Министерство образования и науки Российской Федерации

Амурский государственный университет

Г.В. Литовка, А.М. Попова, А.В. Павельчук

МАТЕМАТИКА.

ЧАСТЬ II

Учебное пособие

Благовещенск

Издательство АмГУ

2014

ББК 22.1 я73

Л 64

Рекомендовано

учебно-методическим советом университета

Рецензент:

Т.В. Труфанова, доцент кафедры математического анализа и моделирования АмГУ, канд. техн. наук

Литовка Г.В., Попова А.М., Павельчук А.В.

Л 64 Математика. Часть II: Учебное пособие. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2014. – 112 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов инженерно-технических специальностей университетов. Доступность теоретического обоснования методов решения задач, многообразие разобранных примеров помогут студентам при самостоятельной работе по изучению данного раздела математики.

ББК 22.1 я73

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Неопределенный интеграл

Первообразная функция. Понятие неопределенного интеграла.

Основной задачей дифференциального исчисления является нахождение производной или дифференциала данной функции. Интегральное исчисление решает обратную задачу — нахождение самой функции по ее производной или дифференциалу.

Определение. Функция *F(x)* называется первообразной для функции *f(x)* на заданном промежутке, если на этом промежутке функция *F(x)* непрерывна, и в каждой внутренней точке промежутка справедливо равенство $F'(x) = f(x)$.

Следующая теорема позволяет свести нахождение всех первообразных данной функции к отысканию одной их них.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ имеет на промежутке первообразную *F(x)*, то и все функции вида *F(x)+c* , *c=const*, будут для нее первообразными на том же промежутке. Обратно, любая первообразная *Ф(x)* для функции $y = f(x)$ может быть представлена в виде $\Phi(x) = F(x) + c$, где *F(x)*– одна из первообразных функций, а *c* – произвольная постоянная.

Определение. Совокупность всех первообразных для функции $y = f(x)$ на заданном промежутке называется неопределенным интегралом этой функции и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + c$.

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а произведение $f(x)dx$ - подынтегральным выражением.

Свойства неопределенного интеграла

Свойство 1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции

$d(\int f(x)dx) = f(x)dx$, $(\int f(x)dx)' = f(x)$.

Свойство 2. Неопределенный интеграл от производной некоторой функции равен сумме этой функции и некоторой произвольной постоянной:

$\int F'(x)dx = F(x) + c$.

Свойство 3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, *k* – произвольное число.

Свойство 4. Интеграл от алгебраической суммы (разности) двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций

$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Таблица интегралов

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
9. $\int \cos x dx = \sin x + C$
10. $\int \sec^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$
11. $\int \cos ec^2 x dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
12. $\int shx dx = chx + C$
13. $\int chx dx = shx + C$
14. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$
15. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$
16. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
17. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \lambda}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + \lambda}| + C$

Примеры.

1. $\int (6x^3 - 3x + 5)dx = \int (6x^3)dx - \int 3xdx + \int 5xdx = 6\int x^3 dx - -3\int xdx + 5\int dx = 6\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + 5x + c = 3\frac{x^4}{2} - 3\frac{x^2}{2} + 5x + c.$
2. $\int \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \left(\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\right) dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\right) dx = \int x^{\frac{7}{6}} dx - \int x^{\frac{1}{6}} dx = \frac{6}{13} x^{\frac{13}{6}} - \frac{6}{7} x^{\frac{7}{6}} + c.$

3. $\int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = tgx - x + c.$

4. $\int \frac{dx}{x(x-1)} = \int \frac{1+x-x}{x(x-1)} dx = \int \frac{x-(x-1)}{x(x-1)} dx = \int \left(\frac{x}{x(x-1)} - \frac{(x-1)}{x(x-1)}\right) dx =$

$$= \int \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}\right) dx = ln|x-1| - ln|x| + c$$

Интегрирование заменой переменных (подстановкой)

Одним из основных методов интегрирования является *метод замены переменной* (или *метод подстановки*), описываемый следующей формулой:

$$\int f(x)dx = \int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt,$$

где $x = \varphi(t)$ функция, дифференцируемая на рассматриваемом промежутке. Следует отметить, что новую переменную можно не выписывать явно (в таких случаях говорят о *преобразовании функции под знаком дифференциала* или о *введении постоянных и переменных под знак дифференциала*).

Например,

$$dx = \frac{1}{3}d(3x) = \frac{1}{3}d(3x+2).$$

Тогда

$$\int \cos(3x+2)\,dx = \frac{1}{3}\int \cos(3x+2)\,d(3x+2) = \frac{1}{3}\sin(3x+2) + c.$$

Теорема. Пусть $F(x)$ некоторая первообразная для функции $f(x)$. Тогда $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + c$, где $k \neq 0$ и b некоторые числа.

Примеры.

1. $I = \int \cos(t^3)t^2 dt$. Пусть $t^3 = x$, тогда $dx = 3t^2 dt$ или $t^2 dt = dx/3$.

$$I = \int \cos x \frac{dx}{3} = \frac{1}{3}\int \cos x dx = \frac{1}{3}\sin x + C = \frac{1}{3}\sin t^3 + C.$$

2. $I = \int \frac{\ln^2 t + \sqrt{\ln t}}{t} dt$. Пусть $\ln t = x$, тогда $dx = dt/t$.

$$I = \int \left(x^2 + \sqrt{x}\right)dx = \int x^2 dx + \int \sqrt{x}dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{x}^{\,3} + C =$$

$$= \frac{\ln^3 t}{3} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{\ln t}\right)^3 + C.$$

3. $I = \int \mathrm{tg}t dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} dt$. Пусть $x = \cos t$, тогда $dx = -\sin(t)dt$, и

$$I = \int \frac{-dx}{x} = -\int \frac{dx}{x} = -\ln|x| + C = -\ln|\cos t| + C.$$

4. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Пусть $x=\sin(t)$, тогда $dx=\cos(t)dt$, и

$$I = \int \frac{\cos t dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int dt = t + C = \arcsin x + C .$$

Интегрирование по частям

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые на некотором промежутке функции. Тогда $(uv)' = u'v + v'u$.

Отсюда следует $\int (uv)'dx = \int (u'v + v'u)dx = \int u'v\,dx + \int v'u\,dx$

или $\int uv'dx = uv - \int u'v\,dx$.

Отсюда следует формула, которая называется формулой интегрирования по частям:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)\,v(x) - \int v(x)du(x).$$

Приведем примеры применения формулы интегрирования по частям.

Примеры.

1. $I = \int x\cos(x)dx$. Пусть $u = x$; $dv = \cos(x)dx$, тогда $du = dx$; $v = \sin(x)$. Отсюда по формуле интегрирования по частям получается:

$$I = x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx = x\sin(x) + \cos(x) + C.$$

2. $I = \int (x^2 - 3x + 2)\,e^{5x}dx$. Пусть $x^2 - 3x + 2 = u$; $e^{5x}dx = dv$. Тогда $du = (2x - 3)\,dx$; $v = \frac{1}{5}e^{5x}$.

$$I = \frac{1}{5}e^{5x}\left(x^2 - 5x + 2\right) - \frac{1}{5}\int (2x-3)e^{5x}dx .$$

К последнему интегралу применим метод интегрирования по частям, полагая $2x - 3 = u$; $e^{5x}dx = dv$. Отсюда следует: $du = 2dx$; $v = \frac{1}{5}e^{5x}$, и окончательно получаем:

$$I = \frac{1}{5}e^{5x}\left(x^2 - 3x + 2\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}e^{5x}(2x-3) - \frac{1}{5}\int e^{5x}2dx\right) =$$

$$= \frac{1}{5}e^{5x}\left(x^2 - 3x + 2\right) - \frac{1}{25}e^{5x}(2x-3) - \frac{2}{25}e^{5x} + C .$$

3. $I=\int\left(x^5+\sqrt{x}\right)\ln x dx$;

$$\ln x=u;\left(x^5+\sqrt{x}\right)dx=dv;\ \frac{dx}{x}=du;\frac{x^6}{6}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=v;$$

$$I=\ln x\left(\frac{x^6}{6}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)-\int\left(\frac{x^6}{6}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\frac{dx}{x}==\ln x\left(\frac{x^6}{6}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)-\int\frac{x^5}{6}dx-\frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\left(\frac{x^6}{6}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\ln x-\frac{x^6}{36}-\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}+C.$$

Случай 1. Если интеграл представлен в виде $\int x^n f(x)dx$, где $f(x)=e^{ax}$ или $f(x)=\sin(ax)$ или $f(x)=\cos(ax)$, то за $u=x^n$.

Случай 2. Если интеграл представлен в виде $\int x^n f(x)dx$, где $f(x)=\ln(x)$ или $f(x)=arcsin(x)$ или $f(x)=arctg(x)$, то за u, соответственно, принимаем $u=\ln(x)$ или $u=arcsin(x)$ или $u=arctg(x)$.

Пример.

Найти интеграл $\int x^3\cdot\ln x dx$.

Решение. Используя тот же прием интегрирования, что и в примере 6, получим

$$\int x^3\cdot\ln x dx=\left\{\begin{array}{l}u=\ln x,\ du=\frac{1}{x}\cdot dx\\ dv=x^3\cdot dx,\ v=\frac{x^4}{4}\end{array}\right\}=\frac{x^4}{4}\cdot\ln x-\int\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}\cdot\ln x-\frac{1}{4}\int x^3dx=\frac{x^4}{4}\cdot\ln x-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}+C=\frac{x^4}{4}\cdot\ln x-\frac{x^4}{16}+C.$$

Случай 3. Если интеграл представлен в виде $\int e^{ax}f(x)dx$, где $f(x)=\sin(bx)$ или $f(x)=cos(bx)$, то за u принимаем $u=e^{ax}$ и интегрирование по частям осуществляем два раза.

Пример.

Найти интеграл $J = \int 3^x \cdot \cos 5x \cdot dx$.

Решение. Используем дважды формулу интегрирования по частям.

$$J = \int 3^x \cdot \cos 5x \cdot dx = \begin{Bmatrix} u = 3^x, \ du = 3^x \cdot \ln 3 \cdot dx \\ dv = \cos 5x dx, \ v = \dfrac{\sin 5x}{5} \end{Bmatrix} =$$

$$= 3^x \cdot \frac{1}{5} \cdot \sin 5x - \int \frac{1}{5} \cdot \sin 5x \cdot 3^x \cdot \ln 3 dx = \begin{Bmatrix} u = 3^x, \ du = 3^x \cdot \ln 3 dx \\ dv = \sin 5x dx, \ v = -\dfrac{\cos 5x}{5} \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 3^x \cdot \sin 5x - \frac{1}{5} \cdot \ln 3 \cdot \left(3^x \cdot \left(-\frac{\cos 5x}{5} \right) + \int \frac{\cos 5x}{5} \cdot 3^x \cdot \ln 3 dx \right) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 3^x \cdot \sin 5x + \frac{\ln 3}{25} \cdot 3^x \cdot \cos 5x - \frac{\ln^2 3}{25} \cdot \int 3^x \cdot \cos 5x dx.$$

Таким образом, приходим к уравнению с неизвестным интегралом J:

$$J = \frac{1}{5} \cdot 3^x \cdot \sin 5x + \frac{\ln 3}{25} \cdot 3^x \cdot \cos 5x - \frac{\ln^2 3}{25} \cdot J \quad \text{или}$$

$$J + \frac{\ln^2 3}{25} \cdot J = \frac{3^x}{5} \cdot \sin 5x + \frac{\ln 3}{25} \cdot 3^x \cdot \cos 5x,$$

$$\frac{25 + \ln^2 3}{25} \cdot J = \frac{3^x}{25} (5 \sin 5x + \ln 3 \cdot \cos 5x),$$

$$J = \frac{3^x}{25 + \ln^2 3} \cdot (5 \sin 5x + \ln 3 \cdot \cos 5x) + C.$$

Интегрирование рациональных дробей.
Рассмотрим интегралы от простейших дробей:

I. $\int \dfrac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C;$

II. $\int \dfrac{A}{(x-a)^k} dx = \dfrac{A}{1-k} \cdot \dfrac{1}{(x-a)^{k-1}} + C, \quad k \neq 1;$

III. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx;$

IV. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^2}dx,$

где A, B, p, q, a – действительные числа.

Порядок интегрирования рациональных дробей.

1. У неправильной дроби выделить целую часть.
2. Найти все корни знаменателя и разложить на множители.
3. Представить правильную дробь в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами.
4. Найти все неопределенные коэффициенты.
5. Представить интеграл от рациональной дроби в виде суммы интегралов от целой части и от простейших дробей с найденными коэффициентами.
6. Вычислить все интегралы.

Пример. $\int \frac{(x-1)dx}{x^3-3x^2+2x}$

1. Дробь правильная.

2. $x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2)/$

3. $\int \frac{(x-1)dx}{x(x-1)(x-2)}=\int\left(\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x-2}\right)dx,$

$$x+1=A_1(x-1)(x-2)+A_2x(x-2)+A_3x(x-1).$$

4. Находим коэффициенты:

$$x=0 \quad \text{x} \Rightarrow \quad 1=2A_1, \quad A_1=\tfrac{1}{2}.$$
$$x=1 \Rightarrow 2=-A_2, \quad A_2=-2.$$
$$x=2 \Rightarrow 3=2A_3, \quad A_3=\tfrac{3}{2}.$$

5. Подставляем значения в интеграл и находим его значение:

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^3-3x^2+2x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-2} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x| - 2\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x-2| + C.$$

Примеры.

1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$.

Решение. В квадратном трехчлене, содержащемся в знаменателе подынтегральной функции, выделим полный квадрат:

$$x^2-6x+18 = (x^2-2\cdot 3\cdot x+9)+9 = (x-3)^2+3^2.$$

Имеем

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+18} = \int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+3^2} = \{t = x-3\} =$$
$$= \int \frac{dt}{t^2+3^2} = \frac{1}{3}\cdot arctg\frac{t}{3} + C = \frac{1}{3}arctg\frac{x-3}{3} + C.$$

2. Найти интеграл $\int \frac{5x+1}{x^2+4x-1}dx$.

Решение. Выделим в числителе дроби такую линейную функцию, которая равнялась бы производной знаменателя:

$$(x^2+4x-1)' = 2x+4,$$

$$5x+1 = \frac{5}{2}(2x+4) - 10 + 1 = \frac{5}{2}(2x+4) - 9.$$

Имеем

$$\int \frac{5x+1}{x^2+4x-1}\,dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)-9}{x^2+4x-1}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x-1} - 9\cdot\int \frac{dx}{x^2+4x-1} = J.$$

Заметим, что в первом из полученных интегралов $(2x+4)dx = d(x^2+4x-1)$. Введем новую переменную $t = x^2+4x-1$. Во втором интеграле в квадратном трехчлене выделим полный квадрат: $x^2+4x-1 = (x+2)^2-5$, а интеграл сведем к табличному. Тогда

$$J=\frac{5}{2}\int\frac{d(x^2+4x-1)}{x^2+4x-1}-9\cdot\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2-(\sqrt{5})^2}=\{t=x^2+4x-1, z=x+2\}=$$

$$=\frac{5}{2}\int\frac{dt}{t}-9\int\frac{dz}{z^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{5}{2}\ln|t|-9\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{5}}{z+\sqrt{5}}\right|+C=$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\ln|x^2+4x-1|-\frac{9}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{5}}{x+2+\sqrt{5}}\right|+C.$$

При интегрировании рациональных дробей IV типа необходимо воспользоваться так называемой рекуррентной формулой:

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=J_n;$$

$$J_n=\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot J_{n-1}.$$

3. Найти интеграл $\int\frac{x+5}{(x^2+4x+5)^2}\,dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию. Сначала в числителе выделим производную от квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе, далее разобьем интеграл на сумму двух, один из которых легко свести к табличному, а другой найдем по рекуррентной формуле:

$$d(x^2+4x+5)=(2x+4)dx.$$

$$\frac{x+5}{(x^2+4x+5)^2}=\frac{\frac{1}{2}(2x+4)+3}{(x^2+4x+5)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^2}+\frac{3}{(x^2+4x+5)^2}.$$

Имеем

$$\int\frac{x+5}{(x^2+4x+5)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^2}\,dx+\int\frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+4x+5)}{(x^2+4x+5)^2}+3\int\frac{d(x+2)}{((x+2)^2+1)^2}=$$

$$=\{x^2+4x+5=t;\quad x+2=z\}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}+3\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-1}}{-1}+3\cdot\left(\frac{z}{2\cdot1\cdot(z^2+1)}+\frac{2\cdot2-3}{2\cdot2-2}\cdot\int\frac{dz}{z^2+1}\right)=$$

$$= \frac{-1}{2t} + \frac{3z}{2(z^2+1)} + \frac{3}{2} arctgz + C =$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+4x+5)} + \frac{3(x+2)}{2(x^2+4x+5)} + \frac{3}{2} arctg(x+2) + C.$$

Если под знаком интеграла стоит сложная рациональная функция, то с ней предварительно выполняют следующие преобразования:

1) если рациональная дробь неправильная, то сначала представляют ее в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби $\frac{Q(x)}{P(x)}$;

2) многочлен, стоящий в знаменателе рациональной функции, следует разложить на линейные и квадратичные множители в зависимости от того, каковы корни этого многочлена

$$P(x) = (x-a)^m \cdot \ldots \cdot (x^2 + px + q)^n \cdot \ldots,$$

где квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней, а p и q – действительные числа;

3) правильную рациональную дробь $\frac{Q(x)}{P(x)}$ (степень многочлена *P(x)* меньше степени многочлена *Q(x)*) раскладывают на простейшие дроби:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_m}{x-a} + \ldots +$$

$$+ \frac{B_1 x + C_1}{(x^2+px+q)^n} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \ldots + \frac{B_n x + C_n}{x^2+px+q};$$

4) вычисляют неопределенные коэффициенты $A_1, A_2, \ldots,\ B_1, C_1, \ldots,\ B_n, C_n$.

В конечном итоге интегрирование рациональной функции сводится к отысканию интеграла от суммы многочлена и простейших рациональных дробей.

Любую правильную рациональную дробь можно представить в виде простейших дробей. Поясним это на примерах.

Примеры.

1. $\frac{5x^2+14}{(x-1)(x+3)(x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x+5}$.

Дробь правильная, многочлен в знаменателе уже разложен на простые множители, корни действительные и различные. Каждому действительному некратному корню многочлена в знаменателе соответствует простейшая дробь I типа.

2. $\dfrac{7x^2+8x-1}{(x+3)^4}=\dfrac{A}{(x+3)^4}+\dfrac{B}{(x+3)^3}+\dfrac{C}{(x+3)^2}+\dfrac{D}{x+3}.$

Дробь правильная, многочлен в знаменателе имеет один корень кратности 4.

3. $\dfrac{5x^2+2x+4}{(x^2+x+1)(x^2+x+5)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+5}.$

Дробь правильная, множители знаменателя неприводимые, т.к. $D_1=1-4<0,\ \ D_2=1-20<0,$ многочлен 4-ой степени в знаменателе имеет две пары комплексно-сопряженных различных корней.

4. $\dfrac{3x^2+x-1}{(x^2+x+1)^2}=\dfrac{Ax+B}{(x^2+x+1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}.$

Дробь правильная, многочлен в знаменателе имеет комплексные корни, является кратной парой комплексно-сопряженных корней.

5. $$\frac{3x^4+7x-1}{(x+2)x^2(x^2+x+5)^2(x^2-x+2)}=$$
$$=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{Dx+F}{(x^2+x+5)^2}+\frac{Cx+E}{x^2+x+5}+\frac{Lx+M}{x^2-x+2}.$$

Коэффициенты *A, B, C, D, …* в разложении правильных рациональных дробей на простейшие дроби можно вычислить методом неопределенных коэффициентов. Суть его в следующем. Приводя дроби к общему знаменателю, получим равные многочлены в числителе справа и слева. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов.

5. Найти $\int\dfrac{x^2+2x+5}{x+2}dx.$

Решение. Подынтегральная функция не является правильной рациональной дробью.

Выполним преобразования:

$$\frac{x^2+2x+5}{x+2}=\frac{x(x+2)+5}{x+2}=x+\frac{5}{x+2}.$$

$$\int\frac{x^2+2x+5}{x+2}dx=\int(x+\frac{5}{x+2})dx=\frac{x^2}{2}+5\ln|x+2|+C.$$

6. Найти $\int\frac{7x-3}{x^3-x^2+x-1}dx$.

Решение. Под знаком интеграла стоит правильная рациональная дробь. Разложим ее на простейшие:

$$\frac{7x-3}{x^3-x^2+x-1}=\frac{7x-3}{(x^3-x^2)+(x-1)}=\frac{7x-3}{x^2(x-1)+(x-1)}=$$

$$=\frac{7x-3}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}=\frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Сравним четвертую дробь и последнюю. Два многочлена считаются равными, если будут равны коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$7x-3=(Ax+B)\cdot(x-1)+C(x^2+1)$$

$$7x-3=(A+C)x^2+(-A+B)x+C-B.$$

$$\left.\begin{array}{ll} x^2 & A+C=0, \\ x & -A+B=7, \\ x^0 & C-B=-3 \end{array}\right\}$$

Складывая все три равенства, получим

$2C=4$ или $C=2$.

Из первого уравнения системы $A=-C$ или $A=-2$.

Из второго уравнения системы получим

$B=7+A$ или $B=7-2=5$.

Следовательно,

$$\frac{7x-3}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{-2x+5}{x^2+1}+\frac{2}{x-1}.$$

В результате получаем

$$\int \frac{7x-3}{x^3-x^2+x-1}\,dx = \int\left(\frac{-2x+5}{x^2+1}+\frac{2}{x-1}\right)dx =$$

$$= -\int \frac{2x}{x^2+1}dx + 5\int \frac{dx}{x^2+1} + 2\ln|x-1| =$$

$$= -\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + 5arctgx + 2\ln|x-1| =$$

$$= -\ln(x^2+1) + 5arctgx + 2\ln|x-1| + C =$$

$$= 5arctgx + \ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + C.$$

8. Найти $\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}dx$.

Решение. Под знаком интеграла стоит неправильная рациональная дробь. Представим ее в виде суммы целой части и правильной дроби. Предварительно поделим эту дробь «уголком»

$$\begin{array}{r|l} x^5+1 & x^4-8x^2+16 \\ \hline -\ x^5-8x^3+16x & x \\ \hline 8x^3-16x+1 & \end{array}$$

Получим

$$\frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16} = x + \frac{8x^3-16x+1}{x^4-8x^2+16} = x + \frac{8x^3-16x+1}{(x^2-4)^2} =$$

$$= x + \frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2} = x + \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+2}.$$

$$\frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+2} =$$

$$= \frac{A(x+2)^2 + B(x-2)(x+2)^2 + C(x-2)^2 + D(x+2)(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)^2}.$$

Дроби с равными знаменателями будут равны, если равны и их числители.

$$8x^3-16x+1=A(x+2)^2+B(x-2)(x+2)^2+C(x-2)^2+D(x+2)(x-2)^2.$$

Коэффициенты *A, B, C, D* найдем комбинированным методом: *A* и *C* – методом подстановки, а *B* и *D* – методом неопределенных коэффициентов.

