Министерство образования и науки Российской Федерации
Амурский государственный университет

Г.В. Литовка, А.М. Попова, А.В. Павельчук

МАТЕМАТИКА

Часть 1

Учебно-методическое пособие

Благовещенск

2013

ББК 22.1я73
Л64

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензент:
Максимова Н.Н., доцент кафедры МАиМ АмГУ, канд. физ.-мат. наук

Литовка, Г.В., Попова, А.М., Павельчук, А.В.
Л64 Математика. Часть 1 / Г.В. Литовка, А.М. Попова, А.В. Павельчук. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2013. – 68 с.

Учебное-методическое пособие содержит теоретический и практический материалы по таким разделам высшей математики как линейная алгебра, аналитическая геометрия, теория пределов, основы дифференциального исчисления функций одной и нескольких переменных, некоторые сведения из теории дифференциальных уравнений и рядов. По всем разделам приводятся подробные решения достаточного количества типичных задач, в конце каждого раздела содержатся методически подобранные задачи для самостоятельного решения.

Для направления подготовки 140400.62.

ББК 22.1я73

В авторской редакции

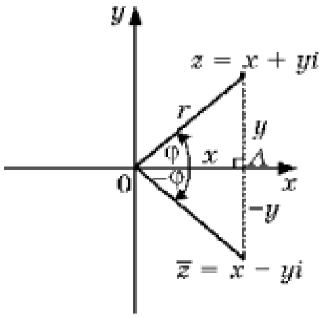
Раздел 1. Комплексные числа.

1.1.Основные понятия.

Определение 1.1. Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, а i – так называемая мнимая единица, $i^2 = -1$. Если $x = 0$, то число $z = 0 + iy = iy$ называется чисто мнимым, если $y = 0$, то число $z = x + 0 \cdot i = x$ отождествляется с действительным числом. Число x называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а y – мнимой частью z, $y = \operatorname{Im} z$.

Определение 1.2. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются равными $(z_1 = z_2)$ тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются сопряженными.

1.2.Геометрическая интерпретация и форма записи комплексных чисел

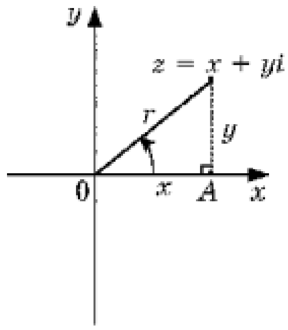


Геометрическая интерпретация комплексных чисел состоит в том, что каждому комплексному числу $z = x + iy$ ставится в соответствие точка (x, y) координатной плоскости таким образом, что действительная часть комплексного числа представляет

представляет собой абсциссу, а коэффициент при мнимой части – ординату точки. Каждому комплексному числу соответствует единственная точка координатной плоскости и, обратно, каждой точке координатной плоскости соответствует единственное комплексное число, при этом двум различным комплексным числам соответствуют две различные точки координатной плоскости. Сопряженным комплексным числам $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ соответствуют точки, симметричные относительно оси абсцисс (рис. 1).

Запись числа z в виде $z = x + iy$ называют ***алгебраической формой*** комплексного числа.

Модуль r и аргумент φ rкомплексного числа можно рассматривать как полярные координаты вектора $\bar{r} = \overline{OM}$, изображающего комплексное число $z = x + iy$ (рис.2).



Тогда получаем $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Следовательно, комплексное число $z = x + iy$ можно записать в виде $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Такая запись комплексного числа называется ***тригонометрической формой***. Модуль комплексного числа определяется по формуле: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Аргумент φ определяется из формул: $\cos\varphi = \dfrac{x}{r}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{r}$, $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$ и изменяется в пределах $-\pi < \varphi \le \pi$.

Комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно записать в ***показательной форме*** $z = re^{i\varphi}$, где $r = |z|$ - модуль комплексного числа.

Пример 1.1. Записать комплексное число $z = -1 + i$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение: $\begin{matrix} \operatorname{Re} z = x = -1; \\ \operatorname{Im} z = y = 1 \end{matrix}$

имеем $|z| = r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\varphi = arctg\left(\dfrac{1}{-1}\right) + \pi = -\dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{3\pi}{4}$

Тогда: $z = -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

1.3. Действия над комплексными числами.

1. Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

Пример 1.2**.** Найти сумму двух комплексных чисел: $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -5 + 4i$.

Решение: имеем $\begin{matrix} \operatorname{Re} z_1 = x_1 = 2; \\ \operatorname{Im} z_1 = y_1 = -3 \end{matrix}$ и $\begin{matrix} \operatorname{Re} z_2 = x_2 = -5; \\ \operatorname{Im} z_2 = y_2 = 4 \end{matrix}$.

Тогда $z_1 + z_2 = (2-5) + i(-3+4) = -3 + i$.

2. Разностью двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

Пример 1.3. Найти разность двух комплексных чисел: $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -5 + 4i$.

Решение: имеем $\begin{matrix} \operatorname{Re} z_1 = x_1 = 2; \\ \operatorname{Im} z_1 = y_1 = -3 \end{matrix}$ и $\begin{matrix} \operatorname{Re} z_2 = x_2 = -5; \\ \operatorname{Im} z_2 = y_2 = 4 \end{matrix}$.

Тогда $z_1 - z_2 = (2+5) + i(-3-4) = 7 - 7i$.

3. Произведением двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством $z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)$. Причем $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$.

Пример 1.4. Найти произведение двух комплексных чисел: $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -5 + 4i$.

Решение: имеем $\begin{matrix} \operatorname{Re} z_1 = x_1 = 2; \\ \operatorname{Im} z_1 = y_1 = -3 \end{matrix}$ и $\begin{matrix} \operatorname{Re} z_2 = x_2 = -5; \\ \operatorname{Im} z_2 = y_2 = 4 \end{matrix}$.

Тогда $z_1 \cdot z_2 = (2 \cdot (-5) - (-3) \cdot 4) + i(2 \cdot 4 + (-3) \cdot (-5)) = 2 + 23i$.

Произведением двух комплексных чисел в тригонометрической форме $z_1 = r_1(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и $z_2 = r_2(\cos\theta + i\sin\theta)$ называется комплексное число, определяемое равенством $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi + \theta) + \sin(\varphi + \theta))$.

Тогда $z^n = r^n(\cos n\varphi + \sin n\varphi)$ – формула Муавра.

Пример 1.5. Найти $\left(1 + \sqrt{3}i\right)^9$.

Решение: запишем сначала число $z = 1 + \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме:

$r = \sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$, $\varphi = arctg\dfrac{\sqrt{3}}{1} = \dfrac{\pi}{3}$

Значит $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

По формуле Муавра получим: $z^9 = \left(1+\sqrt{3}i\right)^9 = 2^9\left(\cos 9\frac{\pi}{3} + i\sin 9\frac{\pi}{3}\right) = -512$

4. Частным двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ $(z_2 \neq 0)$ называется комплексное число, определяемое равенством $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

Пример 1.6**.** Найти частное двух комплексных чисел: $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -5 + 4i$.

Решение: имеем $\begin{matrix} \operatorname{Re} z_1 = x_1 = 2; \\ \operatorname{Im} z_1 = y_1 = -3 \end{matrix}$ и $\begin{matrix} \operatorname{Re} z_2 = x_2 = -5; \\ \operatorname{Im} z_2 = y_2 = 4 \end{matrix}$.

Тогда $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\cdot(-5) + (-3)\cdot 4}{(-5)^2 + 4^2} + i\frac{(-3)\cdot(-5) - 2\cdot 4}{(-5)^2 + 4^2} = -\frac{22}{41} + i\frac{7}{41}$.

Для тригонометрической формы комплексного числа формула деления имеет вид: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r_2(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi-\theta) + \sin(\varphi-\theta)\right)$.

5. Корнем n-й степени из комплексного числа z называется равенство

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$, где $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$

Пример 1.7. Найти $\sqrt[3]{i}$.

Решение: запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме: $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Значит $\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right)$, $k = 0{,}1{,}2.$

При $k = 0$ получим: $z_0 == \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

При $k = 1$ получим: $z_1 == \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

При $k = 2$ получим: $z_2 == \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$

Задания для самостоятельного решения:

1. Запишите числа в тригонометрической и показательной форме. Запишите к ним комплексно сопряженное число.

a) $z = 3+3i$

b) $z = 2\text{-}3i$

c) $z = 3i$

2. Вычислите сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел:

a) $z_1 = 3 + 3i$ и $z_2 = 2 - 3i$

b) $z_1 = 3i$ и $z_2 = 3 - 3i$

c) $z_1 = -2 + 5i$ и $z_2 = -7 - 4i$

3. Выполнить указанные операции: а) $(2 - i)(2 + i)^2 - (3 - 2i) + 7$; б) $(1 + i)^4$; в) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^6$.

4. Найти частное комплексных чисел: а) $\frac{1}{i}$; б) $\frac{1}{1+i}$; в) $\frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

5. Установить, при каких действительных значениях x и y равны следующие комплексные числа: $z_1 = x^2 = xyi - 5 + i$ и $z_2 = xi - y^2 + yi$.

6. Найти координаты точки M, изображающей комплексное число $z = \frac{5i - 2}{3i + 1} + i + \frac{8i - 3}{2 - i}$.

7. Найти все значения корней: а) $\sqrt[4]{1}$; б) $\sqrt[3]{-1 - i\sqrt{3}}$.

8. Решить уравнение $z^6 + 1 = 0$.

9. Доказать, что $\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 2$.

10. Найти число, сопряженное с числом $z = \frac{1}{4}\left(\frac{17 + 31i}{7 + i} + \frac{12}{(1+i)^4}\right) + i$.

Домашнее задание:

1. Вычислить:

a) $1-i^5+i^{10}-i^{15}$;

b) $\dfrac{3+4i}{i}+\dfrac{4-i}{3+2i}$;

c) $(2i-1)^4-(2i+1)^4$;

d) $\dfrac{(2+3i)(5-i)}{2+i}$;

e) $(z_1\cdot z_2)^{10}$, если $z_1=-1+i\sqrt{3}$, $z_1=-1+i\sqrt{3}$, $z_2=\dfrac{1}{4}\left(\cos 30^0+i\sin 30^0\right)$.

2. Представить в тригонометрической и показательной форме числа:

a) $z=1-i\sqrt{3}$;

b) $z=-2-4i$;

c) $z=-0{,}3+2{,}4i$.

3. Найти модуль и аргумент комплексного числа:

a) $z=(-5-i)\cdot(-5+i)$;

b) $z=\left(\dfrac{4+3i}{5}\right)^{10}$.

4. Решить уравнения:

   a) $z^2-4z+20=0$;

   b) $z^2-8iz-15=0$;

   c) $z^3+8i=0$;

   d) $z^6=\dfrac{1}{i}$.

Раздел 2. Элементы векторной алгебры

2.1. Линейные операции над векторами

Определение 2.1. Вектором называется множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковую длину и направление.

Обозначают векторы символами $\overline{a}$ или $A\overline{B}$, где A – начало, а B – конец направленного отрезка AB.

Определение 2.2. Длиной вектора $A\overline{B}$ называется длина отрезка AB.

Для обозначения длины вектора $A\overline{B}$ вводят символ $|\overline{a}| = |A\overline{B}| = a.$

Вектор нулевой длины называют нулевым вектором и обозначают $\overline{0}$.

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, имеющие одинаковую длину и направление, считаются равными друг другу, т. е. $\overline{a} = \overline{b}.$

Пусть даны два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}.$ Построим равные им векторы $A\overline{B}$ и $B\overline{C},$ т. е. совместим начало вектора $\overline{b}$ с концом вектора $\overline{a}$ (рис. 1). Вектор $A\overline{C}$ будем называть суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (правило треугольника).

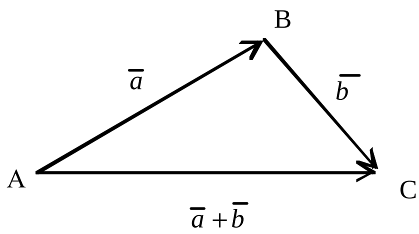
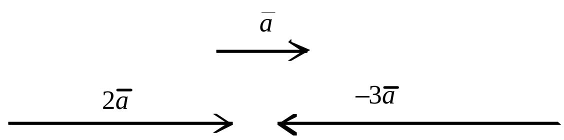


Рис. 1

Определение 2.3. Произведением вектора $\overline{a}$ на число α называется вектор $\alpha\cdot\overline{a},$ удовлетворяющий условиям: 1) вектор $\alpha\cdot\overline{a}$ коллинеарен (параллелен) вектору $\overline{a}$; 2) длина вектора $\alpha\cdot\overline{a}$ равна $|\alpha|\cdot|\overline{a}|$; 3) векторы $\alpha\cdot\overline{a}$ и $\overline{a}$ сонаправлены, т. е. имеют одинаковое направление, при $\alpha > 0$ и противоположно направлены при $\alpha < 0$.

Пример 2.1. По данному вектору $\overline{a}$ найдем векторы $2\overline{a}$ и $-3\overline{a}.$ Изобразим $\overline{a}$, затем $2\overline{a}$ и $-3\overline{a}.$



Определение 2.4. Разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор

$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ такой, что $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$ (рис. 2).

