Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Амурский государственный университет»

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО ДИСЦИПЛИНЕ

направление подготовки 140400.68 – «Электроэнергетика и электротехника»

Благовещенск

2013 г.

УМКД разработан доцентом кафедры ОМиИ

Ермиловой Н. А.

Рассмотрен и рекомендован на заседании кафедры ОМиИ

Протокол заседания кафедры от «_____» ________________20 г. № _____

Зав. кафедрой _______________________/ Г. В. Литовка /

СОГЛАСОВАНО:
Протокол заседания УМСМ ______________________________________
№ ______ от «____» ________________ 20__ г.

Председатель УМСМ _________________ /______________________/
(подпись) (фамилия, имя, отчество)

Содержание

I. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

1. Цели и задачи дисциплины

В результате обучения студенты должны овладеть основными методами численного дифференцирования и интегрирования, теорией функций комплексного переменного, теории вероятностей и математической статистики.

Цели:

- Получение знаний и формирование основных навыков по численному дифференцированию, теории функций комплексного переменного, теории вероятностей, необходимых для решения задач, возникающих при решении задач электроэнергетики;
- Развитие понятийной теоретико-вероятностной базы и формирование уровня математической подготовки, необходимой для понимания основ теории вероятностей и статистики и их применения;
- формирование у студентов умения применять математический аппарат для исследований в профессиональной деятельности.

Задачи:

- теоретическое освоение студентами основных положений численного дифференцирования, теории функций комплексного переменного, теории вероятностей и математической статистики;
- формирование необходимого уровня математической подготовки, умения использовать теоретико-вероятностный и статистический аппарат для решения теоретических и прикладных задач электроэнергетики;
- формирование навыков и умений решать типовые задачи и работать со специальной литературой; выработка умения анализировать полученные результаты.

2. Место дисциплины в учебном процессе

Дисциплина Дополнительные главы математики относится к базовым дисциплинам федерального компонента ФГОС ВПО М.1-Общенаучный цикл направления подготовки 140400.68 «Электроэнергетика и электротехника» по магистерской программе «Электроэнергетические системы и сети».

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

Для успешного освоения данной дисциплины студент должен владеть знаниями, умениями и навыками, сформированными в процессе обучения дисциплин «Высшая математика « и «Специальные главы математики», которые используются во всех естественнонаучных и инженерных дисциплинах, модулях и практиках ООП

В результате освоения дисциплины «Дополнительные главы математики» обучающийся должен демонстрировать следующие результаты обучения:

Знать*:* основные функции комплексного переменного, дифференциальное и интегральное исчисление на множестве комплексных чисел, вычеты, методы численного дифференцирования, элементы теории вероятностей, математической статистики.

Уметь: использовать теоретико-вероятностный и статистический аппарат, теорию функций комплексного переменного и методов численного дифференцирования для решения теоретических и прикладных задач электроэнергетики

Владеть*:* методами дифференцирования, интегрирования функций комплексного переменного, основными методами численного дифференцирования, численными методами решения дифференциальных уравнений и систем, методами теории вероятностей и математической статистики.

Процесс изучения дисциплины «Дополнительные главы математики» направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВПО и согласно ООП ВПО по направлению подготовки 140400.68 – Электроэнергетика и электротехника:

профессиональных (ПК):

способностью и готовностью использовать углубленные знания в области естественнонаучных и гуманитарных дисциплин в профессиональной деятельности (ПК-1);

способностью анализировать естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности (ПК-5).

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы, 144 часа.

№ п/п	Раздел Дисциплины	Се-местр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая сам. работу студентов и трудоемкость (в часах)			Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)*
				Лекции	Прак-тика	Сам. работа	
1.	**РАЗДЕЛ 1. Численное дифференцирование**	1		4	8	12	
2.	**Тема 1.1.** Формулы приближенного дифференцирования.	1	1-2	2	4		
3.	**Тема 1.2.** Понятие о приближенном интегрировании.	1	3-4	2	4		Рубежный контроль знаний №1 К.Р. №1
4.	**РАЗДЕЛ 2. Теория функций комплексного переменного**	1		6	12	18	
5.	**Тема 2.1.** Элементарные функции комплексного переменного, их свойства	1	5-6	2	4		
6.	**Тема 2.2.** Теорема Коши. Интегральная формула Коши. Ряд Лорана. Вычеты.	1	7-8	2	4		
7.	**Тема 2.3.** Применение вычетов	1	9-10	2	4		Рубежный контроль знаний №2 РГР№1
8.	**РАЗДЕЛ 3. Приложения теории вероятностей и математической статистики**	1		8	16	24	
9.	**Тема 3.** 1. Случайные события. Случайные величины. Законы распределения.	1	11-12	2	4		
10.	**Тема 3. 2.** Вариационные ряды. Примеры решения практических задач.	1	13-14	2	4		
11.	**Тема 3.3** Одномерные и многомерные случайные процессы.	1	15-16	2	4		
12.	**Тема 3.4.** Применение теории случайных процессов .	1	17-18	2	4		Рубежный контроль знаний №3 РГР№2, КР№2
	ИТОГО			18 ч.	36 ч.	54 ч.	

5. СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ И ТЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

5.1.Лекции

Раздел 1. Численное дифференцирование (лекции 4 ч.)

Постановка вопроса. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на первой интерполяционного формуле Ньютона. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на формуле Стирлинга. Формулы приближенного дифференцирования для равноотстоящих точек, выраженные через значения функции в этих точках.

Раздел 2. Теория функций комплексного переменного (лекции 6 ч.)

Элементарные функции комплексного переменного. Непрерывность, дифференцирование, интегрирование. Аналитические функции. Конформность отображения аналитических функций. Теорема Коши. Интегральная формула Коши. Ряд Лорана. Изолированные особые точки. Вычет функции в изолированной особой точке. Применение вычетов при решении задач математического анализа.

Раздел 3. Приложения теории вероятностей и математической статистики (лекции 8 ч.)

Основные положения теории вероятности и математической статистики. Примеры решения задач, возникающие в системах электроснабжения, с помощью модели «случайное событие». Примеры решения практических задач систем электроснабжения, основанных на модели «случайная величина». Примеры статистических исследований случайных величин в электроэнергетике. Применение случайных процессов в электроэнергетике.

.

5.2.Тематическое планирование практических занятий

	Тема занятия	Кол-во часов	Контроль
	Численное дифференцирование и интегрирование - 8 ч.	8 ч	
1.	Постановка вопроса. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на первой формуле Ньютона.	2 ч	
2.	Формулы приближенного дифференцирования, основанные на формуле Стирлинга, Гаусса, Бесселя.	2 ч	
3.	Формулы трапеций, Симпсона. Вычисление определенных интегралов по формуле Гаусса.	2 ч	
4.	Контрольная работа №1	2 ч	КР №1
	Теория функций комплексного переменного (ТФКП) – 12 ч.	12 ч	
5.	Элементарные функции комплексного переменного, их свойства	2 ч	
6.	Непрерывность, дифференцирование, интегрирование.	2 ч	
7.	Аналитические функции.	2 ч	
8.	Теорема Коши. Интегральная формула Коши. Их применение.	2 ч	

9.	Ряд Лорана. Сходимость ряда Лорана. Изолированные особые точки функций комплексного переменного	2 ч	
10.	Вычет функции в изолированной особой точке. Его применение	2 ч	РГР№1
	Приложения теории вероятностей и математической статистики – 16 ч.	2 ч	
11.	Случайные события. Действия над ними.	2 ч	
12.	Случайные величины. Законы распределения	2 ч	
13.	Решение задач на различные распределения вероятностей	2 ч	
14.	Математическая статистика. Вариационный ряд, его основные характеристики		
15.	Примеры решения задач, возникающие в системах электроснабжения, с помощью модели «случайное событие», основанных на модели «случайная величина»	2 ч	
16.	Одномерные и многомерные случайные процессы.	2 ч	
17.	Применение теории случайных процессов.	2 ч	КР№2
18.	Контрольная работа №2	2 ч	РГР №2

6. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

№ п/п	№ раздела (темы) дисциплины	Форма (вид) самостоятельной работы	Трудоемкость в часах
1	Раздел 1. Численное дифференцирование Тема. Графическое дифференцирование. Понятие о приближенном вычислении частных производных	Выполнение домашнего задания. Самостоятельное изучение темы. Подготовка к практическим занятиям по разделу1.	12 ч.
	Раздел 2. Теория функций комплексного переменного (ТФКП) Тема. Применение вычетов в операционном исчислении.	Самостоятельное изучение темы. РГР №1 по разделу 2.	18 ч
	Раздел 3. Приложения теории вероятностей и математической статистики. Тема. Элементы дискретной математики в решении задач электроэнергетики.	Самостоятельное изучение темы. РГР№2 по разделу 3.	24 ч.
	ИТОГО		54 ч .

7. МАТРИЦА КОМПЕТЕНЦИЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

№	*Разделы дисциплины, темы (наименования)*	*Количество часов*	*Компетенции*		
			ПК-1	ПК-5	*Σ общее количество компетенций*
1.	**РАЗДЕЛ 1. Численное дифференцирование и интегрирование**	***12***			
2.	**Тема 1.1.** Формулы приближенного дифференцирования.		+		***1***
3.	**Тема 1.2.** Понятие о приближенном интегрировании.		+	+	***2***
4.	**РАЗДЕЛ 2**. **Теория функций комплексного переменного**	***18***			
5.	**Тема 2.1.** Элементарные функции комплексного переменного, их свойства.		+	+	*2*
6.	**Тема 2.2.** Дифференцирование и интегрирование функций комплексного переменного.		+	+	***2***
7.	**Тема 2.3.** Теорема Коши. Интегральная формула Коши. Ряд Лорана. Вычеты. Применение вычетов		+		***1***
8.	**РАЗДЕЛ 3. Приложения теории вероятностей и математической статистики**	***24***			
9.	**Тема 3.** 1. Случайные события. Случайные величины. Законы распределения. Вариационные ряды		+	+	***2***
10.	**Тема 3. 2.** Примеры решения практических задач систем электроснабжения,		+	+	***2***
11.	**Тема 3.3** Одномерные и многомерные случайные процессы.		+		***1***
12.	**Тема 3.4.** Применение случайных процессов в электроэнергетике		+	+	***2***

II. КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ПРОГРАММНОГО МАТЕРИАЛА

Тематический план лекций (18 часов).

РАЗДЕЛ 1. Численное дифференцирование и интегрирование

Тема 1.1. Формулы приближенного дифференцирования (2 часа).

План:
1. Постановка задачи численного дифференцирования.
2. Численное дифференцирование на основе Интерполяционной формулы Лагранжа.
3. Численное дифференцирование на основе Интерполяционной формулы Ньютона.
4. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на формуле Стирлинга, Гаусса, Бесселя.

Цель: Применение средств вычислительной математики для решения задач специальных дисциплин по вычислению производных.

Задачи: С помощью интерполяционных формул Ньютон, Гаусса, Стирлинга и Бесселя вычислять значения первой и второй производных при данных значениях аргументов для функций, заданных таблично.

Ключевые вопросы.
1. Как может быть решена задача численного дифференцирования для таблично заданной функции с помощью интерполирования? В чем некорректность такого способа численного дифференцирования?
2. Как строится интерполяционный многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов? Как можно оценить погрешность численного дифференцирования с использованием интерполяционной формулы Лагранжа?
3. В чем конкретно выражается некорректность численного дифференцирования при использовании интерполяционных формул Ньютона? Как можно оценить погрешность вычисления при использовании этого метода?

Развернутый план лекции

1. Необходимость введения численных методов для нахождения функций, заданных аналитически и таблично.
2. Построение интерполяционной функции
3. Интерполяционная формула Лагранжа.
4. Организация ручных вычислений по формуле Лагранжа
5. Интерполяционные формулы Ньютона.
6. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на формуле Стирлинга.
7. Формулы приближенного дифференцирования для равноотстоящих точек, выраженные через значения функции в этих точках.
8. Погрешность интерполяции

КРАТКИЙ ОПОРНЫЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИИ

Приближенное дифференцирование. Постановка задачи

При решении практических задач часто нужно найти производные указанных порядков от функции $y = f(x)$, заданной таблично, либо, в силу сложности аналитического выражения функции $f(x)$ непосредственное ее дифференцирование затруднено. В этих случаях обычно прибегают к *приближенному дифференцированию*.

Для вывода формул приближенного дифференцирования исходную функцию *f(x)* заменяют на интересующем отрезке *[a, b]* интерполирующей функцией *P(x)*, а затем полагают, что $f'(x) = P'(x)$, при $a \le x \le b$.

Аналогично поступают при нахождении производных высших порядков.

Если для интерполирующей функции *P(x)* известна погрешность $R(x) = f(x) - P(x)$, то погрешность производной $P'(x)$ выражается формулой $r(x) = f'(x) - P'(x) = R'(x)$, т.е.:

Погрешность производной интерполирующей функции равна производной от погрешности этой функции.

То же самое справедливо и для производных высших порядков.

Следует отметить, что приближенное дифференцирование представляют собой операцию менее точную, чем интерполирование: близость друг к другу двух кривых $y = f(x)$ и $Y = P(x)$ на отрезке *[a, b]* еще не гарантирует близости на этом отрезке их производных $f'(x)$ и $P'(x)$, т.е. малого расхождения угловых коэффициентов касательных к рассматриваемым кривым при одинаковых значениях аргумента.

Как видно из рисунка, касательные, проведенные к графикам функций $y = f(x)$ и $Y = P(x)$ в точке x_i, имеют разный угол наклона (тангенс угла наклона касательной равен производной функции в данной точке).

Формулы приближенного дифференцирования, основанные на первой интерполяционной формуле Ньютона.

Пусть функция *y(x)*, задана таблично в равноотстоящих узлах x_i на отрезке *[a,b]*:

x	x_0	x_1	x_2	…	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	…	y_n

Для нахождения на *[a,b]* производных $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$ и т.д., функцию *y* приближенно заменим интерполяционным полиномом Ньютона, построенным для системы узлов $x_0, x_1, \ldots, x_k, \quad k \le n$:

$$P_n(x) = y_0 + t \cdot \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \cdot \Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)(t-2) \cdot \ldots \cdot (t-k+1)}{k!} \Delta^k y_0$$

где $t = \dfrac{x - x_0}{h}$ и $h = x_{i+1} - x_i$.