Пусть $x=-2$, тогда $8\cdot(-2)^3+16\cdot 2+1=A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 16+D\cdot 0$ или

$$16C=-31; \qquad C=-\frac{31}{16}.$$

Пусть $x=2$, тогда

$$8\cdot 2^3-16\cdot 2+1=16A+B\cdot 0+C\cdot 16+D\cdot 0 \quad \text{или}$$

$$16A=33; \qquad A=\frac{33}{16}.$$

Преобразуем выражение

$$A(x-2)^2+B(x-2)(x+2)^2+C(x-2)^2+D(x-2)^2(x+2)=$$

$$=A(x^2-4x+4)+B(x^3+2x^2-4x+8)+C(x^2-4x+4)+$$
$$+D(x^3-2x^2-4x+8)=(B+D)x^3+(A+2B+C-2D)x^2+$$
$$+(-4A-4B-4C-4D)x+(4A+8A+4C+8D)$$

или

$$8x^3-16x+1=(B+D)x^3+(A+2B+C-2D)x^2+$$
$$+(-4A-4B-4C-4D)x+4A+8B+4C+8D.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в последнем равенстве, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных *A*, *B*, *C* и *D*.

$$\left.\begin{array}{ll} x^3 & B+D=8, \\ x^2 & A+2B+C-2D=0, \\ x & -4A-4B-4C-4D=-16, \\ x^0 & 4A+8B+4C+8D=1 \end{array}\right\}$$

Учитывая, что $A=\frac{33}{16}$, $C=-\frac{31}{16}$, воспользуемся только первым и вторым уравнениями системы линейных уравнений

$$\begin{cases} D = 8 - B, \\ \dfrac{33}{16} + 2B - \dfrac{31}{16} - 2(8 - B) = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} D = \dfrac{129}{32}, \\ B = \dfrac{127}{32}. \end{cases}$$

Далее найдем исходный интеграл

$$\int \frac{x^5 + 1}{x^4 - 8x^2 + 16} dx =$$

$$= \int \left(x + \frac{33}{16} \cdot \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{127}{32} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{31}{16} \cdot \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{129}{32} \cdot \frac{1}{x+2}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{33}{16(x-2)} + \frac{127}{32} \ln|x-2| + \frac{31}{16(x+2)} + \frac{129}{32} \cdot \frac{1}{x+2} + C.$$

9. Найти $\int \dfrac{x^3}{(x+5)^5}\, dx$.

Решение. Под знаком интеграла стоит правильная рациональная дробь и можно было бы найти интеграл, представив эту дробь в виде суммы простейших дробей. Однако нахождение интеграла можно значительно упростить, если произвести замену переменной: $x + 5 = t;\ \ x = t - 5;\ \ dx = dt$.

Тогда

$$\int \frac{x^3}{(x+5)^5}\, dx = \int \frac{(t-5)^3}{t^6} dx = \int \frac{t^3 - 15t^2 + 75t - 125}{t^6} dt =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t^3} - 15 \cdot \frac{1}{t^4} + 75 \cdot \frac{1}{t^5} - 125 \cdot \frac{1}{t^6}\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2} + \frac{15}{-3t^3} + \frac{75}{-4t^4} - \frac{125}{-5t^5} + C =$$

$$= -\frac{1}{2(x+5)^2} - \frac{5}{(x+5)^3} - \frac{75}{4(x+5)^4} + \frac{25}{(x+5)^5} + C.$$

Интегрирование некоторых выражений, содержащих радикалы

Не от всякой иррациональной функции интеграл выражается через элементарные функции. В дальнейшем будем стремиться отыскивать такие подстановки $t = \omega(x)$, которые привели бы подынтегральное выражение к рациональному виду. Если при этом функция $\omega(x)$ выражается через

элементарные функции, то интеграл представится в конечном виде и в функции от x.

Назовем этот прием *методом рационализации подынтегрального выражения.*

1. *Интегралы вида* $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$, где R означает рациональную функцию от двух аргументов, $m \in N, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ – постоянные.

Полагаем, $t=\omega(x)=\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$, $t^m=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, $x=\varphi(x)=\frac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\gamma t^m}$.

Интеграл приводится к виду $\int R(\varphi(t),t)\cdot\varphi'(t)dt$, здесь $R, \varphi(t), \varphi'(t)$ – рациональные функции.

Вычислив этот интеграл по правилам интегрирования рациональных функций, вернемся к старой переменной, подставив $t=\omega(x)$.

К интегралу вида (1) сводятся более общие интегралы

$$\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^r, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^s, \ldots\right)dx,$$

где показатели r, s,… – рациональны.

Нужно привести эти показатели к общему знаменателю m, чтобы под знаком интеграла получить рациональную функцию от x и радикала $\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$.

Пример. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$.

Решение:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{x+1}=\left\{\begin{array}{l} t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}, \\ x=\frac{t^3+1}{t^3-1},\ dx=\frac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2}\end{array}\right\}=$$

$$= \int \frac{t \cdot (-6t^2)dt}{\left(\frac{t^3+1}{t^3-1}+1\right)(t^3-1)^2} = \int \frac{-3dt}{t^3-1} = \int \frac{-3dt}{(t-1)(t^2+t+1)} =$$

$$= \int \left(-\frac{1}{t-1} + \frac{t+2}{t^2+t+1} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} \right| + \sqrt{3} arctg \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C,$$

где $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

2. *Интегралы вида* $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Такие интегралы сводятся к табличному, если в квадратном трехчлене выделить полный квадрат.

Пример. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}$.

Решение. Преобразуем квадратный трехчлен

$x^2-6x+8 = (x-3)^2-1; \quad x-3=t, \quad x=t+3, \quad dx=dt$.

Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+8}} = \int \frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2-1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \left\{ \begin{matrix} табличный \\ интеграл\ 19 \end{matrix} \right\}$$
$$= \ln|t+\sqrt{t^2-1}| + C = \ln|x-3+\sqrt{x^2-6x+8}| + C.$$

3. *Интегралы вида* $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ **.**

Для отыскания этого интеграла в числителе необходимо выделить такую линейную функцию, которая равнялась бы производной квадратного трехчлена. Далее разбиваем интеграл на сумму двух, один из которых табличный, а второй рассмотрен в предыдущем пункте.

Пример. Найти $\int \frac{7x+2}{\sqrt{-x^2+4x+5}} dx$.

Решение. Выделим в числителе производную подкоренного выражения

$(-x^2+4x+5)' = -2x+4$.

$$7x+2=-\frac{7}{2}(-2x+4-4)+2=-\frac{7}{2}(-2x+4)+16.$$

Тогда

$$\int\frac{7x+2}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx=\int\frac{-7/2(-2x+4)+16}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx=$$

$$=-\frac{7}{2}\int\frac{(-2x+4)dx}{-x^2+4x+5}+16\cdot\int\frac{dx}{-x^2+4x+5}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}(-2x+4)dx=d(-x^2+4x+5)\\-x^2+4x+5=-(x^2-4x+4-4)+5=-(x-2)^2+9\end{matrix}\right\}=$$

$$=-\frac{7}{2}\int\frac{\mathrm{d}(-\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}+5)}{\sqrt{-\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}+5}}+16\cdot\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{x}-2)}{\sqrt{9-(\mathrm{x}-2)^2}}=$$

$$=\left\{-x^2+4x+5=t;\ \ x-2=z\right\}=$$

$$=-\frac{7}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}+16\int\frac{dz}{\sqrt{9-z^2}}=-7\sqrt{t}+16\arcsin\frac{z}{3}+C=$$

$$=-7\sqrt{-x^2+4x+5}+16\arcsin\frac{x-2}{3}+C.$$

4. *Интегралы вида* $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,\ (a\neq 0)$

Эти интегралы приводятся к интегралу от рациональной функции нового переменного с помощью следующих подстановок Эйлера.

I –я подстановка Эйлера. Если $a>0$, то полагаем

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\cdot x+t$.

Для определенности рассмотрим случай

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\cdot x+t$. Тогда

$ax^2+bx+c=ax^2+2\sqrt{a}\cdot x\cdot t+t^2,\quad x=\dfrac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\cdot t}$, то

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\cdot x+t=\sqrt{a}\cdot\dfrac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}+t$ – рациональная функция от *t*, dx также выражается рационально через *t*.

II-я подстановка Эйлера. Если $c>0$, то полагаем

$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$.

Для определенности считаем, что перед с стоит знак «+». Тогда

$$ax^2+bx+c=x^2t^2+2xt\sqrt{c}+c,\quad x=\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}.$$

При этом *dx* и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ выражаются рационально через *t*, поэтому $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ сводится к интегралу рациональной функции зависящей от *t*.

Пример. Найти интеграл $\int\frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx.$

Решение. Применим 2-ю подстановку Эйлера

$$\sqrt{1+x+x^2}=xt+1;\ 1+x+x^2=x^2t^2+2xt+1,$$

$$x=\frac{2t-1}{1-t^2},\quad dx=\frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}dt;$$

$$\sqrt{1+x+x^2}=xt+1=\frac{t^2-t+1}{1-t^2},\quad 1-\sqrt{1+x+x^2}=\frac{-2t^2+1}{1-t^2}.$$

$$\int\frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx=\int\frac{(-2t^2+t)^2(1-t^2)^2\cdot(1-t^2)(2t^2-2t+2)}{(1-t^2)^2(2t-1)^2(t^2-t+1)(1-t^2)^2}dt=$$

$$=2\int\frac{t^2}{1-t^2}dt=-2\int\frac{-t^2+1-1}{1-t^2}dt=-2\int\left(1+\frac{2}{1-t^2}\right)dt=$$

$$=-2t+\ln\left|\frac{t+1}{1-t}\right|+C,$$

где $t=\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$.

III-я подстановка Эйлера. Квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет действительные корни α и β. Тогда $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ сводится к интегралу от рациональной функции от t с помощью замены

$a\neq 0\ \ \sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t$ или

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t, \quad x = \frac{\alpha\beta - at^2}{a - t^2}.$$

Интегрирование биномиальных дифференциалов

Биномиальными называются дифференциалы вида $x^m(a+bx^n)^p\,dx$,

где *m,n,p* – рациональные числа, *a,b* – постоянные величины.

Рассмотрим интеграл $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$.

1) n – целое число. Данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции от *t*, если положить $t = \sqrt[\lambda]{x}$, λ – наименьшее общее кратное знаменателей дробей *m* и *n*.

2) $\frac{m+1}{n}$ – целое число, тогда рационализации подынтегрального выражения можно достигнуть, используя замену

$t = \sqrt[\nu]{a+bx^n}$, ν – знаменатель дроби р.

3) $\frac{m+1}{n} + p$ – целое.

Замена $t = \sqrt[\nu]{ax^{-n}+b}$, ν – знаменатель дроби *p*, позволяет рационализировать подынтегральную функцию в исходном интеграле.

Подстановки 1-3 называют *подстановками Чебышева*.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{1+x^5}}$.

Решение: $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{1+x^5}} = \int x^{-1}(1+x^5)^{-\frac{1}{3}}\,dx$.

$m=-1, n=5, p=-\frac{1}{3}; \quad \nu = 3.$

Применим II подстановку Чебышева, т.к. $\frac{m+1}{n} = 0$ – целое число

$t = \sqrt[3]{1+x^5}, \quad 1+x^5 = t^3, \quad x = (t^3-1)^{1/5}; \quad dx = \frac{3}{5}t^2(t^3-1)^{-\frac{4}{5}}\,dt.$

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt[3]{1+x^5}}=\frac{3}{5}\int\frac{tdt}{t^3-1}=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt=$$

$$=\left\{(t^2+t+1)'=2t+1,\quad t-1=\frac{1}{2}(2t+1)-\frac{3}{2}\right\}=\frac{1}{5}\ln|t-1|-\frac{1}{10}\int\frac{dt}{t^2+t+1}=$$

$$=\frac{1}{5}\ln|t-1|-\frac{1}{10}\int\frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1}+\frac{3}{10}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{5}\ln|t-1|-\frac{1}{10}\ln(t^2+t+1)+\frac{3}{10}\cdot\frac{1\cdot 2}{\sqrt{3}}arctg\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{10}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}+\frac{\sqrt{3}}{5}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$.

Решение. Подынтегральную функцию можно записать в виде $x^{-3}\cdot(2-x^3)^{-\frac{1}{3}}$. Здесь $m=-3;\ n=3;\ p=-\frac{1}{3}$ и $\frac{(m+1)}{n}+p=\frac{(-3+1)}{3}-\frac{1}{3}=-1$ – целое число. Поэтому имеет место третий случай интегрируемости дифференциального бинома. Произведем замену переменной: $2x^{-3}-1=t^3$, тогда $d(2x^{-3}-1)=dt^3$ или $-6x^{-4}dx=3t^3dt$ или $x^{-4}dx=-\frac{1}{2}t^2dt$.

Преобразуем исходный интеграл

$$\int\frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[3]{2-x^3}}=\int x^{-3}\cdot(2-x^3)^{-\frac{1}{3}}dx=\int x^{-3}\cdot\left(x^3(2x^{-3}-1)\right)^{-\frac{1}{3}}dx=$$

$$=\int x^{-3}\cdot x^{-1}\cdot(2x^{-3}-1)^{-\frac{1}{3}}dx=\int(2x^{-3}-1)^{-\frac{1}{3}}x^{-4}dx=$$

$$=\int(t^3)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(-\frac{1}{2}t^2\right)dt=-\frac{1}{2}\int tdt=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2}+C=-\frac{1}{4}t^2+C=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{(2x^{-3}-1)^2}+C=-\frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{2}{x^3}-1\right)^2}+C=-\frac{\sqrt[3]{(2-x^3)^2}}{4x^2}+C.$$

Интегрирование некоторых выражений, содержащих тригонометрические функции

1. ***Интегралы вида*** $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Применим так называемую универсальную тригонометрическую подстановку $tg\frac{x}{2}=t$, $x=2arctgt$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$,

$$\cos x=\frac{1-tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

С помощью указанной подстановки интеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ сводится к интегралу от рациональной функции

$$\int R(\sin x, \cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример. Найти интеграл $\int\frac{dx}{3\sin x+2}$.

Решение:

$$\int\frac{dx}{3\sin x+2}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{6t}{1+t^2}+2}=\int\frac{dt}{t^2+3t+1}=\int\frac{d\left(t+\frac{3}{2}\right)}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}}\ln\left|\frac{t+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{t+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|+C=\frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{2t+3-\sqrt{5}}{2t+3+\sqrt{5}}\right|+C=$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{2tg\frac{x}{2}+3-\sqrt{5}}{2tg\frac{x}{2}+3+\sqrt{5}}\right|+C.$$

2. ***Интегралы вида*** $\int R(\sin x)\cdot\cos xdx$ или $\int R(\cos x)\cdot\sin xdx$.

а) $\int R(\sin x)\cdot\cos xdx$ приводится к $\int R(t)dt$ с помощью подстановки $\sin x=t, \cos xdx=dt.$

б) $\int R(\cos x)\cdot \sin x dx$ приводится к $\int(-R(t)dt)$, если $\cos x = t$, $\sin x dx = -dt$.

3. *Интегралы вида* $\int R(tgx)dx, \quad \int R(\sin^{2k} x, \cos^{2m} x)\,dx$.

Если подынтегральная функция зависит только от *tgx* или только от *sinx* и *cosx*, входящих в четных степенях, то применяется подстановка

$$tgx = t, \;\; x = arctgx, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2}; \quad \sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

в результате которой получим интеграл от рациональной функции:

Пример. $\int \frac{dx}{3+\sin^2 x}$

Решение:

$$\int \frac{dx}{3+\sin^2 x} = \{tgx = t\} = \int \frac{dt}{\left(3+\frac{t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{4t^2+3} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} arctg \frac{t}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} arctg\left(\frac{2tgx}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

4. *Интегралы вида* $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

а) *m* и *n* таковы, что по крайней мере одно из них нечетное число. Пусть для определенности n-нечетное. Тогда полагаем $n = 2p+1$

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx = \int sim^m x \cdot \cos^{2p} x \cdot \cos x dx =$$
$$= \int \sin^m x \cdot (1-\sin^2 x)^p d\sin x = \{\sin x = t\} = \int t^m \cdot (1-t^2)^p dt = \int R(t)dt.$$

б) *m* и *n* – неотрицательные, четные числа. Полагаем $m = 2p$, $n = 2q$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x); \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx = \int (\sin^2 x)^p \cdot (\cos^2 x)^q dx =$$
$$= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^p \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^q dx.$$

Возводя в степень и раскрывая скобки, получим интегралы, содержащие $\cos 2x$ как в четных, так и нечетных степенях. Интегралы с нечетными степенями *cos2x* интегрируются как в случае а). Четные показатели степеней *cos2x* снова понижаем по выше указанным формулам. Продолжая так поступать, получим в конце концов слагаемые вида $\int \cos kxdx$, которые легко интегрируются.

Пример. Найти интеграл $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 xdx$.

Решение:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 xdx = \int \sin^2 x \cdot (1-\sin^2 x)\, d\sin x = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Пример. Найти интеграл $\int \sin^2 3x \cdot \cos^2 3xdx$.

Решение:

$$\int \sin^2 3x \cdot \cos^2 3xdx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 6x)(1+\cos 6x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 6x)dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\cdot \int \frac{1+\cos 12x}{2}\, dx =$$
$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\cdot \frac{\sin(12x)}{12} + C = \frac{1}{8}x - \frac{1}{96}\sin(12x) + C.$$

в) *m* и *n* – четные числа, но хотя бы одно из них отрицательное.

В этом случае следует сделать замену $tgx = t$ (или $ctgx = t$).

Пример. Найти интеграл $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$.

Решение: $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \int \frac{\sin^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^2 x \cdot \cos^4 x}dx =$

$$= \int tg^2 x \cdot (tg^2 x + 1)^2 dx = \left\{ \begin{array}{l} tgx = t;\ x = arctg\, t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int t^2 (1+t^2)^2 \frac{dt}{1+t^2} =$$
$$= \int t^2 (1+t^2)dt = \int (t^2 + t^4)dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^5 x}{5} + C.$$

5. *Интегралы вида* $\int \cos mx \cdot \sin nxdx; \int \cos mx \cdot \cos nxdx; \int \sin mx \cdot \sin nxdx$ $(m \neq n)$.

Чтобы проинтегрировать данные функции, достаточно применить тригонометрические формулы:

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]$$

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]$$

Тогда

$$\int \sin mx \cdot \cos nxdx = \frac{1}{2}\int [\sin(m+n)x + \sin(m-n)]dx =$$

$$= -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

Аналогично вычисляются два других интеграла.

Пример. Найти интеграл $\int \sin 4x \cdot \cos 6xdx$.

Решение:

$$\int \sin 4x \cdot \cos 6xdx = \frac{1}{2}\int (\sin 10x - \sin 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\cos 10x}{10} + \frac{\cos 2x}{2}\right) + C = -\frac{\cos 10x}{20} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

Определенный интеграл

Определение и свойства определенного интеграла

Пусть на сегменте [a,b] задана функция *f(x).* Выполним следующие операции:

1. С помощью точек деления $x_1 < x_2 < ... < x_{n-1}$ разобьем [a,b] на *n* малых сегментов: $[x_0, x_1]; [x_1, x_2]; ...; [x_{k-1}, x_k]; ...[x_{n-1}, x_n]; \ x_0 = a, \ x_n = b$.

2. На каждом малом сегменте выберем произвольную точку ξ_k, $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$, составим произведение $f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$.

3. Составим так называемую интегральную сумму всех таких произведений $J_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$.

Определенный интеграл есть число, равное пределу, к которому стремится интегральная сумма J_n, когда $\max \Delta x_k$ стремится к нулю.

Таким образом, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$.

Числа *a* и *b* называются соответственно нижним и верхним пределами (границами) интегрирования, *f(x)* – подынтегральной функцией, а интервал [a,b] – областью интегрирования.

Функция *f(x)*, для которой существует конечный $\int_a^b f(x)dx$, называется интегрируемой на промежутке [a,b], причем указанный предел не зависит ни от способа разбиения сегмента [a,b] на части, ни от выбора точек ξ_k в каждой из них.

В теореме существования определенного интеграла указывается на то, что всякая непрерывная на промежутке [a,b] функция *f(x)* является интегрируемой на нем.

Впредь подынтегральную функцию будем считать непрерывной.

Без подробных объяснений приведем некоторые свойства определенных интегралов.

1. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

2. $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx, \quad c = const.$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in (a,b)$.

4. Если $f(x) \geq 0$ на [a,b], то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

5. Если $f(x) \leq g(x)$ для $\forall x \in [a,b]$, то

   а) $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$;

б) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$

6. Теорема о среднем: $\exists \xi \in [a,b]$,

$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$, где $f(x)$ – непрерывна на [a,b].

7. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

8. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

Методы вычисления определенного интеграла

Вычисление определенных интегралов как пределов интегральных сумм связано в большими трудностями даже в тех случаях, когда подынтегральные функции являются простыми. Поэтому естественно возникает задача: найти практически удобный метод вычисления определенных интегралов.

Ниже будет сформулирована теорема Ньютона-Лейбница, позволяющая сводить вычисления определенного интеграла к неопределенному.

Теорема Ньютона-Лейбница

Пусть *f(x)* непрерывна на сегменте [a,b] и *F(x)* – одна из ее первообразных, тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример. Вычислить $\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx$.

Решение. Используя формулу Ньютона-Лейбница, получим

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(arctg\,1 - arctg\,0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{8}.$$

Методы замены переменной в определенном интеграле

1. Необходимо вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$,

где *f(x)* непрерывная функция на [a,b].

Перейдем к новой переменной *t*, полагая $x = \varphi(t)$. Пусть $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$, кроме того, при изменении *t* от α до β значения функции $\varphi(t)$ не выходят за пределы сегмента [a,b]. Предположим, что функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке [α,β], то справедлива следующая формула замены переменной

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример. Вычислить $\int_2^3 \sqrt{4x - x^2 - 3}\, dx.$

Решение. Преобразуем подкоренное выражение, выделив полный квадрат

$$4x - x^2 - 3 = 1 - (x^2 - 4x + 4) = 1 - (x-2)^2.$$

Введем новую переменную: $x - 2 = \sin t,$ тогда $x = 2 + \sin t,$

$dx = d(2 + \sin t)$ или $dx = (2 + \sin t)'dt = \cos t\, dt.$

Найдем пределы интегрирования новой переменной t:

если $x_1 = 2$, то $0 = \sin t \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0$

если $x_2 = 3$, то $1 = \sin t \quad \Rightarrow \quad t_2 = \dfrac{\pi}{2}.$

Воспользуемся формулой замены переменной в определенном интеграле, получим

$$\int_2^3 \sqrt{4x - x^2 - 3}dx = \int_2^3 \sqrt{1 - (x-2)^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1 + \cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\sin 0}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Заметим, что в данном случае при применении формулы замены переменной отпадает необходимость возвращения к старой переменной x по сравнению с неопределенным интегралом. Это вполне объяснимо, ибо определенный интеграл есть некоторое постоянное число, в то время как неопределенный интеграл от той же самой функции есть некоторая функция.

2. Часто вместо замены переменной $x=\varphi(t)$ употребляют обратную замену переменной $t=g(x)$. На конкретном примере покажем, как это делается.

Пример. Вычислить $\int_1^e \frac{dx}{x(5+\ln x)}$.

Решение. Пусть $t=\ln x$, тогда $\frac{1}{x}dx=d\ln x=dt.$

Если $x_1=1,$ то $t_1=\ln 1=0,$ если $x_2=e$, то $t_2=\ln e=1.$

Следовательно,

$$\int_1^e \frac{dx}{x(5+\ln x)}=\int_1^e \frac{d(\ln x)}{5+\ln x}=\int_0^1 \frac{dt}{5+t}=\ln|t+5|\Big|_0^1=\ln 6-\ln 5=$$

$$=\ln\frac{6}{5}=\ln 1{,}2.$$

Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – непрерывные функции вместе со своими первыми производными на [a,b], тогда справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b udv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b vdu.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_1^2 x^2\ln x dx$.

Решение. Применим полученную формулу

$$\int_1^2 x^2\ln x dx=\left\{\begin{array}{l} u=\ln x,\ du=\frac{1}{x}dx \\ dv=x^2dx,\ v=\frac{x^3}{3}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{x^3}{3}\cdot\ln x\Big|_1^2-\int_1^2\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=\left(\frac{8}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\cdot\ln 1\right)-\frac{1}{3}\int_1^2 x^2dx=$$

$$=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{8}{3}\ln 2-\left(\frac{1}{9}\cdot 8-\frac{1}{9}\cdot 1\right)=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}.$$

Несобственные интегралы

Определение определенного интеграла, его свойства и методы интегрирования рассматривались в предположении, что промежуток интегрирования [a,b] конечен и функция *f(x)* непрерывна на нем.

Иногда приходится отказываться от одного или обоих этих предположений. В этом случае мы приходим к понятию несобственного интеграла.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную на бесконечном промежутке $[a; +\infty)$.

Несобственным интегралом от функции *f(x)* по промежутку $[a; +\infty)$ называется $\lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_a^A f(x)dx$:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)dx .$$

Если указанный предел существует и конечен, то несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Если $f(x) > 0$ на $[a, +\infty)$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx < \infty$, то данный интеграл представляет собой площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямой $x = a$ и бесконечным интервалом $[a; +\infty)$.

