$ переход к новым координатам: $u = x/2$, $v = - y/2$. Обратное преобразование координат : $x = 2u$, $y = -2v$. Переход к уравнению образа: $x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow u^2 + v^2 = ½$, т.е. окружность радиуса $\sqrt{2}$ переходит в окружность радиуса ½ .

<u>Пример 3.</u> В какую кривую отображается окружность $|z| = \sqrt{2}$ с помощью функции $w = z^2$?

<u>Решение.</u> $|z| = \sqrt{2} \Rightarrow z = \sqrt{2}\, e^{it}$, $(0 \le t \le 2\pi)$, $w = z^2 = 2\, e^{i\,2t}$, т.е. образом является окружность $|w| = 2$, причем, при прохождении исходной окружности вторая проходится дважды.

<u>Задания для выполнения</u>

1. Представить в алгебраической форме:

а) $tg\left(\frac{\pi}{3} + i\right)$;

б) $(-1+i)^{-3i}$;

в) $Arctg\left(\frac{3+i2\sqrt{3}}{3}\right)$;

г) $Ln(4+i)$.

2. Изобразить область, заданную неравенствами $|z-i| \le 2,\ 0 < \operatorname{Im} z < 2$.

3. Вычислить значение функции в точке:

а) $w = sh(z^2+1)$ в точке $z_0 = 2 - i.$

б) $w = e^{-3iz} + e^z$ в точке $z_0 = -3 + i.$

в) $w = \ln(2z - i)$ в точке $z_0 = 0.5i + \sqrt{3}.$

<u>Тема.</u> Дифференцирование функции комплексного переменного

Цель: Сформировать умение выполнять дифференцирование функции комплексного переменного.

Задачи:

закрепить знания о дифференцируемости функции комплексного переменного;

рассмотреть примеры дифференцирования функции комплексного переменного;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Производная функции комплексного переменного.
2. Теоремы о дифференцируемости функции комплексного переменного.
3. Аналитические и гармонические функции, связь между ними.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Шипачев, В.С.Задачник по высшей математике: учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ./ В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 304с.

<u>Методические указания по выполнению заданий</u>

<u>Пример 1.</u> Является ли дифференцируемой функция $f(z) = e^{-x}\cos y - i\, e^{-x}\sin y$?

<u>Решение.</u> Проверим выполнение условий Коши – Римана: $u = e^{-x}\cos y$, $v = -e^{-x}\sin y$, $\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x}\cos y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-x}\cos y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-x}\sin y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-x}\sin y$. Функция является дифференцируемой.

<u>Пример 2.</u> Дана действительная часть $u(x,y) = x^2 - y^2 - x$ дифференцируемой функции f(z), где $z = x + iy$. Найти функцию f(z).

<u>Решение.</u> Вычисляем $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1$. Т.к. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ (1 условие Коши – Рима-

на), то $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 1$. Это ДУ интегрируем $\int dv = \int (2x-1)dy$ $\Rightarrow$ v(x,y) = 2xy – y + $\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ - произвольная функция. Это решение дифференцируем по x : $\frac{\partial v}{\partial x}$ = 2y + $\varphi`(x)$. Т.к. $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ( 2 условие Коши – Римана), то $\frac{\partial u}{\partial y}$ = - 2y - $\varphi`(x)$. Но из условия задачи следует $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$. Сравнение производных дает $\varphi`(x)$ = 0 или $\varphi(x)$ = const , т.е сопряженная функция равна v(x,y) = 2xy – y + C .

Следовательно f(z) = (x^2 – y^2 – x) + i (2xy – y +C) = (x^2 – y^2) +i 2xy + (x + i y) + C = z^2 + z + C.

<u>Задания для выполнения</u>

1. Проверить условие Коши-Римана и, если возможно, вычислить производную функций:

а) $f(z) = e^{z^2-1}$;

б) $f(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{z}$;

в) $f(z) = sh(z\bar{z} - i)$;

г) $f(z) = \bar{z}\operatorname{Re} z + \frac{1}{z}$;

д) $f(z) = \cos(2z - i)$;

е) $f(z) = \cos(z^2)$.

2. Восстановить голоморфную в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x,y)$ или мнимой части $v(x,y)$ и начальному значению $f(z_0)$: $v = x^2 - y^2 + 2x + 1,\ f(0) = i$.

<u>Тема.</u> Интегрирование функции комплексного переменного

Цель: Сформировать умение интегрировать функции комплексного переменного.

Задачи:

закрепить знания о способах интегрирования функции комплексного переменного;

рассмотреть примеры интегрирования функции комплексного переменного;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Интеграл функции комплексного переменного, его свойства.
2. Интегральная формула Коши, следствия.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

<u>Методические указания по выполнению заданий</u>

<u>Пример 1.</u> Вычислить интеграл $\int_{AB} f(z)\,dz$, где $f(z) = (y+1) - xi$, прямая AB соединяет точки $z_A = 1$, $z_B = -i$.

<u>Решение.</u> Имеем $u = y + 1$, $v = -x$. Уравнение прямой $y = x - 1$ и $dy = 1$.

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_{AB} (y+1)\,dx - (-x)\,dy + i\int_{AB} (-x)\,dx + (y+1)\,dy =$$

$$= \int_1^0 [\,(x - 1 + 1) - (-x)\,]\,dx + i\int_1^0 [\,(-x) + (x - 1 + 1)\,]\,dx = -1$$

<u>Пример 2.</u> Вычислить интегралы:

а) $J = \int_{ABC} (z^2 + 1)\,dz$, где ABC – ломаная, $z_A = 0$, $z_B = -1 + i$, $z_C = i$.

б) $J = \int_L z|z|\,dz$, где $L : |z| = 1$, $\operatorname{Im} z > 0$

<u>Решение.</u> а) Способ 1 Общая формула $J = \int_L u\,dx - v\,dy + i\int_L v\,dx + u\,dy$.

$f(z) = (x + iy)^2 + 1 = (x^2 - y^2 + 1) + i(2xy)$, ABC = AB + BC

AB: $y = -x$, $dy = -dx$, $0 \le x \le -1$, $u = 1$, $v = -2x^2$

$J_{AB} = \int_0^{-1}(1-2x^2)dx + i\int_0^{-1}(-2x^2-1)dx$ = -1/3 + 5i/3

BC: y = 1, dy = 0, $-1 \le x \le 0$, u = x^2, v = 2x

$J_{BC} = \int_{-1}^{0} x^2 dx + i\int_{-1}^{0} 2xdx$ = 1/3 – i , J = J_{AB} + J_{BC} = 2i/3

Способ 2. По формуле Ньютона-Лейбница $\int_a^b$ f(z) dz = F(b) - F(a).

J = $\int_0^i (z^2+1)dz = [\frac{z^3}{3} + z]|_0^i$ = 2i/3.

б) Способ 1. f(z) = z|z| = (x + iy)$\sqrt{x^2+y^2}$ = x$\sqrt{x^2+y^2}$ + i y$\sqrt{x^2+y^2}$

L: $x^2 + y^2 = 1$, y = $\sqrt{1-x^2}$, dy = $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $1 \le x \le -1$, u = x, v = y.

J = $\int_1^{-1} xdx$ - $\int_1^{-1}\sqrt{1-x^2}\frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ + i {$\int_1^{-1}\sqrt{1-x^2}dx$ + $\int_1^{-1} x\frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}$} = 0 + i $\int_{-1}^{1}\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ =

$= \left\{\begin{matrix} x=\sin t & t_{\hat{a}}=\pi/2 \\ dx=\cos t dt & t_{\acute{i}}=-\pi/2 \end{matrix}\right\} = i\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{(2\cos^2 t-1)\cos t}{\cos t}dt = i\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[\frac{2}{2}(1+\cos 2t)-1]dt =$

= i ½ sin 2t $|_{-\pi/2}^{\pi/2}$ = 0.

Способ 2. Представим z в показательной форме z = re^{it}, тогда dz = e^{it}dr + ir e^{it}dt.

L: |z| = 1, Im z > 0 $\Rightarrow$ r = 1 , dr = 0 , $0 \le t \le \pi$,

J = $\int_L$ z|z| dz = $\int_0^{\pi} 1e^{it}1i1e^{it}dt$ = ½ i e^{i2t} $|_0^{\pi}$ = ½ i(cos 2t + $i$sin 2t) $|_0^{\pi}$ = 0.

<u>Задания для выполнения</u>

1. Вычислить интеграл от функции комплексной переменной $\int_{-i}^{1}(2\bar{z}-3z)dz$, где l – дуга параболы $y = x^2 - 1$.

2. Вычислить интеграл от функции комплексной переменной $\int_{-2i}^{2}(\bar{z}-3z^2)dz$, где l – прямая, соединяющая точки.

3. Вычислить интеграл от функции комплексной переменной $\int_0^{1-i}(2\bar{z}\,\mathrm{Re}\,z-3)dz$, где l – дуга $y = -\sqrt{x}$.

4. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данному пути: $\int\limits_L |z| \cdot \bar{z} dz;\ L = \{z : |z| = 4,\ \mathrm{Re}\, z \geq 0\}$

5. Вычислить интегралы с помощью интегральной формулы Коши.

а) $\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos(z+\pi i)}{z(e^z+2)} dz$;

б) $\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z^2+2)(z+3)}$;

в) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin iz}{z^2-4z+3} dz$;

г) $\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz$.

<u>Тема.</u> Линейное пространство. Линейный оператор

Цель: сформировать умение решать задачи функционального анализа.

Задачи:

закрепить знания о свойствах линейных пространств;

рассмотреть примеры нахождения матрицы линейного оператора;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Понятие линейного пространства
2. Размерность линейного пространства
3. Понятие линейного оператора
4. Собственные векторы и собственные числа линейного оператора

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

<u>Методические указания по выполнению заданий</u>

<u>Пример 1.</u> Линейный оператор A действует в $R_3 \to R_3$ по закону $A\vec{x} = (5x_1 + 2x_2 - 3x_3,\ 4x_1 + 5x_2 - 4x_3,\ 6x_1 + 4x_2 - 4x_3)$, где $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – произвольный вектор из R_3. Найти матрицу оператора A в каноническом базисе.