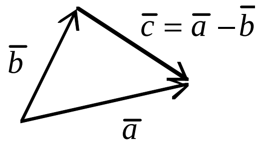


Рис. 2

Легко проверить, что $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + \left(-\bar{b}\right)$, где $-\bar{b}$ – это вектор, противоположный вектору $\bar{b}$, т. е. такой, что $\bar{b} + \left(-\bar{b}\right) = \bar{0}$.

Заметим, что для векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ справедливы свойства:

$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$;

$\bar{a} + \left(\bar{b} + \bar{c}\right) = \left(\bar{a} + \bar{b}\right) + \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$.

Проиллюстрируем первое свойство, построив поочередно $\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{b} + \bar{a}$ по правилу треугольника на одном чертеже (рис. 3).

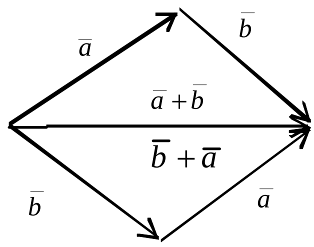


Рис. 3

Отсюда получаем правило параллелограмма сложения векторов: если на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ построить как на сторонах параллелограмм, то сумма $\bar{a} + \bar{b}$ является диагональю параллелограмма, исходящей из общей точки приложения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Если же построить вторую диагональ параллелограмма, то мы получим разность векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 4).

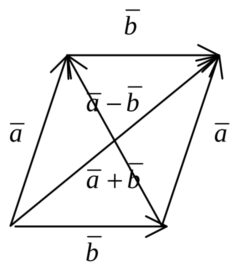


Рис. 4

2.2. Базис. Декартова прямоугольная система координат

Определение 2.5. Три вектора $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ называются компланарными, если они параллельны некоторой плоскости в широком смысле (т. е. или лежат в одной плоскости, или в параллельных плоскостях).

После приведения к одному началу компланарные векторы лежат в одной плоскости.

Определение 2.6**.** Базисом в пространстве называются три некомпланарных вектора, взятых в определенном порядке; базисом на плоскости называют два неколлинеарных вектора, взятых в определенном порядке; базисом на прямой называют любой ненулевой вектор на этой прямой.

Теорема 2.1. Каждый вектор в пространстве, плоскости или на прямой может быть разложен по базису пространства, плоскости или прямой соответственно, причем это разложение единственно.

Таким образом, если $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ – базис пространства, $\bar{a}$ – вектор пространства, то $\bar{a} = \alpha_1 \cdot \bar{e}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{e}_2 + \alpha_3 \cdot \bar{e}_3$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – координаты вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

При сложении векторов складываются соответствующие координаты, при умножении вектора на число все координаты вектора умножаются на это число.

Взаимно перпендикулярные и имеющие единичную длину векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ образуют ортонормированный базис.

Определение 2.7. Совокупность точки – начала координат и ортонормированного базиса называют декартовой прямоугольной системой координат.

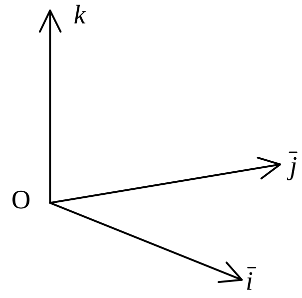


Рис. 5

Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называют осями координат, а плоскости, проходящие через оси координат – координатными плоскостями.

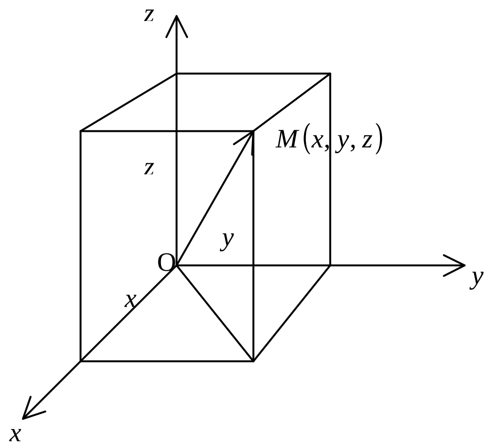


Рис. 6

Для каждой точки M пространства существует ее радиус – вектор $\bar{r} = O\overline{M}$. Под декартовыми координатами точки M понимаются координаты ее радиус – вектора в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, т. е. $O\overline{M} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ и $M(x, y, z)$.

И вообще $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ или $\bar{a} = (x, y, z)$.

Если точка $A(x_1, y_1, z_1)$ – начало, а точка $B(x_2, y_2, z_2)$ – конец вектора $A\overline{B}$, то $AB = (x_2 - x_1)\cdot\bar{i} + (y_2 - y_1)\cdot\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}$.

Пример 2.2**.** Найти координаты вектора $A\overline{B}$, если $A(1,2,1)$ и $B(3,4,8)$.

Решение**.** $A\overline{B} = (3-1)\cdot\bar{i} + (4-2)\cdot\bar{j} + (8-1)\cdot\bar{k} \Rightarrow A\overline{B} = (2,2,7)$.

Коллинеарные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ отличаются длиной и направлением (сонаправлены или направлены противоположно), поэтому координаты таких векторов пропорциональны, т.е. векторы $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Например, векторы $\bar{a} = (2,1,-3)$ и $\bar{b} = (-4,-2,6)$ коллинеарны.

2.3. Скалярное произведение векторов

Определение 2.8. Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними, т. е. $\bar{a}\cdot\bar{b} = a\cdot b\cdot\cos\varphi$, где a и b – длины векторов, а φ – угол между ними.

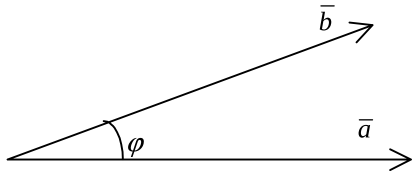


Рис. 7

Если $\bar{a} = x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k}, \bar{b} = x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k}$, то $\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$.

Длина вектора $\bar{a} = (x, y, z)$ вычисляется по формуле $a = \sqrt{\bar{a}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Косинус угла φ между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ находят по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{a \cdot b} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны, то

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0.$$

Если $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то длина отрезка AB равна $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$

Пример 2.3**.** Найти величину угла при вершине A треугольника с вершинами $A(-1,-2,4), B(-4,-2,0), C(3,-2,1)$.

Решение. Изобразим треугольник ABC (рис. 8).

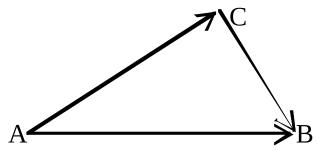


Рис. 8

$$\cos\hat{A} = \frac{A\bar{B} \cdot A\bar{C}}{AB \cdot AC}. \qquad A\bar{B} = (-4+1; -2+2; 0-4) = (-3;0;-4), \qquad A\bar{C} = (3+1; -2+2; 1-4) = (4;0;-3).$$

$$\cos\hat{A} = \frac{-3 \cdot 4 + 0 + (-4) \cdot (-3)}{\sqrt{9+16} \cdot \sqrt{16+9}} = 0, \text{ поэтому } \hat{A} = \frac{\pi}{2}.$$

Замечание. При решении задач векторной алгебры, аналитической геометрии и других иногда приходится искать координаты середины отрезка AB, где $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$. Координаты середины отрезка ищут по формулам: $x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

Рассмотрим в заключение этого пункта вопрос определения направления вектора и нахождение орта этого вектора, т. е. единичного вектора того же направления, что и сам вектор.

Пусть α, β, γ – углы между вектором $\bar{a}$ и координатными осями Ox, Oy, Oz.

Косинусы углов α, β, γ называют направляющими косинусами вектора $\bar{a} = (x, y, z)$. Находят $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ по формулам:

$\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\cos\gamma = \frac{z}{|\bar{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, причем $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Пример 2.4. Найти направляющие косинусы вектора $\bar{a} = (2, -1, -2)$.

Решение: $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 1 + 2^2}} = \frac{2}{3}$; $\cos\beta = -\frac{1}{3}$; $\cos\gamma = -\frac{2}{3}$.

Пример 2.5. Найти единичный вектор того же направления, что и вектор $\bar{a} = (2, -1, -2)$.

Решение. Единичный вектор находят по формуле $\bar{e} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$. Так как длина вектора $\bar{a}$ равна 3, то единичный вектор $\bar{e} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, т.е. его координаты получают делением координат вектора $\bar{a}$ на его длину.

Замечание. Очевидно, $\bar{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

2.4. Векторное произведение

Определение 2.9. Векторным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) вектор $\bar{c}$ перпендикулярен и вектору $\bar{a}$ и вектору $\bar{b}$; 2) длина вектора $\bar{c}$ равна $a \cdot b \cdot \sin\varphi$ (φ – угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$); 3) с конца вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ кажется происходящим против часовой стрелки.

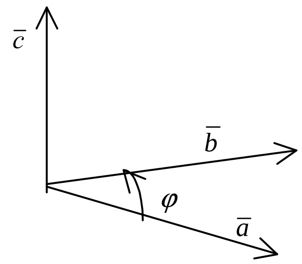


Рис. 9

Заметим, что такую тройку векторов принято называть правой (рис. 9).

Обозначим векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$. Ясно, что $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$, так как изменится на противоположное направление вектора $\bar{c}$ при неизменной и равной площади параллелограмма со сторонами a и b длине этого вектора.

Векторное произведение векторов $\bar{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\bar{b}=(x_2,y_2,z_2)$ вычисляют по формуле:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

С помощью векторного произведения можно вычислить площадь параллелограмма, построенного на $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах: $S=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$, или площадь треугольника, построенного на этих векторах: $S=\frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$.

Пример 2.6. Найти площадь треугольника ABC, если известны координаты его вершин: $A(-2,4,-6), B(0,2,-4), C(-5,8,-6)$.

Решение: Найдём векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$\overline{AB}=2\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}$, $\overline{AC}=-3\bar{i}+4\bar{j}+0\bar{k}$, тогда $S=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$. Находим

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -2 & 2\\ -3 & 4 & 0\end{vmatrix}=-8\bar{i}-6\bar{j}+2\bar{k}.$$

Имеем $S=\frac{1}{2}\left|-8\bar{i}-6\bar{j}+2\bar{k}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{64+36+4}=\frac{1}{2}\sqrt{104}=\frac{1}{2}\sqrt{4\cdot 26}=\sqrt{26}.$

2.5. Смешанное произведение

Определение 2.10**.** Смешанным произведением векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ называется число $\overline{a} \times \overline{b} \cdot \overline{c}$. Обозначают смешанное произведение $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$. Численно смешанное произведение равно объёму параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ как на сторонах, взятому со знаком +, если эта тройка векторов правая, и со знаком -, если эта тройка левая. Если же $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны, то $\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = 0$.

Если $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\overline{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

С помощью смешанного произведения можно вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c} : V = \left|\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}\right|$, или объем пирамиды, построенной на этих векторах: $V = \frac{1}{6}\left|\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}\right|$.

Задания для самостоятельного выполнения:

1**.** На оси Ox найти точку, равноудаленную от точек A(2;-4;5) и B(-3;2;7).

2**.** Написать разложение вектора X по векторам (a, b, c), если x=(-4;4;4), a=(3;1;0), b=(-1;0;6), c=(-1;2;0).

3. Найти косинус угла между векторами AB и AC, если A=(-4;4;4), B=(3;1;0), C=(-1;0;6).

4. Вычислить площадь треугольника с вершинами A=(-4;4;4), B=(3;1;0), C=(-1;0;6).

5**.** Компланарны ли вектора a=(-3;2;1), b=(3;1;2), c=(3;-1;4)?

6. Заданы два вектора в пространстве a=(0;1;1), b=(-2;0;1). Найти:

а) их сумму;

б) их разность; косинус угла между ними;

в) их векторное произведение.

7. Сила F приложена к точке A. Вычислить: a) работу силы F в случае, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку B; b) модуль момента силы F относительно точки B. F=(5;-3;9), A(3;4;-6), B(2;6;5).

8. Найти равнодействующую двух сил $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$, модули которых равны F_1 = 5, F_2 = 7, угол между ними θ = 60°. Определить также углы α и β, образуемые равнодействующей с силами $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$.

9. При каких значениях α и β вектор $\bar{a}(3;-1;\alpha)$ перпендикулярен вектору $\bar{b}(2;\beta;1)$, если $|\bar{b}|=3$?

10. Векторы $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ лежат в одной плоскости и образуют попарно друг с другом углы $2\pi/3$. Разложить вектор $\bar{a}$ по векторам $\bar{b}$ и $\bar{c}$, если $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=2$ $|\bar{c}|=1$.

11. Вектор $\bar{a}$ задан координатами своих концов A и B: A(2, 1, -4); B(1, 3, 2). Найти проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси и его направляющие косинусы.

12. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определены своими проекциями $\bar{a}\{7;2;-1\}$ и $\bar{b}\{1;2;-3\}$. Найти скалярное произведение этих векторов и угол между ними.

Домашнее задание:

1. Даны два вектора: $\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k}$ и $\bar{b}=-3\bar{i}+2\bar{j}+5\bar{k}$. Найти проекции на координатные оси суммы и разности этих векторов.
2. Определить угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, заданными своими проекциями $\bar{a}\{2;1;-2\}$, $\bar{b}\{1;-4;2\}$.
3. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=5\bar{i}-4\bar{j}+7\bar{k}$ и $\bar{b}=\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$.
4. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ определены координатами своих концов: A(2, 4, 5); B(-1, -3, -2); C(4, 1, 7); D(-2, 3, 10). Найти: 1) векторное произведение $\overline{AB}\times\overline{CD}$; 2) его модуль; 3) направляющие косинусы векторного произведения.