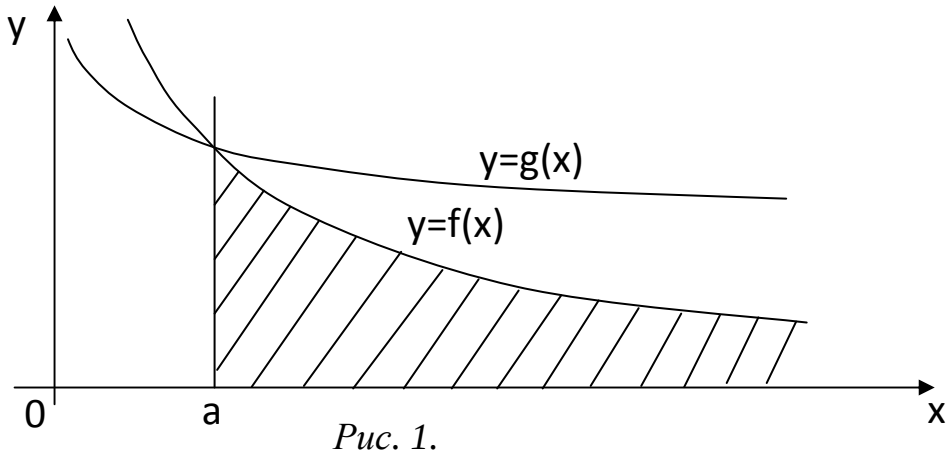


Рис. 1.

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty; b]$: $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{B\to-\infty}\int\limits_{B}^{b} f(x)dx,$

а на интервале $(-\infty; +\infty)$ определяется формулой

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$ где с – любое действительное число.

Если сравнить две криволинейные трапеции на рис. 1, то конечность или бесконечность их соответствующих несобственных интегралов зависит от скорости убывания функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ при $x \to +\infty$.

Так, например, $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

В этом легко убедиться, вычислив $\int\limits_{1}^{A} \frac{1}{x^{\alpha}}dx$, если $A \to +\infty$.

Если $f(x) = \frac{1}{x}$, то $\int\limits_{1}^{A} \frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_{1}^{A} = \ln A - \ln 1 = \ln A \to +\infty$ при $A \to \infty$,

поэтому $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ – расходится, следовательно, и площадь соответствующей криволинейной трапеции бесконечна.

$$\int\limits_{1}^{A} \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_{1}^{A} = -\frac{1}{A} + 1$$

$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{A}\right) = 1$ – несобственный интеграл сходящийся, следовательно, площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 1$ и бесконечным промежутком $[1; +\infty)$, является конечной и равна 1.

Пример. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot e^{x}dx$.

Решение. Воспользуемся определением несобственного интеграла с бесконечным нижним пределом интегрирования и далее – формулой интегрирования по частям

$$\int_{-\infty}^{0} x\cdot e^x dx = \lim_{\beta\to-\infty}\int_{\beta}^{0} x\cdot e^x dx = \left\{\begin{matrix} u = x, \quad du = dx \\ dv = e^x dx, \;\; v = e^x \end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{\beta\to-\infty}\left(x\cdot e^x\Big|_{\beta}^{0} - \int_{\beta}^{0} e^x dx\right) = \lim_{\beta\to-\infty}(x\cdot e^x - e^x)\Big|_{\beta}^{0} =$$

$$= \lim_{\beta\to-\infty}(0-\beta\cdot e^{\beta} - e^0 + e^{\beta}) = \lim_{\beta\to-\infty}\left(-\frac{\beta}{e^{-\beta}} - 1 + \frac{1}{e^{-\beta}}\right) = -1.$$

Несобственный интеграл сходится.

Пример. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$.

Решение. Воспользуемся определением несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования. Полагаем $c = -2$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5} = \lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{-2}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5} + \lim_{A\to+\infty}\int_{-2}^{A}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5} =$$

$$= \lim_{B\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{(x+2)}{\sqrt{5}}\Big|_{B}^{-2} + \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{(x+2)}{\sqrt{5}}\Big|_{-2}^{A} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{B\to-\infty}\left(arctg0 - arctg\frac{B+2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{A\to+\infty}\left(arctg\frac{A+2}{\sqrt{5}} - arctg0\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(0+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\pi.$$

Признак сравнения. Пусть в промежутке $[a;+\infty)$ функции *f(x)* и *g(x)* непрерывны и $0 \le f(x) \le g(x)$. Если $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$. Если интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то и $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ также расходится.

Замечание. Аналогичное утверждение верно для несобственных интегралов и по другим бесконечным пределам интегрирования.

Пример. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_{1}^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{(x^2+3)^4}}$.

Решение. Проведем сравнительный анализ подынтегральной функции при $x \to +\infty$.

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^4}} < \frac{x}{\sqrt{x^8}} = \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3} \quad (1 \le x < +\infty).$$

Но $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ сходится, т.к. $\alpha = 3$. Следовательно, по признаку сравнения сходится и данный интеграл.

Несобственные интегралы от неограниченной функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет разрыв II рода на [a,b] либо в точках *a* и *b*, либо в точке $c \in (a,b)$, тогда несобственные интегралы от разрывной функции определяются следующим образом:

1) $x = a$ – точка разрыва, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$;

2) $x = b$ – точка разрыва, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$,

3) $x = c,\ c \in (a,b)$, c – точка разрыва, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$

Если указанные пределы существуют и конечны, то несобственные интегралы называются сходящимися, в противном случае – расходящимися.

Признак сравнения. Пусть функции *f(x)* и *g(x)* в промежутках [a,b) непрерывны, а в точке $x = b$ имеют разрыв II рода; кроме того $0 \le f(x) \le g(x)$. Если $\int\limits_a^b g(x)$ сходится, то сходится $\int\limits_a^b f(x)dx$. Если $\int\limits_a^b f(x)$ расходится, то расходится $\int\limits_a^b g(x)dx$.

Пример. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Решение. Функция $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ в точке $x = 1$ имеет разрыв II рода, поэтому

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^3 \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-1}\right)\Bigg|_0^{1-\varepsilon} +$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-1}\right)\Bigg|_{1+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{1-\varepsilon-1}+\frac{1}{-1}\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{3-1}+\frac{1}{1+\varepsilon-1}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{\varepsilon}\right)=\infty+\infty=\infty$$

Интеграл расходящийся.

Пример. Исследовать на сходимость несобственный интеграл от неограниченной функции

$$\int_0^1 \frac{2x+chx}{\sqrt[4]{x^2+shx}}dx.$$

Решение. При $x=0$ знаменатель функции обращается в 0, а числитель равен 1, следовательно, $x=0$ – точка разрыва II рода. Во всех остальных точках промежутка (0;1] подынтегральная функция непрерывна.

Заметим также, что $(2x+chx)dx = d(x^2+shx)$,

$$\int \frac{2x+chx}{\sqrt[4]{x^2+shx}}dx = \int (x^2+shx)^{-\frac{1}{4}}\, d(x^2+shx) = \{x^2+shx=t\} =$$

$$=\int t^{-\frac{1}{4}}dt = \frac{4t^{3/4}}{3}+C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^2+shx}+C.$$

Используя определение несобственного интеграла от неограниченной функции, а также формулу Ньютона-Лейбница получим

$$\int_0^1 \frac{2x+chx}{\sqrt[4]{x^2+shx}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{2x+chx}{\sqrt[4]{x^2+shx}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^2+shx}\Bigg|_\varepsilon^1 =$$

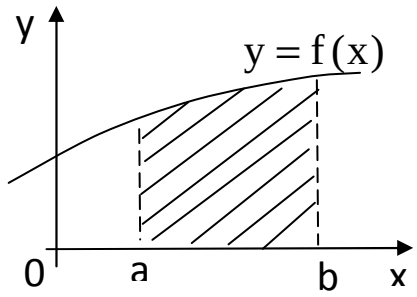
$$=\frac{4}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[4]{1+sh1}-\sqrt[4]{\varepsilon^2+sh\varepsilon}\right)=\frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{1+sh1}.$$

Интеграл сходящийся.

Приложения определенного интеграла

Вычисление площади плоской фигуры в декартовых координатах

Если задана непрерывная функция $y=f(x)$ на [a,b], $f(x)>0$, то определенный интеграл с геометрической точки зрения представляет собой площадь так называемой, криволинейной трапеции (рис. 2).



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Рис. 2.

Пусть криволинейная трапеция с основанием [a,b] ограничена снизу кривой $y = f(x)$ (рис. 3), то из соображений симметрии видим, что

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

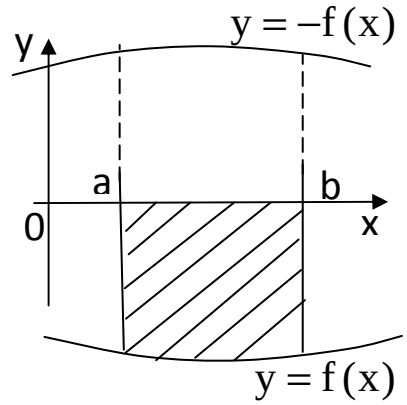


Рис. 3.

В некоторых случаях, чтобы вычислить площадь искомой фигуры, необходимо разбить ее на сумму или разность двух или более криволинейных трапеций и применить формулы (рис. 4 и 5)

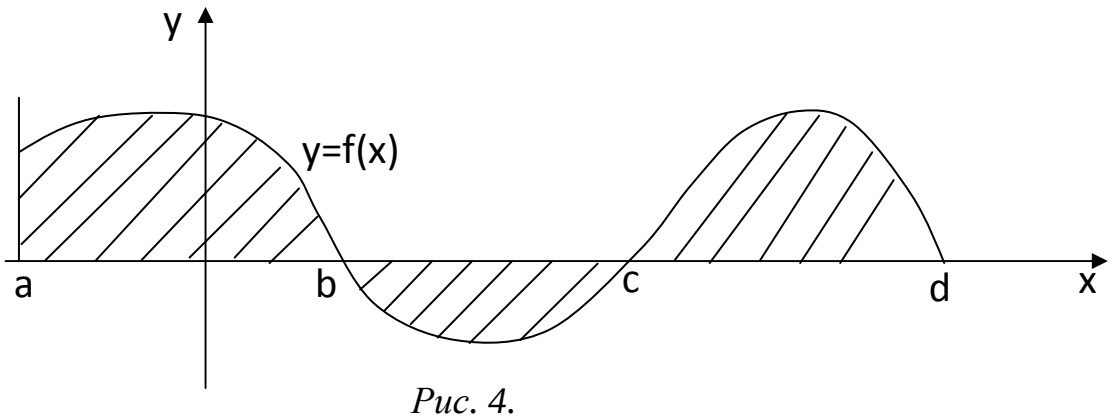
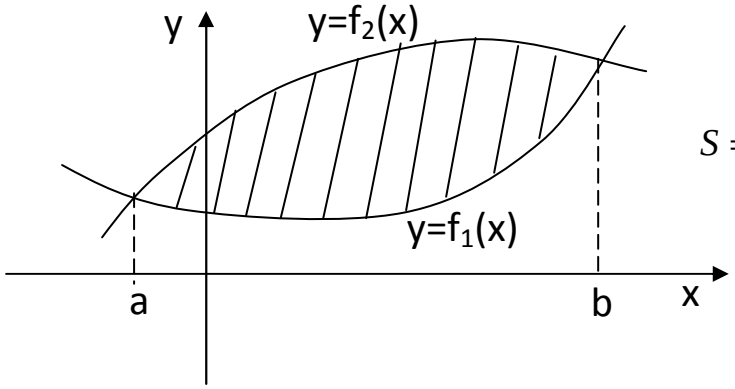


Рис. 4.

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx$$



$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

Рис. 5.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $y = -x$.

Решение. $y = 2x - x^2$ – парабола. Найдем ее вершину и точки пересечения с осями координат.

$y' = 2 - 2x$; $y' = 0$ или $2 - 2x = 0$, $x = 1$.

Если $x_0 = 1$, то $y_0 = 2 - 1 = 1$. $M_0(1;1)$ – вершина параболы.

$y = 0$ или $2x - x^2 = 0$ или $x(2 - x) = 0$ $x = 0$; $x = 2$.

$y = -x$ – прямая линия.

Найдем абсциссы точек пересечения прямой и параболы:

$2x - x^2 = -x$ или $x^2 - 3x = 0$ $x_1 = 0$; $x_2 = 3$.

Для вычисления площади заштрихованной области воспользуемся формулой

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x))dx =$$

$$= \int_0^3 (3x - x^2)dx = \left(3 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \ (кв.\ ед.).$$

Пример. Вычислить площадь двух частей, на которые круг $x^2+y^2=8$ разделен параболой $y^2=2x$.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 7)

$x^2+y^2=8$ – окружность с центром в начале координат и радиусом $R=\sqrt{8}$.

$y^2=2x$ – парабола, имеющая вершину в т. O(0,0)

Найдем точки пересечения параболы и окружности:

$$\begin{cases} y^2=8-x^2 \\ y^2=2x \end{cases} \Rightarrow \quad 8-x^2=2x \quad \Rightarrow \begin{matrix} x^2+2x-8=0 \\ x_1=-4; x_2=2 \end{matrix}$$

$x=-4$ – не удовлетворяет условию $y^2=2x$.

Если $x=2$, то $y^2=4$ или $y_1=-2,\ y_2=2.$

Найдем площадь заштрихованной области по формуле, в которой изменены переменные интегрирования:

$$S=\int_{y_1}^{y_2}(g_2(y)-g_1(y))dy.$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x=\sqrt{8-y^2};$$

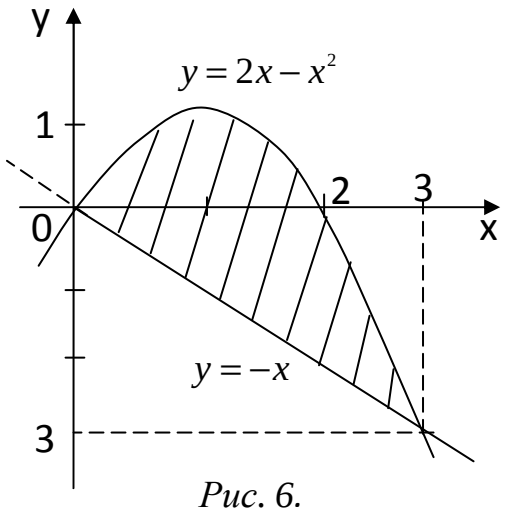


Рис. 6.

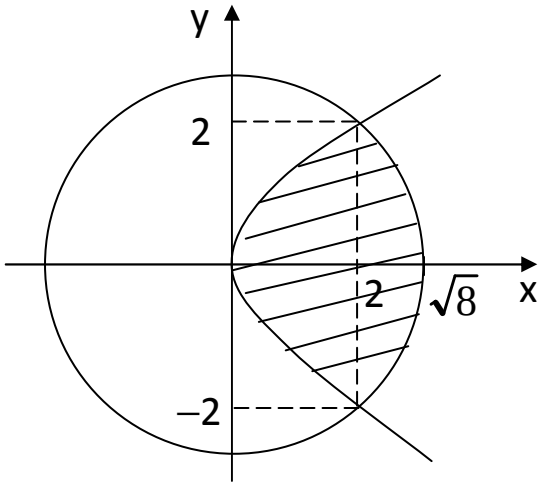


Рис. 7.

$$\begin{cases} y^2=2x \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x=\frac{y^2}{2}.$$

$$s_1 = \int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-y^2} - \frac{y^2}{2}\right)dy = 2\int_{0}^{2}\left(\sqrt{8-y^2} - \frac{y^2}{2}\right)dy \quad (=)$$

$$\left\{\begin{array}{l} y = \sqrt{8}\sin t; \quad dy = \sqrt{8}\cos t\, dt \\ \textit{Если } \mathrm{y} = 0, \text{ то } \mathrm{t} = 0 \\ \textit{Если } \mathrm{y} = 2, \text{ то } 2 = \sqrt{8}\,\mathrm{sint},\ \mathrm{sint} = \dfrac{\sqrt{2}}{2};\ t = \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right\}$$

$$(=) 2\int_{0}^{2}\sqrt{8-y^2}\,dy - \frac{y^3}{3}\Big|_0^2 = 2\int_{0}^{2}\sqrt{8-y^2}\,dy - \frac{8}{3} =$$

$$= 2\int_{0}^{\pi/4}\sqrt{8-8\sin^2 t}\cdot\sqrt{8}\cos t dt - \frac{8}{3} = 16\int_{0}^{\pi/4}\cos^2 t dt - \frac{8}{3} =$$

$$= 8\int_{0}^{\pi/4}(1+\cos 2t)dt - \frac{8}{3} = 8\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/4} - \frac{8}{3} = 8\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}.$$

Найдем площадь второй (незаштрихованной) части, на которую круг разделен параболой

$$S_{кр.} = \pi R^2; \quad S_{кр.} = \pi\cdot(\sqrt{8})^2 = 8\pi$$

$$S_2 = S_{кр.} - S_1 = 8\pi - \left(2\pi + \frac{4}{3}\right) = 6\pi - \frac{4}{3}.$$

Вычисление площади фигуры, ограниченной линией, заданной параметрически

Пусть кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$ и $y = b$ и отрезком [a,b] оси OX, выражается формулой

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)dt,$$

где $t_1 \le t \le t_2,\ y(t) \ge 0,\ t_1$ и t_2 определяются из условий $a = x(t_1),\ b = x(t_2)$.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной осью OX и одной аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} 0 \le t \le 2\pi.$$

Решение. Воспользуемся формулой. Предварительно найдем $x'(t)$:

$$x'(t) = (a(t - \sin t))' = a(1 - \cos t).$$

$$S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t) \cdot a(1-\cos t)dt = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = a^2 \cdot \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2} \cdot 2\pi - 2\sin 2\pi + \frac{1}{4}\sin 4\pi\right) - 0 = 3a^2\pi \text{ (кв.ед.)}$$

Вычисление площади плоской фигуры в полярных координатах

В полярных координатах положение точки на плоскости $M(\varphi, r)$ определяется двумя координатами: полярным радиусом $r(r \geq 0)$ и полярным углом φ. Связь между декартовыми координатами (x,y) и полярными (φ, r) осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \ .$$

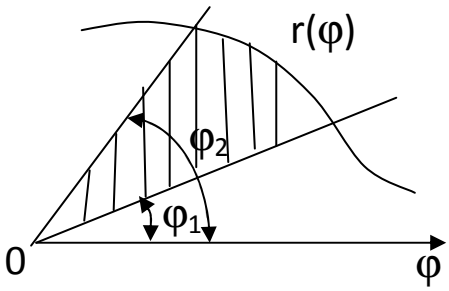


Рис. 8.

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой $r = r(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi_1 = \alpha$ и $\varphi_2 = \beta$ $(\alpha < \beta)$ (рис.8), выражается интегралом

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi.$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля $r = 2 + \cos\varphi$.

Решение. Воспользуемся формулой $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$. Чтобы найти пределы интегрирования α и β, необходимо построить чертеж кривой

$r = 2 + \cos\varphi$ в полярных координатах. Результаты вычислений занесем в табл. 1.

Таблица 1

φ	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1
$r = 2 + \cos\varphi$	3	$2+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$2+\frac{\sqrt{2}}{2}$	2,5	2	1,5	$2-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$2-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Так как функция $\cos\varphi$ – четная, то график функции $r = 2 + \cos\varphi$ строим симметрично относительно горизонтальной оси для значений углов из промежутка $\varphi \in (180^o, 360^o]$. Для построения графика функции при $\varphi \in [0; 180^o)$ проводим полярную ось *r*; на лучах, составляющих с осью *r* углы, значение которых указано в табл. 1, откладываем соответствующее расстояние, затем точки последовательно соединяем. Получаем замкнутую кривую, называемую улиткой Паскаля (рис. 9).

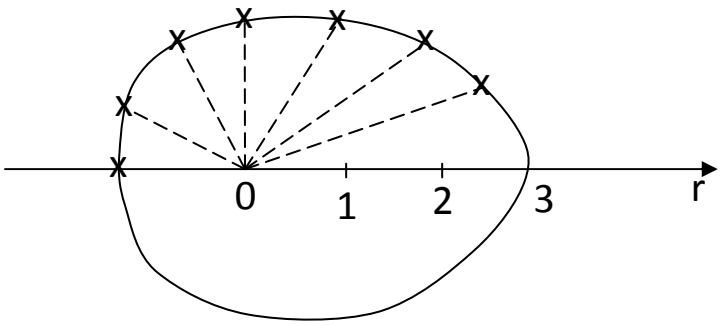


Рис. 9.

Площадь искомой фигуры равна

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(4 + 4\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(4{,}5\varphi + 4\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 4{,}5\pi \quad (\textit{кв.ед.})$$

Вычисление длины дуги плоской кривой

Пусть функция f(x) непрерывно дифференцируема на [a,b], тогда длина дуги кривой $y = f(x)$ на указанном промежутке вычисляется по формуле:

$$\mathrm{L} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \sqrt{1 + (\mathrm{f}'(\mathrm{x}))^2}\, dx .$$

Если кривая гладкая и задана параметрически, то длина дуги этой кривой при $t_1 \le t \le t_2$ вычисляется по формуле:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt .$$

Если гладкая кривая задана в полярных координатах $r = r(\varphi)$ и $\alpha \le \varphi \le \beta$, то длина ее дуги равна

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi .$$

Пример. Вычислить длину дуги развертки окружности

$$\begin{cases} x = a(\cos t - t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi .$$

Решение. В нашем случае кривая задана параметрически. Воспользуемся формулой, предварительно находим производные $x'(t)$ и $y'(t)$.

$$x'(t) = a(\cos t + t\sin t)' = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t$$

$$y'(t) = a(\sin t - t\cos t)' = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2t^2\cos^2 t + a^2t^2\sin^2 t}\; dt = \int_0^{2\pi} a \cdot \sqrt{t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} t\,dt = a \cdot \frac{t^2}{2}\bigg|_0^{2\pi} = a \cdot \frac{4\pi^2}{2} = 2a\pi^2 \text{ (ед.длины).}$$

Пример. Найти длину дуги кривой $r = 3 \cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Кривая $y = 3 \cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}$ задана в полярных координатах. Воспользуемся формулой. Находим $r'(\varphi)$

$$r' = \left(3 \cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}\right)' = 3 \cdot e^{\frac{3\varphi}{4}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4} \cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}.$$

$$r^2 + (r')^2 = 9 \cdot \left(r^{\frac{3\varphi}{4}}\right)^2 + \frac{81}{16} \cdot \left(r^{\frac{3\varphi}{4}}\right)^2 = \frac{225}{16} \cdot \left(r^{\frac{3\varphi}{4}}\right)^2$$

$$L = \int_0^{\pi/3} \sqrt{\frac{225}{16} \cdot \left(r^{\frac{3\varphi}{4}}\right)^2}\, d\varphi = \frac{15}{4} \int_0^{\pi/3} e^{\frac{3}{4}\varphi} d\varphi = \frac{15}{4} \cdot \frac{4}{3} e^{\frac{3}{4}\varphi} \Big|_0^{\pi/3} =$$

$$= 5 \cdot e^{\frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{3}} - 5e^0 = 5 \cdot (e^{\pi/4} - 1) \text{ (ед.длины).}$$

Вычисление объема тел вращения

Предположим, что площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси OX, может быть выражена функцией от x: $S = S(x)$ при $x \in [a,b]$, тогда объем тела, заключенный между перпендикулярными оси OX плоскостями $x = a$ и $x = b$, находится по формуле

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Если криволинейную трапецию (рис.10) вращать вокруг оси OX, то объем тела вращения будет равен

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Если плоская область, ограниченная кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, вращается вокруг оси OX, то

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx, \qquad (0 \le f_1(x) \le f_2(x))$$

Аналогично можно записать формулы для вычисления объемов тел вращения вокруг оси OY: $V_y = \pi \int_c^d x^2(y)dy$, $V_y = 2\pi \int_c^d x \cdot y(x)dx$.

Если кривые, ограничивающие плоскую область заданы в параметрическом виде, то к формулам следует применить соответствующие замены переменной.

Если криволинейный сектор вращать вокруг полярной оси, то

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi .$$

Пример. Вычислить объем тела, полученного при вращении дуги кривой $y = chx$, $0 \le x \le 1$ вокруг оси OX.