<u>Решение.</u> Каноническим является базис $\vec{e_1} = (1,0,0)$, $\vec{e_2} = (0,1,0)$, $\vec{e_3} = (0,0,1)$. Имеем $A\vec{e_1} = A(1,\ 0,\ 0) = (5\cdot1+2\cdot0-3\cdot0,\ 4\cdot1+5\cdot0-4\cdot0,\ 6\cdot1+4\cdot0-4\cdot0) = (5,\ 4,\ 6)$, $A\vec{e_2} = A(0,\ 1,\ 0) = (5\cdot0+2\cdot1-3\cdot0,\ 4\cdot0+5\cdot1-4\cdot0,\ 6\cdot0+4\cdot1-4\cdot0) = (2,\ 5,\ 4)$, $A\vec{e_3} = A(0,0,1) = (5\cdot0+2\cdot0-3\cdot1,\ 4\cdot0+5\cdot0-4\cdot1,\ 6\cdot0+4\cdot0-4\cdot1) = (-3,\ -4,\ -4)$. Отсюда ис-

комая матрица оператора имеет вид: $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 4 & 5 & -4\\ 6 & 4 & -4\end{pmatrix}$.

<u>Пример 2.</u> Доказать, что вектор $\vec{x}=(1,\ 2,\ 1)^{T}$ является собственным для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}$, и найти соответствующее ему собственное число. Найти другие собственные векторы.

<u>Решение.</u> Имеем $A\vec{x}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-6+4\\ 4-14+8\\ 6-14+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ -1\end{pmatrix}=(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$. Отсюда следует, что вектор $\vec{x}=(1,\ 2,\ 1)^{T}$ собственный и отвечает собственному числу $\lambda=-1$.

Составим характеристическое уравнение $\begin{vmatrix}1-\lambda & -3 & 4\\ 4 & -7-\lambda & 8\\ 6 & -7 & 7-\lambda\end{vmatrix}=0$. Вычисляя этот определитель, получим $\lambda^3-\lambda^2-5\lambda-3=0$. Так как $\lambda=-1$ является корнем характеристического уравнения, то разделим $\lambda^3-\lambda^2-5\lambda-3$ на двучлен $\lambda+1$, в результате получим $\lambda^2-2\lambda+3$, корнями которого являются $\lambda=-1$, $\lambda=3$. Таким образом, $\lambda_1=-1$ – двукратный корень характеристического уравнения, $\lambda_2=3$ – однократный корень характеристического уравнения являются собственными числами матрицы A.

Запишем систему для определения собственного вектора, отвечающего собственному числу $\lambda=3$: $\begin{cases}-2x_1-3x_2+4x_3=0,\\ 4x_1-10x_2+8x_3=0,\\ 6x_1-7x_2+43x_3=0.\end{cases}$

Вычислим ранг матрицы системы:

$$\begin{pmatrix}-2 & -3 & 4\\ 4 & -10 & 8\\ 6 & -7 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2 & -3 & 4\\ 2 & -5 & 4\\ 6 & -7 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2 & -3 & 4\\ 0 & -8 & 8\\ 0 & -16 & 16\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

отсюда $r(A)=2$. Число $n-r=3-2=1$ характеризует количество свободных неиз-

вестных в системе $\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ -x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$ эквивалентной первоначальной. Пусть x_3 – свободное неизвестное. Выразим через x_3 неизвестные x_1 и x_2: $x_2 = x_3$, $x_1 = 0{,}5x_3$.

Полагая $x_3=2$, найдем собственный вектор (1, 2, 2). Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, следовательно, $\vec{x} = (1, 2, 2)^T$ собственный и отвечает собственному числу $\lambda=3$.

Собственными векторами, отвечающими числу $\lambda=3$, будут и векторы $(1, 2, 2)^T \cdot t$, где $t \neq 0$. Заметим, что собственному числу $\lambda=-1$ кратности 2 отвечает лишь один с точностью до числового множителя собственный вектор, так как $rang(A-\lambda E)=2$ при $\lambda=-1$. Таким образом, матрица A имеет лишь два линейно независимых собственных вектора.

<u>Задания для выполнения</u>

1. Проверить линейность оператора A: $R_3 \to R_3$, если $A\vec{x} = (x_1+x_3,\ x_2,\ 2x_1+x_3)$ для $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R_3$.

2. Проверить линейность преобразования $A\vec{x} = \vec{x} + \vec{a}$, если $\vec{x}$, $\vec{a} \in V_3$, $\vec{a}$ – фиксированный вектор.

3. Написать матрицу оператора A: $R_3 \to R_3$ для $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R_3$ в стандартном базисе $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$:

а) $A\vec{x} = (x_1+x_3,\ x_2,\ 2x_1+x_3)$;

б) $A\vec{x} = (x_3,\ x_1,\ x_2)$.

4. Найти координаты образа $\vec{y} = A\vec{x}$, $A\vec{x} = (x_1+x_3,\ x_2,\ 2x_1+x_3)$, $\vec{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3) = (3.\ -1,\ 2) \in R_3$ в стандартном базисе $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$.

5. Найти собственные числа:

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A:

а) $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

<u>Тема.</u> Решение уравнений и систем методом сжимающих отображений

Цель: сформировать умение решать уравнения и системы на основе принципа сжимающих отображений.

Задачи:

закрепить знания о принципе сжимающих отображений;

рассмотреть примеры решения уравнений и систем методом итераций;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Метод итераций и метод простых итераций как частные случаи применения принципа сжимающих отображений.

2. Сведение исходного уравнения к виду, пригодному для применения метода итераций.

3. Суть и обоснование метода итераций.

4. Условие окончания вычислений в методе итераций.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

<u>Методические указания по выполнению заданий</u>

Метод итераций применяется к уравнению вида $X= u(x)$ на отрезке $[a,b]$, где:

а) модуль производной функции $u(x)$ невелик: $| u'(x) | <= q < 1$ ($x \in [a,b]$)

б) значения $u(x)$ лежат на $[a,b]$,т.е. $a <= u(x) <= b$ при $x \in [a,b]$.

Если заранее известно, что на отрезке $[a,b]$ расположен ровно один корень уравнения $X=u(x)$, то достаточно проверить выполнение условия а).

Сведение уравнения $f(x)=0$ к нужному виду обычно осуществляют одним из двух способов:

1) вражают один из X, входящих в уравнение, например уравнение e^x - x-=0 приводят к виду: $X=e^x$ или X = ln(x);

2) Подбирают множитель и производят преобразования: f(x)=0 => k*f(x)=0 => x=x + k*f(x), т.е. u(x)=x+ k*f(x). Например, если 0 < m < f'(x) <= M при $X\in[a,b]$, то можно в качестве k взять величину - 1/M, и тогда 0 <= u'(x) = 1 +к* f'(x)= 1- 1/M * f' (x) <= 1- m/M.

Процесс построения последовательности следует обрывать, когда станет верным неравенство $|x_{к+1}-x_к|< \varepsilon*(1-q)/q$. В этом случае $x_{к+1}$ и дает приближение к решению с требуемой точностью.

<u>Пример 1.</u> Решить систему линейных уравнений: $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 7, \\ 4x_1 - 8x_2 + x_3 = -21, \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 = 15. \end{cases}$

<u>Решение.</u> Уравнения можно записать в виде: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{7 + x_2 - x_3}{4}, \\ x_2 = \dfrac{21 + 4x_1 + x_3}{8}, \\ x_3 = \dfrac{15 + 2x_1 - x_2}{5} = 0. \end{cases}$

Это позволяет предложить следующий итерационный процесс:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{7 + x_2^{k-1} - x_3^{k-1}}{4}, \\ x_2^{(k)} = \dfrac{21 + 4x_1^{k-1} + x_3^{k-1}}{8}, \\ x_3^{(k)} = \dfrac{15 + 2x_1^{k-1} - x_2^{k-1}}{5} = 0. \end{cases}$$

Покажем, что если начать с точки P0 = (x1(0), x2(0), x3(0)) = (1, 2, 2), то итерация сходится к решению (2, 4, 3). Подставим x1 = 1, x2 = 2, x3 = 2 в правую часть каждого уравнения, чтобы получить новые значения:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{7 + x_2^{(0)} - x_3^{(0)}}{4} = \dfrac{7+2-2}{4} = 1.75 \\ x_2^{(1)} = \dfrac{21 + 4x_1^{(0)} + x_3^{(0)}}{8} = \dfrac{21+4\cdot 1+2}{8} = 3.375 \\ x_3^{(1)} = \dfrac{15 + 2x_1^{(0)} - x_2^{(0)}}{5} = \dfrac{15+2\cdot 1-2}{5} = 3 \end{cases}$$

Новая точка P1 = (x1(1), x2(1), x3(1), x4(1)) = (1.75, 3.375, 3), ближе, чем P0.

Итерация, генерирует последовательность точек {Pk}, которая сходится к решению (2, 4, 3):

k	x1(k)	x2(k)	x3(k)
0	1.0	2.0	2.0
1	1.75	3.375	3.0
2	1.84375	3.875	3.025
3	1.9625	3.925	2.9625
4	1.990625	3.9765625	3.0
5	1.99414063	3.9953125	3.0009375
…	…	…	…
15	1.99999993	3.99999985	3.0009375
…	…	…	…
19	2.0	4.0	3.0

<u>Задания для выполнения</u>

1. Определить, применим ли метод итераций для уравнений:

а) $X = \ln(3X + 2)$ на отрезке [0,5]. A на отрезке [1,5]?

б) $X = e^{X-9}$ на отрезке [10,12]. A на отрезке [0,1]?

2. Свести к виду, пригодному для применения метода итераций уравнения:

а) $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ на отрезке [2, 3];

б) $xtg\,\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = 0$ на отрезке [-1, 1];

в) $9 - x^2 - e^x = 0$ на отрезке [1, 2].

3. Доказать, что в условиях из неравенства $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon \cdot \frac{1-q}{q}$ вытекает неравенство $|x_{k+1} - c| < \varepsilon$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 5 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 4 = 0. \end{cases}$

<u>Тема.</u> Понятие случайного процесса. Марковский случайный процесс. Цепи Маркова

Цель: сформировать умение определять матрицу перехода состояний системы.

Задачи:

закрепить знания о Марковских случайных процессах;

рассмотреть примеры вычисления матрицы перехода;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Понятие случайного процесса
2. Понятие марковского случайного процесса.
3. Марковские процессы с дискретным временем.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

3. Шипачев, В.С.Задачник по высшей математике: учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ./ В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 304с.