Производя перемножение биномов, получим:

$$P_n(x) = y_0 + t \cdot \Delta y_0 + \frac{t^2 - t}{2} \cdot \Delta^2 y_0 + \frac{t^3 - 3t^2 + 2t}{6} \cdot \Delta^3 y_0 + \frac{t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t}{24} \cdot \Delta^4 y_0 + \ldots$$

Будем дифференцировать данный многочлен как сложную функцию: $\dfrac{d\,P_n(x)}{d\,x} = \dfrac{d\,P_n(x)}{d\,t} \cdot \dfrac{d\,t}{d\,x} = \dfrac{1}{h} \cdot \dfrac{d\,P_n(x)}{d\,t}$. Получим:

$$P_n{}'(x) = \frac{1}{h} \cdot \left[\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2} \cdot \Delta^2 y_0 + \frac{3t^2 - 6t + 2}{6} \cdot \Delta^3 y_0 + \frac{2t^3 - 9t^2 + 11t - 3}{12} \cdot \Delta^4 y_0 + \ldots \right] \qquad (1)$$

Так как $y''(x) = \dfrac{d\,y'(x)}{d\,x} = \dfrac{d\,y'(x)}{d\,t} \cdot \dfrac{d\,t}{d\,x}$, формула вычисления второй производной будет выглядеть следующим образом:

$$P_n{}''(x) = \frac{1}{h^2} \cdot \left[\Delta^2 y_0 + (t-1) \cdot \Delta^3 y_0 + \frac{6t^2 - 18t + 11}{12} \cdot \Delta^4 y_0 + \ldots \right] \qquad (2)$$

Таким же способом можно вычислить производные любого порядка.

Чтобы уменьшить погрешность вычисления, при нахождении производных в фиксированной точке *x* в качестве x_0 следует выбирать ближайшее табличное значение аргумента (уменьшить таблицу).

Иногда требуется находить производные функции в основных табличных точках x_i. В этом случае формулы численного дифференцирования упрощаются. Так как каждое табличное значение можно считать за начальное, то положим $x=x_0$, следовательно, $t=0$.

Получим:

$$y'(x)=\frac{1}{h}\cdot\left(\Delta y_0-\frac{\Delta^2 y_0}{2}+\frac{\Delta^3 y_0}{3}-\frac{\Delta^4 y_0}{4}+\frac{\Delta^5 y_0}{5}-\frac{\Delta^6 y_0}{6}+\dots\right) \tag{3}$$

$$y''(x)=\left(\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0-\frac{5}{6}\Delta^5 y_0+\dots\right) \tag{4}$$

Погрешность приближенного вычисления первой производной в нулевой точке будет равна

$$R_k{}'(x_0)\approx\frac{(-1)^k}{h}\cdot\frac{\Delta^{k+1}y_o}{k+1}$$

Приближенные формулы нахождения производных второго порядка получается путем двукратного дифференцирования интерполяционных многочленов Ньютона и Стирлинга.

1) для начала таблицы:

$$y_0''=f''(x_0)\approx\frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0-\frac{5}{6}\Delta^5 y_0+\dots)$$

2) для конца таблицы:

$$y_0''=f''(x_0)\approx\frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_{-2}+\Delta^3 y_{-3}+\frac{11}{12}\Delta^4 y_{-4}+\frac{5}{6}\Delta^5 y_{-5}+\dots)$$

3) для середины таблицы:

$$y_0''=f''(x_0)\approx\frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_{-1}-\frac{1}{12}\Delta^4 y_{-2}+\frac{1}{90}\Delta^6 y_{-4}+\dots)$$

Приводимые ниже формулы численного дифференцирования применяются в тех случаях, когда функция $y=f(x)$ задана таблично ($y_i=f(x_i)$ в равносторонних узлах $x_i=x_0+ih(i=0,\pm1,\dots)$).

1)Формула применяется только для начальных строк таблицы:

$$y_0'=f'(x_0)\approx\frac{1}{h}(\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{1}{3}\Delta^3 y_0-\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\Delta^n y_0)$$

2) Формула применяется только для последних строк таблицы:

$$y_0'=f'(x_0)\approx\frac{1}{h}(\Delta y_{-1}+\frac{1}{2}\Delta^2 y_{-2}+\frac{1}{3}\Delta^3 y_{-3}+\dots+\frac{1}{n}\Delta^n y_{-n})$$

3) В середине таблицы применяется формула

$$y_0'=f'(x_0)\approx\frac{1}{h}(\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2}-\frac{1}{6}\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}+\frac{1}{30}\frac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2}+\dots),$$

полученная путем дифференцирования инерполяционного многочлена Стирлинга.

При численном дифференцировании таблично заданной функции $y=f(x)$ возникают погрешности двух типов:

- погрешности усечения
- погрешности округления

При оценке *погрешности усечения*, оценив на практике, предполагают, что $f(x)$ не имеет быстро колеблющихся составляющих (период которых не превосходит h). При этом условии величина разностей определенного может свидетельствовать о качестве приближения функции $f(x)$ интерполяционным многочленом подходящей степени. Если разности порядка m различаются меньше, чем на величину погрешности их округления, то считают, что эти разности практически постоянны и погрешность усечения не превосходит единицы младшего разряда значений $\frac{y_i}{h}$. С уменьшением шага расчета погрешность усечения убывает $O(f''(x)h)=\frac{h}{2}f''(x))$.

Погрешности округления обратно пропорциональна шагу расчета h в формулах для первой производной, обратно пропорциональна h^2 в формулах для второй производной и так далее. Поэтому при уменьшении шага расчета h погрешность округления увеличивается. Для оценки используются правила из теории погрешности $O\left(\frac{\varepsilon f(x)}{h}\right) = \frac{2\varepsilon f(x)}{h}$.

Обобщенная погрешность вычисления производной может рассматриваться как сумма погрешности усечения и погрешности округления $\frac{h}{2}f''(x) + \frac{2\varepsilon f(x)}{h}$ так как с уменьшением порядка интерполяции погрешность усечения убывает, а погрешность округления возрастает, то существует оптимальный шаг расчета, при котором полная погрешность минимальна :

$$h_0 \approx \sqrt{4\left|\frac{\varepsilon f(x)}{f''(x)}\right|}.$$

Тема 1.2. **Формулы приближенного интегрирования** (2 часа).

План:
1. Формулы трапеций, Симпсона.
2. Вычисление определенных интегралов по формуле Гаусса.

Цель: Сформировать навыки применения квадратурных формул для приближенных вычислений интегралов

Задачи:
1. Научиться строить квадратурные формулы.
2. Применять их для приближенных вычислений определенных интегралов.

Ключевые вопросы.
1. Почему формула Ньютона-Лейбница может оказаться непригодной для вычисления определенного интеграла?
2. Как связаны задачи численного интегрирования и интерполирования?
3. Чем объясняется название формулы трапеций?
4. В чем выражается преимущества формулы Симпсона перед формулой трапеций?
5. Каким образом при использовании формулы Симпсона можно рассчитать требуемое число отрезков разбиения для достижения заданной точности интегрирования?

Развернутый план лекции
1. Постановка задачи численного интегрирования
2. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса
3. Формула Трапеций
4. Формула Симпсона
5. Полуэмпирические оценки точности вычислений по квадратурным формулам

КРАТКИЙ ОПОРНЫЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИИ

Заменяя подынтегральную формулу каким-либо интерполяционным многочленом, мы получаем *квадратурные формулы* вида :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R$$

где x_k - выбранные узлы интерполяции, A_k - коэффициенты, зависящие только от выбора узлов, но не от вида функций ($k = 0,1,...,n$), R - остаточный член, или погрешность квадратурной формулы. Отбрасывая остаточный член R, мы совершаем погрешность усечения. При расчете к ней добавляются различные погрешности округления.

Разобьём отрезок интегрирования $[a,b]$ на n равных частей системой точек $x_i = x_0 + ih (i = 0,1,...,n), x_0 = a, x_n = b, h = \frac{b-a}{n}$

и вычислим подынтегральную функцию в полученных узлах

$$y_i = f(x_i) (i = 0,1,...,n).$$

Квадратурные формулы для равноотстоящих узлов называются формулами Ньютона-Котеса. Формулы Ньютона-Котеса различаются степенями использованных интерполяционных многочленов. Чтобы не иметь дело с многочленами высоких степеней , обычно разбывают промежуток интегрирования на отдельные участки, применяют формулы Ньютона-Котеса с невысокими степенями на каждом участке и потом складывают полученные результаты.

Формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right)$$, где $y_i = f(x_i),(i = 0,1,...,n)$.

Остаточный член имеет вид $R_1 = -\frac{nh^3}{12} f''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi), a < \xi < b$.

Формула трапеций дает точное значение интеграла, когда подынтегральная функция $f(x)$ линейна.

Формула Симпсона(формула порабол):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1})]$$, где

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$.

Остаточный член имеет вид $R_2 = -\frac{mh^5}{90} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f(4)(\xi), a < \xi < b$.

Формула Симпсона является точной для многочленов до третьей степени включительно. Заметим, что в формуле Симпсона число узлов обязательно нечетное, то есть n четное , $n = 2m$.

Формула Ньютона (правило трех восьмых):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{3h}{8}[y_0 + y_{3m} + 2(y_3 + y_6 + ... + y_{3m-3}) + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + ... + y_{3m-2} + y_{3m-1})]$$,

где $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{3m}$.

Остаточный член имеет вид $R_3 = -\frac{3mh^5}{80} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{80} f(4)(\xi), a < \xi < b$.

Заметим, что в правиле трех восьмых число узлов обязательно равно $3m + 1$, то есть $n = 3m$.

Если функция $y = f(x)$ задана таблично и ее производные найти затруднительно, то в предположении отсутствия быстроколеблющихся составляющих можно применять приближенные формулы для погрешностей, выраженные через конечные разности:

$R_1 \approx -\frac{b-a}{12}\overline{\Delta^2 y}$,

$R_2 \approx -\frac{b-a}{180}\overline{\Delta^4 y}$,

$R_3 \approx -\frac{b-a}{80}\overline{\Delta^4 y}$, где под $\overline{\Delta^2 y}, \overline{\Delta^4 y}$ подразумевается среднее арифметическое значение разностей соответствующего порядка.

Квадратурные формулы Гаусса. В квадратурных формулах Гаусса

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i) + R_n(f)$$

коэффициенты A_i и абсциссы $t_i\ (i = 1, 2, ..., n)$ подбираются так, чтобы формула была точной для всех многочленов наивысшей степени N.

A_i, t_i определяются однозначно при $N = 2n - 1$. Неудобство применения квадратурной формулы Гаусса состоит в том, что абсциссы t_i и коэффициенты A_i иррациональные числа. Этот недостаток искупается ее высокой точностью при сравнительно малом числе узлов интегрирования. В тех случаях, когда подынтегральная функция сложна и на вычисление ее значений в каждом узле интегрирования требуется много времени, применение формулы Гаусса особенно выгодно.

Получить оценку погрешности результата, используя формулу остаточного члена, для формул Гаусса удается очень редко , так как это связано с вычислением производных высоких порядков от подынтегральной функции.

При вычислении интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ следует сделать замену переменной $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$, тогда формула Гаусса будет иметь вид:

$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + R_n^*(f)$ где $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i, R_n^*(f) = (\frac{b-a}{2}^{2n+1} R_n(f))$.

РАЗДЕЛ 2. Теория функций комплексного переменного

Тема 2.1. Элементарные функции комплексного переменного, их свойства (2 ч.)

План:

1. Комплексные числа, действия над ними.
2. Показательная, степенная, тригонометрические, гиперболические, обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции.

Цель: Сформировать навыки применения операций на множестве комплексных чисел и множестве функций комплексного переменного.

Задачи:

1. Научиться выполнять операции сложения, умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня на множестве комплексных чисел.
2. Находить значения функций в заданных точках, пределы функций комплексного переменного, исследовать на непрерывность, дифференцируемость.

Ключевые вопросы.

1. Какие формы записи комплексных чисел (КЧ) вы знаете?
2. Как выполняются операции с КЧ?
3. Как изображаются КЧ на плоскости? В чем аналогия с векторами?
4. Какие функции комплексного переменного называются элементарными? Перечислите их.
5. Дифференцируемость. Условия Коши-Римана.
6. Какие функции называются аналитическими? Почему действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями?

Краткий опорный конспект лекций

1.Комплексные числа, действия над ними.

Рассмотрим уравнение $x^2+1=0$, из него следует, что $x^2=-1$.

Очевидно, уравнение не имеет решений на множестве **R** действительных чисел, так как не существует такого действительного числа, квадрат которого равнялся бы -1.

В связи с этим множество действительных чисел было расширено до множества **C** – *комплексных чисел* за счет введения *мнимой единицы:* $i=\sqrt{-1}$,

Из чего следует, что $i^2=-1$, или $1=-i^2$. Тогда уравнение $x^2+1=0$ примет вид: $x^2-i^2=0$, которое имеет решение: $(x-i)(x+i)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=i, \\ x_2=-i. \end{array}\right.$

Из определения мнимой единицы ($i=\sqrt{-1}$) имеем: $i^1=i,\quad i^2=-1,\quad i^3=-i,\quad i^4=1,$ $i^5=i,\quad i^6=-1,\; i^7=-i,\quad i^8=1.$

Далее с периодом, равным 4, значения степеней мнимой единицы будут повторяться.

Таким образом, целые степени мнимой единицы i вычисляются по формуле:

$i^m=i^{4n+k}=i^k$

О п р е д е л е н и е. *Комплексным числом* называется всякое число вида $z=x+iy$, где $i=\sqrt{-1}$ – мнимая единица, x и y – действительные числа.

О п р е д е л е н и е . Два комплексных числа считаются *равными* между собой тогда и только тогда, когда в отдельности равны их вещественные и мнимые части.

Таким образом, условие равенства комплексных чисел:

$$x_1+y_1i=x_2+y_2i \;\Leftrightarrow\; (x_1=x_2)\wedge(y_1=y_2). \tag{3}$$

В частности, $x+yi=0 \;\Leftrightarrow\; (x=0)\wedge(y=0)$.

О п р е д е л е н и е . Два комплексных числа считаются *противоположными*, если их действительные и мнимые части отличаются только знаками.