Решение. Данная кривая $y = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ называется цепной линией. График ее изображен на рис. 10. Объем тела вращения (рис. 11) вычислим по формуле (11)

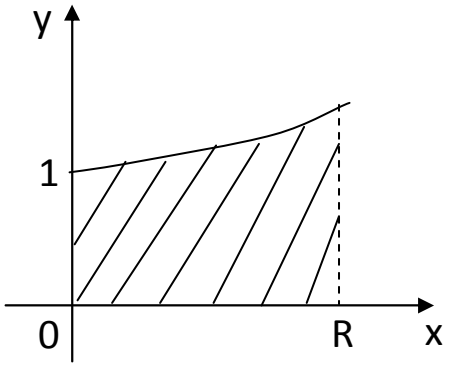


Рис. 10.

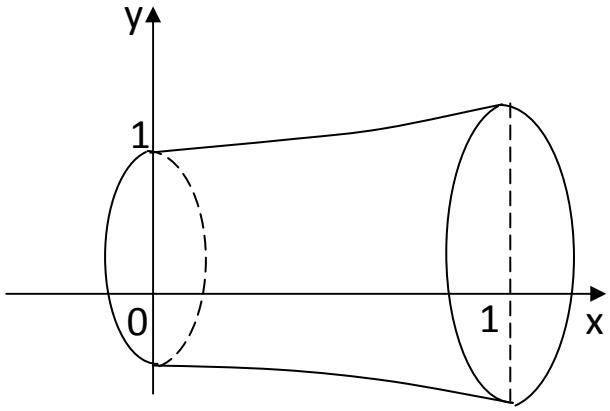


Рис. 11.

$$V_X = \pi\int_0^1 ch^2 x dx = \pi\int_0^1 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\int_0^1 (e^{2x} + 2\cdot e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x})dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^1 (e^{2x} + 2 + e^{-2x})dx = \frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{e^2}{2} + 2 - \frac{e^{-2}}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\left(\frac{e^0}{2} + 0 - \frac{e^0}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\left(2 + \frac{e^2 - e^{-2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}(2 - sh2).$$

Пример. Найти объем параболоида вращения, радиус основания которого равен R, а высота – H.

Решение. Искомый параболоид вращения с указанными параметрами получится, если будем вращать вокруг оси OY параболу $y = kx^2$, $0 \le y \le H$ (рис.12, 13), где параметр k легко вычислить исходя из данного условия.

Если $x = R$, то $y = H$, поэтому

$$H = kR^2 \Rightarrow k = \frac{H}{R^2} \Rightarrow y = \frac{H}{R^2} \cdot x^2 .$$

Далее воспользуемся формулой

$$V_y = \pi \cdot \int_0^H x^2(y)dy .$$

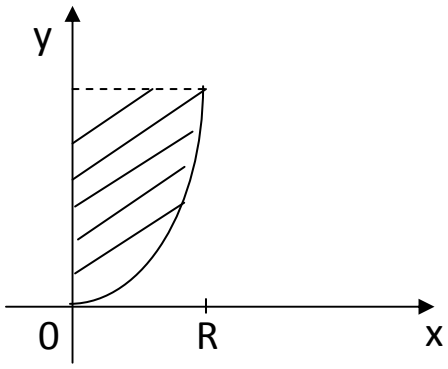


Рис. 12.

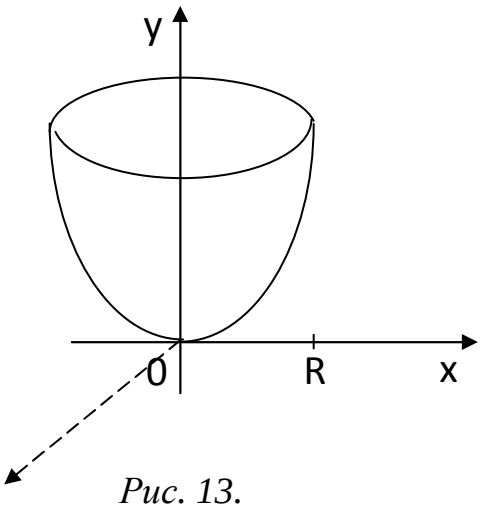


Рис. 13.

Если $y = \frac{H}{R^2} \cdot x^2$, то $x^2 = \frac{R^2}{H} \cdot y$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^H \frac{R^2}{H} \cdot ydy = \pi \cdot \frac{R^2}{H} \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^H = \frac{\pi \cdot R^2}{H} \cdot \frac{H^2}{2} = \frac{1}{2}\pi R^2 H \ (\text{ед}^3).$$

Пример. Найти объем тела вращения кривой $x = 3\cos t$, $y = 4\sin t$ вокруг оси OX.

Решение. Данная кривая задана в параметрическом виде – это эллипс (рис. 14). Искомой фигурой вращения является эллипсоид. Найдем V_X по формуле

$$V_X = \pi \int_a^b y^2(x)dx.$$

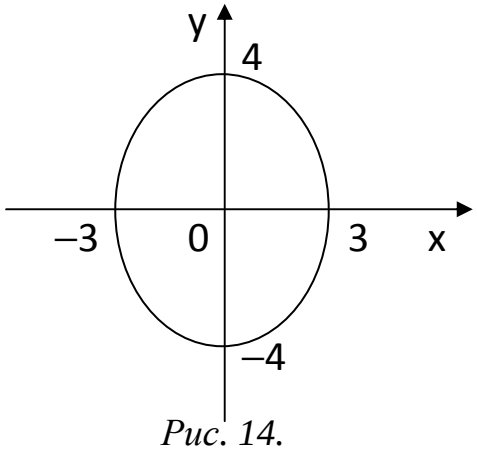


Рис. 14.

Если $x = -3$, то $3\cos t = -3$, $\cos t = -1$, $t_1 = \pi$.

Если $x = 3$, то $3\cos t = 3$, $\cos t = 1$, $t_2 = 0$.

$$V_X = \pi \int_{-3}^{3} y^2 dx = \pi \int_{\pi}^{0} (4\sin t)^2 d(3\cos t) = \pi \cdot 16 \cdot 3 \cdot \int_{\pi}^{0} (\sin t)^2 d(\cos t) =$$

$$= 48\pi\int_{\pi}^{0}(1-\cos^2 t)d(\cos t) = 48\pi\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_{\pi}^{0} =$$

$$= 48\pi\left(-1+\frac{1}{3}\right) - 48\pi\left(\cos\pi - \frac{\cos^3\pi}{3}\right) = 48\pi\cdot\frac{2}{3} - 48\pi\left(-1+\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot 48\pi = 64\pi \text{ (куб.ед.).}$$

Вычисление площади поверхностей тел вращения

Площадь поверхности, образованной вращением гладкой кривой AB вокруг оси OX, равна

$Q_X = 2\pi\int_A^B |y|\,d\ell$, где $d\ell$ – дифференциал дуги кривой.

В зависимости от задания кривой – явное, в параметрическом виде или в полярных координатах – указанную формулу можно расписать так:

$$Q_X = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

$$Q_X = 2\pi\int_a^b y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

$$Q_X = 2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\varphi\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

Пример. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX дуги кривой $3y - x^3 = 0,\ 0\le x\le 1.$

Решение. $3y - x^3 = 0$ или $y = \frac{1}{3}x^3,\ y' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$

Воспользуемся формулой

$$Q_X = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{3}x^3\cdot\sqrt{1+(x^2)^2}\,dx = \frac{2\pi}{3\cdot 4}\int_0^1 (1+x^4)^{\frac{1}{2}}d(1+x^4) =$$

$$= \frac{\pi}{6}\cdot\frac{2}{3}(1+x^4)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{9}\pi(2^{\frac{3}{2}}-1) = \frac{2}{9}\pi(2\sqrt{2}-1).$$

С помощью определенного интеграла можно вычислить и многие другие геометрические и физические характеристики фигур: статические

моменты и моменты инерции плоских фигур, координаты центра тяжести дуг кривых и плоских фигур, работу, давление и пр.

Задание 1. Вычислить интеграл:

а) $\int\left(x^5+\frac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x^2}-7\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}}$; в) $\int\frac{x^4}{\sin^2 x^5}dx$;

г) $\int 3^{2-7x}dx$; д) $\int\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$; е) $\int e^x\cdot\sin e^x dx$;

ж) $\int\frac{x}{\sqrt{4-x^4}}dx$; з) $\int\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}}dx$; и) $\int\frac{\sin 5x}{4-\cos^2 5x}dx$;

к) $\int x\cdot\operatorname{tg}x^2 dx$; л) $\int\frac{3^x}{9^x+4}dx$; м) $\int x^2\cdot\cos x\,dx$;

н) $\int\arccos x\,dx$; о) $\int\frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x}dx$; п) $\int\frac{x^6}{x^2-x+1}dx$;

р) $\int\frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}$; с) $\int\frac{3xdx}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt[4]{3x^2-2}}$; т) $\int\cos 3x\cos 5x dx$;

у) $\int\sin^4 x\,dx$; ф) $\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$;

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}$; б) $\int\limits_0^{4}\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2$ и $y=2-x^2$;

б) длину дуги кривой:

$$\begin{cases}x=3(t-\sin t)\\ y=3(1-\cos t)\end{cases}\qquad 0\le t\le\pi;$$

в) объем тела, полученного вращением фигуры $y=\sin x;\ \ y=0;\ \ 0\le x\le\pi$, вокруг оси Ox.

Контрольная работа

Вариант 1.

Задание 1. Вычислить интегралы:

а) $\int\left(x^2-2x+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$; в) $\int\frac{x^2}{\left(1+3x^3\right)^2}dx$;

г) $\int\frac{x}{1+3x^2}dx$; д) $\int\frac{\cos x}{1-2\sin x}dx$; е) $\int e^{-x^2}xdx$;

ж) $\int\sin 2x\,dx$; з) $\int\left(\cos\frac{x}{3}+1\right)dx$; и) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$;

к) $\int \frac{3^x}{3^{2x}+1}dx$; л) $\int \frac{dx}{x^2-2x+4}$; м) $\int xe^{-2x}\,dx$;

н) $\int x^2 \ln x\,dx$; о) $\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2}dx$; п) $\int \frac{x^4+2}{x^3+3x}dx$;

р) $\int \frac{dx}{1+3\cos x}$; с) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$; т) $\int \sin x\cos 2x dx$;

у) $\int \cos^2 x\,dx$; ф) $\int \left(e^x+2\right)^3 dx$.

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной параболами: $y=\frac{x^2}{2}-x+1$ и $y=-\frac{x^2}{2}+3x+6$;

б) длину дуги кривой: $y=\ln x$ от точки с абсциссой $x_1=\frac{3}{4}$ до точки $x_2=2{,}4$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси *OY* фигуры, ограниченной гиперболой $y=\frac{6}{x}$, осью *OY* и прямыми $y=1$ и $y=6$.

Вариант 2.

Задание 1. Вычислить интегралы:

а) $\int\left(x^4-\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x^3}-11\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$; в) $\int \frac{xdx}{\left(5x^2+1\right)^2}$;

г) $\int 7^x\sqrt{3\cdot 7^x+4}dx$; д) $\int \frac{x^2}{1+3x^3}dx$; е) $\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+4}dx$;

ж) $\int \sin 5x\,dx$; з) $\int \frac{dx}{1+3x^2}$; и) $\int tg3x\,dx$;

к) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}$; л) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x-3}$; м) $\int (x+3)e^{2x}dx$;

н) $\int x\arccos x\,dx$; о) $\int \frac{3x^2-1}{x^3-x}dx$; п) $\int \frac{x^3+1}{x^2-4}dx$;

р) $\int \frac{dx}{2-2\sin x}$; с) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[4]{3x+1}}$; т) $\int \cos 3x\sin 2x dx$;

у) $\int \sin^4 x\cdot\cos x^5\,dx$; ф) $\int \sqrt{e^x+1}dx$.

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}}$; б) $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^2+4}$.

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, заключенной между кривой $y = 4 - x^2$ и осью Ox;

б) длину дуги кривой $y = 1 - \ln\cos x$ в пределах от $x_1 = 0$ до $x_2 = \frac{\pi}{4}$;

в) объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривыми $y = \frac{2}{1+x^2}$.

Вариант 3.

Задание 1. Вычислить интегралы:

а) $\int\left(x^2 - \sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{x} - 3\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$; в) $\int \frac{x^2}{\left(1-4x^3\right)^2}dx$;

г) $\int \frac{x\,dx}{x^2+5}$; д) $\int \frac{\cos 3x}{1+\sin 3x}dx$; е) $\int e^{-2x^2}\cdot x dx$;

ж) $\int a^{3x}\,dx$; з) $\int (2+\sin 2x)dx$; и) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$;

к) $\int 2^x tg\,2^x\,dx$; л) $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx$; м) $\int xe^x dx$;

н) $\int x \arcsin 5x\,dx$; о) $\int \frac{x^2+2x-2}{x^3-9x}dx$; п) $\int \frac{x^3+1}{x^3-2x}dx$;

р) $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$; с) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}dx$; т) $\int \cos 4x \cdot \cos 5x\,dx$;

у) $\int \sin^3 x\,dx$; ф) $\int\left(e^x - 4\right)^2 dx$.

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$; б) $\int_0^1 \ln x dx$.

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной линией $y = x^2 - 5$, осью Ox и осью Oy $(y < 0)$;

б) длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}(x-3)\sqrt{x}$ между точками пересечения её с Ox;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y = 3x^2 + 1$ и прямой $y = 3x + 7$.

Вариант 4.

Задание 1. Вычислить интегралы:

а) $\int \left(1 - 2\sqrt[3]{x} + \frac{7}{x^4}\right) dx;$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}};$

в) $\int \frac{x dx}{\left(3+x^2\right)^3};$

г) $\int \frac{arctg\,2x}{1+4x^2} dx;$

д) $\int \frac{x^2}{1+4x^3} dx;$

е) $\int \frac{e^x}{1-2e^x} dx;$

ж) $\int e^{-x^3} x^2 dx;$

з) $\int \sin 2x\, dx;$

и) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x};$

к) $\int \frac{x\,dx}{\sin x^2};$

л) $\int \frac{dx}{5+4x^2};$

м) $\int (x+2)\cos 5x\, dx;$

н) $\int \arcsin 4x\, dx;$

о) $\int \frac{x-3}{x^3+8} dx;$

п) $\int \frac{x^3-2}{x^3+2x^2+x} dx;$

р) $\int \frac{dx}{2+\sin x};$

с) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}} dx;$

т) $\int \sin x \cdot \cos 3x\, dx;$

у) $\int \cos^4 x\, dx;$

ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+e^x}}.$

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}};$

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11}.$

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^2 - 4$ и прямыми $y = 0$, $x = -1$ $(x \geq -1)$;

б) длину одной арки циклоиды: $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$;

в) объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{1}{4}x^2$, прямой $x = 4$ и осью Ox.

Вариант 5.

Задание 1. Вычислить интегралы:

а) $\int \left(x^4 - \frac{1}{2}x + \sqrt[3]{3x} \right) dx;$ б) $\int \frac{x dx}{\left(1 + x^2\right)^5};$ в) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^3}};$

г) $\int \frac{dx}{x + 3};$ д) $\int \frac{\cos x}{1 + 3\sin x} dx;$ е) $\int e^{2x} dx;$

ж) $\int 2^{-x^2} x dx;$ з) $\int (1 - \sin 3x) dx;$ и) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x};$

к) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx;$ л) $\int tg\, 3x\, dx;$ м) $\int (x + 5) e^{2x} dx;$

н) $\int x^7 \ln x\, dx;$ о) $\int \frac{x + 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx;$ п) $\int \frac{x^4 - 3}{x^2 - 25} dx;$

р) $\int \frac{dx}{\cos x + 3\sin x};$ с) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x + 1} + \sqrt[4]{3x + 1}};$ т) $\int \cos 3x \sin 2x dx;$

у) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx;$ ф) $\int \sqrt{4 + e^x}\, dx.$

Задание2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_2^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4};$ б) $\int_1^2 \frac{dx}{(x - 1)^2}.$

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной гиперболой $xy = 9$, осью OX и прямыми $x = 3$ и $x = 6$;

б) длину дуги одного оборота спирали Архимеда $\rho = 3\varphi$;

в) объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной полуэллипсом $y = 3\sqrt{1 - x^2}$, параболой $x = \sqrt{1 - y}$ и осью Oy.

Вариант 6.

Задание 1. Вычислить интегралы:

а) $\int \left(2x^7 - \frac{3}{\sqrt{x}} + e^x \right) dx;$ б) $\int \frac{x^2 dx}{\left(1 + 3x^3\right)^3};$ в) $\int \sqrt{1 - 5x} dx;$

г) $\int \frac{arctg^2 x}{1 + x^2} dx;$ д) $\int \frac{e^x}{e^x + 4} dx;$ е) $\int e^{\sin 2x} \cos 2x dx;$

ж) $\int 2^{-x^2}\,x dx$; з) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$; и) $\int tg\,2x dx$;

к) $\int \frac{e^x}{\sin e^x}dx$; л) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$; м) $\int x\cos 2x\,dx$;

н) $\int 3x^2\ln(x+2)dx$; о) $\int \frac{2-3x}{x^3-4x}dx$; п) $\int \frac{x^3+2}{x^2-2x+3}dx$.

р) $\int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x}$; с) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-4}+\sqrt[4]{5x^2-4}}$; т) $\int \sin 2x\cdot\cos 7x dx$;

у) $\int \sin^2 x\cdot\cos^2 x dx$; ф) $\int \left(5+e^x\right)^2 dx$.

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(x+1)^4}$.

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x - 1$, $y = e^{2x} - 3$ и осью Oy;

б) длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x}$ от $x_1 = 0$ до $x_2 = 12$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sqrt{\text{arctg } x}$ и прямыми $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = \sqrt{3}$.

Вариант 7.

Задание 1. Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x^3} + 3\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx$; б) $\int \frac{x^2 dx}{\left(1-2x^3\right)^2}$; в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$;

г) $\int \frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}dx$; д) $\int \frac{x}{4x^2-3}dx$; е) $\int e^{\cos 3x}\sin 3x dx$;

ж) $\int 2^{-3x^2}\,x dx$; з) $\int \sin\frac{x}{5}dx$; и) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$;

к) $\int tg(1-x)dx$; л) $\int \frac{2^x dx}{4^x+1}$; м) $\int x\sin 3x\,dx$;

н) $\int x\cdot arctgx\,dx$; о) $\int \frac{x+3}{x^3+10x^2+25x}dx$; п) $\int \frac{x^5+3x^2}{x^2+x}dx$;

р) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x}dx$. с) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx$; т) $\int \sin x\cdot\sin 3x dx$;

у) $\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x dx$; ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 9}}$.

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}$; б) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x \ln^3 x}$.

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x$ и прямой $y = x + 2$;

б) длину дуги полукубической параболы $ay^2 = x^3$ от начала координат до точки с абсциссой $x = 5a$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной одной волной синусоиды $y = \sin 4x$ и осью Ox.

Вариант 8.

Задание 1. Вычислить интегралы:

а) $\int \left(2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2} + 1\right) dx$; б) $\int \sqrt{2x + 3} dx$; в) $\int \frac{x}{\left(1 + 4x^2\right)^2} dx$;

г) $\int \frac{dx}{5 - x}$; д) $\int \frac{dx}{4x - x \ln x}$; е) $\int x e^{x^2 - 3} x dx$;

ж) $\int x \cos 2x^2 \, dx$; з) $\int \left(1 - \sin \frac{x}{5}\right) dx$; и) $\int ctg\, 2x dx$;

к) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$; л) $\int \frac{x dx}{4 + x^4}$; м) $\int e^{2x} \cos x dx$;

н) $\int arctg\, 3x \, dx$; о) $\int \frac{x^2 - x + 2}{x^3 + 4x^2 + 3x} dx$; п) $\int \frac{x^2 - x + 2}{x^3 + 4x^2 + 3x} dx$;

р) $\int \frac{dx}{3 - 2\cos x}$; с) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1 + 2\sqrt{x}} dx$; т) $\int \sin x \cdot \sin 3x dx$;

у) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$; ф) $\int \sqrt{e^x - 3} dx$.

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}}$. б) $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt[3]{\ln x}}$.

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной параболами: $y^2 = 4x$ и $x^2 = 4y$;

б) длину дуги полукубической параболы $y = \sqrt{(x-2)^3}$ от точки $A(2; 0)$ до точки $B(6; 8)$;

в) объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$ вокруг оси Oy.

Вариант 9.

Задание 1. Вычислить интегралы:

а) $\int\left(2 - 3\sqrt[5]{x^4} + \frac{1}{x^3}\right)dx;$ б) $\int \frac{xdx}{\left(1+3x^2\right)^5};$ в) $\int \sqrt{1-2x}dx;$

г) $\int \frac{x^2}{1+2x^3}dx;$ д) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx;$ е) $\int e^{-x^3}x^2dx;$

ж) $\int \sqrt{3^x}\sqrt{5^x}dx;$ з) $\int \frac{x^3}{\sin^2 x^4}dx;$ и) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos x}dx;$

к) $\int \frac{dx}{\sin^2 4x};$ л) $\int (2 - 3\cos 2x)dx;$ м) $\int \left(1-x^2\right)\sin 3x\,dx;$

н) $\int \ln\left(x^2+5\right)dx;$ о) $\int \frac{x^2+4x}{x-x^2-2x^3}dx;$ п) $\int \frac{x^4}{1-x^2}dx;$

р) $\int \frac{dx}{a\sin x + 3\cos x};$ с) $\int \frac{\sqrt{x}}{4-\sqrt[4]{x}}dx;$ т) $\int \sin 2x \cdot \sin 8x\,dx;$

у) $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x\,dx;$ ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-e^x}}.$

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^\infty xe^{-x^2}dx;$ б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x+x^2}.$

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = 2x + 5$, $y = \frac{x^2}{6}$;

б) длину дуги кардиоиды $\rho = 5(1 + \cos\varphi)$;

в) объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{1}{2}x^2$, прямой $y = 4 - x$, $x = 0$ вокруг оси Oy.

Вариант 10.

Задание 1. Вычислить интегралы:

а) $\int\left(\sqrt{x} - 2x^3 - \frac{1}{x^2}\right)dx;$ б) $\int (1-\sin 2x)^5 \cos 2x dx;$ в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}};$

г) $\int \frac{x^3dx}{1+4x^4};$ д) $\int \frac{\sin x}{1+2\cos x}dx;$ е) $\int 2^{-x^3}x^2dx;$

ж) $\int \left(e^x+1\right)^2dx;$ з) $\int e^x \sin e^x dx;$ и) $\int \cos 3x dx;$

к) $\int \frac{dx}{\sin^2(1-x)};$ л) $\int \cos 2x \sin 3x dx;$ м) $\int e^{-2x}(2x+5)\,dx;$

н) $\int\left(\sin^2 x+1\right)x dx$; о) $\int\frac{x+4}{x^3-2x^2+3x}dx$; п) $\int\frac{x^4+x}{27+x^3}dx$;

р) $\int\frac{\cos x}{1+\cos x-\sin x}dx$; с) $\int\frac{\sqrt{x}}{1+3\sqrt[4]{x}}dx$; т) $\int\sin 5x\cdot\cos 8x\,dx$;

у) $\int\cos^5 x dx$; ф) $\int\left(e^x-3\right)^2 dx$.

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^2\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$; б) $\int\limits_2^\infty\frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2+5\right)^3}}$.

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\ln x$ и прямыми $x=e$, $x=e^2$ и $y=0$;

б) площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси *Ox* параболы $y^2=2x+1$ от $x_1=1$ до $x_2=7$;

в) объем тела, образованного вращением вокруг оси *Oy* фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Вариант 11.