<u>Методические указания по выполнению заданий</u>

<u>Пример 1.</u> Задана матрица вероятностей перехода для цепи Маркова за один шаг. Найти матрицу перехода данной цепи за три шага $P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.

<u>Решение.</u> Матрицей перехода системы называют матрицу, которая содержит все переходные вероятности этой системы:

$$p_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}$$

В каждой строке матрицы помещены вероятности событий (перехода из состояния *i* в состояние *j*), которые образуют полную группу, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице:

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1, \quad (i = 1,2,...,k).$$

Обозначим через $p_{ij}(n)$ вероятность того, что в результате *n* шагов (испытаний) система перейдет из состояния *i* в состояние *j*. Например $p_{25}(10)$- вероятность перехода из второго состояния в пятое за десять шагов. Отметим, что при *n=1* получаем переходные вероятности $p_{ij}(1) = p_{ij}$.

Перед нами поставлена задача: зная переходные вероятности p_{ij}, найти вероятности $p_{ij}(n)$ перехода системы из состояния *i* в состояние *j* за *n* шагов. Для этого введем промежуточное (между *i* и *j*) состояние *r*. Другими словами, будем считать, что из первоначального состояния *i* за *m* шагов система перейдет в промежуточное состояние *r* с вероятностью $p_{ir}(m)$, после чего, за оставшиеся *n-m* шагов из промежуточного состояния *r* она перейдет в конечное состояние *j* с вероятностью $p_{rj}(n-m)$. По формуле полной вероятности получаем:

$$p_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} p_{ir}(m) p_{rj}(n-m).$$

Эту формулу называют равенством Маркова. С помощью этой формулы можно найти все вероятности $p_{ij}(n)$, а, следовательно, и саму матрицу P_n. Так как матричное исчисление ведет к цели быстрее, запишем вытекающее из полученной формулы матричное соотношение в общем виде $P_n = P_1^n$.

Вычислим матрицу перехода цепи Маркова за три шага, используя полученную формулу:

$$P(3)=P^3=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}8\\ 0{,}3 & 0{,}7\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}8\\ 0{,}3 & 0{,}7\end{pmatrix}^2\cdot\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}8\\ 0{,}3 & 0{,}7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}28 & 0{,}72\\ 0{,}27 & 0{,}73\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}8\\ 0{,}3 & 0{,}7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}272 & 0{,}728\\ 0{,}273 & 0{,}727\end{pmatrix}.$$

Пример 2. Построить граф состояний следующего случайного процесса: устройство S состоит из двух узлов, каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя, после чего начинается ремонт узла, продолжающийся заранее неизвестное случайное время. Найти предельные вероятности для системы S при $\lambda_{01}=1$, $\lambda_{02}=2$, $\lambda_{10}=2$, $\lambda_{13}=2$, $\lambda_{20}=3$, $\lambda_{23}=1$, $\lambda_{31}=3$, $\lambda_{32}=2$.

Решение. Возможные состояния системы: S_0 – оба узла исправны; S_1 – первый узел ремонтируется, второй исправен; S_2 – второй узел ремонтируется, первый исправен; S_3 – оба узла ремонтируются. Граф системы приведен на рисунке 7.

Стрелка, направленная, например, из S_0 в S_1, означает переход системы в момент отказа первого узла, из S_1 в S_0 – переход в момент окончания ремонта этого узла.

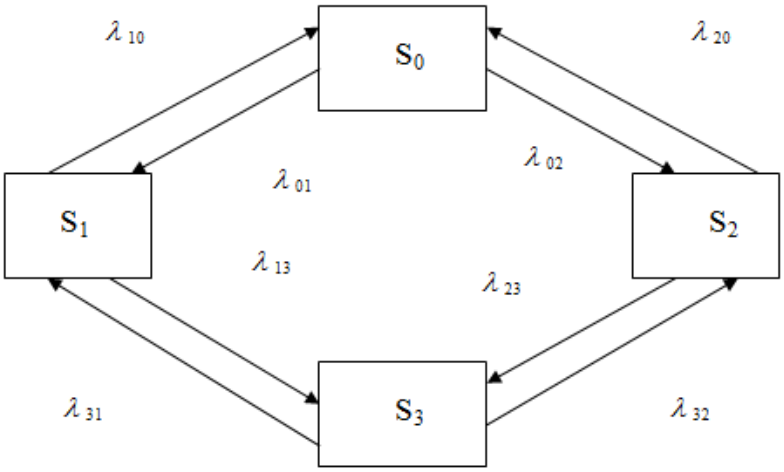

Рис. 7.

На графе отсутствуют из стрелки из S_0 в S_3 и из S_1 в S_2. Это объясняется тем, что выходы узлов из строя предполагаются независимыми друг от друга и, например, вероятностью одновременного выхода из строя двух узлов (переход из S_0 в S_3) или одновременного окончания ремонтов двух узлов (переход из S_3 в S_0) можно

пренебречь.

Решение. Система алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим для данной системы, имеет вид:

$$\begin{cases} 3p_0 = 2p_1 + 3p_2, \\ 4p_1 = p_0 + 3p_3, \\ 4p_2 = 2p_0 + 2p_3, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Последнее уравнение в системе означает, что для любого момента времени t сумма вероятности всех состояний равна единице.

При составлении системы воспользовались правилом: справа в уравнениях стоит предельная вероятность данного состояния p_i, умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, ведущих из данного состояния, а слева – сумма произведений интенсивностей всех потоков входящих в i состояние, умноженная на вероятность тех состояний, из которых эти потоки исходят.

Решив систему, получим: p_0 =0,40, p_1 =0,20, p_2 =0,27, p_3 =0,13, т.е. в предельном, стационарном режиме система S в среднем 40% времени будет находиться в состоянии S_0 (оба узла исправны), 20% - в состоянии S_1 (первый узел ремонтируется, второй работает), 27% времени – в состоянии S2 (второй узел ремонтируется, первый работает) и 13% времени – в состоянии S_3 (оба узла ремонтируются).

<u>Задания для выполнения</u>

1. Задана матрица вероятностей перехода для цепи Маркова за один шаг. Найти матрицу перехода данной цепи за два шага $\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

2. Задана матрица вероятностей перехода для цепи Маркова за один шаг. Найти матрицу перехода данной цепи за два шага $\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

Тема. Марковские процессы с непрерывным временем

Цель: сформировать умение определять вероятности состояний равновесия марковского случайного процесса.

Задачи:

закрепить знания о марковских процессах с непрерывным временем и процессах размножения и гибели как частном случае марковских случайных процессов;

рассмотреть примеры вычисления интенсивности переходов;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Марковские процессы с непрерывным временем.
2. Процессы размножения и гибели.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

3. Шипачев, В.С.Задачник по высшей математике: учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ./ В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 304с.

Методические указания по выполнению заданий

Пример 1. В вычислительный центр коллективного пользования с тремя компьютерами поступают заказы от предприятий на вычислительные работы. Если заняты все три компьютера, то вновь поступающий заказ не принимается и предприятие вынуждено обратиться в другой вычислительный центр. Среднее время работы с одним заказом составляет 3 часа. Интенсивность потока заявок 0.25 (з/час). Найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности работы вычислительного центра.

Решение. В теории массового обслуживания широкое распространение имеет специальный класс случайных процессов – так называемый *процесс гибели и размножения*. Рассмотрим упорядоченное множество состояний системы $S_0, S_1, ..., S_k$. Переходы могут осуществляться из любого состояния только в состояния с соседними номерами, т.е. из состояния S_k возможны переходы только либо в состояние S_{k-1}, либо в состояние S_{k+1}. В предположении, что все потоки событий, переводящие систему из одного состояние в следующее простейшие с соответствующими интенсивностями $\lambda_{k,k+1}$ или $\lambda_{k+1,k}$, для отыскания предельных вероятностей, можно использовать систему уравнений Колмогорова для стационарных процессов. Правило для составления уравнений Колмогорова звучит следующим образом: слева в уравнениях стоит предельная вероятность данного состояния p_i, умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, ведущих из данного состояния, а справа – сумма произведений интенсивностей всех потоков, входящих в *i*-ое состояние на вероятности тех состояний, из которых эти потоки выходят. Поток заявок характеризуется интенсивностью λ (заявок/час), поток обслуживания – интенсивностью μ (заявок/час). Согласно условию задачи $\lambda = 0.25$ (заявок/час), $\mu = 1/t = 1/3 \approx 0.33$ (заявок/час). В нашей задаче система массового обслуживания может находиться в одном из четырех состояний: S_0 - когда все три компьютера свободны; S_1 - когда загружен работой только один компьютер; S_2 - когда заняты два компьютера; S_3 - когда все компьютеры заняты. В предельном, стационарном режиме система алгебраических уравнений для вероятностей состояний имеет вид:

$$\begin{cases} \lambda\, p_0 = \mu\, p_1 \\ (\mu + \lambda) p_1 = \lambda\, p_0 + 2\mu\, p_2 \\ (2\mu + \lambda) p_2 = \lambda\, p_1 + 3\mu\, p_3 \\ 3\mu\, p_3 = \lambda\, p_2 \end{cases}.$$

К этой системе добавляется нормировочное уравнение $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

$$\begin{cases} 0.25\,p_0 = 0.33\,p_1 \\ 0.58\,p_1 = 0.25\,p_0 + 0.66\,p_2 \\ 0.91\,p_2 = 0.25\,p_1 + 0.99\,p_3 \\ 0.99\,p_3 = 0.25\,p_2 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}.$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$p_0 = 0.476;\ p_1 = 0.357;\ p_2 = 0.134;\ p_3 = 0.033.$

То есть в стационарном режиме работы вычислительного центра в среднем 47,6% времени нет ни одной заявки, 35,7% - имеется одна заявка, 13,4% - две заявки и 3,3% времени – три заявки (заняты все вычислительные мощности).