Таким образом, два комплексных числа

$$z_1=x_1+y_1i \;\textit{и}\; z_2=x_2+y_2i$$

будут противоположными, если $x_1=-x_2$, $y_1=-y_2$.

О п р е д е л е н и е . Два комплексных числа называются *сопряженными*, если они отличаются друг от друга только знаком мнимой части.

Так, для числа $z=x+iy$ сопряженным будет число $\bar{z}=x-iy$.

ВАЖНО! *Множество комплексных чисел неупорядочено, т.е. для комплексных чисел не существует отношений "больше" или "меньше".*

О п р е д е л е н и е . Суммой двух комплексных чисел

$$z_1=x_1+iy_1 \text{ и } z_2=x_2+iy_2$$

называется комплексное число z, определяемое соотношением

$$z=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$

Иначе говоря, $\mathrm{Re}(z_1+z_2)=\mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2)$, $\mathrm{Im}(z_1+z_2)=\mathrm{Im}(z_1)+\mathrm{Im}(z_2)$.

О п р е д е л е н и е . *Произведением* двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z, определяемое соотношением $z=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\cdot i.$

Таким образом, $\mathrm{Re}(z_1 z_2)=\mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2)-\mathrm{Im}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2)$,

$\mathrm{Im}\,(z_1 z_2)=\mathrm{Im}\,(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2)+\mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2)$.

Произведение двух сопряженных чисел всегда равно действительному числу.

Действительно, пусть $z=x+iy$, тогда $\bar{z}=x-iy$. Найдем их произведение:

$$z\cdot\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2-(iy)^2=x^2+y^2.$$

$$z\cdot\bar{z}=x^2+y^2 \tag{*}$$

Деление. Свойство (*) применяется для выполнения действия деления двух комплексных чисел. Пусть даны два числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. Найдем частное этих чисел $\frac{z_1}{z_2}$. Для этого следует умножить делимое и делитель на комплексное число $\overline{z_2} = x_2 - iy_2$, сопряженное делителю.

Кроме алгебраической ($z = x + y$) существуют еще *тригонометрическая* и *показательная* формы записи комплексных чисел.

Если комплексное число $z = x + yi$ соответствует точке с декартовыми координатами (x,y), то r и φ будут полярными координатами этой точки, которые называются модулем и аргументом комплексного числа.

Из прямоугольного треугольника *OMA*, в котором $|OA| = x$, $|AM| = y$ получаются соотношения: $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$, откуда $z = x + yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

Последняя запись называется *тригонометрической формой записи* комплексного числа z.

Из прямоугольного треугольника можно вычислить длину (модуль r) вектора $\overrightarrow{OM}$ и (аргумент φ) величину угла, образуемого этим вектором с положительным направлением оси Ox:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ tg\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = arctg\,\frac{y}{x}.$$

Показательная форма записи комплексного числа имеет вид: $z = re^{i\varphi}$.

2. Показательная, степенная, тригонометрические, гиперболические, обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции.

Говорят, что в области D комплексной плоскости определена функция $w = f(z)$, от комплексного переменного z, если каждому комплексному числу $z \in D$ поставлено в соответствие некоторое комплексное число $w \in G$. Множество D – область определения функции, G – множество ее значений. Задание функции $f(z)$ есть задание соответствия (отображения) $D \to G$.

Показательная функция имеет вид $w = e^z$.

Разложение функции e^x действительного переменного x в ряд:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

справедливо и для функции комплексного переменного e^z :

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \quad ,$$

при этом ряд (3) сходится абсолютно во всех точках z комплексной плоскости. Следовательно, функция $w = e^z$ определена для любого значения z.

Для чисто мнимого аргумента из равенства (3) следует:

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right).$$

Как известно, ряды, заключенные в скобках, сходятся к $\cos y$ и $\sin y$. Таким образом, последнее равенство можно переписать в виде: $e^{iy} = \cos y + i \sin y$.

Эта формула носит имя Л. Эйлера, из нее следует, что

$w = u + iv = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, т.е.

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Таким образом, действительная и мнимая части показательной функции соответственно равны: $u = e^x \cos y,\ v = e^x \sin y$.

Степенная функция комплексного переменного имеет вид $w = z^n$, n – целое положительное. При отрицательном показателе степени имеем: $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$; при $n = 0$ имеем $z^0 = 1$.Например, при $n = 2$ имеем $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$, т.е.

$$u = x^2 - y^2, v = 2xy.$$

Общая степенная функция имеет вид: $w = z^\alpha = e^{aLnz}$, $a \in C$;

Общая показательная функция имеет вид: $a^z = e^{zLna}, a \in C$.

Эти функции многозначные, их главные значения равны соответственно: $e^{a \ln z}$ и $a^z = e^{z \ln a}$, $a \in C$.

Если $a = \dfrac{1}{n}$, $n \in N$, то получим корень n-й степени из комплексного числа:

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n}(\ln|z| + i(\arg z + 2\pi k))} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z + 2\pi k}{n}}.$$

Тригонометрические функции. Рассмотрим функции вида

$$w = \sin z, w = \cos z, w = tgz, w = ctgz.$$

Если iy в формуле $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ заменить на $-iy$, получим:

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y$$

Складывая и вычитая почленно последние равенства, найдем:

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right); \ \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

Свойства функций $tgz = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $ctgz = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ вытекают из свойств функций $\sin z, \cos z$, на них также распространяются известные формулы тригонометрии.

Гиперболические функции. Гиперболическими называются функции $w = sh\, z, w = ch\, z$, $w = th\, z$ и $w = cth\, z$, где:

$sh\,z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$ - гиперболический синус; $ch\,z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$ - гиперболический косинус, $th\,z = \frac{shz}{chz}$, $cth\,z = \frac{shz}{chz}$ - гиперболические тангенс и котангенс.

Очевидна связь гиперболических функций с тригонометрическими:
$chz = \cos iz,\ shz = -i\sin iz,\ ch\,iz = \cos z,\ sh\,iz = i\sin z,\ th\,z = -i\ tg\,iz,\ cthz = i\,ctg\,iz$.

Логарифмическая функция $w = Lnz$.

Комплексное число w называется *логарифмом комплексного числа z* тогда и только тогда, когда $e^{w} = z$. Полагая, что $z = x + iy,\ w = u + iv$, находим:

$$e^{w} = e^{u}\left(\cos v + i\sin v\right);\ z = x + iy = |z|\left(\cos\ \arg z + i\sin\ \arg z\right).$$

Из равенства $e^{w} = z$ следует равенство модулей и аргументов:

$$e^{u} = |z| \Rightarrow u = \ln|z|,\ \ v = \arg z.$$

Таким образом, логарифмическая функция имеет вид: $w = Lnz = \ln|z| + i\left(\arg z + 2\pi k\right)$.
Обозначив $\arg z + 2\pi k = Arg\,z$, окончательно получим: $Lnz = \ln|z| + iArgz$.

Обратные тригонометрические функции. Обратные гиперболические функции.

$$Arc\cos z = -iLn\left(z + \sqrt{z^{2} - 1}\right);\ Arc\sin z = -iLn\left(iz + \sqrt{1 - z^{2}}\right);$$

$$Arctgz = -\frac{i}{2}Ln\frac{1+iz}{1-iz};\ \ Arcctgz = \frac{i}{2}Ln\frac{z-i}{z+i}$$

Для гиперболических функций $sh\,z, ch\,z, th\,z$ также определены обратные функции $w = Arshz, w = Archz, w = Arthz$.

Можно показать, что $Archz = Ln\left(z + \sqrt{z^{2} - 1}\right)$, $Arshz = Ln\left(z + \sqrt{z^{2} + 1}\right)$; $Arthz = \frac{1}{2}Ln\frac{1+z}{1-z}$.

Тема 2.2.Дифференцирование и интегрирование функций комплексного переменного.

План:
1. Предел и непрерывность.
2. Дифференцируемость, функций комплексного переменного, условия Коши-Римана.
3. Интеграл функции комплексного переменного.
4. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.

Цель: Сформировать навыки дифференцирования и интегрирования на множестве функций комплексного переменного.

Задачи:
1. Исследовать функции на непрерывность и дифференцируемость. Находить производные функций. Находить действительную или мнимую часть аналитической функции по данной одной из них
2. Находить интегралы. Применять теорему Коши и интегральную формулу Коши.

Ключевые вопросы.
1. Дать определение предела функции.
2. Какая функция называется непрерывной?
3. Условия дифференцируемости функции.
4. Какая функция называется аналитической?
5. Почему действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями?
6. В чем заключаются условия Коши-Римана?
7. Как вычислить интеграл функции комплексного переменного?
8. Сформулируйте теорему Коши для односвязной и многосвязной области.

9. Для чего применяется интегральная формула Коши?

Краткий опорный конспект лекций

Предел и непрерывность. Пусть дана последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел $z_1, z_2, ..., z_n, \dots$

Определение. Число a называется пределом числовой последовательности $\{z_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon$ – такой, что при всех $n > N_\varepsilon$ выполнено неравенство $|z_n - a| < \varepsilon$.

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0, кроме, быть может, самой точки z_0.

Определение 1 (по Гейне). Число А называется пределом функции $w = f(z)$ в точке $z = z_0$, если $\forall \{z_n\} \to z_0$ соответствующая последовательность $\{f(z_n)\} \to A$.

Определение 2 (по Коши). Число А называется пределом функции $w = f(z)$ в точ $z = z_0$, если $\forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta(\varepsilon) > 0$ – такое, что $|f(z) - A| < \varepsilon$, как только $|z - z_0| < \delta \;\; (x \neq a)$.

Определение. Функция $f(z)$ называется *непрерывной* в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, если она определена в этой точке и существует конечный предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Дифференцирование. Условия Коши – Римана. Пусть $w = f(z)$ – функция комплексного переменного, где $z = x + iy, \quad w = u(x, y) + iv(x, y)$. Причем $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – функции действительных переменных x и y. Для того, чтобы функция $f(z)$ была дифференцируемой в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы в точке $(x; y)$ функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы и выполнялись условия $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, которые называются *условиями Коши – Римана*.

Определение. Если функция дифференцируема не только в данной точке, но и в некоторой окрестности данной точки, то она называется *аналитической* в данной точке.

Функция, дифференцируемая во всех точках области *D*, называется аналитической, или голоморфной в этой области.

Для любой дифференцируемой функции $f(z)$ производная $f'(z)$ в общем случае вычисляется по любой из формул:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}; \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}; \quad f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}; \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Пусть функция $f(z) = u + iv$ дифференцируема в области D, тогда она является аналитической в этой области, и существуют все производные n-го порядка, а значит, и непрерывные частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ любого порядка.

Можно вывести равенства $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$, дифференцируя и складывая почленно условия Коши-Римана. Полученные уравнения называются *уравнениями Лапласа*, а функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется *гармонической.* Благодаря этому свойству аналитическую функцию $f(z)$ можно восстановить по известным функциям $u(x, y)$ или $v(x, y)$.

Интегрирование. *Определение.* Интегралом по кривой l от функции $f(z)$ комплексного переменного (*криволинейным интегралом*) называется предел последовательности интегральных сумм $\int\limits_l f(z)dz = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$.

Способы вычисления интегралов.

1. Интеграл вычисляется сведением к двум криволинейным интегралам второго рода от функций действительного переменного. Учитывая, что $f(z) = u + iv$, а $z = x + iy$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, получим формулу: $\int\limits_l f(z)dz = \int\limits_l udx - vdy + i\int\limits_l udy + vdx$. Действительно,

$$\int\limits_l f(z)dz = \int\limits_l (u+iv)(dx+idy) = \int\limits_l udx + iudy + ivdx - vdy = \int\limits_l (udx - vdy) + i\int\limits_l udy + vdx,$$

где $f(z) = u + iv$, $u = Re\, f(z)$, $v = Im\, f(z)$.

2. Интеграл вычисляется сведением к определенному интегралу, если кривая l задается в параметрической форме $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$:

$$\int\limits_l f(z)dz = \int\limits_\alpha^\beta f(z(t)) \cdot z'(t)dt.$$

3. Интегрирование аналитической функции в односвязной области при помощи формулы Ньютона-Лейбница: $\int\limits_l f(z)dz = \int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F\,|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1)$

где $F(z)$ – первообразная для $f(z)$.

Таким образом, для аналитических функций справедливы основные приемы интегрирования и формула Ньютона-Лейбница. http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/tfkp/theme4/example.asp - ex3

Теорема Коши для односвязной области. Если D – односвязная ограниченная область, $w = f(z)$ – аналитическая в этой области функция, то для любого кусочно-гладкого замкнутого контура C, лежащего в области D, интеграл от $f(z)$ по C равен нулю, т.е. $\int\limits_C f(z)dz = 0$. Справедливо и обратное утверждение.

Теорема Морера. Если функция $w = f(z)$ непрерывна в односвязной области D и интеграл по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру, лежащему в D, равен нулю, то функция является аналитической в этой области.

Следствие. Пусть $L_1, L_2, L_3, \ldots$ − кусочно-гладкие кривые в односвязной области D, соединяющие точки a и b; функция $w = f(z)$ аналитическая в области D. Тогда

$$\int\limits_{L_1} f(z)dz = \int\limits_{L_2} f(z)dz = \int\limits_{L_3} f(z)dz = \ldots.$$

Таким образом, криволинейный интеграл при указанных условиях зависит не от формы кривой, а только от начальной и конечной ее точек.

Теорема Коши для многосвязной области. Если функция $w = f(z)$ является аналитической в замкнутой многосвязной ограниченной области $\overline{D}$, ограниченной контурами L_0 (внешний контур) и L_1, L_2, …, L_k (внутренние контуры) то интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним контурам, если при этом все контуры обходятся в одном направлении: $\int\limits_{L_0} f(z)dz = \int\limits_{L_1} f(z)dz + \int\limits_{L_2} f(z)dz + \ldots + \int\limits_{L_k} f(z)dz$

Интегральная формула Коши. Теорема. Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в области D, и L − замкнутая кусочно-гладкая кривая, содержащаяся в D вместе с областью D_1, которую она ограничивает.

Тогда для каждой точки $z_0 \in D_1$ имеет место формула $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)dz}{z - z_0}$.

Интеграл в правой части равенства называется *интегралом Коши.*

Дифференцируя обе части равенства, можно получить: $f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^2}$,

а также $f''(z) = \frac{2}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^3}$ и т. д.