Задание 1. Вычислить интегралы

а) $\int(4x+1)^2\,dx$ б) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x}}$ в) $\int\frac{2x}{(5+x^2)^2}dx$

г) $\int\frac{\operatorname{arctg}^2 3x}{1+9x^2}$ д) $\int\frac{x^4}{1+5x^5}dx$ е) $\int\frac{x^2}{\sqrt{4+x^6}}dx$

ж) $\int\frac{\operatorname{ctg}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}dx$ з) $\int\cos 5x\cdot dx$ и) $\int\frac{dx}{\sin^2 2x}$

к) $\int\frac{x\cdot dx}{\cos 2x^2}$ л) $\int\frac{dx}{6+3x^2}dx$ м) $\int e^{-2x}\cdot x\cdot dx$

н) $\int(x-3)\cdot\cos 3x\,dx$ о) $\int\frac{x^3}{x^2+2x-1}dx$ п) $\int\frac{dx}{x^2+4x+3}$

р) $\int\frac{dx}{5-3\cos x}$ с) $\int\frac{\sqrt{x}}{2+3\sqrt{x}}dx$ т) $\int\sin x\cdot\cos 2x\,dx$

у) $\int\cos^4 2x\,dx$ ф) $\int\frac{dx}{\sqrt{e^{3x}+1}}$

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^x dx$ б) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = \frac{2}{x},\ y = 5 \cdot e^x,\ \ y = 2,\ \ y = 5.$

б) длину дуги кривой:

$\begin{cases} x = \cos t + t \cdot \sin t \\ y = \sin t - t \cdot \cos t \end{cases}, \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{3}.$

в) Объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями:

$y = \sqrt{R^2 - x^2}\ ,\ y = 0.$

Вариант 12.

Задание 1. Вычислить интегралы

а) $\int \left(x^5 - \frac{1}{x^2} + 5 \right)$

б) $\int \frac{dx}{\sin(5x+1)}$

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

г) $\int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$

д) $\int \frac{x^2}{1+4x^3}\,dx$

е) $\int \frac{3\mathrm{arctg}^2 x}{1+x^2}$

ж) $\int \frac{dx}{\sin^2(5x-1)}$

з) $\int \frac{x^2+1}{(x^3+3x-1)^2}\,dx$

и) $\int \frac{2dx}{x \cdot \sqrt{\ln x}}$

к) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$

л) $\int \frac{dx}{3+2x^2}\,dx$

м) $\int (x+1) \cdot \cos 2x$

н) $\int e^{-5x} \cdot x \cdot dx$

о) $\int \frac{x^2}{x^2+x-1}\,dx$

п) $\int \frac{dx}{x^2+4x+2}$

р) $\int \mathrm{tg}(3x)\,dx$

с) $\int \frac{4xdx}{\sqrt{2x^2-1} + \sqrt[4]{2x^2}}$

т) $\int \sin 2x \cdot \cos 2x$

у) $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,dx$

ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{4x}-1}}$

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^{\infty} \cos x \cdot dx$

б) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = \cos x,\ y = \sin x,\ \ x = 0,\ \ (x \ge 0).$

б) длину дуги кривой:

$y = x^2$ -1, отсеченной осью Ox.

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций:

$y = x^3,\ \ \mathrm{y} = 1,\ \ x = 0.$

Вариант 13.

Задание 1. Вычислить интегралы

а) $\int \left(3x - e^{2x} + 1\right) dx$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$

в) $\int \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx$

г) $\int \frac{dx}{2+x}$

д) $\int \frac{\cos 3x}{1+\sin 3x} dx$

е) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

ж) $\int 3^{x^2} \cdot x \cdot dx$

з) $\int \mathrm{tg}(8x)\, dx$

и) $\int \frac{dx}{\sin^2(2x)}$

к) $\int \frac{dx}{x^2+6x-1}$

л) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+6}}$

м) $\int (x^2+1) \cdot \ln x \, dx$

н) $\int (x+5) \cdot e^x \, dx$

о) $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x-2)^2} dx$

п) $\int \frac{x-1}{2-x} dx$

р) $\int \frac{dx}{1-\sin x}$

с) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} + \sqrt[4]{2x-1}}$

т) $\int \sin x \cdot \cos 5x \, dx$

у) $\int \cos^2 3x \, dx$

ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{5x}-1}}$

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

б) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = \sqrt{x},\ y = \frac{1}{x},\ x = 16$.

б) длину дуги кривой:

$y = x^{3/2}$, $0 \le x \le 4$.

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy области, ограниченной графиками функций:

$y = x^3,\ y = 1,\ x = 0$.

Вариант 14.

Задание 1. Вычислить интегралы

а) $\int \frac{3 + \sqrt[3]{x^2} - 2x}{x} dx$

б) $\int \frac{dx}{3-x}$

в) $\int \frac{\sqrt{3}}{9x^2 - 3} dx$

г) $\int \sin(4-x)\, dx$

д) $\int e^{5x+1} dx$

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$

ж) $\int \frac{\sin x}{1+5\cos x} dx$

з) $\int e^{4x^2} \cdot x \cdot dx$

и) $\int \frac{2^x}{1+2^{2x}} dx$

к) $\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$

л) $\int \frac{5+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

м) $\int (x+1) \cdot \ln x \, dx$

н) $\int x \cdot \cos 2x\, dx$ о) $\int \frac{x^2+2}{x(x+2)(x+1)} dx$ п) $\int \frac{x+5}{x-4} dx$

р) $\int \sin^2 2x\, dx$ с) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1} dx$ т) $\int \sin 4x \cdot \cos x\, dx$

у) $\int \cos^3 5x\, dx$ ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{6x}-1}}$

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^{\infty} \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx$ б) $\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = x^2 - 4x + 3$, $y = -x^2 + 2x + 3$

б) длину дуги кривой:

$y = \ln x$, $2\sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{6}$

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций:

$y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.

Вариант 15.

Задание 1. Вычислить интегралы

а) $\int \frac{3\sqrt{x}+4x^2-5}{2x^2} dx$ б) $\int \frac{dx}{1-4x}$ в) $\int \frac{9dx}{\sqrt{9x^2-3}}$

г) $\int \sin(5-3x)\, dx$ д) $\int e^{2x-2} dx$ е) $\int \frac{dx}{10x^2-1}$

ж) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ з) $\int e^{x^2} \cdot x \cdot dx$ и) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

к) $\int \frac{4^x}{3+4^{2x}} dx$ л) $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$ м) $\int (x+1) \cdot e^{-x}\, dx$

н) $\int (x+1)^2 \cdot \ln x\, dx$ о) $\int \frac{3x+1}{x+2} dx$ п) $\int \frac{-2x^2+x+2}{x^3(x+2)} dx$

р) $\int \frac{dx}{2-2\sin x}$ с) $\int \frac{x+\sqrt{2+x}}{\sqrt[3]{2+x}} dx$ т) $\int \sin 2x \cdot \cos 4x\, dx$

у) $\int \sin^2 10x\, dx$ ф) $\int \sqrt{e^{4x}-1} dx$.

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$ б) $\int\limits_{-3}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y=-4x, \quad y=32-x^2$

б) длину дуги кривой:

$y=\ln\cos x, \quad 0\le x\le\frac{\pi}{6}$

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* области, ограниченной графиками функций: $y=-x^2+1, \quad y=0$.

Вариант 16.

Задание 1. Вычислить интегралы

а) $\int\left(4-\frac{5}{x^2}+e^{2x}\right)dx$ б) $\int\frac{x^2}{(1+6x^3)^3}\,dx$ в) $\int\sqrt{4x+1}\,dx$

г) $\int\frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ д) $\int\frac{e^x}{e^{2x}+5}\,dx$ е) $\int\frac{dx}{10x^2-1}$

ж) $\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$ з) $\int\frac{5tg^2 4x}{\cos^2 2x}\,dx$ и) $\int ctg\,7x\cdot dx$

к) $\int\frac{e^{2x}}{\cos e^{2x}}\,dx$ л) $\int\frac{x\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$ м) $\int(x-1)\cdot\ln x\,dx$

н) $\int(x-1)\cdot\cos\frac{x}{3}\,dx$ о) $\int\frac{4-5x}{1-x}\,dx$ п) $\int\frac{3x^2+1}{(x-1)^2(x+1)}dx$

р) $\int\frac{dx}{5-3\cos x}$ с) $\int\frac{\sqrt{x}}{1-x}\,dx$ т) $\int\sin x\sin 3x dx$

у) $\int\cos^2 3x\,dx$ ф) $\int\sqrt{e^{5x}-1}dx$

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{x}{x^2+1}\,dx$ б) $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y=\ln x, \quad y=0, \quad x=e$.

б) длину дуги кривой:

$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}, \quad 0\le t\le 2\pi$.

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* области, ограниченной графиками функций: $y=e^x, \quad y=1, \quad x=1$.

Вариант 17.

Задание 1. Вычислить интегралы

а) $\int\left(4x^3-\frac{1}{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$ б) $\int\sin 2x\cdot(1+\cos 2x)^4\,dx$ в) $\int\frac{3^x}{2+3^{2x}}dx$

г) $\int\frac{dx}{\sin^2(3x+1)}$ д) $\int x^2\cdot e^x\,dx$ е) $\int(x+1)\cdot 3^x\,dx$

ж) $\int\left(3+e^x\right)^2 dx.$ з) $\int\frac{4^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ и) $\int tg5x\cdot dx$

к) $\int(\cos x^2+1)\cdot x\,dx$ л) $\int\frac{dx}{2x+x\cdot\ln x}dx$ м) $\int arctg7xdx$

н) $\int x\cos 6xdx$ о) $\int\frac{x^2-2}{1-x^2}\,dx$ п) $\int\frac{x^2+1}{x^3+3x}\,dx$

р) $\int\cos^3 7x\,dx$ с) $\int\frac{\sqrt{x}}{1-6\sqrt{x}}dx$ т) $\int\sin 3x\cdot\cos x\,dx$

у) $\int\cos^4 x\,dx$ ф) $\int\sqrt{e^{4x}-1}dx$

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$ б) $\int\limits_1^{e}\frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln x}}$

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y=4-x^2,\quad y=0.$

б) длину дуги кривой:

$\begin{cases}x=2\cos t\\ y=2\sin t\end{cases},\quad 0\le t\le\frac{\pi}{3}.$

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций: $y=x^2,\quad y=2x.$

Вариант 18.

Задание 1. Вычислить интегралы

а) $\int\left(2+\frac{5}{x^3}+10\sqrt{x}\right)dx$ б) $\int\sqrt{3x+6}\,dx$ в) $\int\frac{x}{1+4x^2}dx$

г) $\int\frac{dx}{5x+4}$ д) $\int\frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}dx$ е) $\int x\cdot e^{2x^2+1}\,dx$

ж) $\int 4x\cdot\sin 5x^2\,dx$ з) $\int(3+\sin x)\cdot dx$ и) $\int tg2x\cdot dx$

к) $\int\frac{e^{4x}}{\cos^2 e^{4x}}dx$ л) $\int\sin\frac{x}{3}\cdot\cos^2\frac{x}{3}dx$ м) $\int(x^2+1)\cdot\cos x\,dx$

н) $\int arctg4x\cdot dx$ о) $\int\frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$ п) $\int\frac{x^3-x-2}{x^3(x-2)}dx$

р) $\int\frac{x+5}{2-x}\,dx$ с) $\int\frac{\sqrt[4]{x}}{1+5\sqrt{x}}dx$ т) $\int\sin 2x\cdot\cos x\,dx$

у) $\int \cos^3 \frac{x}{2}\,dx$ ф) $\int \sqrt{e^x - 1}dx$

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{1+\ln x}{x}\,dx$ б) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = x^2, \quad y = \sqrt{x}$.

б) длину дуги кривой:

$y = 2\sqrt{x}, \quad \frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{8}$.

в) Объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями : $y = \frac{x^3}{3}$, $x = 2$, $x = 0$, $y = 0$.

Вариант 19.

Задание 1. Вычислить интегралы

а) $\int \left(2x + \frac{1}{x^2} - 4\cos x\right)dx$ б) $\int \frac{x}{(5+2x^2)^3}\,dx$ в) $\int \sqrt{4x+1}\,dx$

г) $\int \frac{x^2}{6x^3+1} \cdot dx$ д) $\int \frac{e^x}{3+e^{2x}}\,dx$ е) $\int x^3 \cdot e^{-x^4}\,dx$

ж) $\int 2^x \cdot 3^x\,dx$ з) $\int \frac{ctg^3 \frac{x}{3}}{\sin^2 \frac{x}{3}} \cdot dx$ и) $\int tg6x \cdot dx$

к) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$ л) $\int (5 - 2\cos x) \cdot dx$ м) $\int arctg\,2x \cdot dx$

н) $\int (x^2+1) \cdot \sin 2x\,dx$ о) $\int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}dx$ п) $\int \frac{x^2+2}{1-x^2}\,dx$

р) $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x}$ с) $\int \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}\,dx$ т) $\int \sin x \sin 4x dx$

у) $\int \sin^2 2x dx$ ф) $\int \sqrt{e^{7x} - 1}dx$

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2}}$ б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = \sin 3x, \quad y = 0, \ 0 \le x \le \frac{\pi}{3}$.

б) длину дуги кривой:

$y = e^x$, $\ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8}$.

в) Объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y = \sin x$, $y = 0$ при $0 \le x \le \pi$.

Вариант 20.

Задание 1. Вычислить интегралы

а) $\int\left(4x^3 + \frac{1}{x} - 1\right)dx$ б) $\int\sqrt{4x+3}\,dx$ в) $\int\frac{x}{1+3x^2}\,dx$

г) $\int\frac{dx}{2x+3}$ д) $\int\frac{\ln^3 x}{x}\,dx$ е) $\int\frac{5^x}{1+5^{2x}}\,dx$

ж) $\int x\cdot\sin 4x^2\,dx$ з) $\int(1-\cos\frac{x}{5})\cdot dx$ и) $\int tg3x\cdot dx$

к) $\int\frac{dx}{\sin^2(3x-1)}$ л) $\int\frac{x}{16-x^4}\,dx$ м) $\int xe^{-2x}dx$

н) $\int(x^2+3)\cdot\cos 2x\,dx$ о) $\int\frac{dx}{x^2+4x-1}$ п) $\int\frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}\,dx$

р) $\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}$ с) $\int\frac{2+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$ т) $\int\sin x\cdot\cos 5x\,dx$

у) $\int\cos^3 x\,dx$ ф) $\int\sqrt{e^{6x}+1}dx$

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x^2+x}$ б) $\int\limits_0^{\pi/4} tg2x\;dx$

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = \sqrt{9-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{3}{2}$.

б) длину дуги кривой:

$y = \frac{x^2}{2}$, $0 \le x \le 1$.

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций: $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

Вариант 21.

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int\left(\sqrt{x} - \frac{7}{x} + 3\right)dx$ б) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2x+6}}$ в) $\int\frac{dx}{(x+2)}$

г) $\int\frac{e^x}{e^x+7}\,dx$ д) $\int\cos x\cdot(\sin^2 x+1)\,dx$ е) $\int 3^{-x+1}\,dx$

ж) $\int\sin^2(x+7)\,dx$ з) $\int\left(\sin(7x-5) - \sqrt{x}\right)dx$ и) $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$

к) $\int \sin(e^x - 7) \cdot e^x dx$ л) $\int \frac{dx}{e^{8x-9}}$ м) $\int \sin 3x \cdot x^2 dx$

н) $\int x \cdot \ln x \, dx$ о) $\int \frac{3x^2 - 9}{27x - 3x^3} dx$ п) $\int \frac{3x+2}{3x-2} dx$

р) $\int \frac{dx}{\sin x}$ с) $\int \frac{\sqrt[3]{x} \cdot dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ т) $\int \sin 7x \cdot \sin 5x \, dx$

у) $\int \sin x \cos x dx$ ф) $\int (2^x - 3^{2x})^2 dx$.

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{\infty} x \cdot e^{-x} dx$; б) $\int\limits_{-3}^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}}$.

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^3 + 2,\ y = x - 2,\ x = 2$;

б) длину дуги кривой $y = \ln x$, $\frac{3}{4} \le x \le \frac{12}{5}$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций $x^2 - y = 0,\ y = 0,\ x = -1$.

Вариант 22.

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int (3x+5)^7 \, dx$ б) $\int 3\sin(7x-1) \, dx$ в) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

г) $\int \frac{5x}{(7x^2+3)^4} dx$ д) $\int \frac{x^3}{8 - x^4} dx$ е) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

ж) $\int (e^x + x)^2 dx$ з) $\int \frac{7}{x-8} dx$ и) $\int \ln 2x \, dx$

к) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+4}}$ л) $\int \frac{\sin 3x}{3 + \cos^2 3x} dx$ м) $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 1}$

н) $\int e^x \cdot x^2 \cdot dx$ о) $\int \frac{dx}{(x+2)(x-1)}$ п) $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx$

р) $\int \frac{dx}{\sin 2x + 3}$ с) $\int \frac{\sqrt{x-7} + 7}{\sqrt[3]{x-7}} dx$ т) $\int \sin 3x \cdot \cos 5x \, dx$

у) $\int \sin^2 3x \, dx$ ф) $\int \frac{2 - 3x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$; б) $\int\limits_4^5 \frac{dx}{(x-4)^2}$.

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $3x^2 - 4y = 0,\ 2x - 4y + 1 = 0$;

б) длину дуги кривой $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$ от точки $x_1 = 1$ до точки $x_2 = 2$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиком функции $x^2 + y = 0$ и прямыми $y = -1,\ x = 0$.

Вариант 23.

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \left(\frac{x}{7} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 3 \right) dx$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{7x-1}}$ в) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{3x^2-1}} dx$

г) $\int \frac{x-3}{x^2+5} dx$ д) $\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+e^{-2x}} dx$ е) $\int 8^{x^2} \cdot x\, dx$

ж) $\int 2^{-4x}\, dx$ з) $\int (2 - 5^{3x})\, dx$ и) $\int \sin(e^x) \cdot e^x dx$

к) $\int \frac{x^3}{x^4+7} dx$ л) $\int \sin x \cdot e^{\cos x} dx$ м) $\int 2^x (4x+6)\, dx$

н) $\int \sin x \cdot x^3 dx$ о) $\int \frac{x^2-7}{x^3-8} dx$ п) $\int \frac{x^2-1}{x^2+3x+2} dx$

р) $\int \cos^3 x\, dx$ с) $\int \frac{\sqrt[4]{2x-7} \cdot dx}{1-\sqrt{2x-7}}$ т) $\int \sin 8x \cdot \sin 2x\, dx$

у) $\int \sin^4 x dx$ ф) $\int (2^x + 7)^3 dx$.

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$; б) $\int_1^2 \frac{x \cdot dx}{x-1}$.

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $4y + x^2 = 0,\ 4y - 2x + 1 = 0$;

б) длину дуги кривой $y = \sqrt{1-x^2} - \arcsin x$, $0 \le x \le \frac{7}{9}$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций $y = 1 + 8x^3,\ y = 1,\ x = -\frac{1}{2}$.

Вариант 24.

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int (x^3 + 1)\, dx$ б) $\int \frac{x^3}{16-x^8} dx$ в) $\int \frac{3x-1}{x^2+6x+10} dx$

г) $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{9-e^{6x}}} dx$ д) $\int \cos(3+2x)\, dx$ е) $\int (x+1) \cdot \sin^2(x+2x)\, dx$

ж) $\int \cos 3x \cdot e^{\sin 3x} dx$ з) $\int \frac{\sin 3x}{\sin(\cos 3x)} dx$ и) $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+13x+43}} dx$

к) $\int \frac{x+7}{x^3}dx$ л) $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-3}}$ м) $\int e^{2x}\cdot x^2 dx$

н) $\int \ln x\, dx$ о) $\int \frac{dx}{(x-3)(x+1)}$ п) $\int \frac{x^2+1}{x^2+3x+1}dx$

р) $\int \frac{x}{\cos\ (x^2+5)}\, dx$ с) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\, dx$ т) $\int \sin 7x \sin 3x dx$

у) $\int \sin^2 4x\, dx$ ф) $\int \frac{\sin 4x}{\cos 4x}dx$.

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(3x-1)^3}$; б) $\int\limits_{-\pi/2}^{0} \mathrm{tg}x\cdot dx$.

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $2x+3y^2=0,\ 2x+2y+1=0$;

б) длину дуги кривой $y=\ln\frac{5x}{2}$, $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций $y=-4x^3,\ y=-4,\ x=0$.

Вариант 25.

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{9x^2+1}$; б) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $3x^2-4y=0,\ 2x+4y-1=0$;

б) длину дуги кривой $y=-\ln\sin x$, $0\le x\le\frac{\pi}{6}$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной кубической параболой $y=-4x^3$ и прямыми $x=1,\ y=0$.

Вариант 26.

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int\left(2^x+e^x+x^2\right)dx$ б) $\int \frac{x^2}{\sqrt{7+x^3}}\, dx$ в) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x}+5)\, dx$

г) $\int \frac{dx}{7-x}$ д) $\int 3^{\sin x}\cdot\cos x\ dx$ е) $\int e^{2x+2}dx$

ж) $\int 3^x\cdot\cos 3^x\ dx$ з) $\int\left(1-\frac{1}{\cos^2 7x}\right)dx$ и) $\int \mathrm{ctg}(3x)\, dx$

к) $\int \frac{2^x \cdot dx}{\sin^2(2^x)}$ л) $\int 2^{\ln x} \cdot \frac{1}{x}\ dx$ м) $\int (x^2-1)\cdot \ln x\, dx$

н) $\int (x-1)\cdot \sin(x-1)\, dx$ о) $\int \frac{3-2x}{(1+x)(2+x)} dx$ п) $\int \frac{x^2+x+3}{x^2+3x+7} dx$

р) $\int \cos^3(x-8)\, dx$ с) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+3\sqrt[3]{x+1}}$ т) $\int \cos 7x \cos 3x dx$

у) $\int \cos^2 2x \cdot \sin^2 2x\, dx$ ф) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+12x+9}} dx$.

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-5x} dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{3x+2}{\sqrt[3]{x}} dx$.

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $3x^2+4y=0,\ 2x+4y+1=0$;

б) длину дуги кривой $y=e^x+4$, $\ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{15}$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной параболой $y=x^2+2$ и прямыми $y=0,\ x=1$.

Вариант 27.

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \left(\frac{3x+7}{\sqrt{x}}\right) dx$ б) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot 4^{\sqrt{x}}\ dx$ в) $\int \frac{\mathrm{tg}(\ln x)}{x}\ dx$

г) $\int \frac{(x^2+1)\cdot dx}{\sin(x^3+3x)}$ д) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x}+15)\, dx$ е) $\int \frac{16x+3\cos 3x}{8x^2+\sin 3x} dx$

ж) $\int \frac{x^3}{9-x^8} dx$ з) $\int \left(3+\sin\frac{7x}{8}\right) dx$ и) $\int \frac{dx}{x\cdot(\ln^2 x+4)}$

к) $\int e^{\mathrm{tg}2x} \frac{dx}{\cos^2(2x)}$ л) $\int \frac{3^x}{9+9^x}\ dx$ м) $\int x \cdot \mathrm{arctg}(x-1)\ dx$

н) $\int (x+8)\cdot \sin 3x\, dx$ о) $\int \frac{x+5}{(4+x)(3+x)} dx$ п) $\int \frac{x^3+4}{x^2+x+4} dx$

р) $\int \frac{3}{3-\sin 3x} dx$ с) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ т) $\int \cos x \cdot \sin 8x\, dx$

у) $\int \cos^2 x \cdot \sin^2 x\, dx$ ф) $\int \frac{(1-\sin 2x)^2}{\cos^2 x} dx$.

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{4x^2+1}$; б) $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}$.

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $2x-3y^2=0,\ 2x+2y-1=0$;

б) длину дуги кривой $y=2+\sqrt{x-x^2}$, $\frac{1}{4}\le x\le 1$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций $y=1+8x^3,\ y=9,\ x=0$.

Вариант 28.

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int\left(x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+3\right)dx$ б) $\int\frac{\cos x\cdot dx}{9-\sin^2 x}$ в) $\int\frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}\,dx$

г) $\int\frac{(x+1)\cdot dx}{\cos^2(x^2+2x)}$ д) $\int\frac{2^{\ln x}}{x}dx$ е) $\int 3^{\mathrm{tg}x}\frac{dx}{\cos^2 x}$

ж) $\int x^3\cdot\sin(x^4+2)\,dx$ з) $\int\left(1-\cos\frac{x-7}{8}\right)dx$ и) $\int\frac{\cos(2x-3)}{\sin(2x-3)}dx$

к) $\int\frac{e^x}{e^{2x}+4}\,dx$ л) $\int\frac{x^2}{27+x^3}dx$ м) $\int(x^2+3)\mathrm{e}^{5x}\,dx$

н) $\int e^x\cdot\sin x\,dx$ о) $\int\frac{3x^2+3}{x^3+3x-4}dx$ п) $\int\frac{x^2+x+7}{x^2-2x-3}dx$

р) $\int\frac{\cos 4x-3}{\sin(6x+5)}dx$ с) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(5x+1)^3}+2\sqrt[4]{5x+1}}$ т) $\int\sin 2x\cdot\sin 4x\,dx$

у) $\int\sin^2(3x-4)\,dx$ ф) $\int\frac{x-3\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{16x^2+1}$; б) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{(1+x)^5}}$.