Вероятность отказа в обслуживании (когда заняты все три компьютера), таким образом $P_{от} = p_3 = 0.033$. Относительная пропускная способность центра $Q = 1 - P_{от} = 1 - 0.033 = 0.967$, то есть в среднем из каждых 100 заявок вычислительный центр обслуживает 96,7 заявок. Абсолютная пропускная способность $A = \lambda \cdot Q = 0.25 \cdot 0.967 = 0.242$, то есть в один час в среднем обслуживается 0,242 заявки. Среднее число занятых компьютеров есть математическое ожидание числа занятых каналов $\bar{k} = \sum_{k=0}^{4} k p_k = 0.725$, то есть каждый компьютер будет занят обслуживанием заявок в среднем лишь на $72.5/3 = 24.2\%$.

При оценке эффективности работы вычислительного центра необходимо сопоставить доходы от выполнения заявок с потерями от простоя дорогостоящих компьютеров и выбрать компромиссное решение.

<u>Задания для выполнения</u>

1. В процессе эксплуатации ЭВМ может рассматриваться как физическая система *S*, которая в результате проверки может оказаться в одном из следующих состояний: S_1 – ЭВМ полностью исправна; S_2 – ЭВМ имеет неисправности в оперативной памяти, при которых она может решать задачи; S_3 – ЭВМ имеет существенные неисправности и может решать ограниченный класс задач; S_4 – ЭВМ полностью вышла из строя.

В начальный момент времени ЭВМ полностью исправна (состояние S_1). Проверка ЭВМ производится в фиксированные моменты времени t_1, t_2, t_3. Процесс, протекающий в системе S, может рассматриваться как однородная марковская цепь с тремя шагами (первая, вторая, третья проверки ЭВМ). Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\|\mathrm{P}_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}0 \end{Vmatrix}.$$

Определите вероятности состояний ЭВМ после трёх проверок.

2. Определить вероятности состояний равновесия марковского случайного процесса с четырьмя возможными состояниями E_0, E_1, E_2, E_3 и матрицей интенсивностей переходов

$$\mathbf{Q} = \begin{array}{c} \\ E_0 \\ E_1 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_0 & E_1 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix} \end{array}.$$

<u>Тема.</u> Точечные и интервальные оценки параметров распределения

Цель: сформировать умение выполнять первичную статистическую обработку данных.

Задачи:

закрепить знания о свойствах точечных оценок;

рассмотреть примеры вычисления точечных и интервальных оценок;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Числовые характеристики вариационных рядов.
2. Точечные оценки и их свойства.
3. Гистограмма и полигон частот.
4. Доверительный интервал
5.. Интервальные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

3. Шипачев, В.С.Задачник по высшей математике: учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ./ В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 304с.

<u>Методические указания по выполнению заданий</u>

<u>Пример 1.</u> Методом моментов по выборке

X	3	4	5
n	70	20	10

Найти точечную оценку параметра λ, предполагая, что теоретическое распределение является показательным:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\geq 0;\\ 0, x<0.\end{cases}$$

Решение. Согласно методу моментов нужно приравнять начальный теоретический момент первого порядка (математическое ожидание $M(X)$) к начальному эмпирическому моменту первого порядка (выборочному среднему $\bar{x}$): $M(X)=\bar{x}$.

По формулам для показательного распределения имеем: $M(X)=\frac{1}{\lambda}$. Выборочное среднее находим по формуле: $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$, где x_i - варианта выборки, n_i - частота x_i, $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$ - объем выборки.

Получаем $\bar{x}=\frac{1}{70+20+10}(3\cdot 70+4\cdot 20+5\cdot 10)=3{,}4$.

Приравнивая моменты, находим λ: $\frac{1}{\lambda}=3{,}4$ => $\lambda=\frac{1}{3{,}4}\approx 0{,}29$.

Пример 2. Имеются данные о показателе инженерно-геологического элемента двадцати проб.: 3,7 4,3 6,7 5,6 5,1 8,1 4,6 5,7 6,4 5,9 5,2 6,2 6,3 7,2 7,9 5,8 4,9 7,6 7,0 6,9. Построить ряд распределения по имеющимся данным.

Решение. Вариация признака носит непрерывный характер, значения признака у отдельных единиц совокупности не повторяются. Поэтому строится интервальный ряд распределения. Для его построения следует определить количество интервалов и величину интервала.

Т.к. количество интервалов заранее не задано, определим его по формуле Стерджесса: n=1+3,322*lg20=1+3,322*1,3= 5,3. Дробное число, характеризующее количество интервалов, желательно округлять в меньшую сторону. Т.о., n=5.

Величина интервала h=(8,1-3,7)/5=0,88. Число, характеризующее величину интервала, округляется с той же точностью, что и исходные данные. В нашем случае следует округлить до 0,1: h=0,9.

Строим интервальный ряд распределения:

№ группы	Группы по размерупоказателя x	Число проб (частота) f	Частость, w	Накопленная частота S
1	3,7 – 4,6	3	0,15	3
2	4,6 – 5,5	3	0,15	6
3	5,5 – 6,4	7	0,35	13
4	6,4 – 7,3	4	0,2	17
5	7,3 – 8,2	3	0,15	20
Итого		20	1	

Пример 3. Задана таблица распределения случайной величины X объема n = 100:

Частичный интервал длиною ΔX=5	Сумма частот варианта частичного интервала ni	Плотность частоты ni/ΔX
5 – 10	4	0,8
10 – 15	6	1,2
15 – 20	16	3,2
20 – 25	36	7,2
25 – 30	24	4,8
30 – 35	10	2,0
35 – 40	4	0,8

Построить гистограмму.

Решение. Гистограмма частот изображена на рисунке 8.

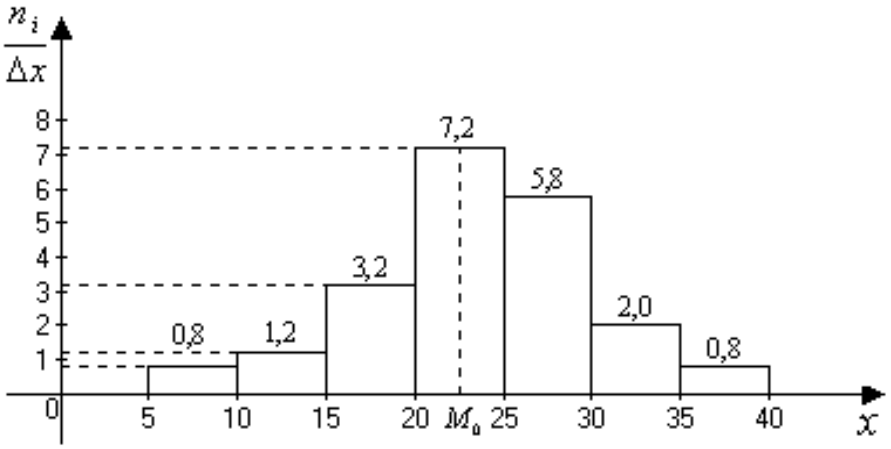

Рис. 8.

Пример 4**.** Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания ***m*** нормального закона с надежностью 0.95; зная выборочную среднюю $\overline{X} = 75{,}17; n = 36; \sigma = 6$.

Решение. Построить доверительный интервал с доверительной вероятностью $\gamma = 1 - 2\delta$ для математического ожидания ***m*** произвольной случайной величины можно следующим образом: $\overline{X} - U_\delta \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X} + U_\delta \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$.

При надежности γ=0,95 найдем табличное значение $U_\delta = 1{,}6$ и запишем выражение, подставив значения из условия задачи:

$$75{,}17 - 1{,}96\frac{6}{\sqrt{36}} \le m \le 75{,}17 + 1.96\frac{6}{\sqrt{36}},$$

$$73{,}21 \le m \le 77{,}13.$$

Задания для выполнения

1. Имеются данные объемного веса 24 проб грунта: 2,00 1,69 1,86 1,96 1,84 1,68 1,58 1,94 1,78 1,86 1,94 2,02 1,81 1,72 1,68 1,56 1,92 2,00 1,69 1,76 1,68 1,84 1,63 1,98. Построить сгруппированный статистический ряд. Вычислить основные статистические характеристики инженерно-геологического элемента: нормативное значение, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации, ошибку нормативного значения, показатель точности, ошибка среднего квадратичного отклонения, показатели ассиметрии и эксцесса и их ошибки.

2. Предприятие получает сырье, характеризующееся процентным содержанием в нем полезного вещества *A,* а также стабильностью этого показателя. Для поступившей партии сырья были произведены анализы концентрации вещества *A* по 40 опытам: 2,17; 2,27; 2,60; 2,76; 2,81; 3,00; 3,05; 3,06; 3,22; 3,28; 3,37; 3,60; 3,63; 3,68; 3,69; 3,90; 4,27; 4,39; 4,67; 4,69; 4,84; 5,02; 5,02; 5,02; 5,17; 5,29; 5,35; 5,61; 5,62; 5,62; 6,01; 6,64; 6,68; 7,07; 7,12; 7,35; 7,36; 7,40; 7,99; 8,19.

Требуется: построить сгруппированный вариационный ряд; построить сгруппированный статистический ряд; построить эмпирическую функцию распределения; построить гистограмму и полигон относительных частот; найти выборочные точечные характеристики: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, эксцесс, асимметрию, моду, коэффициент вариации.

3. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания m нормального закона с надежностью 0,9; зная выборочную среднюю $\overline{X} = 78{,}64; n = 70; \sigma = 10$.

4. Имеются данные объемного веса 24 проб грунта: 2,00 1,69 1,86 1,96 1,84 1,68 1,58 1,94 1,78 1,86 1,94 2,02 1,81 1,72 1,68 1,56 1,92 2,00 1,69 1,76 1,68 1,84 1,63 1,98.Найти доверительный интервал, покрывающий математическое ожидание с заданной доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha - 0{,}95$, считая σ неизвестным; найти доверительный интервал, покрывающий среднее квадратическое отклонение σ с заданной доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha - 0{,}95$.

<u>Тема.</u> Корреляционно-регрессионный анализ

Цель: сформировать умение выполнять операции с комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

Задачи:

закрепить знания о корреляционном и регрессионном анализе;

рассмотреть примеры вычисления коэффициента корреляции и построения линейной регрессии.

<u>Основные вопросы</u>

1. Понятие регрессии, регрессионные зависимости.
2. Виды регрессионной зависимости.
3. Ковариация. Коэффициент корреляции.
4. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

3. Шипачев, В.С.Задачник по высшей математике: учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ./ В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 304с.