Итак, если функция $f(z)$ аналитическая в области D_1 и на ее границе L, то для любого натурального n справедлива *формула Коши*:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}, \text{ где } z \in D,\ \xi \in C.$$

Тема 2.3. Ряд Лорана. Вычеты. Применение вычетов (2 ч.)

План:
1. Нахождение области сходимости ряда.
2. Нули функции.
3. Ряд Лорана.
4. Изолированные особые точки.
5. Вычет функции и его применение.

Цель: Сформировать понятие рядов в области комплексных чисел и их роль в решении задач

Задачи:
1. Разложение функций в ряд.
2. Нахождения области сходимости рядов.
3. Ряд Лорана. Изолированные особые точки
4. Нахождение вычетов в изолированных особых точках.
5. Уметь применять вычеты к решению задач.

Ключевые вопросы.
1. Какой ряд называется равномерно сходящимся?
2. Как исследуются ряды на сходимость?
3. Ряд Тейлора в области комплексных чисел.
4. Как определить порядок нуля функции комплексного переменного?
5. Дайте определение ряда Лорана.
6. Как определить тип изолированных особых точек?
7. Какова связь нулей и полюсов?
8. Как найти вычет в изолированной особой точке?

Краткий опорный конспект лекций

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + ... + u_n(z) + ...,$ называется *функциональным рядом в комплексной плоскости,* членами которого являются функции комплексного переменного $u_n(z), n = 1,2,...,$ определенные на некотором множестве M комплексной плоскости.

Сходимость ряда также как и в действительной области определяется пределом последовательности его частичных сумм.

Теорема 1 (признак Вейерштрасса). Если ряд (1) на множестве D мажорируется сходящимся числовым рядом с положительными членами, то он сходится на D равномерно, т.е. из условия, что

$$|u_n(z)| < c_n,\ z \in D, \text{ при этом числовой ряд } \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ сходится } (c_n > 0),$$ следует

равномерная сходимость ряда (1) на множестве D.

Равномерно сходящиеся ряды можно почленно дифференцировать и интегрировать.

Теорема о разложении функции в ряд Тейлора. Если функция $w = f(z)$ аналитична и однозначна в области D, $z_0 \in D$, то функция f(z) может быть разложена в ряд Тейлора по степеням $(z - z_0)^n$:

$$f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \ldots$$

Этот ряд абсолютно сходится к $f(z)$ внутри круга $|z - z_0| < r$, где r − расстояние от z_0 до границы области D. Это разложение единственно.

Нули функции. Нуль порядка* n. *Простой нуль. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0. Точка z_0 называется нулем функции, если ее значение в этой точке равно нулю, т.е. $f(z_0) = 0$.

В разложении функции в ряд Тейлора в окрестности нуля z_0 отсутствует свободный член $C_0 = f(z_0) = 0$. Если при этом в разложении отсутствуют и слагаемые, содержащие степени разности $(z - z_0)$ до n-й степени, т.е. разложение имеет вид:

$$f(z) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z - z_0)^{n+1} + \ldots = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k,$$

то точка z_0 называется *нулем* порядка n функции $f(z)$.

Нуль первого порядка ($n = 1$) называется *простым нулем*.

Необходимым и достаточным условиями существования нуля порядка n функции f (z) в точке z_0 являются:

а) $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, $f^{(k)}(z_0) = 0$, $k = 0,1,2,\ldots(n-1)$;

б) представление функции в виде произведения

$$f(z) = (z - z_0)^n \cdot \varphi(z), \quad \varphi(z_0) = C_n \neq 0.$$

Ряд Лорана. Аналитическую в некотором круге радиуса R функцию можно разложить в ряд Тейлора. Однозначная функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z - z_0| < R$ радиуса R, раскладывается в сходящийся к ней степенной ряд по степеням $z - z_0$ следующим образом: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, где $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz$

Если однозначная функция $f(z)$ является аналитической вне круга $r < |z - z_0|$ радиуса r с центром в точке z_0, то она представляется рядом: $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$,

где $c_{-n} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}}dz$, L – ориентированная против часовой стрелки окружность радиуса r.

Если однозначная функция $f(z)$ аналитична в кольце $r < |z - z_0| < R$, где $0 < r < R < \infty$, то она раскладывается в сходящийся степенной ряд:

$f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = f_1(z) + f_2(z)$; называемый *рядом Лорана*, где

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n,\quad \left|z-z_0\right|<R;\qquad f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\left(z-z_0\right)^{-n},\qquad r<\left|z-z_0\right|.$$

$f_1(z)$ – правильная часть Ряда Лорана,

$f_2(z)$ – главная часть ряда Лорана.

Особые точки и их классификация. О п р е д е л е н и е. Точка a называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует окрестность этой точки, в которой $f(z)$ аналитическая и однозначная (регулярная) во всех точках, за исключением самой точки a.

Рассмотрим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана $f(z)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}c_k\left(z-a\right)^k$ в окрестности изолированной особой точки a. При этом возможны следующие случаи:

1) главная часть ряда Лорана отсутствует:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left(z-a\right)^k=c_0+c_1\left(z-a\right)+c_2\left(z-a\right)^2+\ldots.,\quad c_{-n}\neq 0,$$

в этом случае особая точка a называется *устранимой*;

2) главная часть содержит конечное число членов:

$$f(z)=\sum_{k=-n}^{\infty}c_k\left(z-a\right)^k=\frac{c_{-n}}{\left(z-a\right)^n}+\frac{c_{-n+1}}{\left(z-a\right)^{n-1}}+\ldots+$$
$$+c_0+c_1\left(z-a\right)+c_2\left(z-a\right)^2+\ldots.,\quad c_{-n}\neq 0,$$

в этом случае особая точка a называется *полюсом n-го порядка*. Если $n = 1$, полюс называется простым, в остальных случаях – кратным;

3) главная часть содержит бесконечно много членов, в этом случае особая точка a называется *существенно особой* точкой.

Вычеты. *Вычетом* функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z=a$ называется интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}f(z)dz$, где γ – контур достаточно малого радиуса включающий точку a, пробегаемый против часовой стрелки (обход контура положительный).

$$\operatorname*{Res}_{a}f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}f(z)dz$$

Вычет в бесконечности (∞ - изолированная особая точка) определяется по формуле:

$$\operatorname*{Res}_{\infty}f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^-}f(z)dz$$

где γ^- – окружность достаточно большого радиуса, пробегаемая по часовой стрелке.

Основные положения о вычетах.

1. Так как в окрестности изолированной особой точки $z=a$ функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана, то, сравнивая коэффициенты ряда с (1), получим, что вычет функции в конечной изолированной особой точке a равен коэффициенту c_{-1} в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана при $\left(z-a\right)^{-1}$, т.е. если $f(z)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}c_k\left(z-a\right)^k$, то $\operatorname*{Res}_{a}f(z)=c_{-1}$.

2. Вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z=\infty$ равен коэффициенту $-c_{-1}$ в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана при z^{-1}: $f(z)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}c_k z^k$, $\operatorname*{Res}_{a}f(z)=-c_{-1}$

3. Если у аналитической функции $f(z)$ имеется лишь конечное чисто изолированных особых точек, то сумма вычетов в этих точках, включая вычет в ∞, равна нулю.

4. Вычет в устранимой особой точке равен нулю. Это следует из определения устранимой особой точки: главная часть ряда Лорана отсутствует, все коэффициенты с отрицательными индексами равны нулю, следовательно, $c_{-1} = 0$.

5. Вычет в существенно особой точке находится из разложения функции в ряд Лорана.

6. Если *a* – полюс порядка *n* функции *f(z)*, то $\operatorname{Res}_a f(z) = \dfrac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to a}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-a)^n f(z)\right)$.

7. В случае полюса первого и второго порядка формула для нахождения вычета, соответственно, имеет вид: $\operatorname{Res}_a f(z) = \lim\limits_{z\to a}\left((z-a)f(z)\right)$,

$\operatorname{Res}_a f(z) = \lim\limits_{z\to a}\dfrac{d}{dz}\lim\limits_{z\to a}\left((z-a)^2 f(z)\right)$.

8. Если $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – регулярные в точке *a* функции, причем $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$, то точка *a* является простым полюсом функции $f(z)$ и $\operatorname{Res}_a \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \dfrac{\varphi(z)}{\psi'(z)}$.

Применение вычетов. *Основная теорема о вычетах (теорема Коши о вычетах).*

Пусть функция $f(z)$ регулярна во всех точках ограниченной замкнутой области D, за исключением лишь конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$, расположенных внутри *D*. Тогда $\oint\limits_L f(z)dz = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{Res}_{z_k} f(z)$, где *L*– граница области *D*, проходимая в положительном направлении.

Теорема о полной сумме вычетов. Пусть функция $f(z)$ регулярна всюду в комплексной плоскости, за исключением конечного числа во всех конечных особых точках и изолированных особых точек $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$. Тогда сумма ее вычетов и вычета в бесконечности равна нулю: $\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{Res}_{z_k} f(z) + \operatorname{Res}_{\infty} f(z) = 0$.

При помощи вычетов вычисляются интегралы вида $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{i\alpha x}dx$,

где $R(x)$ – рациональная функция, $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, причем многочлен $Q(x)$ не обращается в нуль на вещественной оси и его степень по крайней мере на две единицы больше степени многочлена $P(x)$, $\alpha > 0$. В этом случае интеграл сходится и его значение определяется по формуле $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{i\alpha x}dx = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{Res}_{z=a_k}\left(R(z)e^{i\alpha x}\right)$, где $a_1, \ldots, a_n$ – все полюсы $R(x)$, лежащие в верхней полуплоскости.

Отделяя в этой формуле действительную и мнимую части, получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos\alpha x dx = -2\pi\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}_{z=a_k}\left(R(z)e^{i\alpha z}\right)\right),\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\alpha x dx = 2\pi\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}_{z=a_k}\left(R(z)e^{i\alpha z}\right)\right),$$

где $a_1, \ldots, a_n$ – все полюсы $R(z)$, лежащие в верхней полуплоскости.

Заметим, что при α <0, имеет место формула $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{i\alpha x}dx = -2\pi i\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{Res}_{z=a_k}\left(R(z)e^{i\alpha z}\right)\right)$, $\operatorname{Im} a_k < 0$.

РАЗДЕЛ 3. Приложения теории вероятностей и математической статистики

Тема 3.1. Случайные события. Случайные величины. Законы распределения Вариационные ряды. Примеры решения практических задач систем (4 ч.)

План: 1. История развития теории вероятностей и математической статистики
2. Теоретические основы статистической обработки экспериментальных данных
3. Статистический анализ выборочной совокупности.

Цель: 1.Целью изучения темы является усвоение способов группировки и анализа статистических сведений о качественных и количественных признаках объектов различной природы.

Задачи:
1. Повторение основ теории вероятностей в контексте исторического развития дисциплины.
2. Рассмотрение примеров применения статистического метода.

Ключевые вопросы.

1. История развития теории вероятностей и математической статистики.
2. Случайные величины, случайные события.
3. Выборки, из характеристики.
4. Распределения вероятностей случайных величин.
5. Статистический анализ.
6. Проверка гипотез.
7. Примеры.

Краткий опорный конспект лекций

1. *История развития теории вероятностей и математической статистики.* Математическая статистика как наука начинается с работ знаменитого немецкого математика Карла Фридриха Гаусса (1777–1855), который на основе теории вероятностей исследовал и обосновал метод наименьших квадратов, созданный им в 1795 г. и примененный для обработки астрономических. Его именем часто называют одно из распределений вероятностей – нормальное, а в теории случайных процессов основной объект изучения – гауссовские процессы.

В конце XIX в. – начале XX в. крупный вклад в математическую статистику внесли английские исследователи, прежде всего К. Пирсон (1857–1936) и Р.А. Фишер (1890–1962). В частности, Пирсон разработал критерий «хи-квадрат» проверки статистических гипотез, а Фишер – дисперсионный анализ, теорию планирования эксперимента, метод максимального правдоподобия оценки параметров.

В 30-е годы XX в. поляк Ежи Нейман (1894–1977) и англичанин Э. Пирсон развили общую теорию проверки статистических гипотез, а советские математики академик А.Н. Колмогоров (1903–1987) и член-корреспондент АН СССР Н.В. Смирнов (1900–1966) заложили основы непараметрической статистики. В сороковые годы XX в. румын А. Вальд (1902–1950) построил теорию последовательного статистического анализа.

Понятие случайного процесса введено в XX столетии и связано с именами А.Н. Колмогорова (1903–1987), А.Я. Хинчина (1894–1959), Е.Е. Слуцкого (1880–1948), Н. Винера (1894–1965).

Теория броуновского движения, исходящая из теоретико-вероятностных предпосылок, была разработана в 1905 г. двумя известными физиками М. Смолуховским (1872–1917) и А. Эйнштейном (1879–1955). В частности, именно с этих работ, как,

Математическая статистика бурно развивается и в настоящее время. Так, за последние 40 лет можно выделить четыре принципиально новых направления исследований:

– разработка и внедрение математических методов планирования экспериментов;

– развитие статистики объектов нечисловой природы как самостоятельного направления в прикладной математической статистике;

– развитие статистических методов, устойчивых по отношению к малым отклонениям от используемой вероятностной модели;

– широкое развертывание работ по созданию компьютерных пакетов программ, предназначенных для проведения статистического анализа данных.

2. *Теоретические основы статистической обработки экспериментальных данных.*

Функцией распределения называют функцию F(x), определяющую вероятность того, что непрерывная случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее числа x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства функции распределения:

1) значения функции распределения принадлежат отрезку [0,1]: $0 \le F(x) \le 1$;

2) F(x) – неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$;

3) вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a, b), равна приращению функции распределения на этом интервале: $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$;

4) если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то $F(x) = 0$ при $x \le a$ и $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию f(x) – первую производную от функции распределения F(x):

$$f(x) = F'(x).$$

Свойства плотности распределения:

1) плотность распределения – неотрицательная функция: $f(x) \ge 0$;

2) несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;

3) вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (x_1; x_2), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому от a до b:

$$P(x_1 \le X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1). \quad (1)$$

Полученный результат геометрически отражает тот факт, что вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал (x_1; x_2) равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, графиком плотности распределения f(x) и прямыми $x = x_1$ и $x = x_2$.

3. Числовые характеристики случайных величин.