5. Найти площадь треугольника, координаты вершин которого известны: $A(-2, 1, 2)$; $B(3, -3, 4)$; $C(1, 0, 9)$.
6. Дана сила $\overline{F}\{3;4;-2\}$ и точка ее приложения $A(2, -1, 3)$. Найти момент силы относительно начала координат и углы, составляемые им с координатными осями.
7. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(5, 1, -4)$, $A_2(1, 2, -1)$, $A_3(3, 3, -4)$ и $A_4(2, 2, 2)$. Определить ее объем.

Раздел 3. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

3.1. Определители

Определение 3.1. Определителем второго порядка, соответствующим квадратной таблице элементов $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, называется число $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$. Таким образом,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называются элементами определителя. Индексы, стоящие внизу соответствующего элемента, означают номер строки и номер столбца определителя, на пересечении которых, стоит указанный элемент. Элементы a_{11}, a_{22} называют элементами главной диагонали определителя, а элементы a_{12}, a_{21} - соответственно элементами побочной диагонали.

Пример 3.1. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 4 \cdot (-2) = 15 + 8 = 23$$

Определение 3.2. Определителем третьего порядка, соответствующим квадратной таблице элементов

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

называется число, определяемое равенством

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{22}$$

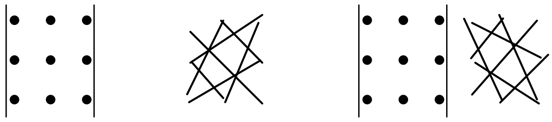
Пример 3.2. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение**.** Получим:

$$\Delta = 2\cdot\begin{vmatrix}1 & -3\\ -2 & 1\end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix}5 & -3\\ -3 & 1\end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix}5 & 1\\ -3 & -2\end{vmatrix} = 2\cdot(1-6) - 3\cdot(5-9) + 4\cdot(-10+3) =$$
$$= 2\cdot(-5) - 3\cdot(-4) + 4\cdot(-7) = -10 + 12 - 28 = -26$$

Для вычисления определителя третьего порядка используют правило треугольника (или Саррюса).



Определение 3.3. Определитель, в котором под главной диагональю (над главной диагональю) стоят нули, называется определителем треугольного вида. Определитель треугольного вида равен произведению элементов главной диагонали.

Определение 3.4. Минором некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель n-1-го порядка, полученный из исходного определителя путем вычеркивания строки и столба, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается M_{ij}.

Определение 3.5. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «+», если сумма i+j – четное число, и со знаком «-», если эта сумма нечетная. Обозначается A_{ij}. Согласно определению $A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$.

Для определителя третьего порядка знак, который при этом приписывается минору соответствующего определителя, определяется следующей таблицей:
$\begin{vmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{vmatrix}$.

Пример 3.3. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix}5 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 4\\ 7 & 3 & 6\end{vmatrix}$, разлагая его по элементам третьего столбца.

Решение. Согласно теореме разложения имеем:

$$\Delta = 2A_{13} + 4A_{23} + 6A_{33} = 2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + 6\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 2(-1)^4\cdot((-1)\cdot 3 - 7\cdot 2) + 4(-1)^5(5\cdot 3 - 7\cdot 3) + 6(-1)^6(5\cdot 2 - (-1)\cdot 3) =$$
$$= 2\cdot(-3-14) - 4(15-21) + 6(10+3) = -34 + 24 + 78 = 68.$$

Определение 3.6. Выражение

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$
$$+ a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

называется определителем четвертого порядка. Этот определитель можно записать в виде:

$$\Delta = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} + a_{14}\cdot A_{14},$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}, i = 1,2,3,4, j = 1,2,3,4, M_{ij}$-минор элемента, стоящего на пересечении i-ой строки и j-го столбца, A_{ij}-алгебраическое дополнение этого элемента.

Свойства определителей

Свойство 1: определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот.

Свойство 2: при перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

Свойство 3: определитель, имеющий одинаковые (пропорциональные) строки (столбцы), равен 0.

Свойство 4: общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) определителя можно вынести за знак определителя.

Свойство 5: если элементы какой-либо строки(столбца) определителя представляют собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.

Свойство 6: определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженное на любое число.

Свойство 7: определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

Свойство 8: сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельной строки (столбца) равна 0.

3.2. Матрицы. Основные понятия

Определение 3.7. Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины (или n столбцов одинаковой длины), которая записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, сокращенно, $A = (a_{ij})$, где $i = \overline{1, m}$, (т.е. $i = 1, 2, \dots, m$) – номер строки, $j = \overline{1, n}$ (т.е. $j = 1, 2, \dots, n$) – номер столбца, числа a_{ij} называются элементами матрицы. Матрицу А называют матрицей размера $m \times n$ и пишут $A_{m \times n}$. Например: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 7 \\ 6 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $A_{2\times4}$.

Определение 3.8. Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ равны между собой, если их размеры совпадают, а их соответствующие элементы равны, т.е. $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$, где $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Например: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, A_{2\times3}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, B_{2\times3}$. Так как размеры матриц совпадают (2×3) и соответствующие элементы равны, поэтому матрицы А и В равны, т.е.А=В.

Определение 3.9. Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется квадратной. Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют матрицей n-го порядка.

Например: $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, A_{2\times2}$, т.е. дана матрица второго порядка.

Определение 3.10. Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называются диагональной.

Например: Матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ - диагональная.

Определение 3.11. Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется единичной. Обозначается буквой Е.

Например: $E_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ или $E_{4\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Определение 3.12. Квадратная матрица называется треугольной, если все элементы, расположенные над главной диагональю (или под главной диагональю), равны нулю.

Например: $A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ или $A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ - треугольные матрицы.

Важной характеристикой квадратной матрицы порядка n является ее определитель (или детерминант), который обозначается $\det A$ или $|A|$. $\det E = 1$.

Определение 3.13. Квадратная матрица, у которой определитель отличен от нуля, т.е. $|A| \neq 0$, называется невырожденной. В противном случае матрица называется вырожденной.

Например: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0.$ Следовательно, матрица A – вырожденная.

$B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 7\end{pmatrix}, |B|=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & 7\end{vmatrix}=21+4=25\neq 0.$ Следовательно, матрица B – невырожденная.

Определение 3.14. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой и обозначается буквой О.

Определение 3.15. Матрица, содержащая одну строку, называется матрицей-строкой $A=(a_1 a_2 ... a_n)$.

Матрица, содержащая один столбец, называется матрицей-столбцом

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ ...\\ a_m\end{pmatrix}.$$

Матрица размера 1×1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т.е. $(3)_{1\times 1}$ есть 3.

Определение 3.16. Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей транспонированной к данной. Обозначается A^T.

Например: если $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; если $A=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$.

Транспонированная матрица обладает следующим свойством: $\left(A^T\right)^T=A$.

3.3. Действия над матрицами

Определение 3.17. Суммой двух матриц $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ и $B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$ одинаковых размеров называется матрица того же размера $C_{m\times n}=\left(c_{ij}\right)$ такая, что $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$:

$C=A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right), i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}.$

Аналогично определяется разность матриц: $C=A-B=\left(a_{ij}-b_{ij}\right), i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}.$

Пример 3.4. Найти сумму матриц A и B, если $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5 & 8\\ 2 & 3 & 6 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3 & 1\\ -1 & 9 & 1 & 7\end{pmatrix}.$

Решение: $A+B=\begin{pmatrix}1+0 & 4+2 & 5-3 & 8+1\\ 2-1 & 3+9 & 6+1 & 7+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6 & 2 & 9\\ 1 & 12 & 7 & 14\end{pmatrix}$.

Определение 3.18. Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ на число α называется матрица $B=(b_{ij})$ такая, что $b_{ij}=\alpha a_{ij}$: $B=\alpha\cdot A=(\alpha\cdot a_{ij}), i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$

Пример 3.5. $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ -2 & 3 & 1\\ 5 & 7 & -8\end{pmatrix}$, $\alpha=2$. Найти $B=\alpha\cdot A$.

Решение: $B=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ -2 & 3 & 1\\ 5 & 7 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 8 & 0\\ -4 & 6 & 2\\ 10 & 14 & -16\end{pmatrix}$.

Матрица $-A=(-1)\cdot A$ называется противоположной матрице А.

Замечание: Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Определение 3.19**.** Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на матрицу $B_{n\times p}=(b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p}=(c_{ik})$ такая, что $c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+...+a_{in}\cdot b_{nk}$, где $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,p}$.

Если матрицы A и B квадратные одного размера, то произведения AB и BA всегда существуют.

Пример 3.6. Найти произведение матриц A и B, если $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 5 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

Решение:

$$C=AB=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 5 & -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+0\cdot5 & 2\cdot4+0\cdot(-3) & 2\cdot7+0\cdot2\\ (-1)\cdot1+3\cdot5 & (-1)\cdot4+3\cdot(-3) & (-1)\cdot7+3\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 8 & 14\\ 14 & -13 & -1\end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B называются перестановочными, если $AB=BA$.

3.4. Обратная матрица

Пусть A-квадратная матрица n-го порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 3.19. Матрица $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$

составленная из алгебраических дополнений к элементам матрицы *A*, называется присоединенной к матрице *A*.

Алгебраические дополнения к элементам квадратной матрицы находятся так же, как к элементам ее определителя. В присоединенной матрице алгебраические дополнения элементов строки стоят в столбце с таким же номером.

Определение 3.20. Матрица A^{-1} называется обратной матрице *A*, если выполняется условие $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$, где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица *A*. Матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица *A*..

Теорема. Для того, чтобы матрица *A* имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы $\det A\neq 0,$ то есть чтобы матрица была невырожденной.

Обратная матрица находится по формуле: $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$

для матрицы *A* третьего порядка.

Свойства обратной матрицы:

1. $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det A};$

2. $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1};$

3. $(A^{1})^{T}=(A^{T})^{-1}.$

Пример 3.7. Найти матрицу, обратную для матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

Решение**:** Найдем определитель матрицы *A:*

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 5 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 - 5 \cdot (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 5 \cdot 3 =$$

$$= 6 + 60 - 10 - 16 + 5 - 45 = 0.$$

Матрица A – вырожденная, значит обратная для нее матрица не существует.

Пример 3.8. Найти матрицу, обратную для данной матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение**.** Найдем определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \cdot 3 - 3 \cdot 0 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 \cdot 2 -$$

$$-1 \cdot 4 \cdot 2 = 0 - 3 + 12 - 0 + 2 - 8 = 3 \neq 0,$$

значит матрица A невырожденная и для нее существует обратная матрица A^{-1}

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы *A:*

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = -4,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -((-1) \cdot 2 - 3 \cdot 4) = -(-2 - 12) = 14,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 0 = -1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 2 - 1 \cdot 3) = -(2 - 3) = 1,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 4 - 9 = -5,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 1 - 3 \cdot 1) = -(2 - 3) = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 0 \cdot 3 == 4 - 0 = 4,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 4 - (-1) \cdot 3) = -(8 + 3) = -11,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 == 0 + 1 = 1.$$

Составим матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 14 & -5 & -11 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{14}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{11}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A^{-1}\cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{14}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{11}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot(-1)+\frac{4}{3}\cdot 3 & -\frac{4}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{4}{3}\cdot 1 & -\frac{4}{3}\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 4+\frac{4}{3}\cdot 2 \\ \frac{14}{3}\cdot 2+\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot(-1)+\left(-\frac{11}{3}\right)\cdot 3 & \frac{14}{3}\cdot 1+\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot 0+\left(-\frac{11}{3}\right)\cdot 1 & \frac{14}{3}\cdot 3+\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot 4+\left(-\frac{11}{3}\right)\cdot 2 \\ -\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot(-1)+\frac{1}{3}\cdot 3 & -\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 1 & -\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 4+\frac{1}{3}\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-8-1+12}{3} & \frac{-4+0+4}{3} & \frac{-12+4+8}{3} \\ \frac{28+5-33}{3} & \frac{14+0-11}{3} & \frac{42-20-22}{3} \\ \frac{-2-1+3}{3} & \frac{-1+0+1}{3} & \frac{-3+4+2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Значит обратная матрица A^{-1} найдена верно.

3.5. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу A размера $m\times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней k строк и k столбцов $(k \le \min(m;n))$. Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k-го порядка. Все такие определители называются минорами этой матрицы.

Определение 3.21. Рангом матрицы A называется наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля. Обозначают ранг матрицы $r_A, r(A)$ или $rangA$.

Пример 3.9. Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение: Дана матрица размера 3×4. Возможный ранг матрицы равен трем, т.к. $(k \le \min(3;4))$. Но матрица содержит два нулевых столбца, поэтому все определители третьего порядка, составленные из элементов данной матрицы равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Составим минор второго порядка, например

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 10 - 12 = -2 \ne 0$. Значит, $r(A) = 2$.

Определение 3.22. Две матрицы A и B называются эквивалентными, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается $A \sim B$.

Пример 3.10. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение: Умножим элементы первой строки на (-2) и прибавим к элементам третьей строки

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Элементы второй строки умножим на 3 и прибавим к элементам третьей строки

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычеркнем третью строку полученной матрицы, т.к. все ее элементы равны нулю:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составим минор второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 3 = 4 \neq 0.$$

Таким образом, $r(A) = 2.$ В преобразованной матрице получилось две ненулевые строки.

Можно сделать следующий вывод: ранг матрицы равен количеству ненулевых строк преобразованной к треугольному виду матрицы.