<u>Методические указания по выполнению заданий</u>

<u>Пример 1.</u> По данным корреляционной таблицы найти выборочный корреляционный момент (ковариацию):

Y \ X	-1	0	1	2
2	20	10	0	30
3	0	10	20	10

<u>Решение.</u> Выборочный корреляционный момент μ_{xy} определяется равенством: $\mu_{xy} = \frac{1}{n}\sum n_{xy}xy - \overline{x}\,\overline{y}$.

Здесь x, y - варианты (наблюдавшиеся значения) признаков X и Y, n_{xy} - частота пары вариант (x, y), n - объем выборки, $\bar{x}, \bar{y}$ - выборочные средние.

Найдем выборочные средние с помощью соотношения:

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum n_x \cdot x$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum n_y \cdot y$, где n_x, n_y - частоты вариант x и y.

Так как $n = 20+10+30+10+20+10 = 100$, получаем

$$\bar{x} = \frac{-1(20+0)+0(10+10)+1(0+20)+2(30+10)}{100} = 0{,}8,$$

$$\bar{y} = \frac{2(20+10+0+30)+3(0+10+20+10)}{100} = 2{,}4.$$

Тогда

$$\mu_{xy} = \frac{2(-1)20+2\cdot 0\cdot 10+2\cdot 1\cdot 0+2\cdot 2\cdot 30+3(-1)\cdot 0+3\cdot 0\cdot 10+3\cdot 1\cdot 20+3\cdot 2\cdot 10}{100} - \\ - 0{,}8\cdot 2{,}4 = 0{,}8.$$

<u>Пример 2.</u> Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии:

а) Y на X, б) X на Y, если известны: выборочные средние $\bar{x} = 3{,}6$, $\bar{y} = 4$, выборочные дисперсии $D_x = 0{,}04$, $D_y = 0{,}25$, выборочный коэффициент корреляции $r_B = 0{,}6$.

<u>Решение.</u> а) Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет вид $y - \bar{y} = r_B \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$, где $\sigma_x = \sqrt{D_x}$, $\sigma_y = \sqrt{D_y}$.

Поскольку $\sigma_x = \sqrt{0{,}04} = 0{,}2$, $\sigma_y = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$, получаем уравнение

$y - 4 = 0{,}6 \cdot \frac{0{,}5}{0{,}2}(x - 3{,}6)$, или $y = 1{,}5x - 1{,}4$.

б) Согласно выборочному уравнению прямой линии регрессии X на Y:

$$x - \bar{x} = r_B \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y}).$$

Поэтому получаем $x - 3{,}6 = 0{,}6 \cdot \frac{0{,}2}{0{,}5}(y - 4)$, или $x = 0{,}24y + 2{,}64$.

Задания для выполнения

1. Изучается зависимость себестоимости одного изделия (Y, р.) от величины выпуска продукции (X, тыс. шт.) по группе предприятий за отчётный период. Получены следующие данные:

X	2	3	4	5	6
Y	1,9	1,7	1,8	1,6	1,4

Провести корреляционно-регрессивный анализ зависимости себестоимости одного изделия от выпуска продукции.

2. По заданной выборке найти линейную функцию методом наименьших квадратов. Построить чертеж. Обосновать правильность выбора степени многочлена, если относительная погрешность данных равна одному проценту среднего значения зависимой переменной.

x_i	68	62	65	70	63	63	67	68	55	66	58
y_i	-264	-240	-253	-275	-248	-243	-264	-267	-213	-218	-223

3. Найти выборочное уравнение прямой $\overline{y_x} - \overline{y} = r_b \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$ регрессии $У$ на X по данной корреляционной таблице:

Y	X						
	5	10	15	20	25	30	n_y
10	2	3	-	-	-	-	5
20	-	7	3	-	-	-	10
30	-	-	2	50	2	-	54
40	-	-	1	10	6	-	17
50	-	-	-	4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	$n = 100$

Тема. Метод наименьших квадратов

Цель: сформировать умение нахождения параметров функциональной зависимости методом наименьших квадратов.

Задачи:

закрепить знания о свойствах операций с комплексными числами;

рассмотреть примеры выполнения операций с комплексными числами;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Назначение и суть метода наименьших квадратов.

2. Формулы для нахождения параметров линейной зависимости методом наименьших квадратов.

3. Назначение и суть линеаризации функции.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Методические указания по выполнению заданий

Пример 1. Имеется выборка стоимости автомобилей Niccan в марте 2005 г. Y – цена, $. X – пробег по дорогам России, тыс. км

y	0,8	0,9	1,1	1,5	2	2,3	4,2	4,9	7	8,5
x	200	130	95	100	110	95	70	0	5	0

Построить парную линейную модель зависимость методом наименьших квадратов. Провести экономическую интерпретацию коэффициентов модели. Вычислить и объяснить эластичность результата по фактору. Привести пример прогнозирования.

Решение. Для удобства расчета строится вспомогательная таблица.

N	Y	X	YX	$(X_i)^2$
1	0,8	200	160	40000
2	0,9	130	117	16900
3	1,1	95	104,5	9025
4	1,5	100	150	10000
5	2	110	220	12100
6	2,3	95	218,5	9025
7	4,2	70	294	4900
8	4,9	0	0	0
9	7	5	35	25
10	8,5	0	0	0
СУММА	33,2	805	1300	101975
Среднее	3,32	80,5	130	10197,5

Решая систему двух уравнений с двумя неизвестными параметры a и b находятся коэффициенты парной регрессии.

$$\begin{cases} 2*10a - 2*33{,}2 + 2b*805 = 0, \\ 2b*101975 - 2*1300 + 2a*805 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20a + 1610b = 66{,}4, \\ 1610a + 203950b = 2600. \end{cases}$$

b = -0,037; a = 6,3.

Модель парной линейной регрессии примет вид: $\hat{Y} = 6{,}3 - 0{,}037X$.

b = -0,037 показывает, что при увеличении пробега по дорогам России на 1 тыс. км цена автомобиля уменьшается на 0,037 тыс.$ или 37$.

a = 6,3 показывает, что увеличение пробега по дорогам России способствует плавному снижению цены но автомобиль.

Коэффициент эластичности $Э = -0{,}037\dfrac{80{,}5}{3{,}32} = -0{,}037*24{,}25 = -0{,}9$ показывает, что увеличение пробега по дорогам России на 1 % уменьшает стоимость автомобиля на 0,9%.

<u>Пример 2.</u> Имеются данные о доходах потребителя и спросе на некоторое благо. Известно, что зависимость между спросом на некоторое благо и доходом описывается функцией Энгеля вида $y = ax^b$. Оценить параметры регрессии.

x – доход потребителя	5	7	10	12	15	20	21	25	26	30
y – спрос на некоторое благо	3,51	9,5	27,4	47	91	213	245	412	462	705

Решение. Линеаризируем функцию путем математических преобразований (логарифмирования).

$y = ax^b$, $\ln y = \ln ax^b$, $\ln y = \ln a + \ln x^b$, $\ln y = \ln a + b \ln x$.

Обозначим $Y = \ln y$, $X = \ln x$, $A = \ln a$, получим $Y = A + bX$.

Оценим параметры полученного линейного уравнения методом наименьших квадратов. Необходимые расчёты представим в таблице:

№	x	y	X=lnx	Y=lny	X^2	XY
1	5	3,51	1,61	1,26	2,59	2,02
2	7	9,5	1,95	2,25	3,79	4,38
3	10	17,8	2,30	2,88	5,30	6,63
4	12	50	2,48	3,91	6,17	9,72
5	15	60	2,71	4,09	7,33	11,09
6	20	150	3,00	5,01	8,97	15,01
7	21	240	3,04	5,48	9,27	16,69
8	25	430	3,22	6,06	10,36	19,52
9	26	400	3,26	5,99	10,62	19,52
10	30	705	3,40	6,56	11,57	22,31
сумма	171	2065,81	26,97	43,50	75,98	126,88
среднее	17,1	206,58	2,70	4,35	7,60	12,69

Для нахождения оценок параметров *A* и *b* составим систему уравнений:

$\begin{cases} A + 2{,}7 \cdot b = 4{,}35 \\ 2{,}7 \cdot A + 7{,}6 \cdot b = 12{,}69 \end{cases}$. Решая систему уравнений получаем: *A=-3,61; b=2,95.*

Зная, что $A = \ln a$ определим оценку параметра $a = e^A = e^{-3{,}61} = 0{,}027$, тогда уравнение зависимости примет вид: $y = 0{,}027 \cdot x^{2{,}95}$.

Задания для выполнения

1. По заданной выборке найти линейную функцию методом наименьших квадратов. Построить чертеж. Обосновать правильность выбора степени многочлена, если относительная погрешность данных равна одному проценту среднего значения зависимой переменной.

x	90	95	88	86	71	87	77	48	82
y	69	79	59	91	27	57	27	14	43

2. По заданной выборке установить вид функциональной зависимости. Найти параметры эмпирической формулы.

x	0	1	2	3	4	5
y	4.81	3.01	1.70	1.12	0.62	0.40

Тема. Обработка экспериментальных данных

Цель: сформировать умение применять статистические критерии для обработки экспериментальных данных.

Задачи:

закрепить знание алгоритма проверки статистических гипотез;

рассмотреть примеры проверки статистических гипотез;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Статистические гипотезы.

2. Статистический критерий проверки нулевой гипотезы. Наблюдаемое значение критерия.

3. Критическая область. Критические точки и их нахождение.

4. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей.

5. Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых известны.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

Методические указания по выполнению заданий

Пример 1. Даны две независимые выборки объемов $n_1 = 10$ и $n_2 = 15$, извлеченные из генеральных совокупностей X и Y, распределенных по нормальному закону. Найдены исправленные выборочные дисперсии $s_x^2 = 2{,}67$ и $s_y^2 = 1{,}88$. Проверим при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе H_1: $D(X) > D(Y)$.

Решение. Найдем значение $F_{кр}(0{,}05;\ 9;\ 14) = 2{,}65$. Критическая область – правосторонняя. Вычислим наблюдаемое значение критерия: $F_{набл} = \dfrac{2{,}67}{1{,}88} = 1{,}42 < F_{кр}$.