Математическое ожидание M(X) непрерывной случайной величины, распределенной на интервале (x_1; x_2), характеризует ее среднее значение и определяется по формуле

$$M(X) = \int_{x_1}^{x_2} xf(x)dx. \quad (2)$$

Дисперсия D(X) непрерывной случайной величины, распределенной на интервале (x_1; x_2), характеризует ее рассеяние относительно математического ожидания и определяется по формуле

$$D(X) = \int_{x_1}^{x_2} [x - M(X)]^2 f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2. \quad (3)$$

Если возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат всей числовой оси Ox, то математическое ожидание и дисперсия определяются по формулам

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad \text{и} \quad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx.$$

Среднее квадратическое отклонение σ(X) случайной непрерывной величины определяется по формуле

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (4)$$

Начальным моментом ν_s порядка s случайной величины X называют математическое ожидание величины X^s:

$$\nu_s = M(X^s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)dx. \quad (5)$$

Начальный момент первого порядка случайной величины X соответствует ее математическому ожиданию.

Центральным моментом μ_s порядка s случайной величины X называют математическое ожидание величины $(X - M(X))^s$:

$$\mu_s = M[(X - M(X))^s]. \quad (6)$$

Центральные и начальные моменты случайной величины X связаны следующими соотношениями:

1) $\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2$;

2) $\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3$;

3) $\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4$.

Центральный момент третьего порядка μ_3 случайной величины X характеризует *асимметрию* (скошенность) распределения и служит для вычисления коэффициента асимметрии A_s, который определяется по формуле

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \quad (7)$$

Асимметрия положительна, если «длинная часть» кривой плотности распределения расположена справа от математического ожидания. Асимметрия отрицательна, если «длинная часть» кривой распределения расположена слева от математического ожидания.

Центральный момент четвертого порядка μ_4 случайной величины X характеризует «крутость» или островершинность графика ее плотности распределения и служит для вычисления *эксцесса* E_x, который определяется по формуле

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \quad (8)$$

Эксцесс положительный, если кривая распределения имеет острую вершину. Эксцесс отрицательный, если кривая распределения имеет пологую вершину.

Равномерное распределение вероятностей

Распределение вероятностей называют *равномерным*, если на интервале (a; b), которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le a, \quad x > b \\ \dfrac{1}{(b-a)} & при\ a < x \le b. \end{cases} \quad (9)$$

Функция равномерного распределения на интервале (a; b) имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & при\ a < x \le b, \\ 1 & при\ x > b. \end{cases}$$

Характеристики равномерного распределения определяются по формулам (2) – (4), (7), (8):

1) математическое ожидание $M(X) = \dfrac{b+a}{2}$;

2) дисперсия $D(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$;

3) среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$;

4) асимметрия $A_s = 0$;

5) эксцесс $E_x = -1{,}2$.

Вероятность попадания случайной величины X, распределенной по равномерному закону, в заданный интервал (x_1; x_2) определяется по формуле (1)

$$P(x_1 \le X < x_2) = \frac{x_2 - x_1}{b-a}.$$

Показательное распределение

Показательным (*экспоненциальным)* называют распределение непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\ x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & при\ x\ge 0,\end{cases} \quad (10)$$

где λ – постоянная положительная величина.

Функция показательного распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\, x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} & при\, x\ge 0.\end{cases}$$

Характеристики показательного распределения определяются по формулам (2) – (4):

1) математическое ожидание $M(X)=\frac{1}{\lambda}$;

2) дисперсия $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$;

3) среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}$.

Вероятность попадания случайной величины X, распределенной по показательному закону, в заданный интервал (x_1; x_2) определяется по формуле (1)

$$P(x_1\le X<x_2)=e^{-\lambda x_1}-e^{-\lambda x_2}. \quad (11)$$

Нормальное распределение

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (12)$$

Математическое ожидание нормального распределения равно параметру a. Среднее квадратическое отклонение нормального распределения равно параметру σ. Коэффициент асимметрии A_s и эксцесс E_x нормального распределения равны нулю: $A_s=0$ и $E_x=0$.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в заданный интервал (x_1; x_2) определяется по формуле (1):

$$P(x_1\le X<x_2)=\Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right), \quad (13)$$

где Φ(x) – функция Лапласа,

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz. \quad (14)$$

4. Статистический анализ выборочной совокупности

Выборочной совокупностью, или просто выборкой, называют совокупность случайно отобранных объектов. Объемом n выборочной совокупности называют число объектов этой совокупности.

Интервальным статистическим распределением выборки называют перечень интервалов и соответствующих им частот n_i или относительных частот $\frac{n_i}{n}$.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$ (плотность частоты).

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{n \cdot h}$ (плотность относительной частоты).

Для распределения наблюдений по интервалам необходимо найти длину интервала h, определяемую как отношение разности между максимальным X_{max} и минимальным X_{min} элементами выборки к количеству интервалов k

$$h = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{k}. \quad (15)$$

Количество интервалов k (целое число) целесообразно выбрать не менее 7, но и не более 15 или определить по формуле Старджесса

$$k = 1 + 3{,}322 \cdot \lg n, \quad (16)$$

где n – объем выборки.

Если k, вычисляемое по формуле Старджесса, нецелое число, то в качестве числа интервалов можно ближайшее к k целое число, не меньшее k.

Статистические оценки параметров распределения

Выборочной средней $\bar{x}_в$ называют среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности. Если все значения x_1, x_2, …., x_n выборки объема n различны, то

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Если значения признака x_1, x_2, …., x_k имеют соответственно частоты n_1, n_2, …..n_k, причем $n_1+n_2+……+n_k=n$, то

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i. \quad (17)$$

Для характеристики рассеяния значений количественного признака X выборки вокруг своего среднего значения вводят такой параметр как выборочная дисперсия.

Выборочной дисперсией $D_в$ называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего значения $\bar{x}_в$. Если все значения x_1, x_2, …., x_n признака различны, то

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}_в^2.$$

Если значения признака x_1, x_2, …., x_k имеют соответственно частоты n_1, n_2, …..n_k, причем $n_1+n_2+……+n_k=n$, то

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_в)^2. \quad (18)$$

Выборочным средним квадратическим отклонением называют квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}. \quad (19)$$

Начальный эмпирический момент M_s порядка s статистического распределения определяют по формуле

$$M_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^s}{n}, \quad (20)$$

где x_i – наблюдаемое значение признака, n_i – частота наблюдаемого значения признака, n – объем выборки.

Начальный эмпирический момент первого порядка равен выборочной средней $M_1 = \bar{x}_в$.

Центральный эмпирический момент m_s порядка s статистического распределения определяют по формуле

$$m_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_в)^s}{n}.$$

Центральный эмпирический момент второго порядка равен выборочной дисперсии $m_2 = D_в$.

Коэффициент асимметрии A_s^* статистического распределения определяется по формуле

$$A_s^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_в)^3 \cdot n_i}{n \cdot \sigma_в^3} = \frac{m_3}{\sigma_в^3}. \quad (22)$$

Эксцесс E_x^* статистического распределения определяется по формуле

$$E_x^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_в)^4 \cdot n_i}{n \cdot \sigma_в^4} - 3 = \frac{m_4}{\sigma_в^4} - 3. \quad (23)$$

Относительной характеристикой рассеивания случайной величины выступает коэффициент вариации V, который вычисляется как отношение среднего квадратического отклонения и выборочной средней по формуле

$$V = \frac{\sigma_в}{\bar{x}_в}. \quad (24)$$

Метод моментов.

Метод моментов – это определение неизвестных параметров статистического распределения путем приравнивания теоретических моментов рассматриваемого распределения соответствующим эмпирическим моментам того же порядка.

Для нахождения параметра λ показательного распределения необходимо приравнять начальный момент первого порядка показательного распределения начальному моменту первого порядка эмпирического распределения:

$$\frac{1}{\lambda} = \bar{x}_в \quad (25)$$

Для нахождения параметров a и σ нормального распределения необходимо:

1) приравнять начальный момент первого порядка нормального распределения к начальному моменту первого порядка эмпирического распределения:

$$a = \bar{x}_в; \quad (26)$$

2) центральный момент второго порядка нормального распределения к центральному моменту второго порядка эмпирического распределения:

$$\sigma = \sqrt{D_в} = \sigma_в. \quad (27)$$

Для нахождения параметров a и b равномерного распределения необходимо:

1) приравнять начальный момент первого порядка равномерного распределения к начальному моменту первого порядка эмпирического распределения:

$$\frac{a+b}{2} = \bar{x}_в;$$

2) центральный момент второго порядка равномерного распределения к центральному моменту второго порядка эмпирического распределения:

$$\frac{(b-a)^2}{12} = D_в.$$

Параметры равномерного распределения a и b можно определить по формулам

$$a = \bar{x}_в - \sigma_в \cdot \sqrt{3}; \quad (28)$$

$$b = \bar{x}_в + \sigma_в \cdot \sqrt{3}. \quad (29)$$

Начальные эмпирические моменты третьего M_3 и четвертого M_4 порядков статистического распределения приравниваются соответственно к начальным моментам третьего ν_3 и четвертого ν_4 порядков случайной величины: $M_3 = \nu_3$ и $M_4 = \nu_4$.

Центральные эмпирические моменты третьего m_3 и четвертого m_4 порядков статистического распределения приравниваются соответственно к центральным моментам третьего μ_3 и четвертого μ_4 порядков случайной величины: $m_3 = \mu_3$ и $m_4 = \mu_4$.

5.Проверка статистических гипотез.

Установление закона распределения выборочной совокупности проводится через проверку статистических гипотез.

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения. Статистические гипотезы бывают двух видов: нулевая (выдвигаемая) гипотеза H_0 и конкурирующая (противоречащая нулевой) H_1.

Проведение проверки статистическими методами приводит к появлению ошибок двух родов: 1) ошибка первого рода – отвержение правильной гипотезы; 2) ошибка второго рода – принятие неправильной гипотезы.

Вероятность совершить ошибку первого рода называют уровнем значимости и обозначают через α. Наиболее часто уровень значимости принимают 0,05, что означает наличие риска отвергнуть правильную гипотезу в пяти случаях из ста.

Для проверки нулевой гипотезы используется специально подобранная случайная величина, которая называется статистическим критерием.

Наблюдаемым значением критерия называют его значение, вычисленное по выборке.

После выбора определенного критерия множество всех его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а другое – при которых она принимается.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу принимают.

Критической точкой называют точку, отделяющую критическую область от области принятия гипотезы. Для каждого критерия имеются соответствующие таблицы, по которым и находят критическую точку.

Основной принцип проверки статистических гипотез формулируется следующим образом: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области – гипотезу отвергают, если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы – гипотезу принимают. Для проверки гипотезы о закономерности распределения выборочной совокупности применяется критерий Пирсона χ^2 (хи-квадрат), критические точки $\chi^2_{кр}$ которого находят по таблице.

Нулевую гипотезу следует принимать, если наблюдаемое значение критерия Пирсона меньше значения критической точки $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$. Нулевую гипотезу следует отвергнуть, если наблюдаемое значение критерия Пирсона больше значения критической точки $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$.

Для вычисления наблюдаемого значения критерия Пирсона $\chi^2_{набл}$ необходимо сравнить эмпирические n_i и теоретические n_i' частоты каждого интервала статистического распределения выборки по формуле

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}, \quad (30)$$

где k – количество интервалов.

Эмпирическая частота n_i равна количеству наблюдений в выборке, попавших в данный интервал. Теоретическая частота n_i' вычисляется по формуле

$$n_i' = n \cdot P_i, \quad (31)$$

где P_i – вероятность попадания случайной величины X теоретического распределения в частичный интервал (x_i, x_{i+1}), n – объем выборки.

Выбор теоретического распределения определяется примерным совпадением вида гистограммы относительных частот статистического распределения с графиком плотности соответствующего распределения случайной величины X (рис. 1, 2, 3). Результатом проведенного сравнительного анализа выступает выдвижение гипотезы о виде распределения выборочной совокупности и ее последующая проверка.

Для подтверждения выдвигаемой гипотезы сравниваются:

1) коэффициент асимметрии A_s^* статистического распределения с коэффициентами асимметрии A_s равномерного и нормального распределений ($A_s = 0$);

2) эксцесс E_x^* статистического распределения с эксцессами E_x равномерного ($E_x = -1{,}2$) или нормального распределений ($E_x = 0$);

3) коэффициент вариации V статистического распределения с коэффициентами вариации показательного ($V = 1$) распределения.

Характеристики выборочных совокупностей

Выборк а	Характеристики			
	X_{min}	X_{max}	$k = 1 + 3{,}322 \cdot \lg 100,$ $k = 7{,}644 \approx 8$	$h = \dfrac{X_{max} - X_{min}}{k}$
1	5,1 ≈ 5	18,76 ≈ 20	6	2,5
2	0,18 ≈ 0	22,06 ≈ 25	5	5
3	0,03 ≈ 0	30,76 ≈ 35	7	5

Центральные эмпирические моменты выборок

Параметры	Выборка		
	1	2	3
m_2	16,48	19,62	48,58
m_3	1,19	-3,79	513,41
m_4	488,96	1053,94	11404,22

Параметры статистических распределений выборок

Параметры	Выборка		
	1	2	3
$\overline{x}_в = M_1$	12,19	12,54	12,19
$\sigma_в = \sqrt{m_2}$	4,06	4,43	6,97
$A_s^* = \dfrac{m_3}{\sigma_в^3}$	0,02	-0,04	1,5
$E_x^* = \dfrac{m_4}{\sigma_в^4} - 3$	-1,20	-0,26	1,83
$V = \dfrac{\sigma_в}{\overline{x}_в}$	0,33	0,35	0,57

- выборочная совокупность 1 имеет равномерное распределение с параметрами a=5,15 и b=19,22;

- выборочная совокупность 2 имеет нормальное распределение с параметрами a=12,54 и s=4,43;

- выборочная совокупность 3 имеет показательное распределение с параметром l=0,14.

Результаты сравнения коэффициентов асимметрии, эксцессов и коэффициентов вариации выборочных совокупностей не противоречат выдвинутым гипотезам:

- коэффициент асимметрии и коэффициент вариации V=0,33 выборочной совокупности 1 сравнимы с соответствующими параметрами равномерного распределения ($A_s = 0, \quad E_x = -1{,}2$);

- коэффициент асимметрии A^*_s=-0,04, эксцесс E^*_s=-0,26, выборочной совокупности 2 сравнимы с соответствующими параметрами нормального распределения ($A_s = 0, \quad E_x = 0$);

- коэффициент вариации V=0,57 выборочной совокупности 3 сравним с соответствующим параметром показательного распределения ($V = 1$).