3.6. Системы линейных уравнений

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где числа $a_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ называются коэффициентами системы, числа b_i - свободными членами.

Матрица, составленная из коэффициентов системы, называется основной матрицей и обозначается:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Расширенной матрицей системы называется матрица A^*, полученная из основной матрицы A, дополненная столбцом свободных членов:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Решение системы называется n значений неизвестных $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства. Всякое решение системы можно записать в виде матрицы-столбца

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Определение 3.23. Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет ни одного решения.

Определение 3.24. Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется частным решением системы. Совокупность всех частных решений называется общим решением.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

Две системы называются эквивалентными (равносильными), если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот.

Эквивалентные системы получаются, в частности, при элементарных преобразованиях системы при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Система линейных уравнений называется однородной, если все свободные члены равны нулю.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется нулевым или тривиальным.

Теорема Кронекера-Капелли

Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы равен рангу основной матрицы то есть $r(A^*) = r(A)$.

Если система совместна и

1) ранг системы равен числу неизвестных ($r(A)=n$), то система имеет единственное решение;

2) ранг системы меньше числа неизвестных ($r(A)<n$), то система имеет бесчисленное множество решений.

Рассмотрим второй случай. Пусть $r(A)=r<n$.Возьмем первые r уравнений системы и оставим в левых частях этих уравнений первые r неизвестных, а остальные неизвестные перенесем вправо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

“Свободным” неизвестным $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ можно придать любые значения. Тогда соответствующие значения получают неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Таким образом можно найти частные и общее решения исходной системы уравнений.

Пример 3.11. Исследовать на совместность систему

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 3, \\ 3x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение: Определим ранги основной матрицы системы и расширенной матрицы системы. Для этого выпишем расширенную матрицу системы

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & 8 & 3 \\ 3 & 15 & 12 & 5 \end{array}\right).$$

Вертикальной чертой отделим элементы основной матрицы от свободных членов системы. Умножим элементы первой строки на (-2) и прибавим к элементам второй строки

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 15 & 12 & 5 \end{array}\right).$$

Элементы первой строки, умноженные на (-3), прибавим к элементам третьей строки

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Умножим элементы второй строки на (-2) и прибавим к элементам третьей строки

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Основная матрица системы A эквивалентна матрице

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В полученной матрице одна ненулевая строка, значит ранг матрицы A равен 1, то есть $r(A)=1$. Расширенная матрица системы A^* эквивалентна матрице

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

В полученной матрице две ненулевые строки, поэтому $r(A^*) = 2$.

Так как $r(A) \neq r(A^*)$, тогда согласно теореме Кронекера-Капелли данная система уравнений несовместна.

Пример 3.12. Исследовать на совместность систему

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - 4x_2 = -1, \\ 7x_1 + 10x_2 = 12, \\ 5x_1 + 6x_2 = 8, \\ 3x_1 - 16x_2 = -5. \end{cases}$$

Решение: Выпишем расширенную матрицу системы

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & -1 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{array}\right).$$

Поменяем местами первую и вторую строки

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{array}\right).$$

Умножим элементы первой строки на (-3) и прибавим к элементам второй строки

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{array}\right).$$

Элементы первой строки, умноженные на (-7), прибавим к элементам третьей строки, а элементы второй строки умножим на $\frac{1}{7}$

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 38 & 19 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{array}\right).$$

Умножим элементы третьей строки на $\frac{1}{19}$, а элементы первой строки, умноженные на (-5), прибавим к элементам четвертой строки

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 26 & 13 \\ 3 & -16 & -5 \end{array}\right).$$

Элементы четвертой строки умножим на $\frac{1}{13}$, а элементы первой строки, умноженные на (-3), прибавим к элементам пятой строки

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{array}\right).$$

Последовательно выполним следующие действия: умножим элементы второй строки на (-1) и прибавим к элементам третьей и четвертой строк, а затем элементы второй строки умножим на 2 и прибавим к элементам пятой строки

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Основная матрица системы эквивалентна матрице

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

в которой две ненулевые строки, поэтому $r(A)=2$.

Расширенная матрица системы эквивалентна матрице

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

в которой также две ненулевые строки, поэтому $r(A^*)=2$.

Так как $r(A)=r(A^*)$, система совместна. В данной системе уравнений две неизвестные, то есть $r=n$, поэтому система уравнений является определенной.

Найдем единственное решение данной системы. Для этого возьмем первые два уравнения системы

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2=4, \\ x_1-4x_2=-1. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим x_1 через x_2 и полученное выражение подставим в первое уравнение $\begin{cases} x_1=4x_2-1, \\ 3(4x_1-1)+2x_2=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=4x_2-1, \\ 12x_1-3+2x_2=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=4x_2-1, \\ 14x_2=7; \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1=4x_2-1, \\ x_2=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Окончательно получим

$$\begin{cases} x_1=4\dfrac{1}{2}-1, \\ x_2=\dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1=1, \\ x_2=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

3.7. Матричный метод решения систем

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

Основная матрица системы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Обозначим $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_3 \end{pmatrix}$. Пусть $|A| \neq 0$, то есть матрица A невырожденная.

Тогда систему можно представить в виде уравнения $A \cdot X = B,$ которое называется матричным уравнением. Решим матричное уравнение. Умножим обе части уравнения слева на A^{-1}. Получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, а так как $A^{-1} \cdot A = E$ $E \cdot X = X$, тогда $X = A^{-1} \cdot B -$ решение матричного уравнения.

Пример 3.13. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 13, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 10, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 23. \end{cases}$$

Решение*:* Выпишем основную матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Проверим, является ли матрица A невырожденной:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 5 - (5 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \cdot 1) =$$

$$= 36 + 6 + 10 - 30 - 8 - 9 = 5 \neq 0,$$

значит матрица A является невырожденной, поэтому обратная матрица A^{-1} к матрице A существует и данную систему уравнений можно решить матричным методом.

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 12 - 3 = 9,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 4 - 5 \cdot 1) = -(4-5) = 1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 3 - 15 = -12,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 4 - 3 \cdot 2) = -(8-6) = -2,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 12 - 10 = 2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = -(9-10) = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 2 - 6 = -4,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = -1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 9 - 2 = 7.$$

Составим матрицу $\tilde{A}$, присоединенную к матрице A:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Получим матрицу A^{-1}, обратную к матрице A:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение данной системы уравнений

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ 23 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 \cdot 13 - 2 \cdot 10 - 4 \cdot 23 \\ 1 \cdot 13 + 2 \cdot 10 - 1 \cdot 23 \\ -12 \cdot 13 + 1 \cdot 10 + 7 \cdot 23 \end{pmatrix} = = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$ то есть

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3.$

3.8. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

определитель основной матрицы которой отличен от нуля, то есть система уравнений невырожденная.

Обозначим $|A| = \Delta.$. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца столбцом из свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тогда $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$. Аналогично $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$, и так далее, $x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$.

Формулы $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $i = \overline{1,n}$ - называются формулами Крамера.

Пример 3.14. Решить систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение: Составим и вычислим определитель Δ данной системы уравнений

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 4\cdot 2 + 3\cdot(-3)\cdot 3 - (3\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 4\cdot(-3)) =$$

$$= 4 + 8 - 27 - 12 - 3 + 24 = -6 \neq 0.$$

Данная система является невырожденной, поэтому ее решение можно найти по формулам Крамера.

Вычислим Δ_1, Δ_2 и Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 14 & 2 & -3 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 9\cdot 2\cdot 1 + 14\cdot 4\cdot 2 + 16\cdot(-3)\cdot 3 - (16\cdot 2\cdot 2 + 14\cdot 3\cdot 1 +$$

$$+ 9\cdot 4\cdot(-3)) = 18 + 112 - 144 - 64 - 42 + 108 = -12;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 1 & 14 & -3 \\ 3 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 14\cdot 1 + 1\cdot 16\cdot 2 + 3\cdot 9\cdot(-3) - (3\cdot 14\cdot 2 + 1\cdot 9\cdot 1 + 16\cdot(-3)\cdot 2) =$$

$$= 28 + 32 - 81 - 84 - 9 + 96 = -18;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 14 \\ 3 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 16 + 1\cdot 4\cdot 9 + 3\cdot 3\cdot 14 - (3\cdot 2\cdot 9 + 1\cdot 3\cdot 16 + 2\cdot 4\cdot 14) =$$

$$= 64 + 36 + 126 - 54 - 48 - 112 = 12.$$

Значит, $x_1 = \dfrac{-12}{-6} = 2$, $x_2 = \dfrac{-18}{-6} = 3$, $x_3 = \dfrac{12}{-6} = -2$.

3.9. Решение систем методом Гаусса

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решений систем линейных уравнений является метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому (треугольному или трапециевидному) виду. Для этого над строками расширенной матрицы системы A^* проводятся элементарные преобразования, приводящие эту матрицу к ступенчатому виду. Полученная матрица будет эквивалентной матрице A^*, значит и система уравнений, полученная с помощью новой матрицы будет равносильной данной системе уравнений.

Если в процессе приведения системы к ступенчатому виду появятся нулевые уравнения, то есть равенства вида 0=0, их отбрасывают. Если же появится уравнение вида $0 = b_i$, а $b_i \neq 0$, то это говорит о том, что данная система уравнений несовместна.

Второй этап (обратный ход) заключается в решении ступенчатой системы. Если в последнем уравнении новой системы содержится одно неизвестное, то исходная система имеет единственное решение. Из последнего уравнения находим x_n, из предпоследнего уравнения x_{n-1}, далее поднимаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестные x_{n-2}, $(x_{n-3},...,x_2,x_1)$. Если в последнем уравнении преобразованной системы более чем одно неизвестное, то данная система имеет множество решений (система является неопределенной). Из последнего уравнения выражаем первое неизвестное x_k через остальные неизвестные $(x_{k+1},...,x_n)$. Затем подставляем значение x_k в предпоследнее уравнение системы и выражаем x_{k-1} через $(x_{k+1},...,x_n)$ и так далее. Придавая свободным неизвестным $(x_{k+1},...,x_n)$ произвольные значения, получим бесчисленное множество решений системы. На практике удобно, чтобы коэффициент a_{11} был равен 1 (уравнения переставить местами, либо разделить обе части первого уравнения на $a_{11} \neq 1$).

Пример 3.15. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

Решение**:** Составим расширенную матрицу A^* данной системы

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right).$$

Так как $a_{11} = 2 \neq 1$, $a_{21} = 1$, поменяем местами первую и вторую строки матрицы A^* местами:

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right).$$

Сначала элементы первой строки умножим на (-2) и прибавим к соответствующим элементам второй строки, а затем элементы первой строки умножим на (-7) и прибавим к элементам третьей строки:

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 15 & -15 & 45 \end{array}\right)$$

Элементы второй строки умножим на $\frac{1}{5}$, а элементы третьей строки – на $\frac{1}{15}$:

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right).$$

От элементов третьей строки отнимаем элементы второй строки:

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

От преобразованной расширенной матрицы перейдем к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5 \\ \qquad x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Получили систему, состоящую из двух уравнений и содержащую три неизвестных, то есть с помощью элементарных преобразований данную систему уравнений привели к ступенчатому виду, в которой нет уравнений вида $0 = b_i$, где $b_i \neq 0$. Поэтому система уравнений имеет бесчисленное множество решений. Выразим x_2 через x_3 из второго уравнения:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5 \\ \qquad x_2 = x_3 + 3. \end{cases}$$

Подставим полученное выражение x_2 в первое уравнение:

$$\begin{cases} x_1 = -5 - 2x_3 + 2(3 + x_3), \\ \qquad x_2 = x_3 + 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -5 - 2x_3 + 6 + 2x_3, \\ \qquad x_2 = x_3 + 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = x_3 + 3. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = 2$, тогда $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = 2 \end{cases}$ - частное решение системы.

Пусть $x_3 = c$, где c – любое действительное число, тогда

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 3 + c, \\ x_3 = c \end{cases}$$ - общее решение системы.

Пример 3.16. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 9, \\ 7x_1 + x_2 + x_3 = 14. \end{cases}$$

Решение: Составим расширенную матрицу A^* данной системы уравнений

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 9 \\ 7 & 1 & 1 & 14 \end{array}\right).$$

Элементы первой строки умножим на (-2) и прибавим к элементам второй строки, затем элементы первой строки умножим на (-7) и прибавим к элементам третьей строки:

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & 16 \\ 0 & 15 & 13 & 49 \end{array}\right).$$

Элементы второй строки умножим на (-3) и прибавим к элементам третьей строки:

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & 16 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array}\right).$$

Элементы третьей строки умножим на $\left(-\frac{1}{4}\right)$:

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

С помощью элементарных преобразований получили матрицу треугольного вида, значит, данная система уравнений имеет единственное решение.

С помощью полученной преобразованной расширенной матрицы запишем соответствующую систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ \quad 5x_2 - 3x_3 = 19, \\ \qquad x_3 = 2. \end{cases}$$

Зная значение $x_3 = 2$, из второго уравнения находим x_2:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ \quad 5x_2 = 19 + 3 \cdot 2, \\ \qquad x_3 = 2. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ \qquad x_2 = 5, \\ \qquad x_3 = 2. \end{cases}$$

Используя значения $x_3 = 2$ и $x_2 = 5$, из первого уравнения находим x_1:

$$\begin{cases} x_1 = -5 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 5, \\ \qquad x_2 = 5, \\ \qquad x_3 = 2. \end{cases} \text{ или окончательно } \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

3.10. Однородные системы уравнений

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна ($r(A) = r(A^*)$), она имеет нулевое (тривиальное) решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Для того, чтобы однородная система линейных уравнений имела ненулевые решения необходимо и достаточно, чтобы ранг r ее основной матрицы был меньше числа n неизвестных, то есть $r<n$.