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $3x^2-2y=0,\ 2x-2y+1=0$;

б) длину дуги кривой $y=\ln(x^2-1)$, $2\le x\le 3$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций $x-y^2=0,\ y=1,\ x=0$.

Вариант 29.

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

$\int\left(2-5\cos x-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$ $\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{3-\ln^2 x}}\,dx$ $\int\frac{1}{x^2}\cdot\sin\frac{3}{x}dx$

$\int e^x\cdot\cos e^x\,dx$ $\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x-5}}\,dx$ $\int\frac{\sin 3x\cdot\cos 3x}{5+\sin^2 3x}dx$

$\int \operatorname{tg}(7-2x)\,dx$ $\int \frac{x^4}{16-x^{10}}\,dx$ $\int 5^x \frac{dx}{\sin^2(5^x)}$

$\int \sqrt{2^x}\cdot\sqrt{7^x}\cdot dx$ $\int \frac{x}{x^2+25}\,dx$ $\int \arccos(4x-1)\,dx$

$\int x\cdot \operatorname{arctg} 3x\,dx$ $\int \frac{x+3}{x^2+6x+7}\,dx$ $\int \frac{x^{.3}}{9-x^2}\,dx$

$\int \frac{dx}{\cos(7x+5)-1}$ $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx$ $\int \sin 13x\cos 3x dx$

$\int \cos^4 3x\,dx$ $\int \frac{dx}{\sqrt{64-x^2}}$.

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_{14}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$; б) $\int\limits_{-5}^{-4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+5)^4}}$.

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $3y^2+4x=0,\ 4x+2y+1=0$;

б) длину дуги кривой $y=\arccos x$, $0\le x\le \frac{8}{9}$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций $x-2y^3=0,\ y=0,\ x=1$.

Вариант 30.

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int\left(\sqrt[3]{x}-\frac{7}{x^3}\right)dx$; б) $\int x^2\cdot\sin x^3\,dx$; в) $\int \frac{x\cdot dx}{\sqrt[3]{1-3x^2}}$;

г) $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{3-\ln x}}\,dx$; д) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{4-e^{4x}}}\,dx$; е) $\int e^{\operatorname{tg}x}\frac{dx}{\cos^2 x}$;

ж) $\int (1+2x)\cdot \operatorname{ctg}(x^2+x)\,dx$; з) $\int \frac{\sin(7-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$; и) $\int \sin(7x-1)\,dx$;

к) $\int \frac{1}{x^5}\cdot\sin\frac{1}{x^4}\,dx$; л) $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{x-3}}$; м) $\int cos3xe^{5x-3}dx$;

н) $\int (x^2-x)\cdot e^{3x}\,dx$; о) $\int \frac{dx}{x^2-x}$; п) $\int \frac{x^2+7x+3}{x^2-5x-1}dx$;

р) $\int \frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}dx$; с) $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{x+3}}dx$; т) $\int \cos x\cos(3x+2)dx$;

у) $\int \cos^4(4x+7)dx$; ф) $\int (2^x-3)^2\,dx$.

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-3x}dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{4x+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$.

Задание 3. Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $3x^2 - 2y = 0,\ 2x + 2y - 1 = 0$;

б) длину дуги кривой $y = \frac{1}{2}e^x + 2\ ,\ 0 \le x \le 1$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций $y + x^2 = 0,\ y = 0,\ x = 1$.

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ГРАФИК ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть $D \subset \Re^n$ и каждой точке $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in D$ поставлено в соответствие число $u \in \Re$. Тогда говорят, что на множестве D определена *числовая функция нескольких переменных* $u = f(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$.

Множество D называется *областью определения* функции, точка $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ – *аргументом* функции.

Будем далее рассматривать функцию двух переменных $u = f(x, y)$. Отметим, что все сказанное ниже можно распространить и на функцию n переменных, где $n>2$.

Множество всех точек $(x, y) \in \Re^2$, для которых функция $u = f(x, y)$, заданная аналитически, имеет смысл, называется естественной *областью определения* этой функции.

Пример. Найти область определения функции

$$z = \ln(9 - x^2 - y^2)$$

Решение. Так как логарифм определен только при положительных значениях аргумента, то $9 - x^2 - y^2 > 0$, откуда $x^2 + y^2 < 9$.

Граница области определения $x^2 + y^2 = 9$ - окружность с центром в начале координат и радиусом 3, которая области определения не принадлежит. Таким образом, областью определения данной функции служит внутренняя часть круга (рис. 1).

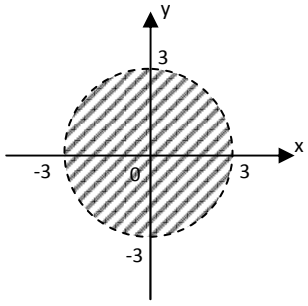


Рис. 1./

Пример. Найдем область определения функции $u = \sqrt{\frac{y - x^2}{y - 1}}$.

Функция u определена в тех точках плоскости $\Re^2$, где $\dfrac{y-x^2}{y-1} \geq 0$.

Это неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} y - x^2 \geq 0 \\ y - 1 > 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y - x^2 \leq 0 \\ y - 1 < 0 \end{cases}$$

Первой системе неравенств удовлетворяют координаты всех точек, расположенных на параболе $y = x^2$ или выше нее и лежащих в полуплоскости $y > 1$. Это множество заштриховано на рис. 2. Второй системе удовлетворяют координаты точек, лежащих в множестве, заштрихованном на рис. 3. Следовательно, областью определения данной функции является объединение найденных множеств, т.е. множество, которое выделено штриховкой на рис. 4.

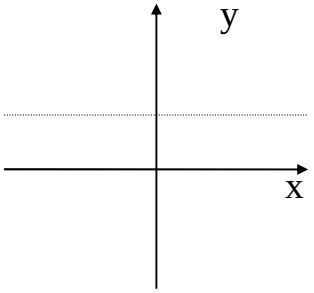


Рис. 2.

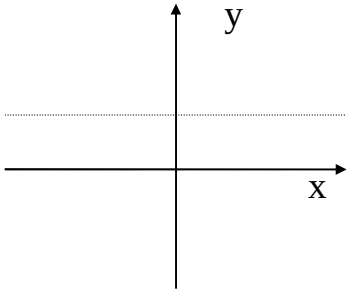


Рис. 3.

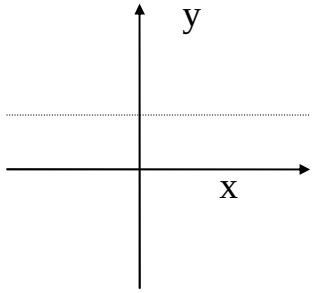


Рис. 4.

Графиком функции $u = f(x, y)$, где $(x, y) \in D \subset \Re^2$, называется множество $\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$. Оно задает некоторую поверхность в пространстве $\Re^3$.

Например, графиком функции $u = x^2 + y^2$, $(x, y) \in \Re^2$, является параболоид.

Пример. Построить график функции $z = x^2 + y^2$.

Решение. Область определения – вся координатная плоскость. Графиком функции $z = x^2 + y^2$ является поверхность, пересечением которой с координатной плоскостью *XOZ* $(y = 0)$ будет парабола $z = x^2$, а с плоскостью *YOZ* $(x = 0)$ – парабола $z = y^2$ (рис. 5).

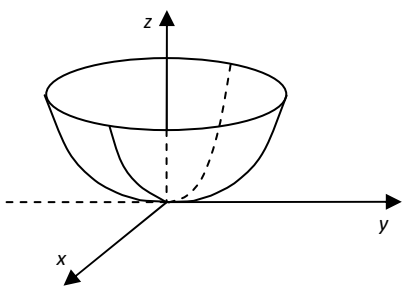


Рис. 5.

Линией уровня функции $u = f(x, y)$ называется множество точек $(x, y) \in \Re^2$, удовлетворяющих уравнению $f(x, y) = c$.

Аналогично определяются уровни (или *поверхности уровня*) функции *n* переменных, если *n>2.*

Пример. Найдем линии уровня функции $u = \max(x, |y|)$.

Отметим, что функция определена на всей плоскости $\Re^2$. Для построения линий уровня надо для любого $c \in \Re$ найти множество точек плоскости, координаты *x, y* которых удовлетворяют уравнению $\max(x, |y|) = c$. Следовательно, если $x \geq |y|$, то $x = c$, а если $x \leq |y|$, то $|y| = c$.

Очевидно, что *c* отрицательным быть не может (в этом случае говорят, что *c*-уровнем функции при *c<0* является пустое множество).

Найдем линию уровня при *c=0*:

$$\max(x, |y|) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0, \text{ если } x \geq |y|, \\ y = 0, \text{ если } x \leq |y| \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0, \text{ если } y = 0, \\ y = 0, \text{ если } x \leq 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \leq 0 \end{cases}.$$

Аналогично находятся линии уровня для различных *c>0*. На рис. 6 изображены линии уровня для *c=0, c=1* и *c=2.*

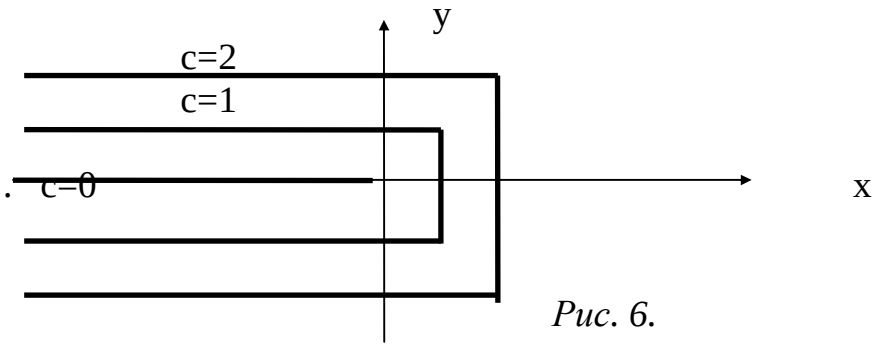


Рис. 6.

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Множество $V_\varepsilon(x_0, y_0) = \left\{(x, y) \middle| \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon \right\}$ (открытый круг радиуса ε $(\varepsilon > 0)$ с центром в точке (x_0, y_0)) называется ε*-окрестностью* точки $(x_0, y_0) \in \Re^2$. Через $\overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0, y_0)$ будем обозначать проколотую окрестность точки (x_0, y_0).

Точка (x_0, y_0) называется *предельной точкой* множества $D \subset \Re^2$, если пересечение любой ε-окрестности точки (x_0, y_0) и множества *D* содержит хотя бы одну точку, отличную от (x_0, y_0), т.е. для $\forall \varepsilon > 0 \;\; D \cap \overset{\circ}{V}_\varepsilon(x_0, y_0) \neq \varnothing$.

Заметим, что предельная точка может и не принадлежать множеству *D.*

Пусть функция $u = f(x, y)$ определена на множестве *D* и точка (x_0, y_0) – предельная точка *D.*

Число *A* называется *пределом функции* $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0), если для любой -окрестности $U_\varepsilon(A)$ точки *A* $(U_\varepsilon(A) = \{u \mid |u - A| < \varepsilon\} \subset \Re)$

существует -окрестность $V_\delta(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) такая, что для любой точки $(x, y) \in D \cap \overset{\circ}{V}_\delta(x_0, y_0)$ значение функции $f(x, y)$ попадает в окрестность $U_\varepsilon(A)$.

Таким образом, $A = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : (x, y) \in D \cap \overset{\circ}{V}_\delta(x_0, y_0) \Rightarrow f(x, y) \in U_\varepsilon(A)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \begin{cases} (x, y) \in D \\ 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \end{cases} \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon \ ).$$

Пример. Докажем, что $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0$.

Заметим, что данная функция определена на всей плоскости за исключением точки (0,0*)*.

Поскольку $\left| \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| = |x| \cdot \dfrac{y^2}{x^2 + y^2} \le |x| \le \sqrt{x^2 + y^2}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ (а именно $\delta = \varepsilon$) такое, что для всех точек (x, y), удовлетворяющих условию $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, справедливо неравенство $\left| \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$.

Функция $u = f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $(x_0, y_0) \in D \subset \Re^2$, если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Функция называется *непрерывной на множестве D*, если она непрерывна в каждой точке множества *D*

Пример.

1) функция $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ непрерывна в точке (0,0), поскольку $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} = f(0,0) = 0$ (см. пример 3).

2) функция $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 2, & \text{если } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ в точке (0,0) терпит разрыв, т.к.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}= \;=\lim_{\substack{t\to 0\\ t=x^2+y^2}} \ln(1+t)/t=1\neq 2=f(0,0).$$

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция $u=f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0,y_0). Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$, то они называются *частными производными* функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) по переменным x и y соответственно и обозначаются $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ (или: $f'_x(x_0,y_0)$ и $f'_y(x_0,y_0)$).

Для вычисления частной производной f'_x (или f'_y) пользуются известными формулами и правилами дифференцирования функции одной переменной, считая другую переменную y (или x) постоянной величиной.

Пример. Найдем частные производные функции $f(x,y)=x^y$.

Если считать $y=const$, то x^y – степенная функция от x, поэтому $f'_x(x,y)=yx^{y-1}$.

Если $x=const$, то x^y – показательная функция от y, и, следовательно, $f'_y(x,y)=x^y\ln x$.

Функция $f(x,y)$ называется *дифференцируемой в точке* (x_0,y_0), если существуют числа A и B такие, что приращение $\Delta f(x_0,y_0)=$ $=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ функции f в точке (x_0,y_0) представимо в виде $\Delta f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)$, где $\alpha=o(\rho)$ при $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$.

Главная часть полного приращения $\Delta f(x_0,y_0)$, линейная относительно Δx и Δy, т.е. $A\Delta x+B\Delta y$, называется *полным дифференциалом* функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) и обозначается $df(x_0,y_0)$.

Таким образом, $df(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y$.

Дифференциалом независимой переменной по определению считаем ее приращение, т.е. $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$.

Функция называется *дифференцируемой на множестве D*, если она дифференцируема в каждой точке множества *D*.

Теорема. Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0) и $df(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y$ - ее дифференциал в этой точке, то в этой точке существуют частные производные функции *f*, и, кроме того,

$f'_x(x_0,y_0)=A$, $f'_y(x_0,y_0)=B$.

Теорема дает возможность вычислять дифференциал функции f по формуле $df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$.

Согласно теореме, если функция дифференцируема в точке, то в этой точке существуют частные производные функции. Обратное не верно. Для дифференцируемости функции требуется выполнение более сильных условий, чем наличие частных производных в точке.

Теорема. Если частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ функции f существуют в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и непрерывны в (x_0, y_0), то функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0).

Пример. Вычислим частные производные и дифференциал функции $f(x, y) = (x^2 + 5y)^3$ в точке (1, 1/5).

$$= 3(x^2 + 5y)^2 \cdot 2x, \qquad f'_y(x_0, y_0) = 3(x^2 + 5y)^2 \cdot 5,$$

$$f'_x(1,1/5) = 24, \qquad f'_y(1,1/5) = 60;$$

$$df(1,1/5) = 24dx + 60dy.$$

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема. Пусть функции $\varphi(s,t)$ и $\phi(s,t)$ определены в некоторой окрестности точки (s_0,t_0), а функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0) = (\varphi(s_0,t_0), \phi(s_0,t_0))$.

Если функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0), а в точке (s_0,t_0) существуют производные $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, то в точке (s_0,t_0) существует производная сложной функции $f(\varphi(s,t), \phi(s,t))$, причем

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Пример. Найдем частные производные сложной функции $u = x^2 \ln y$, где , .

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 2x\ln y\frac{1}{t} + \frac{x^2}{y}t = \frac{s}{t^2}(2\ln(st)+1),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 2x\ln y\left(-\frac{s}{t^2}\right) + \frac{x^2}{y}s = \frac{s^2}{t^3}(1-2\ln(st)).$$

Пример. Найдем производную сложной функции $u = x^4 + \sqrt{y}$, где $x = \ln t$, $y = t^2 + 1$. В этом примере функции x и y зависят от одной переменной t, поэтому сложная функция $f(x(t), y(t))$- функция одной переменной.

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 4x^3\frac{1}{t} + \frac{1}{2\sqrt{y}}2t = \frac{4\ln^3 t}{t} + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Пример. Пусть *f(u)* – произвольная дифференцируемая функция. Докажем, что функция $\varphi(x,y) = y \cdot f(x^2 - y^2)$ удовлетворяет уравнению $y^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + xy \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x\varphi$. Положим $x^2 - y^2 = u$.

Тогда $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (yf(u))'_x = y\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = y\frac{df}{du}2x = 2xy\frac{df}{du}$.

$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = (yf(u))'_y = f(u) + y\frac{\partial f}{\partial y} = f(u) + y\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = f(u) - 2y^2\frac{df}{du}$.

Следовательно,

$$y^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + xy\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2xy^3\frac{df}{du} + xy(f(u) - 2y^2\frac{df}{du}) = xyf(u) = xyf(x^2 - y^2) = x\varphi$$

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть функция $u = f(x,y)$ в окрестности точки $(x,y) \in D \subset \Re^2$ имеет частную производную $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Частная производная функции $\frac{\partial u}{\partial x}$ по переменной x называется *частной производной второго порядка* по переменной x и обозначается $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ или f''_{xx}.

Частная производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ по переменной y называется *частной производной второго порядка* по переменным x и y и обозначается $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ или f''_{xy}.

Аналогично определяются частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (f''_{yx} и f''_{yy}) как частные производные функции $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Производные $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ называются *смешанными частными производными.*

Теорема. Пусть функция $u = f(x,y)$ определена вместе со своими частными производными f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), причем смешанные производные f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в этой точке. Тогда значения смешанных производных в этой точке равны, т.е. $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Частные производные от производных второго порядка называются частными производными третьего порядка: $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}$ и т.д.

Частная производная (по любой из независимых переменных) от частной производной порядка *m-1* называется частной производной порядка *m*.

Теорема справедлива и для смешанных производных третьего, четвертого и более высоких порядков. Например, если функция $u = f(x, y)$ определена вместе со своими частными производными до порядка 3 включительно в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), причем смешанные производные f'''_{xxy}, f'''_{xyx} и f'''_{yxx} непрерывны в этой точке, то значения смешанных производных в этой точке равны: $f'''_{xxy}(x_0, y_0) = f'''_{xyx}(x_0, y_0) = f'''_{yxx}(x_0, y_0)$.

Дифференциалом второго порядка функции двух переменных называется дифференциал от дифференциала первого порядка.

Если функция $u = f(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) (т.е. существуют непрерывные частные производные функции f до второго порядка включительно в окрестности точки (x_0, y_0)), тогда

$$d^2 f(x_0, y_0) = d(df(x_0, y_0)) =$$

$$f''_{xx}(x_0, y_0)dx^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)dxdy + f''_{yy}(x_0, y_0)dy^2.$$

Пример. Найдем производные второго порядка дважды непрерывно дифференцируемой сложной функции $u = f(x, y)$, где $x = st$, $y = 2s + 7t$.

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}t + \frac{\partial f}{\partial y}2, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}s + \frac{\partial f}{\partial y}7.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}t + \frac{\partial f}{\partial y}2\right) = t\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + 2\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$= t\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial s} + t\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial s} + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial s} + 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial s} =$$

$$= t^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 4t\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}s + \frac{\partial f}{\partial y}7\right) = \frac{\partial f}{\partial x} + s\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + 7\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} + s\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial s} + s\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial s} + 7\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial s} + 7\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial s} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} + st\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (2s+7t)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 14\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y},$$

аналогично вычисляем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = s^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 14s\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 49\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}.$$

ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ

Пусть l – единичный вектор в $\Re^2$ с координатами $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Производной функции $u = f(x, y)$ *по направлению вектора* l в точке (x_0, y_0) называется $\lim\limits_{t \to +0} \dfrac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t}$.

Производная по направлению обозначается $\partial f / \partial l\,(x_0, y_0)$.

Градиентом функции f в точке (x_0, y_0) называется вектор, координатами которого являются частные производные функции в точке:

$$grad\, f\,(x_0, y_0) = (\, f'_x(x_0, y_0),\ f'_y(x_0, y_0)\,) = f'_x(x_0, y_0)\, i + f'_y(x_0, y_0)\, j.$$

Легко показать, что производная по направлению l равна скалярному произведению вектора градиента и вектора l:

$$\frac{\partial f}{\partial l}\,(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\sin\alpha = \left|grad\ f\,(x_0, y_0)\right| \cdot \cos\gamma,$$

где γ – угол между векторами $grad\, f\,(x_0, y_0)$ и l.

Из последней формулы следует, что производная по направлению вектора $grad\ f\ (x_0, y_0)$ имеет наибольшее значение среди производных по различным направлениям и равна модулю вектора градиента.

Пример. Найдем производную функции $f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$ в точке M (1, 0) в направлении вектора MN, где N (5, 3).

Вектор MN имеет координаты (4, 3), $|MN| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Значит, единичный вектор l имеет координаты (4/5, 3/5). Вычислим частные производные в точке M: $f'_x(1,0) = 6x\big|_{x=1} = 6$, $f'_y(1,0) = -4y\big|_{y=0} = 0$. Тогда $\partial f / \partial l\,(1,0) = 6 \cdot 4/5 + 0 \cdot 3/5 = 24/5$.

Пример. Найдем производную функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ в точке (2,3) в направлении вектора градиента в этой точке.

Вычислим частные производные:

$f'_x(2,3) = 2x\big|_{x=2} = 4$, $f'_y(2,3) = 2y\big|_{y=3} = 6$.

Производная в направлении вектора градиента в точке равна модулю вектора *grad f*. Следовательно, $\dfrac{\partial f}{\partial l}(2,3) = (\, gradf\,(2,3)(\, = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$.

КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Для дифференцируемой в точке (x_0, y_0) функции $u = f(x, y)$ верно следующее соотношение: $f(x, y) - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$ (это следует из определения дифференциала первого порядка). Коэффициенты A и B однозначно определяются: $f'_x(x_0, y_0) = A$, $f'_y(x_0, y_0) = B$.

Уравнение $z - z_0 = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$ является уравнением плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0). Эта плоскость называется *касательной плоскостью* к графику функции $u = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0).

Таким образом, касательной плоскостью к графику функции $u = f(x, y)$ в точке является такая плоскость, что разность ее аппликаты и значения функции $f(x, y)$ в этой точке есть величина, бесконечно малая по сравнению с ρ при $\rho \to 0$.

Уравнение нормали к графику функции $u = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0) имеет вид $\dfrac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \dfrac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \dfrac{z - z_0}{-1}$.

Если уравнение гладкой поверхности задано в неявном виде $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке (x_0, y_0, z_0) имеет вид $F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$, а уравнение нормали в этой точке:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Пример. Напишем уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 2x^2 - 4y^2$ в точке (-2, 1, 4).

$z'_x(-2,1) = 4x\big|_{x=-2} = -8$, $z'_y(-2,1) = -8y\big|_{y=1} = -8$. Уравнение касательной плоскости имеет вид: $z - 4 = -8(x + 2) - 8(y - 1)$ или $8x + 8y + z + 4 = 0$.

Уравнение нормали: $(x + 2)/8 = (y - 1)/8 = z - 4$.

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Точка (x_0, y_0) называется точкой *локального максимума* (*локального минимума*) функции $u = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \Re^2$, если существует окрестность точки (x_0, y_0), для всех точек которой выполнено неравенство

$f(x, y) < f(x_0, y_0)$ ($f(x, y) > f(x_0, y_0)$).

Точки локального максимума и локального минимума функции называются *точками локального экстремума*.