Проверка гипотезы о равномерном распределении выборки 1

Нулевая гипотеза H_0: выборочная совокупность 1 имеет равномерное распределение с параметрами a=5,15 и b=19,22.
Число степеней свободы: r=3.
Уровень значимости α=0,05.
Критическая точка $\chi^2_{кр} = 7{,}81$
Наблюдаемое значение критерия Пирсона $\chi^2_{набл} = 1{,}27$
Критическая область $(\chi^2_{кр};+\infty)$: $(7{,}81;+\infty)$
Область принятия гипотезы $(0;\chi^2_{кр})$: $(0;7{,}81)$
Условие принятия H_0 $\chi^2_{набл} \in (0;\chi^2_{кр})$: $1{,}27 \in (0;7{,}81)$
Условие непринятия H_0 $\chi^2_{набл} \in (\chi^2_{кр};+\infty)$: $1{,}27 \notin (7{,}81;+\infty)$
Результат проверки гипотезы: выборочная совокупность 1 имеет равномерное распределение с параметрами a=5,15 и b=19,22.

Проверка гипотезы о нормальном распределении выборки 2

Нулевая гипотеза H_0: выборочная совокупность 2 имеет нормальное распределение с параметрами a=12,54 и s=4,43.
Число степеней свободы: r=2.
Уровень значимости α=0,05
Критическая точка $\chi^2_{кр} = 7{,}81$
Наблюдаемое значение критерия Пирсона $\chi^2_{набл} = 2{,}68$
Критическая область $(\chi^2_{кр};+\infty)$: $(7{,}81;+\infty)$
Область принятия гипотезы $(0;\chi^2_{кр})$: $(0;7{,}81)$
Условие принятия H_0 $\chi^2_{набл} \in (0;\chi^2_{кр})$: $2{,}68 \in (0;7{,}81)$
Условие непринятия H_0 $\chi^2_{набл} \in (\chi^2_{кр};+\infty)$: $2{,}68 \notin (7{,}81;+\infty)$
Результат проверки гипотезы: выборочная совокупность 2 имеет нормальное распределение с параметрами a=12,54 и s=4,43.

Проверка гипотезы о показательном распределении выборки 3

Нулевая гипотеза H_0: Выборочная совокупность 3 имеет показательное распределение с параметром l=0,14.
Число степеней свободы: r=5
Уровень значимости α=0,05
Критическая точка $\chi^2_{кр} = 11{,}07$
Наблюдаемое значение критерия Пирсона $\chi^2_{набл} = 2{,}11$

Условие принятия H_0 $\chi^2_{набл} \in (0; \chi^2_{кр})$: $2{,}11 \in (0;11{,}07)$
Результат проверки гипотезы: выборочная совокупность 3 имеет показательное распределение с параметром l=0,14.

Заключение

С помощью программы Excel был проведен статистический анализ 3-х выборочных совокупностей и было установлено, что:

- выборочная совокупность 1 имеет равномерное распределение с параметрами a=5,15 и b=19,22;
- выборочная совокупность 1 имеет нормальное распределение с параметрами a=12,54 и s=4,43;
- выборочная совокупность 3 имеет показательное распределение с параметром l=0,14.

Тема 3.2. . Основные задачи теории случайных процессов. Понятие случайного процесса. Одномерные и многомерные случайные процессы. Задачи на применение случайных процессов (4 ч.)

Цель: Целью изучения дисциплины является формирование у студентов базовых знаний по теории случайных процессов, позволяющих использовать методы анализа случайных процессов при решении технических задач.

Задачи:

1. Иметь представление о роли и месте теории случайных процессов при решении задач электроэнергетики.
2. Решение задач о различных типах случайных процессов и особенностях их анализа, в том числе в переходном и стационарном режимах;

Ключевые вопросы.

1. Случайная функция, случайный процесс, случайное поле.
2. Функция распределения вероятностей случайного процесса.
3. Плотность распределения вероятностей случайного процесса.
4. Моментные функции случайного процесса.
5. Условные распределения вероятностей. 6
6. Примеры математических моделей случайных процессов.
7. Стационарные процессы.

Краткий опорный конспект лекций

1.Случайная функция, случайный процесс, случайное поле. Случайной функцией $\xi(\vartheta)$ называется случайная величина ξ, зависимая от параметра ϑ. Случайные величины $\xi(\vartheta)$ могут быть вещественными, либо комплексными, либо векторными; аргумент ϑ может быть вещественным или векторным. Самый простой пример случайной функции получаем для вещественного параметра $\vartheta = t$ и вещественной случайной величины $\xi(\vartheta)$. При этом $\xi(t)$ называется случайной функцией одной переменной или случайным процессом. Отметим, что аргумент t случайного процесса не обязательно имеет размерность времени.

Более сложные примеры случайных функций встречаются в задачах физики, океанологии, метеорологии и других областях приложения теории вероятностей. Так, температура воздуха T в точке пространства (x, y, z) и в момент времени t часто рассматривается как случайная величина. Таким образом, температура воздуха $T(x, y, z, t)$ является случайной функцией, зависимой от трех декартовых координат x, y, z времени t. Случайную функцию, зависимую от нескольких переменных принято называть случайным полем.

Случайный процесс $\xi(t)$ как функция аргумента t имеет свою область определения $[T_1, T_2]$, которая может быть отрезком на вещественной оси, положительной полуосью, всей вещественной осью и т. д. Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ при фиксированном $t = t_0$, тогда $\xi(t_0)$ - случайная величина, которая называется сечением случайного процесса в точке $t = t_0$.

Пусть выполняется N опытов, в каждом из которых измеряется значение $\xi_i(t_0)$, $i = 1, \ldots, N$, случайной величины $\xi(t_0)$. Тогда результаты измерений – это N чисел

$$\xi_1(t_0), \ldots, \xi_N(t_0). \qquad (1.1)$$

В отличие от случайной величины $\xi(t_0)$ измерение случайного процесса $\xi(t)$ выполняется в течение некоторого интервала $[T_3, T_4]$-интервала наблюдения. Последний либо содержится в области определения $[T_1, T_2]$, либо совпадает с ней. Пусть детерминированная функция $\xi_1(t)$, $t \in [T_3, T_4]$, - результат измерения случайного процесса в первом опыте, функция $\xi_2(t)$, $t \in [T_3, T_4]$, - результат измерения случайного процесса во втором опыте, и т.д. Тогда результаты всех N опытов, аналогично (1.1), представляются совокупностью N детерминированных функций времени:

$$\xi_1(t), \ldots, \xi_N(t), \quad t \in [T_3, T_3] \qquad (1.2)$$

Каждая функция $\xi_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, называется реализацией (траекторией, выборочной функцией, выборкой) случайного процесса $\xi(t)$. Совокупность (1.2) называется ансамблем реализаций случайного процесса $\xi(t)$. Ансамбль реализаций содержит информацию о статистических свойствах случайного процесса $\xi(t)$ аналогично как и совокупность измерений (3) содержит информацию о статистических свойствах случайной величины $\xi(t_0)$.

В зависимости от того, дискретны или непрерывны время t и реализации $\xi_i(t)$, различают четыре типа случайных процессов.

1). Случайный процесс общего типа: время t - непрерывно и реализации $\xi_i(t)$- непрерывны.

2). Дискретный случайный процесс: время t - непрерывно и $\xi_i(t)$- дискретны.

3). Случайная последовательность: t - дискретно и $\xi_i(t)$- непрерывны. В литературе случайные процессы этого типа принято называть временными рядами.

4). Дискретная случайная последовательность: t - дискретно и $\xi_i(t)$ - дискретны.

2.Функция распределения вероятностей случайного процесса. При фиксированном t распределение вероятностей сечения $\xi(t)$ случайного процесса (как распределение вероятностей случайной величины) задается функцией распределения вероятностей

$$F_1(x,t) = P[\xi(t) \le x]. \qquad (2.1)$$

Соотношение (2.1) можно рассматривать при любом t. Функция $F_1(x,t)$, как функция двух переменных x и t, называется одномерной функцией распределения вероятностей случайного процесса $\xi(t)$. Аргументы x и t принято называть соответственно фазовой и временной переменными. Однако, $F_1(x,t)$ не дает исчерпывающую вероятностную характеристику случайного процесса $\xi(t)$, поскольку она не учитывает зависимости случайных величин $\xi(t)$ при разных t (т.е. зависимости разных сечений случайного процесса). Более полно вероятностные свойства случайного процесса $\xi(t)$ описывает n

-мерная функция распределения F_n - функция распределения случайного вектора $(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n))$:

$$F_n(x_1,\ldots x_n;t_1,\ldots,t_n) = P[\xi(t_1) \le x_1,\ldots,\xi(t_n) \le x_n]. \qquad (2.2)$$

Однако, практическое применение находят лишь функции распределения первого и второго порядков $(n = 1,2)$. Функции более высоких порядков $(n \ge 3)$ используются только в теории.

Основные свойства n-мерной функции распределения вероятностей случайного процесса аналогичны свойствам функции распределения вероятностей n-мерного вектора.

1) Функция $F_n(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)$ - неубывающая по каждому аргументу x_i, $i = 1,\ldots,n$.

2) Функция $F_n(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)$ - непрерывна справа по каждому аргументу x_i, $i = 1,\ldots,n$.

3) Функция распределения симметрична относительно перестановок двух любых пар x_i, t_i и x_j, t_j:

$$F_n(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n) = F_n(x_{k_1},\ldots,x_{k_n};t_{k_1},\ldots,t_{k_n}).$$

4) Для любого целого l, $1 \le l \le n$

$$\lim_{x_l \to -\infty} F_n(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n) = 0.$$

5) Для любого целого l, $1 \le l \le n$

$$\lim_{x_l \to \infty} F_n(x_1,\ldots, x_n;t_1,\ldots,t_n) = F_{n-1}(x_1,\ldots,x_{l-1},x_{l+1},\ldots, x_n;t_1,\ldots,t_{l-1},t_{l+1},\ldots,t_n).$$

6) $F_n(\infty,\ldots,\infty;t_1,\ldots,t_n) = 1$.

3. Плотность распределения вероятностей случайного процесса .

Если $F_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)$ имеет производную

$$\frac{\partial^n F_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)}{\partial x_1\cdots\partial x_n}=f_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n), \qquad (3.1)$$

тогда эта производная называется n-мерной плотностью распределения вероятностей случайного процесса. Основные свойства плотности (71.1) аналогичны свойствам плотности распределения вероятностей n-мерного вектора. Рассмотрим основные из них.

1) Функция распределения F_n определяется через плотность:

$$F_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f_n(y_1,\dots,y_n;t_1,\dots,t_n)\,dy_1\cdots dy_n \qquad (3.2)$$

Плотность f_n - неотрицательная функция:

$$f_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)\ge 0. \qquad (3.3)$$

3) Плотность удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)\,dx_1\cdots dx_n=1. \qquad (3.4)$$

4) Выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)\,dx_i=f_{n-1}(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n;t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_n) \qquad (3.5),$$

называемое свойством согласованности.

5) Плотность – симметричная функция относительно перестановок двух любых пар x_i,t_i и x_j,t_j:

$$f_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)=f_n(x_{k_1},\dots,x_{k_n};t_{k_1},\dots,t_{k_n}). \qquad (3.6)$$

6) Плотность определяет вероятность попасть значениям случайного процесса в заданные интервалы:

$$P\{a_1<\xi(t_1)\le b_1,\dots,a_n<\xi(t_n)\le b_n\}=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n}f_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)\,dx_1\cdots dx_n. \qquad (3.7)$$

4. Моментные функции случайного процесса. Пусть $\xi(t)$ - случайный процесс, имеющий плотность $f_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)$ и $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ функция n переменных. Вместо аргумента x_i, $i=1,\dots,n$, функции φ подставим $\xi(t_i)$. Тогда $\varphi[\xi(t_1),\dots,\xi(t_n)]$ - случайная величина, математическое ожидание которой определяется соотношением:

$$\mathbf{M}\varphi[\xi(t_1),\dots,\xi(t_n)]=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1,\dots,x_n)f_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)\,dx_1\cdots dx_n. \qquad (4.1)$$

Рассмотрим простейшие примеры функции φ. 1) Пусть $\varphi(x) = x$ - функция одной переменной, тогда $n = 1$ и (72.1) принимает вид:

$$\mathbf{M}\varphi(\xi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x, t)dx = a(t) \qquad (4.2)$$

Функция $a(t)$ называется математическим ожиданием (средним, статистическим средним) случайного процесса $\xi(t)$. 2) Аналогично выбор $\varphi(x_1, x_2) = x_1 x_2$ приводит к равенству

$$\mathbf{M}\xi(t_1)\xi(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)dx_1 dx_2 = B(t_1, t_2) \qquad (4.3)$$

Функция $B(t_1; t_2)$ называется корреляционной функцией случайного процесса $\xi(t)$. 3) Аналогично вводятся дисперсия

$$\mathbf{M}[\xi(t) - a(t)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [\xi(t) - a(t)]^2 f_1(x, t)dx = \sigma^2(t) \qquad (4.4)$$

и ковариационная функцией случайного процесса

$$\mathbf{M}[\xi(t_1) - a(t_1)][\xi(t_2) - a(t_2)] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - a(t_1)][x_2 - a(t_2)] f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)dx_1 dx_2 = R(t_1, t_2) \qquad (4.5)$$

Получим соотношение, связывающее функции R, B, a. Из (72.5) следует

$$R(t_1, t_2) = \mathbf{M}[\xi(t_1) - a(t_1)][\xi(t_2) - a(t_2)] =$$

$$= \mathbf{M}\xi(t_1)\xi(t_2) - a(t_2)\mathbf{M}\xi(t_1) - a(t_1)\mathbf{M}\xi(t_2) + a(t_1)a(t_2) \qquad (4.6)$$

десь использовалось равенство $\mathbf{M}\xi(t_1)a(t_2) = a(t_2)\mathbf{M}\xi(t_1)$, поскольку $a(t)$ - детерминированная функция и ее можно вынести за оператор математического ожидания. Таким образом, (72.6) принимает вид

$$R(t_1, t_2) = B(t_1, t_2) - a(t_1)a(t_2) \qquad (4.7)$$

Функции вида

$$\mathbf{M}\xi^{k_1}(t_1)\xi^{k_2}(t_2)\cdots\xi^{k_n}(t_n), \qquad (4.8)$$

где целые числа $k_i \geq 0$, называются начальными моментами порядка $k_1 + k_2 + ... + k_n$ случайного процесса $\xi(t)$. Аналогично центральные моменты определяются соотношениями:

$$\mathbf{M}[\xi(t_1) - a(t_1)]^{k_1}\cdots[\xi(t_n) - a(t_n)]^{k_n} \qquad (4.9)$$

Для функций (72.8), (72.9) используется общее название - моментные функции. Наиболее простые моментные функции (до второго порядка) - это рассмотренные выше математическое ожидание $a(t)$, дисперсия $\sigma^2(t)$ корреляционная и ковариационная функции $B(t_1, t_2)$, $R(t_1, t_2)$, - находят широкое практическое применение в экспериментальных исследованиях в отличие от моментов более высоких порядков, которые используютя только в теоретических расчетах.