Если число уравнений m системы совпадают с числом неизвестных n, то есть $m=n$, основная матрица системы является квадратной, в этом случае условие $r<n$ означает, что определитель основной матрицы системы $|A| = 0$.

Пример 3.17. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение: Выпишем основную матрицу системы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -3\\ 3 & 5 & 6 & -4\\ 4 & 5 & -2 & 3\\ 3 & 8 & 24 & 19\end{pmatrix}$$

и найдем ранг этой матрицы.

Элементы первой строки умножим на (-3) и прибавим к элементам второй и четвертой строк, затем элементы первой строки умножим на (-4) и прибавим к третьей строке:

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -3\\ 0 & -1 & -6 & 5\\ 0 & -3 & -18 & 15\\ 0 & 2 & 12 & -10\end{pmatrix}.$$

Элементы третьей строки умножим на $\left(-\dfrac{1}{3}\right)$, а четвертой – на $\dfrac{1}{2}$:

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -3\\ 0 & -1 & -6 & 5\\ 0 & 1 & 6 & -5\\ 0 & 1 & 6 & -5\end{pmatrix}.$$

Элементы второй строки прибавим к элементам третьей и четвертой строк

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -3\\ 0 & -1 & -6 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

В преобразованной матрице ступенчатого вида получилось две ненулевые строки, поэтому ранг матрицы A равен двум, то есть $r(A)=2$, а число неизвестных в системе уравнений равно 4 ($n=4$). Получили, что $r<n$, поэтому данная система уравнений имеет ненулевые решения. Укороченная система имеет вид:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0,\\ \qquad -x_2-6x_3+5x_4=0.\end{cases}$$

Выразим x_1 и x_2 через x_3 и x_4: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3x_4 - 4x_3, \\ x_2 = 5x_4 - 6x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 3x_4 - 4x_3 - 2(5x_4 - 6x_3), \\ x_2 = 5x_4 - 6x_3; \end{cases}$

или $\begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4, \\ x_2 = 5x_4 - 6x_3. \end{cases}$

Неизвестные x_1 и x_2 - базисные, а x_3 и x_4 - свободные. Полагая $x_3 = c_1, x_4 = c_2$, получим общее решение системы, записанное в виде матрицы-столбца

$$X = X(c_1; c_2) = \begin{pmatrix} 8c_1 - 7c_2 \\ 5c_2 - 6c_1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Назовем фундаментальной системой решений систему матриц-столбцов, полученную из общего решения при условии, что свободным неизвестным дают последовательно значения

$$\begin{aligned} &c_1 = 1, c_2 = c_3 = \ldots = c_n = 0, \\ &c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = \ldots = c_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-1} = 0, c_n = 1. \end{aligned}$$

Матрицы-столбцы, то есть фундаментальную систему решений обозначают $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Общее решение будет представлено в виде

$$X = c_1 E_1 + c_2 E_2 + \ldots + c_n E_n.$$

Найдем фундаментальную систему решений и выразим с ее помощью общее решение этой системы.

Из общего решения системы найдем E_1 *и* E_2:

$$E_1 = X(1;0) = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = X(0;1) = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

С использованием фундаментальной системы общее решение может быть записано в виде $X(c_1; c_2) = c_1 E_1 + c_2 E_2$.

Задания для самостоятельного решения.

1.Вычислить определители:

$$a)\begin{vmatrix}-2 & 5\\ -3 & 4\end{vmatrix};\qquad в)\begin{vmatrix}2 & 1 & -3\\ -1 & -2 & 1\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix};\qquad д)\begin{vmatrix}6 & -5 & 8 & 4\\ 9 & 7 & 5 & 2\\ 7 & 5 & 3 & 7\\ 4 & 8 & -8 & -3\end{vmatrix}$$

2. Решить уравнения:

$$a)\begin{vmatrix}2 & x+3\\ 1 & 4\end{vmatrix}=0;\quad б)\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3x & x+22\end{vmatrix}=0;$$

3. Выполнить действия над матрицами:

а) $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$

4. Найти значение многочлена *f(A),* если:

а) $f(A)=3A^2-4$, где $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$;

б) $f(A)=3A^2-2A+5$, где $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}$.

5. Найти матрицы, обратные для данных и сделать проверку:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}$.

6. Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 6\\ 2 & 3 & 1 & 6\\ 3 & 1 & 2 & 6\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -4\\ 7 & 10\\ 5 & 6\end{pmatrix}$.

7. Исследовать совместность следующих систем.

а) $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=-2,\\ x_1+2x_2+3x_3=-1,\\ x_1-3x_2-2x_3=3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3,\\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=-3,\\ x_1+2x_2\qquad\quad-4x_4=-3,\\ x_1-x_2-4x_3+9x_4=22.\end{cases}$

8. Решить системы уравнений: а) матричным методом; б) по формулам Крамера; в) методом Гаусса.

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases}$

9. Найти фундаментальную систему решений и общее решение следующих систем:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

Домашнее задание

1.Вычислить определители:

$a)\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$; $б)\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 8 & 8 & 2 \end{vmatrix}$; $c)\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

2. Решить неравенства:

$a)\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0;$ $б)\begin{vmatrix} 1 & x+5 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0$

3. Выполнить действия над матрицами:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$.

4**.** Доказать совместность данной системы линейных уравнений и решить ее тремя способами: 1) методом Гаусса; 2) матричным методом; 3) по формулам Крамера.

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4, \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3, \\ 5x_1 - 7x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 21, \\ 7x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 6. \end{cases}$

Раздел 4. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве.

4.1. Прямая на плоскости.

Определение 4.1. Уравнением линии на плоскости Oxy называется уравнение, которому удовлетворяют координаты x и y любой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Теорема. Всякое уравнение первой степени $Ax + By + C = 0$, где A и B не обращаются в нуль одновременно, представляет собой уравнение некоторой прямой линии на плоскости Oxy.

Введем следующие понятия. Вектор, перпендикулярный прямой l, будем называть нормалью прямой и обозначать $\bar{n}$. Итак, $\bar{n} \perp l$. Вектор, параллельный прямой l, будем называть направляющим вектором этой прямой. Обозначим его $\bar{a} = (l, m)$.

Тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox будем называть угловым коэффициентом этой прямой: $tg\varphi = k$ (рис. 10).

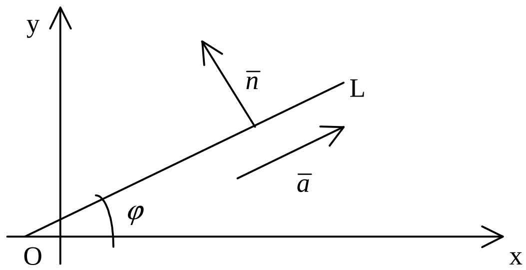


Рис. 10

Укажем теперь основные уравнения прямой на плоскости:

1) $Ax + By + C = 0$ – общее уравнение прямой;

2) $A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (A, B)$;

3) $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}$ – каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно направляющему вектору $\bar{a} = (l, m)$;

4) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$;

5) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ – уравнение прямой в отрезках, где a и b – величины направленных отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях Ox и Oy соответственно;

6) $y=k\cdot x+b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом, где k – угловой коэффициент прямой, а b – отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy;

7) $y-y_0=k\cdot(x-x_0)$ – уравнение прямой (или пучка прямых), проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$, где k – угловой коэффициент прямой.

Рассмотрим теперь взаимное расположение прямых, заданных различными уравнениями.

1. Пусть даны прямые $l_1: y=k_1\cdot x+b_1$, $l_2: y=k_2\cdot x+b_2$. Тогда угол между этими прямыми определяют по формуле $tg\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$.

Условие перпендикулярности:

$$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow k_1=-\frac{1}{k_2}.$$

Условие параллельности:

$$l_1 \;//\; l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2.$$

2. Пусть две прямые заданы общими уравнениями

$$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Тогда угол α между этими прямыми равен углу между их нормалями $n_1=(A_1,B_1)$ и $n_2=(A_2,B_2)$, т. е.

$$\cos\alpha=\frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности: $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow$

$$\overline{n}_1\perp\overline{n}_2 \Leftrightarrow A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0.$$

Условие параллельности: $l_1//l_2 \Leftrightarrow \overline{n}_1//\overline{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}.$

3. Пусть прямые l_1 и l_2 заданы каноническими уравнениями $l_1:\dfrac{x-x_0}{l_1}=\dfrac{y-y_0}{m_1}$, $l_2:\dfrac{x-x_0}{l_2}=\dfrac{y-y_0}{m_2}$.

Тогда угол α между прямыми совпадает с углом α между направляющими векторами $\bar{a}_1=(l_1,m_1)$ и $\bar{a}_2=(l_2,m_2)$:

$$\cos\alpha=\frac{l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности: $l_1\perp l_2 \Leftrightarrow \bar{a}_1\perp\bar{a}_2 \Leftrightarrow l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2=0$.

Условие параллельности: $l_1 // l_2 \Leftrightarrow \bar{a}_1 // \bar{a}_2 \Leftrightarrow \dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}$.

Пример 4.1. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $M_0(2,-1)$ параллельно, перпендикулярно и под углом 45° к прямой $y=x-4$.

Решение: Для решения задачи воспользуемся уравнением (7) прямой, проходящей через заданную точку. Имеем уравнение $y+1=k\cdot(x-2)$.

Определим k прямой. Если прямая параллельна данной прямой $y=x-4$, то $k=1$ и $y+1=x-2 \Rightarrow x-2-y-1=0 \Rightarrow x-y-3=0$ – это уравнение прямой, параллельной данной.

Если искомая прямая перпендикулярна данной, то $k=-1$ и тогда $y+1=-(x-2) \Rightarrow -x+2-y-1=0 \Rightarrow x+y-1=0$ – это уравнение прямой, перпендикулярной данной.

Определим далее угловой коэффициент прямой, проходящей под углом 45° к данной прямой $y=x-4$, по формуле $tg\alpha=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$. Подставляя в эту формулу $\alpha=45^\circ$, получим: $1=\dfrac{1-k_1}{1+k_1}$(т. к. угловой коэффициент данной прямой $k=1$).

Имеем $1+k_1=1-k_1 \Rightarrow 2\cdot k_1=1-1 \Rightarrow k_1=0$. И тогда $y+1=0$ – уравнение прямой, проходящей под углом 45° к данной.

Пример 4.2. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A_1(5,-1)$ и $A_2(2,5)$.

Решение: Воспользуемся уравнением (4):

$$\frac{x-5}{2-5}=\frac{y+1}{5+1}\Rightarrow\frac{x-5}{-3}=\frac{y+1}{6}\Rightarrow 2\cdot(x-5)=-(y+1)\Rightarrow 2\cdot x-10+y+1=0$$

$$\Rightarrow 2\cdot x+y-9=0.$$

Пример 4.3. Найти угол между прямыми: а) $y=3\cdot x$ и $y=-2\cdot x+5$; б) $18\cdot x+6\cdot y-17=0$ и $5\cdot x+10\cdot y-9=0$.

Решение: а) Для вычисления угла между прямыми с угловым коэффициентом воспользуемся формулой $tg\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$. Но $k_1=3, k_2=-2$, поэтому $tg\alpha=\frac{3+2}{1-6}=\frac{5}{-5}$. Отсюда $\alpha=arktg(-1)=\frac{3}{4}\pi$.

б) В случае задания прямых общими уравнениями угол между прямыми можно искать по формуле $\cos\alpha=\frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.

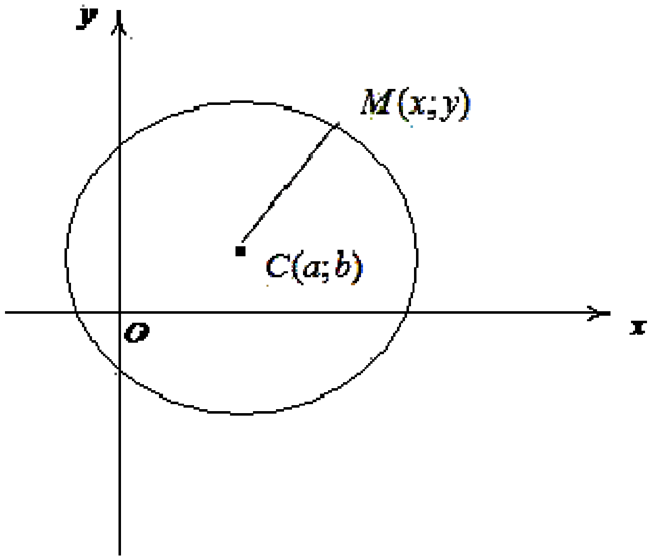
Имеем

$$\cos\alpha=\frac{18\cdot 5+6\cdot 10}{\sqrt{18^2+6^2}\cdot\sqrt{5^2+10^2}}=\frac{150}{\sqrt{360}\cdot\sqrt{125}}=\frac{150}{6\cdot\sqrt{10}\cdot 5\cdot\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.\quad \alpha=\frac{\pi}{4}.$$

И последнее. Расстояние d от точки $M(x_1, y_1)$ до прямой $Ax+By+C=0$ находят по формуле $d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

4.2. Кривые второго порядка.