Например, точка (0,0) является точкой минимума функции $u = x^2 + y^2$.

Теорема. (*необходимое условие экстремума*). Если функция $u = f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) локальный экстремум и в этой точке существуют частные производные f, то $f'_x(x_0, y_0) = 0$ и $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Точка (x_0, y_0) называется *стационарной точкой* функции f, если $f'_x(x_0, y_0) = 0$ и $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Теорема. (*достаточное условие экстремума*). Пусть функция $u = f(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки (x_0, y_0).

Обозначим $\Theta = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2$. Тогда

1) если $\Theta > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f имеет локальный экстремум: максимум при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ и минимум при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$;

2) если $\Theta < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f не имеет экстремума;

3) если $\Theta = 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f может иметь локальный экстремум, а может и не иметь его (в этом случае требуются дополнительные исследования).

Пример. Исследуем на экстремум функции $u = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$.

Отметим, что функция u определена и дифференцируема на всей плоскости. $u'_x = 6xy - 12$, $u'_y = 3x^2 + 3y^2 - 15$. Приравнивая частные производные к нулю и решая полученную систему, находим стационарные точки функции: (2, 1), (1, 2), (-2, -1), (-1, -2).

$$\Theta = u''_{xx}u''_{yy} - (u''_{xy})^2 = 6y \cdot 6y - (6x)^2 = 36(y^2 - x^2).$$

$\Theta(2, 1) = 36 \cdot (1 - 4) = -108 < 0$, поэтому в точке (2, 1) экстремума нет.

$\Theta(1, 2) = 36 \cdot (4 - 1) = 108 > 0$, $u''_{xx}(1,2) = 12 > 0$, следовательно, в точке (1, 2) функция имеет минимум, $u(1,2) = -25$.

$\Theta(-2, -1) = 36 \cdot (1 - 4) = -108 < 0$, в точке (-2, -1) экстремума нет.

$\Theta(-1, -2) = 36 \cdot (4 - 1) = 108 > 0$, $u''_{xx}(-1,-2) = -12 < 0$, следовательно, в точке (-1, -2) функция имеет максимум, $u(-1, -2) = 31$.

НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Пусть функция $u = f(x, y)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве D.

Напомним, что множество $D \subset \Re^2$ называется *ограниченным*, если существует такая окрестность $U(0,0)$, что $D \subset U(0,0)$; множество $D \subset \Re^2$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

По теореме Вейерштрасса существуют такие точки $(x_1, y_1) \in D$ и $(x_2, y_2) \in D$, что $f(x_1, y_1)$ является наибольшим значением функции на множестве D, а $f(x_2, y_2)$ – наименьшим ее значением на множестве D.

Функция, дифференцируемая в ограниченной области и непрерывная на ее границе, достигает своего наибольшего и наименьшего значений либо в стационарных точках, либо в граничных точках D.

Пример. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $u = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$ на множестве D, ограниченном прямыми $x + y = 4$, $x = 0$, $y = 0$. (2, 1), (1, 2), (-2, -1), (-1, -2) - стационарные точки функции u, но (-2,-1),

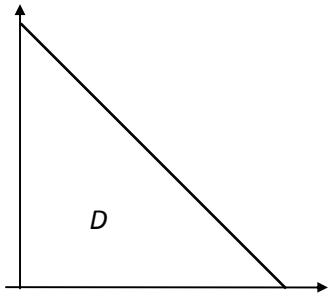


Рис. 7.

(-1,-2) не принадлежат D.

u (2, 1) = -23, u (1, 2) = -25.

Изучим поведение функции u на x границе множества D.

1) $y = 0$, $x \in [0,4]$. На этом участке границы $u = 3 - 12x$. Это функция одной переменной, которая принимает наименьшее значение в точке $x = 4$, а наибольшее значение в точке $x = 0$: u (4,0) = -45, u (0,0)= 3;

2) $x = 0$, $y \in [0,4]$. На этом отрезке $u = y^3 - 15y + 3$. Для того чтобы найти наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке, вычислим ее значения в стационарных точках и на концах отрезка: $u' = 3y^2 - 15$; $u' = 0 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{5}$, но $-\sqrt{5} \notin [0,4]$, поэтому вычисляем u (0,0) = 3, u $(0, \sqrt{5})$= $= 3 - 10\sqrt{5}$, u (0,4) = 7. Наибольшим является значение в точке (0,4), а наименьшим – в точке (0, $\sqrt{5}$);

3) $y = 4 - x$, $x \in [0,4]$. Здесь $u = 3x^2(4 - x) + (4 - x)^3 . -12x - 15(4 - x) + 3$

$= -4x^3 + 24x^2 - 45x + 7$.

Вычисляем значения функции в стационарных точках и на концах отрезка: $u' = -12x^2 + 48x - 45$; $u' = 0 \Leftrightarrow x = 3/2 \vee x = 5/2$; u (0,4)= 7, u (3/2, 5/2) = -20, u (5/2,3/2)= -18, u (4,0)= -45. На этом участке границы наибольшим является значение функции в точке (0,4), а наименьшим - в точке (4,0).

Из полученных в пунктах 1)-3) наименьших и наибольших значений функции на различных участках границы и из значений функции в стационарных точках выбираем самое большое и самое маленькое. Наибольшее значение: u (0,4)= 7, наименьшее значение: u (4,0)= -45.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Найти и изобразить области существования функций:

1. а) $z = x + \arccos y$; б) $z = \ln(x^2 + y)$.

2. а) $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$; б) $z = \arcsin\frac{y}{x}$.

3. а) $z = \sqrt{y \sin x}$; б) $z = \frac{1}{x^2 - y^2}$.

4. а) $z = \arccos(x^2 + y^2)$; б) $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25}}$.

5. а) $z = \arcsin\frac{y-1}{x}$; б) $z = \ln(x + y)$.

6. а) $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$; б) $z = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y}$.

7. а) $z = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$; б) $z = \ln(-x + y)$.

8. а) $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$; б) $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$.

9. а) $z = \sqrt{4x^2 + 9y^2 - 1}$; б) $z = \arcsin(x + y)$.

10. а) $z = \ln(x^2 - 2y + 4)$; б) $z = \sqrt{2x^2 - y + 1}$.

11. а) $z = \arccos(x^2 + y^2)$; б) $z = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{9 - y^2}$;

12. а) $z = \ln(y^2 + 4x - 6)$; б) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \sqrt{16 - x^2 - y^2}$;

13. а) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}} + \frac{9}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$; б) $z = \arcsin\frac{y}{x^2}$;

2. Проверить тождество:

1. $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, если $z = \ln(x + e^{-y})$.

2. $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0$, если $z = e^{xy}$.

3. $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 9\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, если $z = e^{-x-3y} \cdot \sin(x + 3y)$.

4. $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = xe^{\frac{y}{x}}$.

5. $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = e^{xy}$.

6. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = arctg\frac{x}{y}$.

7. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$, если $z=x\ln\dfrac{y}{x}$.

8. $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\ln x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$, если $z=x^{y}$.

9. $\dfrac{\partial z}{\partial y}-x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$, если $z=x\sin^2 y$.

10. $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}+\dfrac{\partial^3 z}{\partial^3 y}=x\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}+y\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$, если $z=xe^{y}+ye^{x}$.

11. $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}+\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}-\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}-\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}=2(\dfrac{1}{y^3}-\dfrac{1}{x^3})$, если $z=\ln\dfrac{x^2-y^2}{xy}$.

12. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, если $z=e^{x}(\cos y+x\sin y)$.

13. $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$, если $z=\ln(e^{z}+e^{y})$.

14. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y})^2=0$, если $z=\ln(e^{x}+e^{y})$.

15. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, если $z=e^{x}(x\cos y-y\sin y)$.

16. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, если $z=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

17. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, если $z=\dfrac{y}{y^2-4x^2}$.

18. $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$, если $z=y\cos(x^2-y^2)$.

19. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, если $z=x\sin(x+y)+y\cos(x+y)$.

20. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{4}{y^2}\dfrac{\partial}{\partial y}(y^2\dfrac{\partial z}{\partial y})$, если $z=\dfrac{1}{y}(\sin(2x+y)-\cos(2x-y))$.

21. $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$, если $z=ytg(x^2-y^2)$.

22. $\frac{\partial}{\partial x}(x^2\frac{\partial z}{\partial x}) = x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z = \frac{1}{x}(\sin(x-y)+\cos(x+y))$.

23. $\frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x\sin 2y + \frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial z}{\partial y})$, если $z = x\sin^2 y + y\sin^2 x$.

24. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = arctg\frac{y}{x}$.

25. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = \sin(y-2x)+\cos(y+2x)$.

26. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = \sin(xy) + \sqrt{xy}\cos(\frac{y}{x})$.

27. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = \sin(2x+3)\sin 2y$.

28. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, если $z = arctg\frac{x+y}{1-xy}$.

29. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xy}{\sqrt{(2xy+y^2)^3}}$, если $z = \sqrt{2xy+y^2}$.

30. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$, если $z = x\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}) - \sqrt{x^2+y^2}$.

3. Найти полную производную:

1. $z = \frac{x^3+y^3}{2x^2+3y^2}$.

2. $z = arctg\frac{2x^2}{y^3}$.

3. $z = \arcsin\frac{xy}{y+1}$.

4. $z = e^{2x}(x^2+y^2)$.

5. $z = \ln(x^3+2xy-y^3+x^2y)$.

6. $z = \sin(x+5y) - \cos(xy+1)$.

7. $z = \frac{2}{arctg\frac{y}{x}}$.

8. $z = \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

9. $z = xy\ln(x+3y)$.

10. $z = \sqrt{\ln xy} + xy$.

11. $z = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

12. $z = \sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$.

13. $z = \frac{xy}{x^2+5y^2}$.

14. $z = \sqrt[3]{xy+y^2+5x^2}$.

15. $z = \sin(xy)\cos(xy).$ 16. $z = \arcsin(xy) + 6y + 7x.$

17. $z = \arcsin\dfrac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$

4. Найти частные производные от функции заданной неявно:

1. $x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1.$ 2. $e^{xyz} - arctg\dfrac{xy}{z} = 0.$

3. $xyz - e^{2z} - e^{2y} - e^{2x} + \dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} = 0.$

4. $z^2 + y^2 + zy + x^2 + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{z^2}{x} + \dfrac{y^2}{z} = 0.$

5. $\sin(x^2 + y^2 + z^2) + \cos(x + y + z) = 1.$

6. $3x^2y^2 + 2xyz^2 - 2x^3z + 4y^{3z} - 4 = 0.$

7. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz = 0.$ 8. $e^{xyz} + \sin(xuz) + \cos(2yz) = 0.$

9. $\ln(x - y) + x\sin^2 y + y\sin^2 z = 1.$

10. $x + x^3 + xy^2 - 5xy^3 + z^3 + xz^3 = 0.$ 11. $e^z(\cos y + x\sin z) = 0.$

12. $e^x \sin y - e^z \cos y + e^y \sin z = 0.$

13. $(x^2 + y^2)^2(y^2 + z^2)^2 + (x^2 + z^2)^2 = 0.$

14. $\dfrac{y}{x} + tg\dfrac{z}{y} + ctg\dfrac{x}{z} = 0.$ 15. $z - ye^{\frac{x}{z}} - xe^{\frac{z}{y}} = 0.$

16. $\ln(x^2 + \sqrt{x^2 + z^2}) + \ln(y^2 + \sqrt{xy}) = 0.$ 17. $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz} = 0.$

18. $arctg\dfrac{y}{x} + arctg\dfrac{z}{y} = 0.$ 19. $\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \cos(xyz) - \sqrt{z^2 + y^2 = 0.}$

20. $\sin^2(2x + y) + \cos^2(2y + z) = 0.$

21. $xy - \ln(xy) - yz - xy^2z = 0.$ 22. $arctg\dfrac{x + y}{z} - \dfrac{y}{z} = 0.$

23. $ye^x + xe^z + ze^y = 0.$ 24. $\dfrac{z}{\sqrt{1 - x^4}} + \dfrac{x}{\sqrt{1 - y^4}} + \dfrac{y}{\sqrt{1 - z^4}} = 0.$

25. $z^3 - 3xyz - x^2y^3 + \sqrt{z} = 0.$

26. $x^2y - e^{xy} - e^{yz} + xz^2 = 0.$

27. $\sin(xyz) + tg(xyz) + \cos\frac{x}{z} = 0.$

28. $\arcsin\frac{z}{x} + arctg\frac{y}{z} = 0.$

29. $\sin\frac{x+y}{z} + \cos\frac{y+z}{x} + \sin\frac{x+z}{y} = 0.$

30. $tg(3x + 2yz) + \sqrt{x^2 + z^2} + xyz = 0.$

5. Исследовать на экстремум функцию:

1. $z = x^3 + y^3 - 6xy.$

2. $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1.$

3. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y.$

4. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3.$

5. $z = x^3 + xy^2 + 6xy.$

6. $z = (x^2 + y)\sqrt{e^y}.$

7. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$

8. $z = y^2 - 6xy + x^3 - 39x + 18y + 20.$

9. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2.$

10. $z = 6y - x - y^2 + y\sqrt{x}.$

11. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2.$

12. $z = xy^2(1 - x - y).$

13. $z = x^3 + y^3 - 3xy.$`

14. $z = x^3 + y^3 - 15xy.$

15. $z = (x-1)^2 + 2y^2.$

16. $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2).$

17. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$

18. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y.$

19. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$

20. $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y).$

21. $z = xy(1 - x - y).$

22. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$

23. $z = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}.$

24. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$

25. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$

26. $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y).$

27. $z = \dfrac{1 + 2x + 3y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}.$

28. $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$

29. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$

30. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$

6. Найти производную по направлению вектора $\vec{MN}$, построить линию уровня и градиент в точке *M*:

1. $z = x^2y.$

2. $z = x + y.$

3. $z = x^2 + y^2.$

4. $z = x^2 - z^2.$

5. $z = \sqrt{xy}.$

6. $x = (1 + x + y)^2.$

7. $z = \dfrac{y}{x^2}.$

8. $z = \dfrac{y}{\sqrt{x}}.$

9. $z = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}.$

10. $z = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$.
11. $z = \ln(x^2 + y)$.
12. $z = \arcsin xy$.
13. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
14. $z = xy$.
15. $z = x^2 y + x$.
16. $z = y(x^2 + 1)$.
17. $z = \dfrac{xy - 1}{x^2}$.
18. $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.
19. $z = y - 2x$.
20. $z = \dfrac{x}{y}$.
21. $z = x^2 + 4x + 4 + y^2$.
22. $z = x^2 - 4x + y^2$.
23. $z = x^2 - y^2 - 4y$.
24. $z = 4x^2 + 9y^2$.
25. $z = (x + 2)y - 1$.
26. $z = (x - 2)y - 3$.
27. $z = \dfrac{x}{\sqrt{y}}$.
28. $z = \dfrac{2x}{x^2 - y^2}$.
29. $z = \dfrac{2y}{x^2 - y^2}$.
30. $z = y(x^2 + 4)$.

Вариант 1	***Вариант 2***
1. Найдите область определения функции $f(x,y)$, нарисуйте его, охарактеризуйте (замкнутость, связность, ограниченность)	
$f(x,y) = \ln\left((1-x)\sin\pi\left(x^2+y^2\right)\right)$	$f(x,y) = \sqrt{2x - x^2 - y^2} + \arcsin\dfrac{xy}{x^2+y^2}$
2. Нарисуйте линии уровня функции	
$z = (x+y)^2$	$z = \dfrac{y}{\lvert x\rvert}$
3. Нарисуйте график функции $z = f(x,y)$	
$z = 1 + \sqrt{x^2+y^2}$, D_f : $x^2 + y^2 \le 4$	$z = \sqrt{y^2 - x^2}$, D_f : $\lvert x\rvert \le y \le 1$

4. Найдите дифференциалы первого и второго порядка функции	
$z=\dfrac{\ln(y^3+x)}{\sqrt{x^2-1}}$	$z=arctg\dfrac{y^2+x^3}{x+y}$
5. Найдите частные производные $\partial^2 f/\partial s^2$, $\partial^2 f/\partial s\partial t$, $\partial^2 f/\partial t^2$ дважды непрерывно дифференцируемой сложной функции $z=f(x,y)$, если	
$x=t\cdot s,\ \ y=s+t$	$x=s^2+t,\ y=t^3$
6. Найдите в точке M частные производные первого и второго порядка неявной функции $z=f(x,y)$	
$x^3-4x^2z^2+yz^3+2y^4=0,$ $M(1,1,1)$	$xy^4+x^4y-z-z^4=0,$ $M(1,1,1)$
7. Найдите производную f по направлению вектора l в точке M	
$f(x,y)=3x^2+5y^2,\quad l=(-1,2),$ $M(1,1)$	$f(x,y)=x\sin(x+y),\quad l=(-1,0),$ $M(\pi/4,\pi/4)$
8. Исследуйте функцию $u=u(x,y,z)$ на экстремум	
$u=2x^2+y^2+z^2-xy+2z-3x+4y$	$u=x^2+3y^2+z^2-xz-2x+3y$
9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном множестве	

$u = xy + x + y,$ $-2 \le x \le 2,$ $-2 \le y \le 4$	$u = x^2 - xy + y,$ $\lvert x\rvert \le 2,\ \lvert y\rvert \le 3$
Вариант 3	***Вариант 4***
1. Найдите область определения функции $f(x,y)$, нарисуйте его, охарактеризуйте (замкнутость, связность, ограниченность)	
$f(x,y) = \sqrt{1 - tg\pi x} + \arccos y$	$f(x,y) = \sqrt{1 - \log_{1/2}(x - \arcsin y)}$
2. Нарисуйте линии уровня функции	
$z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$	$z = \sqrt{xy}$
3. Нарисуйте график функции $z = f(x,y)$	
$z = xy,\quad D_f: x^2 + y^2 \le 1,$ $x \ge 0,\ y \ge 0$	$z = \sqrt{4 - x^2},\ D_f: x^2 + y^2 \le 1$
4. Найдите дифференциалы первого и второго порядка функции	
$z = \dfrac{\ln(y^2 + x)}{\sqrt{x^4 - 1}}$	$z = \arcsin\dfrac{y^2 + x}{x + y}$
5. Найдите частные производные $\partial^2 f/\partial s^2$, $\partial^2 f/\partial s\partial t$, $\partial^2 f/\partial t^2$ дважды непрерывно дифференцируемой сложной функции $z = f(x,y)$, если	
$x = 3s + t,\quad y = t/s$	$x = \ln t,\quad y = 5t + s$

6. Найдите в точке M частные производные первого и второго порядка неявной функции $z = f(x, y)$	
$xz^5 - 3x^3y - 4zy^4 = 0$, $M(1, -1, 1)$	$x^2y^2 + 3yz^3x + 5y^3 - 3 = 0$, $M(2, 1, -1)$
7. Найдите производную f по направлению вектора l в точке M	
$f(x, y) = 3x^4 + y^3 + xy$, $M(1, 2)$, l образует угол 135° с осью $0x$	$f(x, y) = arctg(y/x)$, $M\left(1/2, \sqrt{3}/2\right)$, l - внешняя нормаль к окружности $x^2 + y^2 = 2x$ в точке М
8. Исследуйте функцию $u = u(x, y, z)$ на экстремум	
$u = 3xy + 5xz - 8yz - 9x^2 - 6y^2 - 11z^2$	$u = yz - 2xy - 4x^2 - 3y^2 - z^2 - 8x$
9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном множестве	
$u = x^2 + y^2 - 4x$, $-2 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 3$	$u = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$, $0 \le x \le 2$, $\lvert y \rvert \le 1$
Вариант 5	***Вариант 6***
1. Найдите область определения функции $f(x, y)$, нарисуйте его,	

охарактеризуйте (замкнутость, связность, ограниченность)	
$f(x,y)=\sqrt{\arccos\log_3(xy+1)}$	$f(x,y)=\ln\sin x+\arccos(x+y)$
2. Нарисуйте линии уровня функции	
$z=\max\left(e^y,\lvert x\rvert\right)$	$z=\min\left(e^x,y\right)$
3. Нарисуйте график функции $z=f(x,y)$	
$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $D_f: -1\le x\le 1,$ $-1\le y\le 1$	$z=1+x^2+y^2$, $D_f: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$
4. Найдите дифференциалы первого и второго порядка функции	
$z=\cos\frac{(y^3+x)}{\sqrt{x}}$	$z=tg\frac{y^2+x}{\sqrt{y}}$
5. Найдите частные производные $\partial^2 f/\partial s^2$, $\partial^2 f/\partial s\partial t$, $\partial^2 f/\partial t^2$ дважды непрерывно дифференцируемой сложной функции $z=f(x,y)$, если	
$x=\frac{t}{s},\ \ y=s+t$	$x=\frac{1}{s+t},\ \ y=t\cdot s$
6. Найдите в точке M частные производные первого и второго порядка неявной функции $z=f(x,y)$	
$z^3+x^2y-y^3z+6x+46=0$, $M(0,3,2)$	$x^3-6z^3x^2+y^2z^2+y^5=0$, $M(0,-1,-1)$

7. Найдите градиент функции f в точке M	
$f(x,y)=1+x^2y^x, \quad M(-1,1)$	$f(x,y)=y\cdot x^y, \quad M(2,1)$
8. Исследуйте функцию $u=u(x,y,z)$ на экстремум	
$u=x^2+y^2+2z^2+yz+2z-3y$	$u=2x^2+\frac{3}{2}y^2+z^2-xy+2xz+yz-y+2z$
9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном множестве	
$u=x^2+y^2-xy, \quad \lvert x\rvert+\lvert y\rvert\le 1$	$u=x^2+2y+1, \ x+y\le 1, \ x\ge 0, \ y\ge 0$
Вариант 7	***Вариант 8***
1. Найдите область определения функции $f(x,y)$, нарисуйте его, охарактеризуйте (замкнутость, связность, ограниченность)	
$f(x,y)=\ln\left(x-y^2+4\right)+\arcsin(x+4)$	$f(x,y)=\arccos\frac{y}{\sin x}$
2. Нарисуйте линии уровня функции	
$z=(x-y)^2$	$z=\lvert x\rvert+y$
3. Нарисуйте график функции $z=f(x,y)$	
$z=\sqrt{1+x^2+y^2}, \quad D_f: x^2+y^2\le 9$	$z=3-x-y, \quad D_f: x^2+y^2\le 1$

4. Найдите дифференциалы первого и второго порядка функции	
$z = x^2 \arccos\dfrac{y^3}{x}$	$z = y^2 arctg\dfrac{y^2}{x}$
5. Найдите частные производные $\partial^2 f / \partial s^2$, $\partial^2 f / \partial s \partial t$, $\partial^2 f / \partial t^2$ дважды непрерывно дифференцируемой сложной функции $z = f(x, y)$, если	
$x = t^2 - s^2, \quad y = \dfrac{s+t}{2}$	$x = \dfrac{1}{s-t}, \quad y = t^2$
6. Найдите в точке M частные производные первого и второго порядка неявной функции $z = f(x, y)$	
$xz^6 - 6x^3y + 4y^2z^2 = 1,$ $M(2, 0, 1)$	$z^4 + x^2y^2 - yz^2 - 6x^2z - 1 = 0,$ $M(-1, 1, 2)$
7. Найдите производную f по направлению вектора M_0M в точке M_0	
$f(x, y) = 5x + 10x^2y + y^5,$ $M_0(1, 2),$ $M(5, -1)$	$f(x, y) = xy^2,$ $M_0(3, 2),\ M(7, 5)$
8. Исследуйте функцию $u = u(x, y, z)$ на экстремум	
$u = xz + yz - 2xy - 5x^2 - y^2 - 3z^2 + 6z$	$u = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + xy + xz - 4x - -2y + z$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном множестве	
$u = x + 3y$, $x + y \le 6$, $x + 4y \ge 4$, $y \le 2$	$u = x^2 - 2y + 3$, $y - x \le 1$, $x \le 0$, $y \ge 0$
Вариант 9	***Вариант 10***
1. Найдите область определения функции $f(x, y)$, нарисуйте его, охарактеризуйте (замкнутость, связность, ограниченность)	
$f(x,y) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{\cos^2 y}\right)$	$f(x,y) = \sqrt{\left(x^2 + y^2 - 1\right)\left(4 - x^2 - y^2\right)}$
2. Нарисуйте линии уровня функции	
$z = \max\left(x, \lvert y\rvert\right)$	$z = \min\left(\lvert x\rvert, y\right)$
3. Нарисуйте график функции $z = f(x, y)$	
$z = 2 - y$, $D_f: x^2 \le y \le 1$	$z = 1 + x^2$, $D_f: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$
4. Найдите дифференциалы первого и второго порядка функции	
$z = x \arccos\sqrt{\frac{x}{y+1}}$	$z = \left(1 + x^2\right) tg\sqrt{x + y^3}$
5. Найдите частные производные $\partial^2 f / \partial s^2$, $\partial^2 f / \partial s \partial t$, $\partial^2 f / \partial t^2$ дважды непрерывно дифференцируемой сложной функции $z = f(x, y)$, если	