5. Условные распределения вероятностей. Если задана $n-m$- мерная плотность распределения вероятности случайного процесса $\xi(t)$, тогда условная плотность $f_{n/m}$ порядка n при условии, что случайный процесс в моменты времени $t'_1,\ldots,t'_m$ принимает значения $x'_1,\ldots,x'_m$ определяется по формуле:

$$f_{n/m}(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n/x'_1,\ldots,x'_m;t'_1,\ldots,t'_m)=$$
$$=\frac{f_{n-m}(x_1,\ldots,x_n,x'_1,\ldots,x'_m;t_1,\ldots,t_n,t'_1,\ldots,t'_m)}{f_m(x'_1,\ldots,x'_m;\ t'_1,\ldots,t'_m)}. \qquad (5.1)$$

Соответствующая условная функция распределения вероятностей $F_{n/m}$ порядка n при условии, что случайный процесс в моменты времени $t'_1,\ldots,t'_m$ принимает значения $x'_1,\ldots,x'_m$ определяется соотношением:

$$F_{n/m}(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n/x'_1,\ldots,x'_m;t'_1,\ldots,t'_m)=$$
$$=P\{\xi(t_1)\le x_1,\ldots,\xi(t_n)\le x_n/\xi(t'_1)=x'_1,\ldots,\xi(t'_m)=x'_m\}. \qquad (5.2)$$

Соотношения между условной плотностью $f_{n/m}$ и условной функцией распределения вероятностей $F_{n/m}$ аналогичны соотношениям для соответствующих безусловных функций, например, справедливо равенство:

$$F_{n/m}(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n/x'_1,\ldots,x'_m;t'_1,\ldots,t'_m)=$$
$$=\int_{-\infty}^{x_1}dy_1\cdots\int_{-\infty}^{x_n}dy_n f_{n/m}(y_1,\ldots,y_n;t_1,\ldots,t_n/x'_1,\ldots,x'_m;t'_1,\ldots,t'_m). \qquad (5.3)$$

В простейшем варианте при $n=m=1$ формула (73.1) для условных плотностей принимает вид:

$$f_{1/1}(x,t/y,\tau)=\frac{f_2(x,y;t,\tau)}{f_1(y,\tau)}. \qquad (5.4)$$

Отсюда

$$f_2(x,y;t,\tau)=f_1(y,\tau)f_{1/1}(x,t/y,\tau). \qquad (5.5)$$

Поскольку плотность второго порядка симметрична относительно перестановок пар x,t и y,τ, то из (73.5) следует

$$f_2(x,y;t,\tau)=f_1(x,t)f_{1/1}(y,\tau/x,t). \qquad (5.6)$$

Соотношения (73.5), (73.6) - это формулы умножения для плотностей. Очевидна аналогия этих формул с формулой умножения вероятностей. Используя свойство согласованности, из (73.6) получим

$$f_1(y,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(x,y;t,\tau)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x,t)f_{1/1}(y,\tau/x,t)dx. \qquad (5.7)$$

Это соотношения аналогично формуле полной вероятности. Далее, выражения (73.6), (73.7) подставим в (73.4), тогда

$$f_{1/1}(x,t/y,\tau)=\frac{f_1(x,t)f_{1/1}(y,\tau/x,t)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x,t)f_{1/1}(y,\tau/x,t)dx}. \qquad (5.8)$$

Данное соотношение представляет собой аналог формулы Байеса.

6.Примеры математических моделей случайных процессов.

Из соотношения (5.1) следует

$$f_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)=f_1(x_1,t_1)f_{1/1}(x_2,t_2/x_1,t_1)f_{1/2}(x_3,t_3/x_1,x_2;t_1,t_2)\cdots$$
$$\cdots f_{1/n-1}(x_n,t_n/x_1,\dots,x_{n-1};t_1,\dots,t_{n-1}). \qquad (6.1)$$

Отметим, что здесь произведение первых двух сомножителей, согласно (73.1), равно

$$f_1(x_1,t_1)f_{1/1}(x_2,t_2/x_1,t_1)=f_2(x_1,x_2;t_1,t_2). \qquad (6.2)$$

Аналогично, произведение первых трех сомножителей в (74.1) равно

$$f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)f_{1/2}(x_3,t_3/x_1,x_2;t_1,t_2)=f_3(x_1,x_2,x_3;t_1,t_2,t_3). \qquad (6.3)$$

Случайный процесс $\xi(t)$ называется процессом с независимыми значениями, если случайные величины $\xi(t_1),\dots,\xi(t_n)$ независимы в совокупности для любого n и всех различных t_i. При этом соотношение (6.1) принимает вид:

$$f_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)=\prod_{i=1}^{n} f_1(x_i,t_i). \qquad (6.4)$$

Таким образом, n- мерная плотность распределения вероятности f_n случайного процесса с независимыми значениями полностью определяется через его одномерную плотность вероятности f_1. Столь простая структура n- мерной плотности позволяет во многих случаях легко находить решения задач. Однако, столь простая математическая модель (74.4) может оказаться неадэкватной исследуемому процессу. Тогда результаты теоретических расчетов, основанные на формуле (74.4), не соответствуют результатам опыта, и возникает необходимость построения более сложной математической модели исследуемого процесса с учетом статистических связей между его различными сечениями $\xi(t_i)$, $\xi(t_j)$, что позволит получить более точное описание свойств исследуемого процесса.

Случайный процесс $\xi(t)$ называется процессом с ортогональными значениями, если

$$\mathbf{M}\xi(t_i)\xi(t_j)=0 \qquad (6.5)$$

Случайный процесс $\xi(t)$ называется процессом с независимыми приращениями, если случайные величины $\xi(t_2)-\xi(t_1)$ и $\xi(t_4)-\xi(t_3)$ независимы для любых неперекрывающихся отрезков $[t_1,t_2]$, $[t_3,t_4]$.

Пусть моменты времени $t_1<t_2<\cdots<t_n$ - упорядочены по индексу. Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если его условная плотность вероятности удовлетворяет равенству:

$$f_{1/n-1}(x_n;t_n/x_1,\dots,x_{n-1};t_1,\dots,t_{n-1}) = f_{1/1}(x_n;t_n/\ x_{n-1};t_{n-1}). \qquad (6.6)$$

аким образом, для марковского процесса случайная величина $\xi(t_n)$ зависит только от $\xi(t_{n-1})$ и не зависит от всех $\xi(t_i)$, $t_i < t_{n-1}$. Принято говорить, что марковский процесс помнит свою историю только на один шаг.

Соотношение (6.1) для марковского процесса принимает вид:

$$f_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n) = f_1(x_1;t_1)f_{1/1}(x_2;t_2/x_1;t_1)\cdots f_{1/1}(x_n;t_n/x_{n-1};t_{n-1}).$$

(6.7)

Отсюда следует, что, n- мерная плотность распределения вероятности f_n случайного марковского процесса полностью определяется его двумерной плотностью f_2, поскольку одномерная плотность f_1 и условная $f_{1/1}$ определяются через f_2 по формулам (5.7) и (5.4).

Марковский процесс можно рассматривать как обобщение процесса с независимыми значениями, в том смысле, что последний не помнит свою историю, а марковский процесс помнит свою историю на один шаг. Но и марковский процесс можно усложнить, удлиняя его память на два шага, на три шага и т.д. В результате получаются более точные математические модели исследуемого процесса, что, однако, достигается их усложнением. Такие модели также принято называть марковскими процессами, но самая простая из них, с памятью в один шаг (6.7), в этом ряду называется простейшим марковским процессом.

7. Стационарные процессы. Случайный процесс $\xi(t)$ называется строго стационарным, если его n - мерная плотность вероятности удовлетворяет условию:

$$f_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n) = f_n(x_1,\dots,x_n;t_1+\tau,\dots,t_n+\tau) \qquad (7.1)$$

для любого τ. Отсюда при $n=1$ и $\tau=-t_1$ получим

$$f_1(x_1;t_1) = f_1(x_1;0). \qquad (7.2)$$

Это равенство означает, что плотность первого порядка $f_1(x;t)$не зависит от времени t. При этом математическое ожидание случайного процесса

$$\mathbf{M}\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x;t)dx = a = const \qquad (7.3)$$

- величина постоянная, не зависимая от времени. Аналогично, постоянными для этого процесса являются среднее квадрата $\mathbf{M}\xi^2(t)$ и дисперсия $\mathbf{M}[\xi(t)-a]^2$. Пусть $n=2$ и $\tau=-t_2$, тогда из (7.1) следует равенство

$$f_2(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_2(x_1,x_2;t_1-t_2,0). \qquad (7.4)$$

Таким образом, плотность второго порядка f_2 зависит от временных аргументов t_1, t_2 через их разность t_1-t_2. Поэтому корреляционная функция $B(t_1,t_2)$ и ковариационная функция $R(t_1,t_2)$ также являются функциями разности t_1-t_2 своих аргументов.

В общем случае в соотношении (7.1) можно положить, например, $\tau=-t_n$, тогда плотность f_n зависит от $n-1$ временных аргументов

$t_1 - t_n, \dots, t_{n-1} - t_n$. Следовательно, моментные функции, которые в общем случае зависят от n временных аргументов $t_1, \dots, t_n$, для строго стационарных случайных процессов также зависят от $n-1$ временных аргументов $t_1 - t_n, \dots, t_{n-1} - t_n$.

Раздел теории случайных процессов, в котором излагаются основные свойства функций $B(t_1, t_2)$ и $R(t_1, t_2)$, принято называть корреляционной теорией случайных процессов. Таким образом, в рамках корреляционной теории рассматриваются моментные функции не более, чем второго порядка. В связи с этим вводится специальное определение стационарности.

Случайный процесс $\xi(t)$ называется стационарным в широком смысле (по Хинчину), если его математическое ожидание $\mathbf{M}\xi(t) = a(t)$ и дисперсия $\mathbf{M}[\xi(t) - a]^2 = \sigma^2(t)$ - величины постоянные, не зависимые от времени t, а корреляционная функция $B(t_1, t_2) = B(t_1 - t_2)$ зависит от аргументов t_1, t_2 через их разность $t_1 - t_2$.

ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$ в точке $x = 1{,}97$

2. Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 + x + 1}}$ в точке $x = 1{,}04$.

3. Вычислить приближенно с помощью дифференциала $tg47°$.

4. Вычислить приближенное значение функции $z = x^2 - xy + y^2$ в точке $M(2{,}15; 1{,}25)$ с помощью полного дифференциала, оценить абсолютную и относительную погрешность.

5. С помощью полного дифференциала функции двух переменных вычислить приближенно значение данного выражения. Вычислить это же выражение с помощью микрокалькулятора. $\sqrt{\sqrt[4]{0{,}984} + (1{,}016)^2 + 2}$

6. Найти $y'(50)$ функции $y = \ln(x)$, заданной таблично:

X	**Y**	**Δy**	**Δ²y**	**Δ³y**
50	$1,6990$	$0,0414$	$-0,0036$	$0,0005$
55	$1,7404$	$0,0378$	$-0,0031$	
60	$1,7782$	$0,0347$		

$y = \ln(x)$ $y = \ln(x)$ $y = \ln(x)$ $y = \ln(x)$ $y = \ln(x)$

7. Путь $y = f(t)$, пройденный прямолинейно движущейся точкой за время *t*, дается в следующей таблице:

l	**Время t_i в сек.**	**Путь $y(t_i)$ в см**
0	$0,00$	$0,000$
1	$0,01$	$1,519$
2	$0,02$	$6,031$

3	0,03	13,397
4	0,04	23,396
5	0,05	35,721
6	0,06	50,000
7	0,07	65,798
8	0,08	82,635
9	0,09	100,000

Используя конечные разности до пятого порядка включительно, приближенно найти скорость $V = \frac{dx}{dt}$ и ускорение $W = \frac{d^2x}{dt^2}$ точки для моментов $t = 0;0{,}001;0{,}02;0{,}03;0{,}04$.

8. Вычислить приближенно: $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$.

9. Применяя формулу Симпсона, вычислить приближенное значение ln5 из соотношения $\int_1^5 \frac{dx}{x} = \ln 5$ (при вычислении примите n = 10).

10. Найти оригиналы функций при помощи вычетов:

1) $F(x) = \frac{p}{p^2 - 2p + 5}$; 2) $F(x) = \frac{p^2 + p + 1}{(p-1)(p+1)^2}$;

3) $F(x) = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$; 4) $F(x) = \frac{1}{p^3 - 8}$.

11. Имеются данные о годовой мощности предприятий отрасли в 2013г.

Предприятия с годовой мощностью (тыс. тонн)	Количество предприятий
До 500	27
500 – 1 000	11
1 000 - 2 000	8
2 000 - 3 000	8
Свыше 3 000	2

1) Постройте гистограмму, кумуляту.
2) Рассчитайте среднюю мощность предприятий.
3) Найдите дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Объясните полученные результаты, сделайте выводы.

12. В заочном вузе, где обучаются 2000 студентов, была образована случайная бесповторная выборка с целью определения стажа работы студентов по специальности. Полученные при этом результаты представлены в таблице:

Стаж работы по специальности (лет).	1-5	5-9	9-13	13-17	17-21	Итого
Количество студентов	15	20	45	12	8	100

1. Найти границы, в которых с вероятностью 0,997 заключен средний стаж работы по специальности всех студентов вуза.