Определение 4.2. Окружностью называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром.



Каноническое уравнение: $x^2 + y^2 = R^2$ - центр в начале координат;

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ - центр в т.A(x_0; y_0).

Параметрические уравнения: $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t \end{cases}$

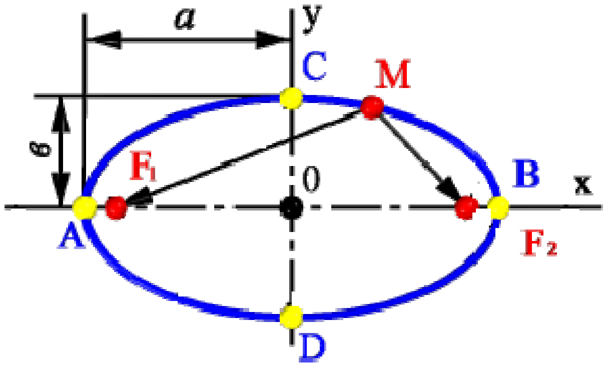
Пример 4.4. Доказать, что уравнение $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ является уравнением окружности. Найти ее центр и радиус.

Решение: Преобразуем левую часть данного уравнения

$x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 2y + 1 - 1 - 4 = 0$ или $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

Это уравнение представляет собой уравнение окружности с центром в точке (-2;1); радиус окружности равен 3.

Определение 4.3. Эллипсом называется множество точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная.

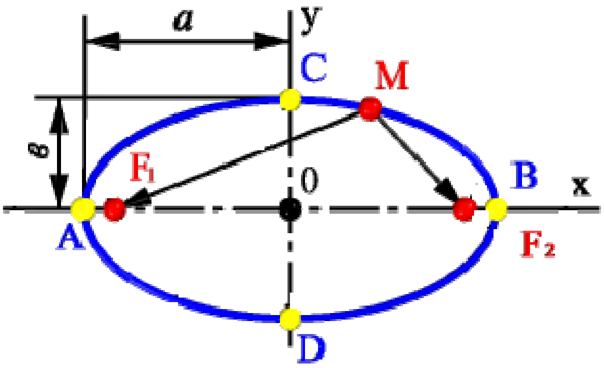


$MF_1 + MF_2 = 2a$

Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$- центр в начале координат;

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ - центр в т.А(x_0; y_0).

Параметрические уравнения: $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t \end{cases}$



MF₁+MF₂ =2a

1. Эллипс пересекает ось ОХ в двух точках: (a; 0) и (-a; 0) .

   Эллипс пересекает ось ОУ в двух точках: (b; 0) и (-b; 0).

2. Границы эллипса

   Для любых x и y: $|x|\le a$ и $|y|\le b$.

3. Фокусы эллипса: так как $F_1=(-c;0)$ и $F_2=(c;0)$, то координаты этих точек можем записать по-другому: $F_1\left(\sqrt{a^2-b^2};0\right)$ и $F_2\left(-\sqrt{a^2-b^2};0\right)$.

4. Эксцентриситет эллипса: $\varepsilon=\frac{c}{a}$, где $0\le\varepsilon\le1$.

5. Диаметры эллипса: всякая хорда, проходящая через центр эллипса, называется диаметром эллипса. В частности, диаметрами эллипса является его большая ось $A_1A_2=2a$ и малая ось $B_1B_2=2b$. Всякий диаметр эллипса, не являющийся его осью, больше малой оси, но меньше большой оси.

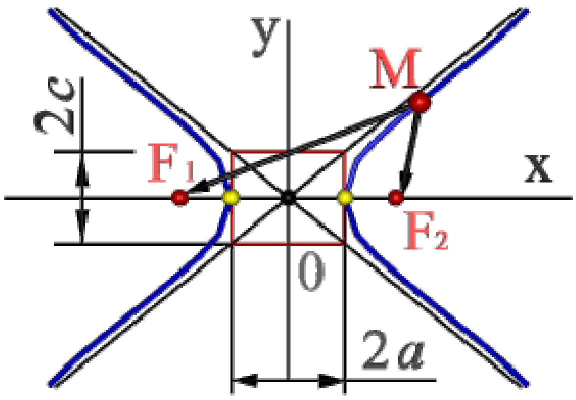
6. Сопряженные диаметры эллипса: два диаметра эллипса называются сопряженными, если хорды, параллельные одному из них, делятся другими пополам. Оси эллипса тоже можно считать сопряженными диаметрами. Прямые $y_1=k_1x$ и $y_2=k_2x$, для которых $k_1k_2=-\frac{b^2}{a^2}$, называются сопряженными направлениями для данного эллипса.

7. Касательная к эллипсу имеет уравнение: $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$, где ($x_0$; y_0) - координаты точки касания.

Пример 4.5. Написать каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку М (5;0), если фокальное расстояние равно 6.

Решение: Так как $F_1F_2 = 6$, то с=3. Запишем каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. По условию точка М (5;0) принадлежит эллипсу, следовательно, $\frac{25}{a^2 = 1}$, откуда $a^2 = 25$. Из равенства $a^2 - c^2 = b^2$ находим $b^2 = 25 - 9 = 16$. Итак, искомым уравнением эллипса будет уравнение: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Определение 4.4. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек той же плоскости F_1 и F_2 есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между F_1 и F_2.



Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$- центр в начале координат;

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ - центр в т.А(x_0; y_0).

Директрисами гиперболы называются прямые, параллельные канонической оси ОУ и отстоящие от этой оси на расстояние $\frac{a}{\varepsilon}$. Уравнения директрис: $x=\frac{a}{\varepsilon}$ и $x=-\frac{a}{\varepsilon}$.

Асимптоты гиперболы: прямые, проходящие через начало канонической системы координат и имеющие угловые коэффициенты $\pm\frac{b}{a}$ называются асимптотами гиперболы. Уравнения асимптот гиперболы: $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$.

Эксцентриситет гиперболы: число $\varepsilon=\frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом гиперболы. Причем $\varepsilon>1$.

Касательная к гиперболе: уравнение касательной к гиперболе имеет вид $\frac{x\cdot x_0}{a^2}-\frac{y\cdot y_0}{b^2}=1$, где ($x_0$; y_0) - координаты точки касания.

Пример 4.6. Даны фокусы гиперболы $F_1(-10;0)$ и $F_1(10;0)$ и ее асимптота $4x+3y=0$. Написать уравнение гиперболы.

Решение: Записав уравнение асимптоты в виде $y=-\frac{4}{3}x$, находим отношение полуосей гиперболы $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$. Из условия задачи следует, что с=10.

Задача свелась к решению системы уравнений:

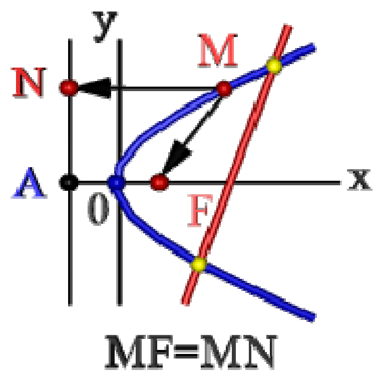
$$\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{4}{3},\\ a^2+b^2=100\end{cases}$$

Подставляя $b = \frac{4}{3}a$ во второе уравнение системы получаем $a^2 + \frac{16a^2}{9} = 100$.

Откуда $a^2 = 36$. Теперь находим $b^2 = \left(\frac{4}{3}a\right)^2 = \frac{16}{9} \cdot 36 = 64$. Следовательно, уравнение гиперболы имеет вид: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

Определение 4.5. Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых расстояние до фиксированной точки (фокуса) этой плоскости, равно расстоянию до фиксированной прямой, лежащей в той же плоскости и называемой директрисой параболы.

$F\left(\frac{p}{2};0\right)$- фокус параболы, а точка N - проекция текущей точки M на директрису d, где $x = -\frac{p}{2}$.



Каноническое уравнение: $y^2 = 2px$.

Пример 4.7. Дана парабола $y^2 = 3x$. Найти точки параболы, расстояние от которых до фокуса равно 1.

Решение: Так как 2p=3 , то $\frac{p}{2} = \frac{3}{4}$ и фокус параболы находится в точке $F\left(\frac{3}{4};0\right)$.

Пусть $M_0(x_0;y_0)$ - искомая точка. Тогда, согласно условию, $\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+(y-0)^2}=1$. Следовательно, для нахождения координат точки М нужно решить систему уравнений: $\begin{cases}\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+(y-0)^2=1,\\ y^2=3x\end{cases}$

Решив эту систему получаем $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=1$ или $\left(x-\frac{3}{4}\right)=1$ или $x=\frac{7}{4}$, тогда $y^2=3\cdot\frac{7}{4}=\frac{21}{4}$ или $y=\pm\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Таким образом, существуют две точки, расстояние которых до фокуса равно 1: $\left(\frac{7}{4};\frac{\sqrt{21}}{2}\right)$ и $\left(\frac{7}{4};-\frac{\sqrt{21}}{2}\right)$.

Задания для самостоятельного решения:

1. Даны три точки A_1, A_2 и A_3. Найти: 1) длину отрезка A_1A_2; 2) уравнение прямой A_1A_2; 3) уравнение прямой, проходящей через точку A_3 параллельно прямой A_1A_2; 4) уравнение прямой, проходящей через точку $[\alpha,\beta]$ перпендикулярно прямой A_1A_2; 5) уравнение прямой A_2A_3; 6) расстояние от точки A_3 до прямой A_1A_2; 7) угол между прямыми A_1A_2 и A_2A_3, если $A_1(-7;3)$, $A_2(5;-2)$, $A_3(-5;2)$.
2. Найти уравнение прямой: а) проходящей через т.А(2;-6) параллельно вектору $\overline{p}(1;-1)$; б) проходящей через т.А(-1;1) и т.В(2;5).
3. Дана прямая $l: 2x-y-5=0$. Найти:
   a) параметрическое уравнение прямой;
   b) уравнение прямой с угловым коээфициентом;
   c) уравнение прямой в отрезках;
   d) уравнение прямой, параллельной прямой l и проходящей через т.К(5;1).

4. Найти углы между прямыми:

   a) $l_1 : 3x - y - 5 = 0$ и $l_2 : x + 2y + 4 = 0$

   b) $d_1 : 2x - 3y + 6 = 0$ и $d_2 : 6x + 5 = 0$

5. Даны середины сторон треугольника АВС: M(2;-1), K(-3;-3), P(-1;0). Найти уравнения его сторон.

6. На прямой $l : x + 2y + 2 = 0$ найти точку, равноудаленную от точек А(-2;5) и В(0;1).

7. Вычислить расстояние от т.М до прямой l :

   a) M(2;4), $l : 3x + 4y + 3 = 0$

   b) M(-4;5), $l : y = 7x + 8$

8. Для линии, заданной своим каноническим уравнением, определить полуоси, расстояние между фокусами, эксцентриситет и уравнения директрис: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

9. Написать уравнение множества всех точек плоскости, для каждой из которых расстояние до прямой, заданной уравнением $x - 4 = 0$, вдвое больше расстояние до т. А(1;0).

10. Найти каноническое уравнение эллипса, если известны:

    a) уравнения его директрис: $x = \pm\frac{25}{4}$ и эксцентриситет $\frac{4}{5}$;

    b) уравнения его директрис: $x = \pm\frac{27}{5}$ и расстояние между фокусами $2\sqrt{5}$;

    c) уравнения его директрис: $x = \pm 4$ и малая полуось $2\sqrt{5}$;

    d) уравнения его директрис: $x = \pm\frac{25}{4}$ и расстояние от фокуса до соответствующей директрисы $\frac{9}{4}$;

    e) уравнения его директрис: $x = \pm 4\sqrt{3}$ и большая полуось 6.

11. Найти каноническое уравнение гиперболы, если уравнения ее директрис $x = \pm\frac{27}{5}$ и эксцентриситет равен $\frac{5}{3}$.

12. Найти каноническое уравнение гиперболы, если:

a) ее эксцентриситет равен $\frac{\sqrt{5}}{2}$ и мнимая полуось равна 1.

b) ее эксцентриситет равен $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ и действительная полуось равна $2\sqrt{3}$.

c) ее эксцентриситет равен $\frac{5}{4}$ и расстояние между фокусами равно 20.

d) ее эксцентриситет равен $\frac{6}{5}$ и расстояние между директрисами равно $\frac{50}{6}$.

13. Найти каноническое уравнение параболы, если:

a) расстояние от фокуса, лежащего на оси абсцисс, до вершины равно 4;

b) парабола симметрична относительно оси абсцисс и проходит через т.M(1; 2);

c) фокус имеет координаты F(3;0);

d) уравнение директрисы имеет вид: $x+1=0$;

e) расстояние между фокусом и директрисой равно 10 и парабола симметрична относительно оси ординат.

14. Дана линия второго порядка $\gamma: x^2-2xy+y^2-6x+2y-7=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через т. A(5;4) и пересекающей линию γ только в одной точке.

15. Выяснить имеет ли центр линия второго порядка:

a) $\gamma: x^2-4xy+3y^2-5x-8y-1=0$;

b) $\gamma: x^2-6xy+9y^2-2x-8y-10=0$.

16. Составить уравнение касательной к линии второго порядка $\gamma: x^2+8xy+4y^2+2x-4y-9=0$, проходящей через т. A(-4;0).