$x = s^3,\ \ y = \dfrac{s}{t}$	$x = t + 2s,\ \ y = \sqrt{t}$
6. Найдите в точке M частные производные первого и второго порядка неявной функции $z = f(x, y)$	
$x\sqrt{y} + 2x^2z^3 - yz - 16\sqrt{x}\cos y = 0$ $M(1, 0, 2)$	$\sin x \cos y - 2z^2 + 5xz + xy^2 + 2 = 0,$ $M(0, 1, 1)$
7. Найдите наибольшее значение производной по направлению функции f в точке M	
$f(x, y) = xy^5 - 3x^4y^5,\quad M(1, 1)$	$f(x, y) = \dfrac{x + \sqrt{y}}{y},\quad M(2, 1)$
8. Исследуйте функцию $u = u(x, y, z)$ на экстремум	
$u = x^2 + \dfrac{3}{2}y^2 + 2z^2 + xy + xz -$ $-4x - 2y + z$	$u = \dfrac{1}{2}xy + xz - 2yz - x^2 - y^2 -$ $-5z^2 - 2x + 4y$
9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном множестве	
$u = x^2 + y^2 - xy - x - y,$ $x + y \le 3,\quad x \ge 0,\quad y \ge 0$	$u = 2xy + 3,\quad y^2 + x^2 \le 1$
Вариант 11	***Вариант 12***
1. Найдите область определения функции $f(x, y)$, нарисуйте его, охарактеризуйте (замкнутость, связность, ограниченность)	

$f(x,y)=\sqrt{\pi-6\arcsin\left(x\left(1+y^2\right)\right)}$	$f(x,y)=\sqrt{\pi-3\arccos\dfrac{x}{1+y^2}}$
2. Нарисуйте линии уровня функции	
$z=\lvert x\rvert+\lvert y\rvert-\lvert x+y\rvert$	$z=\lvert x\rvert-\lvert y\rvert$
3. Нарисуйте график функции $z=f(x,y)$	
$z=3-y^2,\ D_f:\ x^2\le y\le\sqrt{3}$	$z=9-x^2,\ \ D_f:\ x^2+y^2\le 9$
4. Найдите дифференциалы первого и второго порядка функции	
$z=2\arcsin\dfrac{2}{3x+1}\cdot\sqrt{x+y^5}$	$z=\dfrac{y}{xy+1}arctg\sqrt{x^3}$
5. Найдите частные производные $\partial^2 f/\partial s^2$, $\partial^2 f/\partial s\partial t$, $\partial^2 f/\partial t^2$ дважды непрерывно дифференцируемой сложной функции $z=f(x,y)$, если	
$x=\dfrac{t}{s},\ \ y=t^2$	$x=2t+1,\ y=st^2$
6. Найдите в точке M частные производные первого и второго порядка неявной функции $z=f(x,y)$	
$x^4y^4-z^2\cos y+z=2,$ $M(0,\pi,1)$	$2x^2y^3+xz^2-3x^2y^2z+2z=0$ $M(-1,1,1)$
7. Найдите единичный вектор l, по направлению которого	

производная $\partial f/\partial l$ в точке M наибольшая	
$f(x,y)=x^2-xy+y^2,\quad M(-1,2)$	$f(x,y)=x-3y+\sqrt{3xy},\quad M(3,1)$
8. Исследуйте функцию $u=u(x,y,z)$ на экстремум	
$u=5x^2+y^2+z^2+2xy-xz-\frac{1}{2}yz-10x$	$u=5x^2+y^2+5z^2+2xy-xz-$ $-\frac{1}{2}yz-10x$
9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном множестве	
$u=(x-6)^2+(y+8)^2,\ x^2+y^2\le 25$	$u=x^4-y^4,\qquad y^2+x^2\le 4x$
Вариант 13	***Вариант 14***
1. Найдите область определения функции $f(x,y)$, нарисуйте его, охарактеризуйте (замкнутость, связность, ограниченность)	
$f(x,y)=\arccos(2\sin xy)$	$f(x,y)=\arcsin\frac{e^x}{y}+\sqrt{x+\lvert y\rvert}$
2. Нарисуйте линии уровня функции	
$z=\lvert x\rvert+\ln y$	$z=y+\lvert\ln x\rvert$
3. Нарисуйте график функции $z=f(x,y)$	
$z=\sqrt{1-x^2/4-y^2/9}$,	$z=1/y$,

$D_f: 0 \le x \le 1,$ $0 \le y \le 3\sqrt{1-x^2/4}$	$D_f: 1+x^2 \le y \le 2$
4. Найдите дифференциалы первого и второго порядка функции	
$z = \log_3 \dfrac{y^2+x}{x^2+2}$	$z = \dfrac{\arccos(xy^2)}{\sqrt{x+y}}$
5. Найдите частные производные $\partial^2 f/\partial s^2$, $\partial^2 f/\partial s \partial t$, $\partial^2 f/\partial t^2$ дважды непрерывно дифференцируемой сложной функции $z = f(x,y)$, если	
$x = \sqrt{1-t}$, $y = 2t^2 + s$	$x = 2t + s$, $y = st$
6. Найдите в точке M частные производные первого и второго порядка неявной функции $z = f(x,y)$	
$y^3 arctgx + z^3 x - \dfrac{\pi}{4} x^3 y + z = 0,$ $M(1,1,-1)$	$x^3 z^2 - y^3 z - 5x \cdot tgy - 1 = 0,$ $M(1,0,-1)$
7. Найдите производную f по направлению вектора l в точке M	
$f(x,y) = 3x^2 + 5y^2,$ $l = \left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right),$ $M(1,1)$	$f(x,y) = x\sin(x+y),$ $l = (-1,0)$, $M(\pi/4, \pi/4)$
8. Исследуйте функцию $u = u(x,y,z)$ на экстремум	

$u = 5x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xy - xz - $ $- yz - 4x + 2y$	$u = xy + xz - 2yz - 4x^2 - y^2 - 5z^2 - 2y$
9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном множестве	
$u = 3 + 2xy, \quad 4 \le x^2 + y^2 \le 9$	$u = x^2 y, \quad y^2 + x^2 \le 1$
Вариант 15	***Вариант 16***
1. Найдите область определения функции $f(x, y)$, нарисуйте его, охарактеризуйте (замкнутость, связность, ограниченность)	
$f(x, y) = \ln\left((1 - y)\cos\left(\pi\left(x^2 + y^2\right)\right)\right)$	$f(x, y) = \sqrt{1 - ctg\pi y} + \arccos x$
2. Нарисуйте линии уровня функции	
$z = \dfrac{1}{3x^2 + y^2}$	$z = x + \lvert 2y \rvert$
3. Нарисуйте график функции $z = f(x, y)$	
$z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2,$ $D_f : x \ge 0, \quad 2 + x^2 \le y \le 6$	$z = \sqrt{y^2 - x^2},$ $D_f : 0 \le x \le y, \quad 0 \le y \le 2$
4. Найдите дифференциалы первого и второго порядка функции	
$z = \ln \dfrac{1 + \sqrt{\sin x}}{\sqrt{xy^2}}$	$z = \dfrac{\cos(y^2 + xy)}{x + y^2}$

5. Найдите частные производные $\partial^2 f/\partial s^2$, $\partial^2 f/\partial s\partial t$, $\partial^2 f/\partial t^2$ дважды непрерывно дифференцируемой сложной функции $z = f(x,y)$, если	
$x = t^2, \quad y = s^3 + t$	$x = t/s, \ y = s - 2t$
6. Найдите в точке M частные производные первого и второго порядка неявной функции $z = f(x,y)$	
$5\sin^3 y \cdot z - \sqrt{3}\cos y \cdot z^2 + xy^3 z = 0,$ $M(0, \ \pi/6, \ 5/12)$	$2e^{y^2} - 5x \cdot \cos y \cdot z^5 + xz^2 + 3x = 0,$ $M(2,0,1)$
7. Найдите производную f по направлению вектора l в точке M	
$f(x,y) = 3x^3 + y^4 + xy, \ M(1,2),$ l образует угол 45° с осью Ox	$f(x,y) = arctg(y/x), \quad M\left(\sqrt{3}/2, 1/2\right),$ l - внешняя нормаль к окружности $x^2 + y^2 = 2y$ в точке M
8. Исследуйте функцию $u = u(x, y, z)$ на экстремум	
$u = xy - 2x^2 - y^2 - z^2 - 2z + x - 4y$	$u = xz - x^2 - 3y^2 - z^2 + x - 6y + z$
9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном множестве	
$u = y^2 - x^2, \quad x^2 + y^2 \le 8x$	$u = x^3 + y^2, \quad 3x + 2y - 6 = 0$

Вариант 17	***Вариант 18***
1. Найдите область определения функции $f(x,y)$, нарисуйте его, охарактеризуйте (замкнутость, связность, ограниченность)	
$f\left(x,y\right)=\sqrt{1-\lg\left(y-\arccos x\right)}$	$f(x,y)=\arccos\left(x^2+y\right)+\ln\cos y$
2. Нарисуйте линии уровня функции	
$z=\min\left(\lvert x\rvert, y^3\right)$	$z=\max\left(x^2,\lvert y\rvert\right)$
3. Нарисуйте график функции $z=f\left(x,y\right)$	
$z=\sqrt{1-x^2}$, $D_f: x^2+y^2\le 1$	$z=1-x^2-y^2$, $D_f: 4\left(x^2+y^2\right)\le 1$
4. Найдите дифференциалы первого и второго порядка функции	
$z=\ln\left(\arccos\frac{y^3}{\sqrt{x}}\right)$	$z=arctg\left(e^{y^2/\sqrt[3]{x}}\right)$
5. Найдите частные производные $\partial^2 f/\partial s^2$, $\partial^2 f/\partial s\partial t$, $\partial^2 f/\partial t^2$ дважды непрерывно дифференцируемой сложной функции $z=f\left(x,y\right)$, если	
$x=s^2+1$, $y=\sqrt{t}\cdot s$	$x=s+t$, $y=s\cdot t^2$
6. Найдите в точке M частные производные первого и второго порядка неявной функции $z=f\left(x,y\right)$	

$2y^5z^3+xy^9\cdot\sin(\pi z)-8x^4yz=0,$ $M(-1,1,2)$	$y^3z-5xyz^3-10x^4\cos(\pi z)-z^5=0,$ $M(-1,1,2)$
7. Найдите градиент функции f в точке M	
$f(x,y)=1+x^y y^3,\ M(1,-1)$	$f(x,y)=y^5\cdot x^y-5,\quad M(2,1)$
8. Исследуйте функцию $u=u(x,y,z)$ на экстремум	
$u=2x^2+y^2+\frac{3}{2}z^2+2xy-xz+$ $+yz-3y$	$u=3xy+5xz-8yz-9x^2-6y^2-11z^2$
9. Найдите условные экстремумы функции при данном уравнении связи	
$u=x^3-y^2,\ 2x-2y-3=0$	$u=x^3y^2,\quad x+2y-1=0$
Вариант 19	***Вариант 20***
1. Найдите область определения функции $f(x,y)$, нарисуйте его, охарактеризуйте (замкнутость, связность, ограниченность)	
$f\left(x,y\right)=\ln\left(y-x^2+1\right)+\arccos\left(2x+y\right)$	$f(x,y)=\arcsin^3\frac{x}{\cos y}$
2. Нарисуйте линии уровня функции	
$z=\max\left(\lvert x\rvert,\lvert y\rvert\right)$	$z=\min\left(\lvert x\rvert,\lvert y\rvert\right)$

3. Нарисуйте график функции $z = f(x, y)$	
$z = 1 - x^2, \quad D_f : y^2 \le x \le 1$	$z = 4 - x^2 - y^2,$ $D_f : 0 \le x \le \sqrt{4 - x^2}, \ -2 \le y \le 1$
4. Найдите дифференциалы первого и второго порядка функции	
$z = \dfrac{\sin^2(y + x)}{\sqrt{y^2 - 1}}$	$z = arctg\sqrt{2^{x^2} + y}$
5. Найдите частные производные $\partial^2 f / \partial s^2$, $\partial^2 f / \partial s \partial t$, $\partial^2 f / \partial t^2$ дважды непрерывно дифференцируемой сложной функции $z = f(x, y)$, если	
$x = t - 7s, \quad y = \ln t$	$x = s + 2t, \ y = 3st$
6. Найдите в точке M частные производные первого и второго порядка неявной функции $z = f(x, y)$	
$2x \cdot arctg\dfrac{y}{x} + xyz^2 + \dfrac{\pi}{2}z^3 + 1 = 0,$ $M(-1, 1, -1)$	$y^x z^2 - x^y + z^3 - 3z = 0$, $M(2, 1, -2)$
7. Найдите производную f по направлению вектора M_0M в точке M	
$f(x, y) = 5x + 10x^2 y + y^5,$ $M_0(1, 2),$ $M(5, -1)$	$f(x, y) = xy^2 + 7x^3 y,$ $M_0(3, 2), \ M(7, 5)$

8. Исследуйте функцию $u=u(x,y,z)$ на экстремум	
$u=x^2+5y^2+z^2+2xy-xz-yz-10y$	$u=x^2+xy+2y^2+4yz+5z^2-4z$
9. Найдите условные экстремумы функции при данном уравнении связи	
$u=5-3x-4y,\quad x^2+4y^2=25$	$u=1-4x-8y,\ x^2-8y^2=8$
Вариант 21	***Вариант 22***
1. Найдите область определения функции $f(x,y)$, нарисуйте его, охарактеризуйте (замкнутость, связность, ограниченность)	
$f\left(x,y\right)=\left(4-\frac{y^2}{\sin^2 x}\right)^{1/2}$	$f(x,y)=\arccos\frac{y}{e^x}+\sqrt{y+\lvert x\rvert}$
2. Нарисуйте линии уровня функции	
$z=y+\lvert\sin x\rvert$	$z=x+\lvert\cos y\rvert$
3. Нарисуйте график функции $z=f\left(x,y\right)$	
$z=\frac{1}{x},\ D_f: 1+y^2\le x\le 2$	$z=x^2+y^2,\ D_f:\ y^2\le x\le 1,\ y\ge 0$
4. Найдите дифференциалы первого и второго порядка функции	
$z=\frac{e^{\sin^2\left(x^2\right)}}{\sqrt{x+y^2}}$	$z=\sqrt[3]{\ln\left(\frac{y\cdot x^2}{x^2+y}\right)}$

5. Найдите частные производные $\partial^2 f/\partial s^2$, $\partial^2 f/\partial s\partial t$, $\partial^2 f/\partial t^2$ дважды непрерывно дифференцируемой сложной функции $z = f(x, y)$, если	
$x = 2(t+s)$, $y = \dfrac{t}{s}$	$x = st$, $y = \dfrac{2}{s+t}$
6. Найдите в точке M частные производные первого и второго порядка неявной функции $z = f(x, y)$	
$yz^3 - x^2 \cdot \sin y + xyz = \pi x - 1$, $M(1, \pi/2, 1)$	$\log_2 \sqrt{x^2+y^2} + xz^3 - yz = \dfrac{2}{\pi} arctg \dfrac{y}{x}$, $M(1,1,1)$
7. Найдите наибольшее значение производной по направлению $\partial f/\partial l$ в точке M	
$f(x,y) = xy^2 - 3x^4y^5$, $M(1,-1)$	$f(x,y) = \dfrac{x+\sqrt{y}}{y}$, $M(2,-1)$
8. Исследуйте функцию $u = u(x, y, z)$ на экстремум	
$u = 2xz + 4yz - 2xy - 2x^2 - 5y^2 - -5z^2 - 4x$	$u = 2xy + 2xz - 5x^2 - 6y^2 - 4z^2 - 8z$
9. Найдите условные экстремумы функции при данном уравнении связи	
$u = x^2 + xy + y^2$, $x^2 + y^2 = 1$	$u = 2x^2 + 12xy + y^2$, $x^2 + 4y^2 = 25$

Вариант 23	***Вариант 24***
1. Найдите область определения функции $f(x,y)$, нарисуйте его, охарактеризуйте (замкнутость, связность, ограниченность)	
$f\left(x,y\right)=\sqrt{2x+x^2+y^2}+\arccos\left(x-3\right)$	$f(x,y)=\arcsin\frac{e^y}{x}+\ln\left(x-x^2+6\right)$
2. Нарисуйте линии уровня функции	
$z=\min\left(x^2,y\right)$	$z=\max\left(x,y^2\right)$
3. Нарисуйте график функции $z=f\left(x,y\right)$	
$z=2xy,\ D_f:\ y^2\le x\le 1,\ x\ge 0$	$z=\sqrt{4-x^2-y^2},\ D_f:\ y^2+x^2\le 1$
4. Найдите дифференциалы первого и второго порядка функции	
$z=x^3\cdot\sin\left(\frac{y^3+x}{\sqrt{xy}}\right)$	$z=y^2\cdot tg\left(\frac{y^2+3}{x+y}\right)$
5. Найдите частные производные $\partial^2 f/\partial s^2$, $\partial^2 f/\partial s\partial t$, $\partial^2 f/\partial t^2$ дважды непрерывно дифференцируемой сложной функции $z=f\left(x,y\right)$, если	
$x=\frac{1}{s}+t,\ \ y=-t^2$	$x=\frac{1}{2}(s-t),\ y=s^2-t^2$
6. Найдите в точке M частные производные первого и второго	

порядка неявной функции $z = f(x, y)$	
$xe^y z^3 - x^2 y + 5z^2 - 4x = 0,$ $M(1, 0, -1)$	$xz^4 + x^4 \cdot arctg\, y - yz^2 - \frac{\pi}{4} z + 2 = 0,$ $M(-1, 1, 1)$
7. Найдите единичный вектор l, по направлению которого производная $\partial f / \partial l$ в точке M наибольшая	
$f(x, y) = x^2 - xy + y^2, \quad M(-1, 2)$	$f(x, y) = x - 3y + \sqrt{3xy}, \quad M(3, 1)$
8. Исследуйте функцию $u = u(x, y, z)$ на экстремум	
$u = 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 2xy - 2yz - 8y$	$u = 4x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 2xz - 2yz + 10z$
9. Найдите условные экстремумы функции при данном уравнении связи	
$u = (x-1)^2 + (y+1)^2,$ $x^2 + y^2 - 2xy = 0$	$u = x^3 + y^2,\ 3x + 2y - 6 = 0$
Вариант 25	***Вариант 26***
1. Найдите область определения функции $f(x, y)$, нарисуйте его, охарактеризуйте (замкнутость, связность, ограниченность)	
$f(x, y) = \ln\left((1 + x)\cos\pi\left(x^2 + y^2\right)\right)$	$f(x, y) = \sqrt{2y - x^2 - y^2} + \arccos\frac{xy}{x^2 + y^2}$

2. Нарисуйте линии уровня функции	
$z=(x+3y)^2$	$z=\dfrac{y}{\lvert x+y\rvert}$
3. Нарисуйте график функции $z=f(x,y)$	
$z=2+\sqrt{x^2+y^2}$, $D_f:\ x^2+y^2\le 9$	$z=\sqrt{4-y^2-x^2}$, $D_f:\lvert x\rvert\le y\le 2$
4. Найдите дифференциалы первого и второго порядка функции	
$z=e^{\sin\left(x^2\cdot\sin y\right)}$	$z=2^{\cos x}\cdot\dfrac{\sqrt{xy}}{x^2-y}$
5. Найдите частные производные $\partial^2 f/\partial s^2$, $\partial^2 f/\partial s\partial t$, $\partial^2 f/\partial t^2$ дважды непрерывно дифференцируемой сложной функции $z=f(x,y)$, если	
$x=5t\cdot s$, $y=s+3t$	$x=s^2+2t$, $y=2t^3$
6. Найдите в точке M частные производные первого и второго порядка неявной функции $z=f(x,y)$	
$x^3-4x^2z^2+yz^3+2y^4-z=0$, $M(2,-1,1)$	$xy^4+x^4y-z-z^4+7x=0$, $M(2,-1,-1)$
7. Найдите производную f по направлению вектора l в точке M	
$f(x,y)=5x^2+4y^2$, $l=(-1,2)$,	$f(x,y)=xtg(2x+y)$, $l=(-1,0)$,

$M(1,1)$	$M(\pi/4, \pi/4)$
8. Исследуйте функцию $u = u(x, y, z)$ на экстремум	
$u = x^2 + 17y^2 + 3z^2 + 2xy - xz - 7yz$	$u = 4x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 2xz - 2yx + 10z$
9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном множестве	
$u = xy + 2x + 3y$, $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 4$	$u = x^2 - 3xy + 4y$, $\lvert x\rvert \le 3$, $\lvert y\rvert \le 3$
Вариант 27	***Вариант 28***
1. Найдите область определения функции $f(x,y)$, нарисуйте его, охарактеризуйте (замкнутость, связность, ограниченность)	
$f\left(x,y\right) = \sqrt{1 - 2\sin(\pi x)} + \arccos\left(x - 2y\right)$	$f(x,y) = \sqrt{4x - x^2 - y^2} + \ln\dfrac{xy}{x^2 + y^2}$
2. Нарисуйте линии уровня функции	
$z = \left(3x + y\right)^4$	$z = \dfrac{y + 2x}{\lvert x\rvert}$
3. Нарисуйте график функции $z = f\left(x,y\right)$	
$z = 4 - y^2$, $D_f: x^2 \le y \le 2$	$z = x^2 + 4y^2$,

	$D_f:\ x^2 \le y \le 1,\ \ y \ge 0$
4. Найдите дифференциалы первого и второго порядка функции	
$z = e^{\cos\left(x^3 \cdot \sin y\right)}$	$z = e^{\cos\left(x \cdot \sin(x+y^3)\right)}$
5. Найдите частные производные $\partial^2 f / \partial s^2$, $\partial^2 f / \partial s \partial t$, $\partial^2 f / \partial t^2$ дважды непрерывно дифференцируемой сложной функции $z = f(x, y)$, если	
$x = 4t^2 \cdot s,\ \ y = s^2 + 3t$	$x = 2s^2 + t,\ y = t^3$
6. Найдите в точке M частные производные первого и второго порядка неявной функции $z = f(x, y)$	
$x^3 z - 3x^2 z^2 + 2yz^3 + 2y^4 = 0,$ $M(-1,1,1)$	$xy^4 + x^4 y - 3z - 5z^4 - 2x^3 = 0,$ $M(2,1,-1)$
7. Найдите наибольшее значение производной по направлению $\partial f / \partial l$ в точке M	
$f(x,y) = 3x^4 - 4xy^4 + 5y^2,\qquad M(1,1)$	$f(x,y) = x^2 \sin\left(x^2 + y\right),$ $M\left(\sqrt{\pi}/2, \pi/4\right)$
8. Исследуйте функцию $u = u(x, y, z)$ на экстремум	
$u = 9x^2 + 6y^2 + 11z^2 - 3xy - 5xz + 8yz$	$u = 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 2xy - 2yz - 8y$

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном множестве	
$u = xy + x^2 + y^3,$ $-1 \le x \le 1,\ -2 \le y \le 3$	$u = x^2 - 5x^2y + 2y,$ $\|x\| \le 3,\ \|y\| \le 1$

Литовка Геннадий Васильевич,

зав. кафедрой кафедры ОМиИ АмГУ, д-р техн. наук, профессор;

Попова Ангелина Михайловна,

старший преподаватель кафедры ОМиИ АмГУ;

Павельчук Анна Владимировна,

старший преподаватель кафедры ОМиИ АмГУ

Математика. Часть II. *Учебное пособие*

Заказ 471.