Следовательно, нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Пример 2. Имеются независимые выборки значений нормально распределенных случайных величин X: 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6 и Y: 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 7, 8, 9.

Требуется проверить для уровня значимости $\alpha = 0{,}1$ при условии равенства генеральных дисперсий нулевую гипотезу H_o: $M(X) = M(Y)$ при конкурирующей гипотезе H_1: $M(X) \neq M(Y)$.

Решение. Объемы выборок $m = 10$, $n = 15$. Вычислим выборочные средние и исправленные выборочные дисперсии:

$$\bar{x}_B = 3{,}8;\ \ \bar{y}_B = 4{,}93;\ \ s_x^2 = 1{,}73;\ \ s_y^2 = 3{,}21.$$

Вычислим наблюдаемое значение критерия: $T_{набл} = \dfrac{3{,}8 - 4{,}93}{\sqrt{9 \cdot 1{,}73 + 14 \cdot 3{,}21}} \sqrt{\dfrac{10 \cdot 15 \cdot 23}{25}} = -1{,}706.$ Критическая область – двусторонняя, $t_{двуст.кр.}(0{,}1;\ 23) = 1{,}71$. Итак, $|T_{набл}| < t_{двуст.кр.}$, следовательно, нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу – можно считать, что математические ожидания генеральных совокупностей равны.

Пример 3. В серии из 20 независимых испытаний событие A появилось 8 раз, в серии из 15 испытаний – 7 раз. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверяется нулевая гипотеза H_o: $p_1 = p_2$ при конкурирующей гипотезе H_o: $p_1 < p_2$.

Решение. Критическая область – левосторонняя, $\Phi(u_{кр}) = \dfrac{1 - 2 \cdot 0{,}05}{2} = 0{,}45,$ следовательно, $u_{кр} = 1{,}645$, и критическая область имеет вид $U < -1{,}645$. Вычислим $u_{набл} = \dfrac{\dfrac{8}{20} - \dfrac{7}{15}}{\sqrt{\dfrac{15}{35} \cdot \dfrac{20}{35} \cdot \left(\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{15}\right)}} = -0{,}394.$ $U_{набл} > -u_{кр}$, следовательно, гипотеза принимается, и можно считать, что вероятность события A в обеих сериях испытаний одинакова.

Задания для выполнения

1. По двум выборкам нормальных законов распределения проверить гипотезу о равенстве дисперсий (при конкурирующей гипотезе об их неравенстве) при уровне значимости 0.1.

Первая выборка: 39.5 53.9 59.0 29.8 73.9 42.7 40.5 47.0 45.3 59.1

Вторая выборка: 61.4 50.3 78.7 16.6 77.0 34.3 101.6 21.9 40.1 130.9

Определить: дисперсию первой выборки; дисперсию второй выборки; вычисленное значение критерия; теоретическое значение критерия; вывод о принятии или не принятии гипотезы.

2. По данным двух выборок нормального закона распределения проверить гипотезу о равенстве генеральных средних (при конкурирующей гипотезе об их неравенстве) при уровне значимости $\alpha = 0.030$.

Найти: выборочное среднее для первой выборки; выборочное среднее для второй выборки; вычисленное значение критерия; табличное значение; вывод о принятии или не принятии гипотезы.

Выборка 1: 13.2 115.7 68.9 13.1 58.1 110.7 48.1 35.9 8.6 109.4

Выборка 2: 24.3 88.9 79.6 8.8 58.0 56.0 64.6 34.2 36.9 48.2 66.0 65.1 58.5

3. По данным двух выборок нормального закона распределения (первая - с дисперсией S_1^2, вторая – с дисперсией S_2^2) проверить гипотезу о равенстве средних значений при уровне значимости α (при конкурирующей гипотезе об их неравенстве). $S_1 = 38$, $S_2 = 24$, $\alpha = 0.020$. В ответе привести: выборочное среднее для первой выборки; выборочное среднее для второй выборки; вычисленное значение критерия; критическое значение; вывод о принятии или не принятии гипотезы.

Выборка 1: 139.3 31.2 131.2 112.1 54.0 77.3 24.9 106.0 96.4 22.2 92.8 111.0 49.6 61.3 95.9 52.1 124.0 57.8 99.5 71.0 79.3 99.6 133.9 1.7 122.0 41.3 27.0 -6.7 27.8 60.8 78.6 171.0 78.4 56.7 50.0 46.3 91.6 151.7 115.4 21.9 42.8 78.0 114.9 91.2 107.8 100.9 97.0 52.3 34.4 49.1 111.6 77.4 1.2 28.0 55.7 58.0 55.1 41.5 97.1 81.9 48.3 113.9 33.3 41.5 50.2 148.5 45.0 98.3 7.9 75.3 67.3

106.5 65.9 104.4 17.1 63.9 108.5 58.6 33.0 115.5 -13.3 60.3 71.1 56.3 34.9 61.5 65.2 71.8 87.4 57.8 63.1 56.9 126.0 90.9 70.6 132.5 86.3 108.2 82.0 56.4

Выборка 2: 116.0 65.5 115.1 89.5 62.7 92.7 63.9 71.8 73.7 70.1 88.6 81.5 70.5 102.8 76.8 83.2 105.0 88.5 85.5 105.6 54.6 85.5 60.1 76.8 47.8 48.3 119.7 109.4 42.6 46.1 43.0 53.1 86.3 65.4 61.0 21.1 59.7 70.1 101.9 59.4 70.0 53.7 59.5 82.3 111.8 74.3 52.9 82.5 86.4 49.1 112.8 83.1 69.1 39.1 42.0 40.1 37.8 76.7 74.7 118.7 65.4 84.1 54.9 13.5 23.4 75.8 87.4 56.9 48.9 35.0 66.0 98.0 81.6 91.2 74.3 87.4 81.6 80.9 47.3 62.1 65.2 57.1 31.0 81.4 81.7 42.2 93.1 62.4 65.7 87.9 67.0 65.3 64.2 69.5 78.5 111.8 38.7 54.2 56.3 63.0

4. При проведении n_1 испытаний в первой серии число благоприятных исходов равнялось m_1. Во второй серии из n_2 испытаний число благоприятных исходов равнялось m_2. Проверить гипотезу о равенстве вероятностей благоприятного исхода в двух сериях (при конкурирующей гипотезе об их неравенстве) при уровне значимости α. В ответе привести: вычисленное значение критерия; критическое значение; вывод о принятии или не принятии гипотезы. $n_1 = 500$, $m_1 = 391$, $n_2 = 700$, $m_2 = 523$, $\alpha = 0.040$.

<u>Тема.</u> Функционал, его вариация

Цель: Сформировать умение определять вариацию функционала.

Задачи:

закрепить знания о свойствах операций с комплексными числами;

рассмотреть примеры выполнения операций с комплексными числами;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Понятие о функционале.
2. Расстояние между функциями.
3. Приращение и вариация функционала.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

<u>Методические указания по выполнению заданий</u>

<u>Пример 1.</u> Вычислить функционал $J(y)=\int_0^1 y^2dx$, если $y_1(x)=x$, $y_2(x)=e^x$, $y_3(x)=\sqrt{1+x^2}$.

<u>Решение.</u> Подставляя в формулу, задающую функционал, данные функции, получим числовые значения функционала.

При $y_1(x)=x$: $J_1(y)=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$;

при $y_2(x)=e^x$: $J_2(y)=\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{1}{2}(e^2-1)$;

при $y_3(x)=\sqrt{1+x^2}$: $J_3(y)=\int_0^1\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2dx=\frac{4}{3}$.

<u>Пример 2.</u> Найти расстояние между функциями $y=x^2$ и $y=x$ в классе C[0,1].

<u>Решение.</u> $\rho_0=\max\limits_{x\in[0,1]}\left|x^2-x\right|$. Функция $y=x^2-x$ принимает значения равные нулю на концах отрезка [0,1]. Исследуем эту функцию на экстремум на интервале (0, 1). $y'=2x-1$; $y'=0$ при x=1/2, так как $y''(1/2)=2>0$, то в точке x=1/2 исследу-

емая функция достигает минимума, равного -1/4, то $\max\limits_{x\in[0,1]}\left|x^2-x\right|$=1/4. Значит расстояние между функциями y=x^2 и y=x в классе C[0,1] равно 1/4.

<u>Пример 3.</u> Найти приращение функционала $J(y)=\int\limits_0^3 y^2y'dx$, если y(x)=x^2, y$_1$(x)=x^3.

<u>Решение.</u> Приращение аргумента функционала δy = y$_1$(x)- y(x=x^3-x^2.

Тогда, соответствующее ему приращение функционала ΔJ=J(y(x)+ δy)- J(y(x))=J(y$_1$(x))- J(y(x))= $\int\limits_0^3 x^6 3x^2dx$ - $\int\limits_0^3 x^4 2x\ dx$ =6318.

<u>Пример 4.</u> Найти вариацию функционала $J(y(x))=\int\limits_{x_0}^{x_1} yy'dx$, если y(x) и $\delta y\in C^{(1)}[x_0,x_1]$.

<u>Решение.</u> Приращение функционала ΔJ=J(y(x)+ δy)- J(y(x))= $\int\limits_{x_0}^{x_1}(y+\delta y)(y+\delta y)'dx-\int\limits_{x_0}^{x_1} yy'dx=\int\limits_{x_0}^{x_1}(y'\delta y+y\delta y')dx+\int\limits_{x_0}^{x_1}\delta y\delta y'dx$. Отсюда искомая вариация $\delta J(y(x))=\int\limits_{x_0}^{x_1}(y'\delta y+y\delta y')dx$.

<u>Задания для выполнения</u>

1. Найти значения функционала $J(\acute{o})=\int\limits_0^1 \acute{o}dx$, если $y_1(x)=x$, $y_2(x)=x^2$, $y_3(x)=1-(x-1)^2$.

2. Найти расстояние между функциями $y=x^2$ и $y=x^3$ в классах C[0,1] и классах C_1[0,1].

3. Для функционала $J[y(x)]=\int\limits_0^1 xy^2y'dx$ найти приращение и вариацию если $y(x)=x^2$, $\delta y=x-2$.

4. $J(u)=\int\limits_2^4\left(xu'^4-2uu'^3\right)dx$, $u(2)=1$, $u(4)=5$. Найти первую вариацию.