17. Определить вид линии второго порядка и изобразить эти линии:

a) $\gamma: x^2+6xy+y^2+6x+2y-1=0$;

b) $\gamma: 3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$;

c) $\gamma: 4x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 2y - \frac{5}{8} = 0$;

d) $\gamma: 14x^2 - 5xy - y^2 = 0$;

e) $\gamma: x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$.

Домашнее задание.

1. Определить вид линии второго порядка и изобразить эти линии:

   a) $\gamma: x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y + 7 = 0$;

   b) $\gamma: 2y^2 + 8x + 12y - 3 = 0$;

   c) $\gamma: 9x^2 - 6xy + y^2 - 6x + 2y = 0$.

2. Найти уравнения прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x - y - 1 = 0$ и $3x - y + 4 = 0$ параллельно прямой $4x + 2y - 13 = 0$.

3. Даны последовательные вершины параллелограмма ABCD: A(-2;5), B(2;7), C(-4;-3). Найти координаты вершины D и составит уравнение диагонали BD.

4. При каких значениях A и C прямая $Ax + 3y + C = 0$:

a) параллельна прямой $3x - y + 8 = 0$;

b) перпендикулярна прямой $y = 5x$;

c) проходит через т. (2;2) и т. (-1;4);

d) пересекается с прямой $4x - 2y + 7 = 0$.

5. Даны три точки A_1, A_2 и A_3. Найти: 1) длину отрезка A_1A_2; 2) уравнение прямой A_1A_2; 3) уравнение прямой, проходящей через точку A_3 параллельно прямой A_1A_2; 4) уравнение прямой, проходящей через точку $[\alpha, \beta]$ перпендикулярно прямой A_1A_2; 5) уравнение прямой A_2A_3; 6) расстояние от точки A_3 до прямой A_1A_2; 7) угол между прямыми A_1A_2 и A_2A_3, если $A_1(5;-1)$, $A_2(1;-4)$, $A_3(8;3)$.

6. Окружность проходит через точки $M_1(1;5)$ и $M_2(5;3)$, а центр ее лежит на прямой $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$. Найти уравнение окружности.

7. Через фокус параболы $y^2 = -x$ проведена прямая под углом 135^0 в оси OX. Найти длину образовавшейся хорды.
8. Найти уравнение гиперболы, зная, что ее эксцентриситет $\varepsilon = 2$, фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{10} + y^2 = 1$.
9. Дан эллипс $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1$. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – вершинах данного эллипса.

4.3. Плоскость и прямая в пространстве

Назовем нормалью к плоскости вектор, перпендикулярный к этой плоскости. Обозначают нормаль $\bar{n} = (A, B, C)$ (рис. 11).

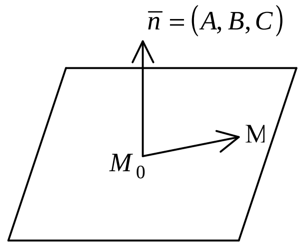


Рис. 11

Определение 4.6. Уравнением поверхности в пространстве $Oxyz$ называется такое уравнение между переменными $x, y, z,$ которому удовлетворяют координаты всех точек данной поверхности и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности.

Пусть точки M_0 и M лежат на плоскости (рис. 11). Тогда $\bar{n} \perp \overline{M_0M}$ и, значит, их скалярное произведение равно нулю: $A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$ – это уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (A, B, C)$.

Укажем теперь основные уравнения плоскостей:

1) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ – уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (A, B, C)$;

2) $Ax + By + Cz + D = 0$ – общее уравнение плоскости (A, B, C – координаты нормали плоскости);

3) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ – уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$;

4) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ – уравнение плоскости в отрезках, где a,b,c – величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях Ox,Oy и Oz соответственно.

Если плоскости P_1 и P_2 параллельны или перпендикулярны друг к другу, то соответственно параллельны или перпендикулярны их нормальные векторы.

Ясно, что верно и обратное утверждение: если $\overline{n}_1 \perp \overline{n}_2$, то плоскости P_1 и P_2 взаимноперпендикулярны; если $\overline{n}_1 // \overline{n}_2$, то P_1 и P_2 взаимнопараллельны.

Итак, пусть плоскости P_1 и P_2 заданы общими уравнениями:

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,

$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Тогда имеем:

1. $P_1 // P_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$;

2. $P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Из этих же соображений определяется и угол между двумя плоскостями, который равен углу между нормалями к плоскостям (или дополняет этот последний до 180^0).

$$\cos\varphi=\frac{\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2}{n_1\cdot n_2}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Расстояние от точки $M(x_1,y_1,z_1)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ находят по формуле

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Пример 4.8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2{,}5{,}-3)$ перпендикулярно вектору $\overline{BC}$, если $B(7{,}8{,}-1)$ и $C(9{,}7{,}4)$.

Решение: Найдем $B\overline{C} = (9-7,7-8,4+1) = (2,-1.5)$. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через заданную точку:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Имеем

$$2(x-2)-1(y-5)+5(z+3)=0 \Rightarrow 2x-y+5z-4+5+15=0$$
$$\Rightarrow 2x-y+5z+16=0.$$

Пример 4.9. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1,5,-7)$, $M_2(-3,6,3)$ и $M_3(-2,7,3)$.

Решение: В уравнение плоскости, проходящей через три точки, подставим координаты данных точек:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z+7 \\ -3-1 & 6-5 & 3+7 \\ -2-1 & 7-5 & 3+7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z+7 \\ -4 & 1 & 10 \\ -3 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая определитель по элементам первой строки, имеем

$$2(x-1)-2(y-5)+(z+7)=0 \Rightarrow 2x-2y+z+15=0.$$

Прямая в пространстве однозначно определяется точкой $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и направлением, т.е. некоторым вектором, называемым направляющим. Обозначим его $\overline{a}=(e,m,n)$.

Основные уравнения прямых в пространстве:

1) $\dfrac{x-x_0}{e}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ - канонические уравнения прямой в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ параллельно вектору $\overline{a}=(e,m,n)$;

2) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – уравнения прямой в пространстве, проходящей через две точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, получают из канонических, считая направляющим вектором прямой вектор $\overline{M_1M_2}$, лежащий на прямой;

3) $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ – общие уравнения прямой задаются уравнениями двух плоскостей, объединенных в систему, а так как такая система имеет бес-

численное множество решений, то их совокупность геометрически и представляет собой прямую.

Взаимное расположение двух прямых в пространстве определяется расположением их направляющих векторов.

Пусть $l_1 : \dfrac{x-x_0}{e_1} = \dfrac{y-y_0}{m_1} = \dfrac{z-z_0}{n_1}$, $l_2 : \dfrac{x-x_1}{e_2} = \dfrac{y-y_1}{m_2} = \dfrac{z-z_1}{n_2}$, где $\bar{a}_1 = (e_1, m_1, n_1), \bar{a}_2 = (e_2, m_2, n_2)$ – направляющие векторы прямых l_1 и l_2 соответственно.

а) $l_1 // l_2 \Leftrightarrow \bar{a}_1 // \bar{a}_2$, т.е. $l_1 // l_2 \Leftrightarrow \dfrac{e_1}{e_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$;

б) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \bar{a}_1 \perp \bar{a}_2 \Leftrightarrow e_1 e_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$;

в) угол между прямыми l_1 и l_2 равен углу между направляющими векторами этих прямых, т.е.

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2}{a_1 \cdot a_2} = \frac{e_1 e_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{e_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{e_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

В заключение темы рассмотрим взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Ясно, что прямая $\dfrac{x-x_0}{e} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ параллельна плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой $\bar{a} = (e, m, n)$ перпендикулярен нормали $\bar{n} = (A, B, C)$ плоскости (рис. 12), т.е. если $\bar{a} \cdot \bar{n} = 0$ или $Ae + Bm + Cn = 0$.

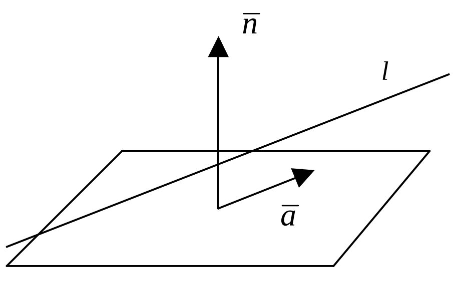


Рис. 12

Прямая перпендикулярна плоскости при условии $\bar{n} // \bar{a}$, т.е.

$$\frac{A}{e} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Угол между прямой и плоскостью находят по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|\bar{n}\cdot\bar{a}|}{|\bar{n}|\cdot|\bar{a}|} = \frac{|Ae+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{e^2+m^2+n^2}}.$$

Пример 4.10. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(1;-1;2)$, $A_2(2;1;2)$, $A_3(1;1;4)$, $A_4(6;-3;6)$.

Найти:

1) длину ребра A_1A_3;

2) угол между ребрами A_1A_3 и A_1A_4;

3) угол между ребром A_1A_3 и гранью $A_1A_2A_4$;

4) площадь грани $A_1A_2A_4$;

5) объем пирамиды;

6) уравнение прямой A_1A_4;

7) уравнение плоскости $A_1A_2A_4$;

8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_3 на грань $A_1A_2A_4$.

Решение: 1. Длина ребра находится по формуле расстояния между двумя точками:

$$A_1\overline{A_3} = \sqrt{(1-1)^2+(1-(-1))^2+(4-2)^2} = \sqrt{8}.$$

2. Найдем векторы $A_1\overline{A_3}$ и $A_1\overline{A_4}$:

$$A_1\overline{A_3} = \big((1-1);(1-(-1));(4-2)\big) = (0;2;2);$$

$$A_1\overline{A_4} = (5;-2;4).$$

Тогда

$$\cos\varphi = \frac{A_1\overline{A_3}\cdot A_1\overline{A_4}}{|A_1A_3|\cdot|A_1A_4|} = \frac{5\cdot 0-2\cdot 2+4\cdot 2}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{25+4+16}} = \frac{4}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{45}} = \frac{4}{2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{5}} = \frac{2}{3\sqrt{10}}.$$

3. Угол между ребром и гранью находят по формуле угла между прямой и плоскостью, для чего следует найти направляющий вектор прямой $A_1\overline{A_3}$ и нормаль к плоскости, проходящей через точки A_1, A_2, A_4. Направляющий вектор $A_1\overline{A_3}$ уже найден в пункте 2. Это вектор $A_1\overline{A_3} = (0;2;2)$. Нормаль к грани $A_1A_2A_4$ можно найти двумя способами.

Например, найти уравнение плоскости $A_1A_2A_4$ или (см. рис. 13) найти векторное произведение $A_1\overline{A_2} \times A_1\overline{A_4} = \overline{n}$, так как векторное произведение перпендикулярно и к $A_1\overline{A_2}$, и к $A_1\overline{A_4}$. Итак,

$$\overline{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}\overline{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}\overline{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}\overline{k} = 8\overline{i} - 4\overline{j} - 12\overline{k}.$$

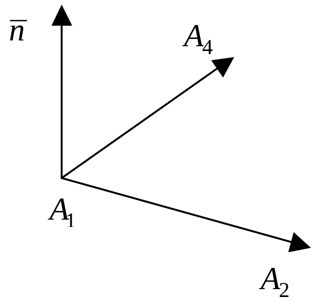


Рис. 13

Тогда $\overline{n} = (8;-4;-12), \overline{a} = (0;2;2)$.

$$\sin\varphi = \frac{|\overline{n} \cdot \overline{a}|}{|\overline{n}| \cdot |\overline{a}|} = \frac{|8 \cdot 0 - 4 \cdot 2 - 12 \cdot 2|}{\sqrt{8^2 + 4^2 + 12^2} \cdot \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2}} =$$

$$= \frac{32}{\sqrt{224} \cdot \sqrt{8}} \approx 0.7565.$$

4. Площадь грани $A_1A_2A_4$ находим по формуле $S = \frac{1}{2}\left|A_1\overline{A_2} \times A_1\overline{A_4}\right|$.

$$\left|A_1\overline{A_2} \times A_1\overline{A_4}\right| = \left|8\overline{i} - 4\overline{j} - 12\overline{k}\right| = \sqrt{64 + 16 + 144} = \sqrt{224}\,.$$

Тогда $S = \frac{1}{2}\sqrt{224}$.

5. Объем пирамиды находим по формуле: $V = \frac{1}{6}\left|A_1\overline{A_2} \cdot A_1\overline{A_3} \cdot A_1\overline{A_4}\right|$. Мы уже нашли векторы $A_1\overline{A_2} = (1;2;0), A_1\overline{A_3} = (0;2;2), A_1\overline{A_4} = (5;-2;4)$. Найдем смешанное произведение этих векторов:

$$A_1\overline{A_2} \cdot A_1\overline{A_3} \cdot A_1\overline{A_4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2(-10) = 12 + 20 = 32.$$

Таким образом, $V = \frac{1}{6} \cdot 32 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$.

6. Уравнение прямой, проходящей через две точки $A_1(1;-1;2)$ и $A_4(6;-3;6)$, имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \text{ или } \frac{x-1}{6-1}=\frac{y+1}{-3+1}=\frac{z-2}{6-2}, \text{т.е.}$$

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{4}.$$

7. Найдем уравнение плоскости, проходящей через три точки A_1, A_2 и A_4:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2-1 & 1+1 & 2-2 \\ 6-1 & -3+1 & 6-2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

Раскладывая определитель по элементам первой строки, получим $8(x-1)-4(y+1)-12(z-2)=0,$ откуда $8x-4y-12z+12=0$ и является уравнением грани $A_1A_2A_4$.