2. Найти границы, в которых с вероятностью 0,9708 заключена доля всех студентов вуза, стаж работы которых по специальности не более 9 лет.

3. Каким должен быть объем выборки, чтобы границы, найденные в пункте 1, гарантировать с вероятностью 0,9964?

4. Каким должен быть объем выборки, чтобы границы, найденные в пункте 2, гарантировать с вероятностью 0,996?

5. Найти вероятность того, что средний стаж работы по специальности всех студентов вуза отличается от среднего их стажа в выборки не более чем на 1 год (по абсолютной величине).

6. Найти вероятность того, что доля студентов в вузе, имеющих стаж работы не менее 13 лет отличается от выборочной доли таких же студентов не более чем на 2 года (по абсолютной величине).

15. Экономический анализ производительности труда предприятий отрасли позволил выдвинуть гипотезу о наличии 2 типов предприятий с различной средней величиной показателя производительности труда. Выборочное обследование 42 предприятий 1-й группы дало следующие результаты: средняя производительность труда $\overline{x} =$ 119 деталей. По данным выборочного обследования, на 35 предприятиях 2-й группы средняя производительность труда $\overline{y} =$ 107 деталей. Генеральные дисперсии известны: $D(X)$ = 126,91 (дет.^{2}); $D(Y)$ = 136,1 (дет.^{2}). Считая, что выборки извлечены из нормально распределенных генеральных совокупностей X и Y, на уровне значимости α = 0,05, проверьте, случайно ли полученное различие средних показателей производительности труда в группах или же имеются 2 типа предприятий с различной средней величиной производительности труда.

16. Изобразить область решения неравенства на плоскости:

а) $-\dfrac{\pi}{6} < \arg z < \left|\dfrac{\pi}{4}\right|$; б) $\left|1 < |z+1| < 3{,}5\right|$; в) $\log_2|z-2i| < 1$; г) $\dfrac{\operatorname{Re} z}{z \cdot \bar{z}} \le \dfrac{1}{2}$.

17. Представить значение функции в алгебраической форме:

а) $sh\left(1-\dfrac{\pi i}{3}\right)$; б) $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{-6i}$; в) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-5i\right)$; г) $Arctg\left(\dfrac{3\sqrt{3}-8i}{7}\right)$.

18. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию, если $v = e^x \cos y, f(0) = 1 + i$

19. Вычислить интеграл по данной кривой $\int\limits_L (2\cos z + 1)dz,\quad L: |z| = 1, \operatorname{Im} z > 0$.

20. Вычислить интеграл при помощи интегральной формулы Коши $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}dz$

21. Найти изолированные особые точки функции и определить их тип: $f(z) = \dfrac{\sin 3z - 3\sin z}{z(\sin z - z)}$.

22. Определить область сходимости ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n}{(z+2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2i)^n}{3^n(n^2+1)}$.

23. Найти вычеты в особых точках $f(z) = \dfrac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}$.

24. Вычислить интеграл при помощи теоремы Коши о вычетах $I = \int\limits_{|z|=5} \frac{z^2 dz}{\sin^3 z \cos z}$.

25. Вычислить несобственный интеграл при помощи вычетов $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2 - 2x + 2} dx$.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Пространство элементарных исходов. События на пространстве элементарных исходов (определение, виды событий, операции над событиями). Математические модели и примеры.
2. Вероятность, свойства вероятностей. Конечная схема с неравновозможными исходами. Дискретная схема со счетным числом неравновозможных исходов.
3. Аксиоматическое построение вероятностей. Классическое определение вероятностей.
4. Статистическое и геометрическое определения вероятностей. Вероятность как нормированная мера. Теорема сложения (для совместных и несовместных событий).
5. Условная вероятность (схемы представления, свойства). Теорема умножения. Независимость событий.
6. Полная группа событий, гипотезы. Формулы полной вероятности и Байеса (расчетные формулы и доказательство).
7. Последовательности испытаний. Схема Бернулли, формула Бернулли. Наивероятнейшее число успехов.
8. Формула Пуассона, условия применимости, практические рекомендации. Распределение Пуассона. Погрешность в формуле Пуассона.
9. Локальная и интегральная теорема Лапласа. Свойства функции $\varphi(x)$ и интегральной функции Лапласа. Погрешность теорем Лапласа.
10. Случайные величины. Функции распределения случайной величины и ее свойства. Дискретные случайные величины (ДСВ), ряд распределения. Примеры дискретных распределений. Построение функции распределения ДСВ и ее графика.
11. Случайные величины. Определение непрерывных случайных величин. Плотность распределения случайной величины и ее свойства. Связь плотности распределения и функции распределения случайной величины. Примеры непрерывных распределений.
12. Многомерные случайные величины. Функция распределения случайного вектора ее свойства (доказательство на примере двумерной случайной величины). Дискретная двумерная случайная величина.
13. Многомерные случайные величины. Непрерывные случайные векторы. Плотность распределения случайного вектора и ее свойства (доказательство на примере двумерной случайной величины).
14. Зависимость и независимость компонент случайного вектора. Необходимое и достаточное условие независимости. Условные распределения дискретных и непрерывных случайных величин.
15. Определение закона распределения функции одной случайной величины: $\eta = a\xi + b$, $\eta = \xi^2$, $\eta = \varphi(\xi)$, $\varphi(\xi)$ - строго монотонная функция (определения, теоремы, вывод для соответствующих законов).
16. Распределение функционального преобразования системы случайных величин (основные определения и теоремы): распределение суммы случайных величин дискретного и непрерывного типа.
17. Числовые характеристики положения: математическое ожидание и его свойства, среднее геометрическое, среднее гармоническое, мода, медиана, условное математическое ожидание, функции регрессии.

18. Характеристики вариации: дисперсия и ее свойства, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

19. Моменты случайных величин: начальные, центральные моменты, их свойства. Характеристики формы распределения: коэффициент асимметрии, эксцесс.

20. Стохастическая зависимость. Ковариация пары случайных величин, свойства. Ковариационная матрица случайного вектора, обобщенная дисперсия.

21. Коэффициент корреляции пары случайных величин, свойства. Корреляционная матрица случайного вектора. Коррелированность и независимость.

22. Дискретные распределения: геометрическое распределение, гипергеометрическое распределение, биноминальное и отрицательное биноминальное распределение, распределение Пуассона.

23. Непрерывные распределения: равномерное на отрезке [а, в] распределение, нормальное, многомерное нормальное, экспоненциальное распределение и распределение Вейбулла, распределение Паретто, распределение Коши.

24. Функции от нормально-распределенных случайных величин и порождаемые ими распределения: χ^2-распределение, распределение Стьюдента, распределение Фишера.

25. Комплексные числа. Действия с комплексными числами. Тригонометрическая форма компл. числа. Формула Муавра возведения в степень и извлечения корня.

26. Степенная функция и общая степенная функции

27. Показательная функция и общая показательная функции

28. Логарифмическая функция

29. Тригонометрические функции. Обратные тригонометрические функции Формула Эйлера.

30. Гиперболические функции. Обратные гиперболические функции.

31. Производная функции комплексного переменного. Теоремы о дифференцируемости функции комплексного переменного.

32. Аналитические и гармонические функции, связь между ними.

33. Интеграл функции комплексного переменного, его свойства.

34. Теорема Коши. Интегральная формула Коши, следствия.

35. Ряд Тейлора. Ряд Лорана. Область сходимости ряда Лорана.

36. Изолированные особые точки функции.

37. Вычеты функций в изолированных особых точках. Основная теорема о вычетах.

38. Применение вычетов к вычислению интегралов

39. Применение вычетов в операционном исчислении.

40. Задача приближенного дифференцирования.

41. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на первой интерполяционного формуле Ньютона.

42. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на формуле Стирлинга.

43. Формулы приближенного дифференцирования для равноотстоящих точек, выраженные через значения функции в этих точках.

44. Приближенное интегрирование.

45. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса.

46. Формулы трапеций и Симпсона.

КРИТЕРИИ ЭКЗАМЕНАЦИОННОЙ ОЦЕНКИ

Оценки **«отлично»** заслуживает студент, который всесторонне и глубоко раскрыл содержание поставленных вопросов, показал взаимосвязь теории с практикой, продемонстрировал умение работать с научной литературой, делать теоретические и практические выводы. При этом должны быть полностью освещены оба теоретических вопроса и верно решены практические задания.

Оценки **«хорошо»** заслуживает студент, который обстоятельно владеет материалом, однако не на все вопросы дает глубокие исчерпывающие и аргументированные ответы. При этом должен быть полностью освещён хотя бы один теоретический вопрос и верно решены все практические задания.

Оценки **«удовлетворительно»** заслуживает студент, который в основном владеет материалом, однако поверхностно отвечает на вопросы, допускает существенные неточности. Ответы не отличаются ясностью и глубиной. При этом должен быть полностью освещён хотя бы один теоретический вопрос и верно решено хотя бы одно практическое задание.

Оценки **«неудовлетворительно»** заслуживает студент, который не отвечает требованиям, предъявленным для получения удовлетворительной оценки. При этом, независимо от правильности ответа на теоретические вопросы, если не решены практические задания, студенту также выставляется оценка **«неудовлетворительно»**.

В случае возникновения ситуации, когда ответ студента не соответствует ни одному из вышеперечисленных критериев, преподаватель имеет право задавать студенту ограниченное количество (2 – 3) дополнительных вопросов по билету, допускающих ответ, как в письменной, так и в устной форме (на усмотрение преподавателя) и в зависимости от ответа выставить соответствующую оценку.

ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В процессе преподавания дисциплины используются как классические формы и методы обучения (лекции, практические занятия), так и активные методы обучения, составляющие не менее 20% учебного времени. В том числе: 10% – на компьютерные интерактивные задания при промежуточном и итоговом контроле знаний студентов; 5% - деловые игры при изучении материала практической направленности; 5% - ролевые игры при решении задач применения математических методов в энергетике.

При проведении лекционных занятий преподаватель использует аудиовизуальные, компьютерные и мультимедийные средства обучения, а также демонстрационные и наглядно-иллюстративные (в том числе раздаточные материалы).

Основу технологии обучения с интерактивным подходом для изучения данной технической дисциплины составляют:

- разминки на пройденном и самостоятельно изученном материале (технология: «каждый подсказывает каждому или дополняет, или исправляет каждого»);
- выполнение индивидуальных заданий на практических занятиях *малыми группами* (приобретение навыков сотрудничества, межличностного общения, выработки общего мнения, разрешения разногласий, закрепление соответствующих компетенций, выявление и формирование лидеров в группах).

При организации работы малыми группами (по 2-3 обучающихся) реализуются следующие положения:

- инструкции по выполнению заданий составляются максимально четкими (инструкции должны записываться на доске или на карточках заданий);
- группе предоставляется достаточно времени на выполнение задания (выверенное время, установленное при проведении «обкатки» упражнения, плюс – «премиальный» запас для групп-лидеров, успешно выполнивших задание).

Виды и объем занятий с интерактивными технологиями:

Семестр	Вид заня	Используемые интерактивные	Количество

	тия (Л, Пз)	образовательные технологии	Часов
1	Л	Проекционное оборудование	2 ч
	Пз	Проекционное оборудование; Математический пакет MathCAD Math Soft, Inc.	4 ч
Итого:			6 ч

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература

1. Мышкис, А.Д. Математика для технических вузов [Электронный ресурс]: специальные курсы : учеб. пособие / А. Д. Мышкис. - 3-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2009.- 633 с.
2. Шапкин, А.С. Задачи с решениями по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию [Электронный ресурс] : 129учебное пособие / А.С. Шапкин,. В.А.Шапкин.- М.: Дашков и кО, 2013. – 432 с. – 978-5-394-01943-2. Режим доступа: http:biblioclud.ru/index.php?page=book&id=115811

Дополнительная литература

3. Вентцель, Е.С., Овчаров, Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: Учеб. пособие для студ. втузов/ Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Издат. центр "Академия", 2000. – 464с.
4. Бахвалов, Н. С. Численные методы [Текст] : учеб. пособие для вузов / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков.- 5-е изд. - М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2000. - 632 с. : ил. - (Технический университет) - ISBN 5-93208-043-4.
5. Миллер, Б. М. Теория случайных процессов в примерах и задачах [Текст]:[учеб.пособие] / Б. М. Миллер, А. Р. Панков ; под ред. А. И. Кибзуна. - М. : Физматлит, 2007. - 318 с
6. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики: типовые расчеты [Текст]: учеб. пособие /В.Ф. Чудесенко.- 3-е изд., стер. –СПб.: Лань, 2005. – 127 с.
7. Карасев И.П. Теория функций комплексного переменного: учебник/И.П.Карасев – М.Физматлит, 2008. – 213 с.//www/ biblioclub/ru.
8. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : учеб. пособие: в 2 ч / П. Е. Данко [и др.]. - 6-е изд. - М. : ОНИКС : Мир и Образование, 2007 - . - ISBN 978-5-488-01070-3. Ч. 2. - 2007. - 416 с.

Периодическая литература

Метематика. Сводный том. «Вестник Московского университета». Серия1: Математика. Механика.

Интернет-ресурсы

№	Интернет-ресурс	Краткое описание
1	http://exponenta.ru/	Математический сайт с большим количеством методических материалов по

№	Интернет-ресурс	Краткое описание
		высшей математике и математическим компьютерным пакетам
2	http://fizmatkniga.ru/	Доставка книг (бумажных) по математике и физике
3	http://www.math.ru/	Научно-популярный математический сайт
4	http://www.techlibrary.ru/books.htm	Книги по математике и физике в электронном виде
5	http://allmatematika.ru/	Форум по математике.
6	http://elementy.ru	Энциклопедический сайт
7	http://en.edu.ru/	Портал является составной частью федерального портала "Российское образование". Содержит ресурсы и ссылки на ресурсы по естественнонаучным дисциплинам (физика, математика, химия и биология).
8	http://www.edu.ru/	Федеральный портал «Российское образование»
9	http://ru.wikipedia.org	Энциклопедия «Википедия»
11	http://www.msu.ru	Сайт Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова
12	http://e.library.ru/	Научная электронная библиотека
	http://biblioclub.ru/	Университетская библиотека online
	http://www.e.lanbook.ru/	Электронно-библиотечная система издательства «Лань»