5. $J(u)=\int\limits_0^2\left(xu'+u'^2\right)dx$, $u(0)=1$, $u(2)=0$. Найти первую вариацию.

<u>Тема.</u> Экстремумы функционалов

Цель: сформировать умение находить экстремали функционала.

Задачи:

закрепить знания о частных способах решения уравнения Эйлера;

рассмотреть примеры нахождения экстремалей;

провести рефлексию.

<u>Основные вопросы</u>

1. Понятие экстремума функционала.

2. Уравнение Эйлера.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

<u>Методические указания по выполнению заданий</u>

<u>Пример 1</u>. Задача о наименьшей поверхности вращения. Среди всех плоских гладких кривых соединяющих две точки, найти ту, которая при вращении вокруг оси Ох образует поверхность наименьшей площади.

<u>Решение.</u> $S\left[y(x)\right]=2\pi\int\limits_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$

Подынтегральная функция не зависит от x. Уравнение Эйлера примет вид $F-y'F_{y'}=C_1$ или $y\sqrt{1+y'^2}-\dfrac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1$.

После упрощений $\dfrac{y}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1$.

Интегрируется дифференциальное уравнение подстановкой $y'=sht$, тогда $y=C_1cht$, $dx=\dfrac{dy}{y'}=C_1\dfrac{shtdt}{sht}=C_1dt;\;\; x=C_1t+C_2$.

Исключая t, будем иметь $y = C_1 ch\frac{x - C_1}{C_1}$ - семейство цепных линий, от вращения которых образуются каноиды.

<u>Пример 2</u>. Задача о брахистохроне. Среди всех линий, соединяющих две точки, найти ту, по которой материальная точка, двигаясь под действием силы тяжести без начальной скорости пройдет за кратчайшее время.

<u>Решение</u>. $t(y(x)) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx$, $y(0) = 0$, $y(x_1)=y_1$

Подынтегральная функция не зависит от x. Уравнение Эйлера примет вид $F - y'F_{y'} = C_1$ или $\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1-y'^2}} = C_1$. После упрощений $\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1-y'^2}} = C_1$ или $\left(1-y'^2\right)y = C$. Введём параметр $y' = ctgt$. Получим уравнения циклоиды.

$$y = \frac{C}{1+ctg^2 t} = C\sin^2 t = \frac{C}{2}\left(1-\cos 2t\right)$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C\sin t\cos tdt}{ctgt} = C\left(1-\cos 2t\right)dt$$

$$x = C\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right) + C_2$$

$$y = \frac{C}{2}\left(1-\cos 2t\right)$$

$\frac{C}{2}$ - радиус крутящегося круга.

<u>Пример 3.</u> Найти кривую $y(x)$, заданной длины l, для которой площадь S под ней достигает максимума.

<u>Решение.</u> $S = \int_{x_0}^{x_1} ydx$, $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ при изопериметрическом условии $\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}dx = l$.

$F = y + \lambda\sqrt{1+y'^2}$ не зависит от x, поэтому уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F - y'F_{y'} = C$.

$$y + \lambda\sqrt{1+y'^2} - \lambda\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

$y - C_1 = \dfrac{-\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}$ вводя параметр t, полагая $y' = tgt$, тогда получим $\dfrac{dy}{dt} = tgt$, откуда $dx = \dfrac{dy}{tgt} = \lambda \dfrac{\sin t}{tgt} dt = \lambda \cos t dt$, $x = \lambda sit + C_2$, $y - C_1 = -\lambda \cos t$, получим семейство окружностей $\left(x - C_2\right)^2 + \left(y - C_1\right)^2 = \lambda^2$

Константы определяются из условия $y(x_0) = y_0$, $y\left(x_1\right) = y_1$. $\int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}dx = l$.

<u>Задания для выполнения</u>

1. Найти экстремаль функционала $V[y(x)] = \int\limits_0^1 [(y')^2 - y^2]dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

2. Решить задачу о максимальной площади между двумя кривыми.

3. Найти экстремали функционала $V[y(x)] = \int\limits_0^1 [y + xy' + (y')^2]dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = c$.

4. Найти экстремаль $\int\limits_0^1 y'^2 dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = 6$ и $\int\limits_0^1 y(t)dt = 3$.

5. Найти экстремали изопериметрической задачи $V\left[y(x)\right] = \int_0^1 (y')^2 dx$, $\int_0^1 ydx = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0$.

Тема. Уравнения математической физики

Цель: сформировать умение решать уравнения математической физики.

Задачи:

закрепить знания о типах дифференциальных уравнений в частных производных;

рассмотреть примеры решения уравнений;

провести рефлексию.

Основные вопросы

1. Типы уравнений второго порядка в частных производных.
2. Уравнение колебания струны.
3. Уравнение теплопроводности.
4. Задача Дирихле для круга.

Рекомендуемая литература

1. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учеб.: рек. НМС Мин. обр. РФ / В.С. Шипачев; под ред. В.С. Тихонова. – 3-е изд., испр. – М.: Оникс, 2007. – 600 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – СПб: Изд-во «Лань», 2008. – 960 с. (ЭСБ «Лань» -online).

Методические указания по выполнению заданий

Пример 1. Определить тип дифференциального уравнения

$$u''_{xx} + 8u''_{xy} + 16u''_{yy} + 6u'_x - u'_y + u = 0.$$

Решение. Тип дифференциального уравнения вида $a_{11}u''_{xx} + 2a_{12}u''_{xy} + a_{22}u''_{yy} + F(x, y, u, u'_x, u'_y) = 0$, где a_{11}, a_{12}, a_{22} - функции от x и y, определяется следующим образом. Уравнение имеет гиперболический тип, если $a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, параболический тип, если $a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, эллиптический тип, если $a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22} < 0$.

$a_{11} = 1$, $a_{12} = 4$, $a_{22} = 16$, $a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22} = 4^2 - 16 = 0$, значит это уравнение

параболического типа.

В случае б) $a_{11}=1,\ a_{12}=1,\ a_{22}=5,\ a_{12}{}^2-a_{11}a_{22}=1-5=-4<0$, значит это уравнение эллиптического типа.

<u>Пример 2.</u> Привести к каноническому виду уравнение

$$u''_{xx}-5u''_{xy}+4u''_{yy}-u'_x+2u'_y-u=0.$$

<u>Решение.</u> Определим тип уравнения:

$a_{11}=1$, $a_{12}=-\dfrac{5}{2}$, $a_{22}=4$, $a_{12}{}^2-a_{11}a_{22}=\dfrac{25}{4}-4=\dfrac{9}{4}>0$, значит это уравнение гиперболического типа. Составим характеристическое уравнение:

$$dy^2+5dxdy+4dx^2=0.$$

Найдем его характеристики. Разделив обе части этого уравнения на dx^2, получим квадратное относительно y' уравнение

$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+5\dfrac{dy}{dx}+4=0$,или $y'^2+5y'+4=0$.

Решения квадратного уравнения $y'=-1$, $y'=-4$ - дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Но тогда справедливы равенства

$y=-x+c$, $y=-4x+c$.

Записав их в неявном виде, получим общие интегралы соответствующих дифференциальных уравнений. Это и есть характеристики. Таким образом, дифференциальное уравнение гиперболического типа имеет два семейства действительных и различных характеристик:

$x+y=c$ и $4x+y=c$.

Если теперь в исходном дифференциальном уравнении с частными производными перейти к новым переменным

$\xi=x+y$ и $\eta=4x+y$, то уравнение примет более простую по сравнению с исходной форму – канонический вид. Для гиперболического типа кано-

нический вид выглядит так: $u''_{\xi\eta} + \Phi_1(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta) = 0$.

Конкретизируем его с учетом данных задачи. Так как производные первого порядка от ξ и η - константы: $\xi'_x = 1$, $\xi'_y = 1$, $\eta'_x = 4$, $\eta'_y = 1$, то все производные от ξ и η второго порядка равны 0. Тогда $u'_x = u'_\xi + 4u'_\eta$, $u'_y = u'_\xi + u'_\eta$,

$u''_{xx} = u''_{\xi\xi} + 8u''_{\xi\eta} + 16u''_{\eta\eta}$, $u''_{yy} = u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}$,

$u''_{xy} = u''_{\xi\xi} + 4u''_{\eta\eta} + u''_{\xi\eta} + 4u''_{\xi\eta} = u''_{\xi\xi} + 5u''_{\xi\eta} + 4u''_{\eta\eta}$.

Подставляя найденные выражения в исходное уравнение, получим

$$u''_{\xi\xi} + 8u''_{\xi\eta} + 16u''_{\eta\eta} - 5(u''_{\xi\xi} + 5u''_{\xi\eta} + 4u''_{\eta\eta}) +$$
$$+ 4(u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}) - (u'_\xi + 4u'_\eta) + 2(u'_\xi + u'_\eta) - u = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, приходим к уравнению

$-9u''_{\xi\eta} + u'_\xi - 2u'_\eta - u = 0$, или $u''_{\xi\eta} - \frac{1}{9}(u'_\xi - 2u'_\eta - u) = 0$.

<u>Пример 3.</u> Среди представленных функций найти решения дифференциального уравнения $u''_{yy} = 6xy - 2x^3$, удовлетворяющие условию $u(1,1) = 0$:

а) $xy^3 - x^3y^2 + x$; б) $xy^3 - x^3y^2$; в) $xy^3 - x^3y^2 - y$;

г) $xy^3 - x^3y^2 + x^2 - y$; д) $xy^3 - x^3y^2 + y^2 - x$.

<u>Решение.</u> Проверим сначала, какие функции удовлетворяют условию $u(1,1) = 0$:

а) $u(1,1) = 1$; б) $u(1,1) = 0$; в) $u(1,1) = -1$; г) $u(1,1) = 0$; д) $u(1,1) = 0$.

Итак, условие выполняется в случаях б), г) и д).

Находим u''_{yy} для каждой функции:

б) $u'_y = 3xy^2 - 2x^3y$, $u''_{yy} = 6xy - 2x^3$;

г) $u'_y = 3xy^2 - 2x^3y - 1$, $u''_{yy} = 6xy - 2x^3$;

д) $u'_y = 3xy^2 - 2x^3y + 2y$, $u''_{yy} = 6xy - 2x^3 + 2$.

Таким образом, две функции (б и г) являются решениями дифференци-

ального уравнения.