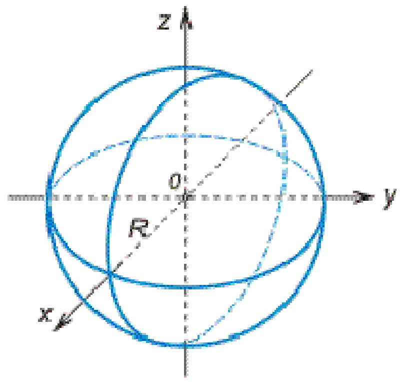
8. Нормаль к грани $A_1A_2A_4$ является направляющим вектором высоты пирамиды, опущенной на эту грань из вершины A_3, поэтому уравнение высоты имеет вид

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-4}{-12}.$$

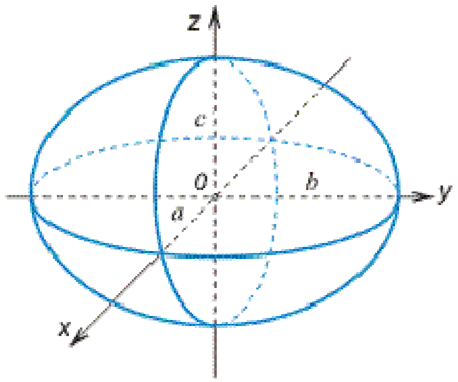
4.4. Поверхности второго порядка

Определение 4.7. Поверхностью второго порядка называется поверхность, определяемая уравнением: $ax^2+by^2+cz^2+dxy+fxz+gyz+hx+ky+lz+m=0$, где a,b,c,d,f,g,h,k,l,m вещественные числа, причем хотя бы одно из чисел a,b,c,d,f,g отлично от нуля. К невырожденным поверхностям второго порядка относятся эллипсоид, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид, однополостной гиперболоид и двуполостной гиперболоид. Строгое изучение этих поверхностей проводится в курсе аналитической геометрии. Здесь же мы ограничимся определениями и иллюстрациями.

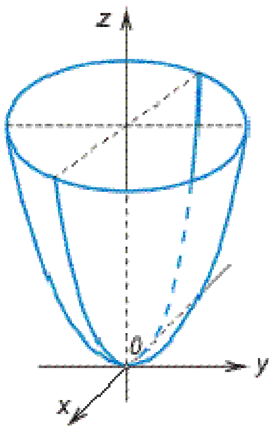
Определение 4.8. Сферой называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от фиксированной точки, называемой центром. Сфера радиуса R с центром в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет уравнение $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$



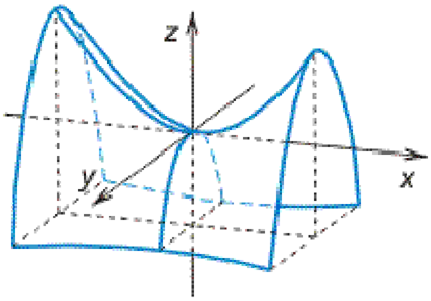
Определение 4.9. Поверхность, задаваемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, где $a>0$, $b>0$, $c>0$, называется ***эллипсоидом***.



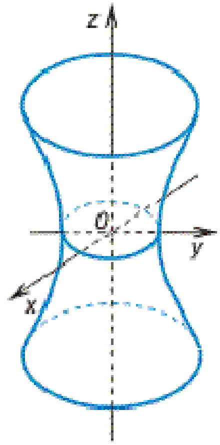
Определение 4.10**.** Поверхность, задаваемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$, где $a>0$, $b>0$, называется ***эллиптическим параболоидом***.



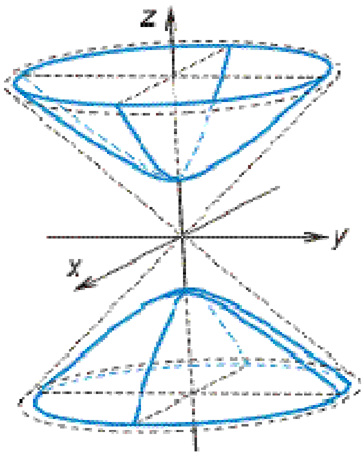
Определение 4.11. Поверхность, задаваемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ $a>0$, $b>0$, называется ***гиперболическим параболоидом***.



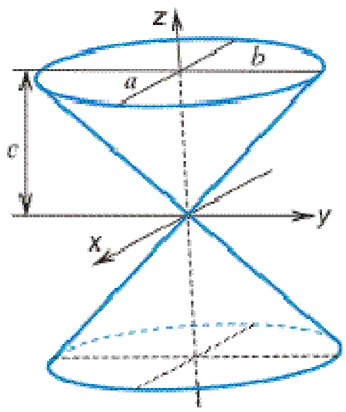
Определение 4.12. Поверхность, задаваемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, где $a>0$, $b>0$, $c>0$, называется ***однополостным гиперболоидом***.



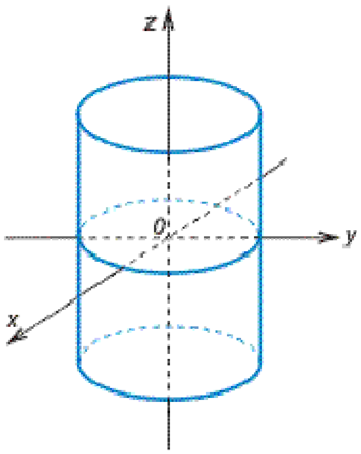
Определение 4.13. Поверхность, задаваемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, где $a>0$, $b>0$, $c>0$, называется ***двуполостным гиперболоидом***.



Определение 4.14. ***Конусом*** второго порядка называется поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой системе координат имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, где $a>0$, $b>0$, $c>0$

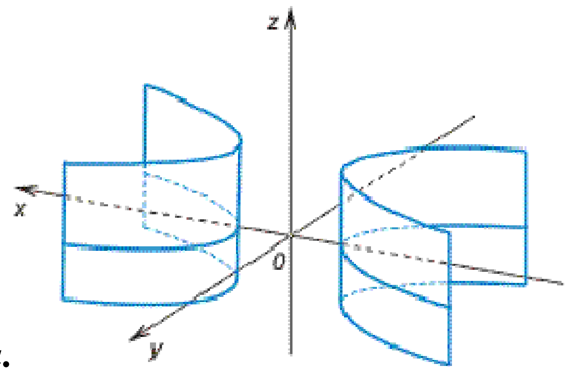


Определение 4.15. Поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат задается уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, называется ***эллиптическим цилиндром***.

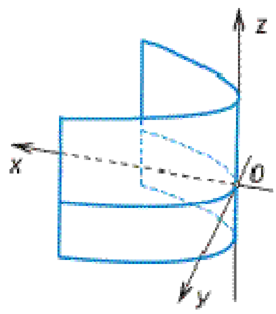


поверхность, которая задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

называется ***гиперболическим цилиндром.***



поверхность, которая задается уравнением $y^2 = 2px$, называется параболическим цилиндром.



Задания для самостоятельного выполнения:

1. Уравнение плоскости $2x - 6y + 3z - 14 = 0$ привести к нормальному виду и уравнению в отрезках.
2. Написать уравнение плоскости:

a) параллельной оси OZ и проходящей через точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_2(-1;2;5)$;

b) проходящей через т. $M_1(3;-1;2)$ перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$;

c) проходящей через т. $M_1(-2;0;0)$; т. $M_2(0;4;0)$; т. $M_3(0;0;5)$;

d) проходящей через т. $M_1(1;-2;3)$ и линию пересечения плоскостей $2x-y+2z-6=0$ и $3x+2y-z+3=0$.

3. Через т. $M(6;-4;-2)$ провести прямую, параллельную плоскости $6x-4y-6z+7=0$ и пересекающую прямую $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}$.

4. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми:

a) $d_1:\frac{x+5}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-2}$ и $d_2:\frac{x-9}{6}=\frac{y}{-2}=\frac{z-2}{-1}$;

b) $d_1:\begin{cases} x=3t-7, \\ y=4t-4, \\ z=-2t-3 \end{cases}$ и $d_2:\begin{cases} x=6t+21, \\ y=-4t-5, \\ z=-t+2 \end{cases}$

5. Найти угол между плоскостями:

a) $\pi_1: 11x-8y-7z-15=0$ и $\pi_2: 4x-10y+z-2=0$;

b) $\pi_1: 2x+3y-4z+4=0$ и $\pi_2: 5x-2y+z-3=0$.

6. Составить параметрические уравнения прямых, проведенных через т. $M_0(2;-1;-3)$, если:

a) прямая параллельна прямой $\begin{cases} x=-1+2t, \\ y=2-4t, \\ z=t \end{cases}$

b) прямая параллельна оси OY;

c) прямая перпендикулярна плоскости $3x+y-z-8=0$.

7. Даны координаты вершин A_1, A_2, A_3, A_4 пирамиды. Найти: 1) длину ребра A_1A_3; 2) угол между ребрами A_1A_3 и A_1A_4; 3) угол между ребром A_1A_3 и гранью $A_1A_2A_4$; 4) площадь грани $A_1A_2A_4$; 5) объем пирамиды; 6) уравнение прямой A_1A_4; 7) уравнение плоскости $A_1A_2A_4$; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_3 на грань $A_1A_2A_4$, если $A_1(2;-1;1)$, $A_2(5;5;4)$, $A_3(3;2-1)$, $A_4(4;1;3)$.

8. Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки: (-3;5;4), (2;4;6), (2;14;6)?

9. Найти угол между прямыми:

a) $\frac{x}{11}=\frac{y+1}{8}=\frac{z-1}{7}$ и $\frac{x-4}{7}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{8}$;

b) $\begin{cases} x=5-2t, \\ y=2-4t, \\ z=t \end{cases}$ и $\frac{x-4}{7}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{8}$.

10. Установите тип заданных поверхностей, и построить их:

a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{81}=1;$

b) $x^2+y^2-4z^2=-1;$

c) $3x^2+y^2=2a(z-2);$

d) $2y=x^2-\frac{z^2}{4};$

e) $y^2=15z;$

f) $z=5-x^2-y^2.$

Домашнее задание:

1. Определить координаты точек, принадлежащих плоскости:

a) $2x-4y+3z-6=0$;

b) $7x-y-1=0$;

c) $4x-2y+7z=0$;

d) $z+2=0$.

2. Составить каноническое и общее уравнения плоскости, которая:

a) проходит через данные точки $A_1(0;-2;1)$, $A_2(0;4;0)$, $A_3(-1;3;5)$;

b) параллельна векторам $\bar{a}(1;-2;4)$; $\bar{b}(3;0;-1)$ и проходит через начало координат;

c) параллельна плоскости XOY и проходит через т.A(1;2;3);

d) проходит через ось OY и т.B(0;-1;2);

e) параллельна оси OX и проходит через точки A(2;0;-1) и B(5;-3;0);

f) отсекает на осях координат единичные отрезки.

3. При каких значениях λ и μ плоскости $\pi_1: 2x+\lambda y+3z-2=0$ и $\pi_2: \mu x-6y-6z+4=0$ будут совпадать; пересекаться; параллельны?

4. Напишите канонические уравнения прямой:

a) проходящей через т.A(2;1;-3) и параллельно вектору $\bar{a}(1;-3;1)$;

b) проходящей через т. M(2;-3;0) и N(3;5;-1);

c) проходящей через т.А(1;-3;4) и параллельно прямой $\begin{cases} x = 5t + 1, \\ y = -4 - 3t, \\ z = -4t \end{cases}$;

d) проходящей через т.К(2;-3;-1) и параллельной координатной оси OZ.

5. На оси OX найти точку равноудаленную от точки (1;-7;9) и от плоскости $\pi_1 : 8x - 4y + z - 3 = 0$.

6. Даны координаты вершин A_1, A_2, A_3, A_4 пирамиды. Найти: 1) длину ребра A_1A_3; 2) угол между ребрами A_1A_3 и A_1A_4; 3) угол между ребром A_1A_3 и гранью $A_1A_2A_4$; 4) площадь грани $A_1A_2A_4$; 5) объем пирамиды; 6) уравнение прямой A_1A_4; 7) уравнение плоскости $A_1A_2A_4$; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_3 на грань $A_1A_2A_4$, если $A_1(2;3;1),\ A_2(4;1;-2),\ A_3(6;3;7),\ A_4(-5;-4;8)$.

7. Установите тип заданных поверхностей, и построить их:

a) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z + 14 = 0;$

b) $2x^2 - 7y^2 + 11z^2 = 0;$

c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{25} = 1;$

d) $x^2 = 5y - 1.$

Библиографический список.

1. Солодовников А.С. Математика в экономике. Ч. 1, 2. – М.: Финансы и статистика, 1999.
2. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. – М.: ИНФРА-М, 1998.
3. Шипачев В.С. Сборник задач по высшей математике. – М.: Высшая школа, 1994.
4. Шипачев В.С. Основы высшей математике. – М.: Высшая школа, 1994.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1998.
6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1998.
7. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1, 2. – М.: Высшая школа, 1980.

СОДЕРЖАНИЕ

Геннадий Васильевич Литовка,
зав. кафедрой ОМиИ АмГУ, д-р техн. наук, профессор;

Ангелина Михайловна Попова,
Старший преподаватель кафедры ИиУС АмГУ;

Анна Владимировна Павельчук,
ассистент кафедры ОМиИ АмГУ

Математика. Часть 1. *Учебно-методическое пособие.*

Заказ 428.