Пример 4. Найти общее решение дифференциального уравнения $u''_{xy} = xy^2 + x^3$.

Решение. Так как $u''_{xy} = (u'_x)'_y$, дифференциальное уравнение можно записать следующим образом $(u'_x)'_y = xy^2 + x^3$ и найти u'_x интегрированием по y:

$$u'_x = \int (xy^2 + x^3)dy = \frac{xy^3}{3} + x^3 y + \Phi_1(x).$$

Здесь $\Phi_1(x)$ - произвольная функция, появляется из-за того, что неопределенный интеграл вычисляется с точностью до константы, но при интегрировании по y в роли константы выступает величина x.

Последнее равенство интегрируем по x и получаем искомую функцию $u(x, y)$:

$$u(x,y) = \int \left(\frac{xy^3}{3} + x^3 y + \Phi_1(x) \right) dx =$$

$$= \frac{x^2 y^3}{6} + \frac{x^4 y}{4} + \int \Phi_1(x)dx + F(y) = \frac{x^2 y^3}{6} + \frac{x^4 y}{4} + \Phi(x) + F(y),$$

где $\Phi(x) = \int \Phi_1(x)dx$; $F(y)$ - произвольная функция, появляется при интегрировании по x, когда y играет роль константы. Итак, $u(x,y) = \frac{x^2 y^3}{6} + \frac{x^4 y}{4} + \Phi(x) + F(y)$.

Пример 5. Решить задачу Коши для волнового уравнения $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty), u(x,t)\big|_{t=0} = \sin 2x$, $u'_t(x,t)\big|_{t=0} = \cos 3x$ при $a = 1$ и найти $u(1,1)$.

Решение. Воспользуемся формулой Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x - at) + \varphi(x + at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi, \quad \text{где} \quad \varphi(x) = u(x,t)\big|_{t=0},$$

$\psi(x) = u'_t(x,t)\big|_{t=0}$. Так как $\varphi(x) = \sin 2x$, $\psi(x) = \cos 3x$, $a = 1$, получим

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\sin 2(x-t)+\sin 2(x+t)\right)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\cos 3\xi d\xi=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin 2(x-t)+\sin(x+t)\right)+\frac{1}{6}\sin 3\xi\Big|_{x-t}^{x+t}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin 2(x-t)+\sin 2(x+t)\right)+\frac{1}{6}\left(\sin 3(x+t)-\sin 3(x-t)\right).$$

Тогда $u(1,1)=\frac{1}{2}\sin 4+\frac{1}{6}\sin 6$.

<u>Пример 6.</u> Решить смешанную задачу для уравнения теплопроводности $u'_t=a^2u''_{xx}$, $x\in[0;l]$, $u(x,t)\Big|_{t=0}=4\sin\frac{2\pi x}{l}$, $u(x,t)\big|_{x=0}=0$, $u(x,t)\big|_{x=l}=0$ и найти решение при $x=\frac{3}{4}$, $t=9$, $l=3$.

<u>Решение.</u> Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности имеет вид:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l},$$

где $C_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$, $\varphi(x)=u(x,t)\big|_{t=0}$.

Так как $l=3$, $\varphi(x)=4\sin\frac{2\pi x}{l}=4\sin\frac{2\pi x}{3}$. Найдем C_k.

$$C_k=\frac{2}{3}\int_0^3 4\sin\frac{2\pi x}{3}\sin\frac{k\pi x}{3}dx=\frac{4}{3}\int_0^3\left(\cos\frac{(2-k)\pi x}{3}-\cos\frac{(k+2)\pi x}{3}\right)dx=I.$$

Обозначив последний интеграл I, рассмотрим два случая: $k\neq 2$ и $k=2$.

Если $k\neq 2$, то

$$I=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{(2-k)\pi}\sin\frac{(2-k)\pi x}{3}-\frac{3}{(k+2)\pi}\sin\frac{(k+2)\pi x}{3}\Bigg|_0^3=0\right).$$

При $k=2$ предыдущее выражение, содержащее $(2-k)$ в знаменателе, не существует, поэтому возвращаемся к интегралу. Получаем

$$I=\frac{4}{3}\int_0^3\left(\cos 0-\cos\frac{4\pi x}{3}\right)dx=\frac{4}{3}\int_0^3\left(1-\cos\frac{4\pi x}{3}\right)dx=\frac{4}{3}\left(x-\frac{3}{4\pi}\sin\frac{4\pi x}{3}\right)\Bigg|_0^3=4.$$

Таким образом, $C_k=0$ для всех $k\neq 2$, а $C_2=4$. Но тогда решение $u(x,t)$ представляет собой не бесконечную сумму, а лишь одно слагаемое, соответствующее $k=2$, и равно

$$u(x,t)=C_2e^{-\left(\frac{2\pi a}{3}\right)^2 t}\cdot\sin\frac{2\pi x}{3}=4e^{-\left(\frac{2\pi a}{3}\right)^2 t}\cdot\sin\frac{2\pi x}{3}.$$

При $x=\frac{3}{4}$, $t=9$ это решение принимает вид:

$$u\left(\frac{3}{4},9\right)=4e^{-\left(\frac{2\pi a}{3}\right)^2\cdot 9}\cdot\sin\frac{\pi}{2}=4e^{-4\pi^2a^2}.$$

<u>Пример 7.</u> Найти стационарное распределение температуры $u(r)$ в тонкой пластине, имеющей форму кольца, ограниченного окружностями радиусов 2 и 3, с граничными условиями $u'(r)\big|_{r=2}=3$, $u(r)\big|_{r=3}=4$.

<u>Решение.</u> Воспользуемся уравнением Лапласа в полярных координатах:

$$\Delta u=u''_{rr}+\frac{1}{r}u'_r+\frac{1}{r^2}u''_{rr}=0.$$

Из условий задачи следует, что искомая функция u не зависит от изменения φ, поэтому уравнение принимает вид:

$$u''_{rr}+\frac{1}{r}u'_r=0, \text{или } ru''_{rr}+u'_r=0, \text{ или } \left(ru'_r\right)'_r=0.$$

Интегрируя это равенство по r, получим:

$$ru'_r=C_1, \text{ откуда } u'_r=\frac{C_1}{r}, \text{ или } du=\frac{C_1dr}{r}.$$

Еще раз проинтегрируем: $u=C_1\ln r+C_2$.

Произвольные постоянные C_1 и C_2 находим из граничных условий:

$$\begin{cases} u(3)=C_1\ln 3+C_2=4, \\ u'(2)=\dfrac{C_1}{2}=3. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $C_1 = 6$ и подставляем в первое: $6\ln 3 + C_2 = 4$, значит, $C_2 = 4 - 6\ln 3$. При этом решение $u = C_1 \ln r + C_2$ принимает вид: $u = 6\ln r + 4 - 6\ln 3 = 4 + 6\ln\frac{r}{3}$.

<u>Задания для выполнения</u>

1. Определить тип дифференциального уравнения

а) $u''_{xx} + 2u''_{xy} + 5u''_{yy} - 3u'_y + 4u = 0$;

б) $xu''_{xx} - 4u''_{xy} + 2u''_{yy} + u'_y - 3u = 0$.

2. Привести к каноническому виду уравнения

а) $u'_{xx} + 8u''_{xy} + 16u_{yy} + 6u'_x - u'_y + u = 0$;

б) $u''_{xx} + 2u''_{xy} + 5u''_{yy} - 3u'_y + 4u = 0$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения $u''_{xx} = x^3 y - 3x^2$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения $u''_{xx} - 5u''_{xy} + 4u''_{yy} = 0$.

5. Решить смешанную задачу для волнового уравнения $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$, $x \in [0,l], u(x,t)\big|_{t=0} = 0$, $u'_t(x,t)\big|_{t=0} = \frac{1}{6}\sin\frac{3\pi x}{l}$, $u(x,t)\big|_{x=0} = 0$, $u(x,t)\big|_{x=l} = 0$ при $l = 2$ и определить закон движения точки с абсциссой $x = \frac{1}{9}$.

6. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности бесконечного стержня: $u'_t = a^2 u''_{xx}$, $x \in (-\infty, +\infty), u(x,t)\Big|_{t=0} = \begin{cases} 4, x \in (0,3) \\ 0, x \notin (0,3) \end{cases}$ и найти решение при $a = \frac{1}{2}, x = 0, t = 2$.

7. Найти стационарное распределение температуры в тонкой пластине, имеющей форму круга радиуса 2, если на границе круга задано условие $u(r,\varphi)\big|_{r=2} = 6\cos\varphi$.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение..... 3
Методические рекомендации по проведению практических работ..... 5
Методические указания по выполнению практических заданий..... 6
Функции нескольких переменных. Линии и поверхности уровня. Частные производные..... 7
Экстремум функции нескольких переменных..... 10
Скалярные и векторные поля..... 13
Двойные и криволинейные интегралы. Формула Грина..... 19
Периодические величины..... 24
Ряд Фурье. Теорема Дирихле..... 26
Разложение функции в ряд Фурье непериодических функций..... 29
Численные методы решения алгебраических уравнений..... 32
Численные методы решения систем алгебраических уравнений..... 35
Приближенное вычисление интегралов..... 37
Приближенное решение дифференциальных уравнений..... 39
Понятие функции комплексного переменного..... 43
Дифференцирование функции комплексного переменного..... 45
Интегрирование функции комплексного переменного..... 47
Линейное пространство. Линейный оператор..... 50
Решение уравнений и систем методом сжимающих отображение..... 54
Понятие случайного процесса. Марковский случайный процесс. Цепи Маркова..... 57
Марковские процессы с непрерывным временем..... 61
Точечные и интервальные оценки параметров распределения..... 65
Корреляционно-регрессионный анализ..... 69
Метод наименьших квадратов..... 72
Обработка экспериментальных данных..... 75
Функционал, его вариация..... 79
Экстремумы функционалов..... 81
Уравнения математической физики..... 84

Наталья Анатольевна Чалкина,
канд. пед. наук, доц. кафедры общей математики и информатики АмГУ;
Геннадий Васильевич Литовка,
д-р. техн. наук, профессор кафедры общей математики и информатики АмГУ;
Ермилова Нелли Александровна,
Доц. кафедры общей математики и информатики АмГУ