Министерство образования и науки Российской федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Серия «Учебно-методический комплекс дисциплины»

Т.А. Луганцева

Кинематика точки

Учебное пособие

Благовещенск

Издательство АмГУ

2011

ББК 22.21

Л 75

Рекомендовано

учебно-методическим советом университета

Рецензенты:

Н.М.Ларченко, доцент кафедры общетехнических дисциплин Амурского филиала Морского государственного университета, канд. техн. наук;

Т.В.Труфанова, доцент кафедры математического анализа и моделирования АмГУ, канд. техн. наук

Луганцева Т.А.,

Л 75 Кинематика точки: Учебное пособие. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2011. - с.

Учебное пособие предназначено для активизации самостоятельного изучения темы «Кинематика точки», выполнения расчетно-графических, контрольных работ и тестирования по дисциплине «Теоретическая механика»

Пособие включает в себя краткие теоретические сведения по теме и методические рекомендации к практическим занятиям. Практические занятия снабжены методическими материалами, обеспечивающими самостоятельное изучение дисциплины, рассмотрены примеры решения типовых задач, приведены вопросы для самоконтроля, номера задач для самостоятельной работы и тесты для проверки знаний.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей и форм обучения университета, изучающих курс теоретической механики.

© Амурский государственный университет, 2011

ВВЕДЕНИЕ В КИНЕМАТИКУ

Как в любой естественной науке, в основе теоретической механики лежат опыт, практика, наблюдения. Для анализа результатов опыта и наблюдений теоретическая механика использует математический аппарат. Но, наблюдая какое-либо явление, невозможно охватить его всем многообразии. Поэтому при изучении какого-либо явления необходимо выделить главное, отвлекаясь (абстрагируясь) от того что является не существенным, второстепенным.

В теоретической механике метод абстракции играет очень важную роль. Именно метод научного абстрагирования и помог изучить самые общие свойства механического движения, присущие движению любого материального тела. Все физические тела, которые нас окружают, имеют сложную структуру и множество свойств (температуру, теплопроводность, электропроводность, форму, влажность и т.п.). В задачах механики отвлекаются от всех свойств, не влияющих на решение задачи, и от свойств, которые мало влияют на решение задачи, т.е. переходят от реальных физических тел к моделям (физическим или динамическим), представляющих ту или иную степень абстракции. Моделей для решения различных задач может быть множество.

В качестве примеров научной абстракции (или абстрактного понятия) можно привести, широко используемые в теоретической механике понятия (моделей) материальной точки, системы материальных точек и абсолютно твердого тела.

Всякое материальное тело занимает некоторую часть пространства, обладает определенными размерами. Однако, в тех случаях, когда размеры тела малы, по сравнению с размерами траектории, по которой движется центр масс этого тела, размерами этого тела можно пренебречь, рассматривая его как точку. Такое абстрагирование приводит к важному понятию теоретической механики – понятию материальной точки.

Материальная точка - есть реальное материальное тело, размеры которого малы, по сравнению с размерами траектории, по которой движется центр тяжести этого тела. Она отличается от геометрической точки тем, что имеет массу.

Одно и то же материальное тело в одном движении может рассматриваться как материальная точка (например, Земля в ее движении вокруг Солнца), а в другом движении как материальное тело конечных размеров (Земля при ее вращении вокруг собственной оси).

Система материальных точек (механическая система) – это совокупность материальных точек связанных между силами взаимодействия. То есть любое физическое тело можно рассматривать как систему материальных точек.

Третья абстракция теоретической механики – понятие абсолютно твердого тела. В природе абсолютно твердых тел нет. Все тела, так или иначе, изменяют свою форму, деформируются под действием различных сил. Однако, во многих задачах эта деформация (перемещение отдельных частей тела относительно друг друга) оказывается очень малой по сравнению с перемещением самого тела и наличие (или отсутствие) этих деформаций не изменяет существа рассматриваемой задачи. В этом случае, можно считать, что тело не деформируется, является абсолютно твердым.

Абсолютно твердым телом называется тело, у которого расстояние между любыми двумя точками остается неизменным при любых условиях. То есть, это твердое тело, которое сохраняет свою геометрическую форму неизменной, независимо от действия на него любых сил.

Примерами научной абстракции являются также применяемые в механике понятия **«пространство» и «время».**

В теоретической механике в качестве моделей пространства и времени принимаются их простейшие модели – абсолютное пространство и абсолютное время.

Основными свойствами классического пространства являются:

- классическое пространство абсолютно, то есть оно не зависит от времени, движения и материи;

- классическое пространство однородно, то есть оно одинаково во всех своих точках, а значит, все точки пространства эквивалентны. Результаты опытов не зависят от того, в какой точке пространства они проводятся, поэтому начало координат систем отсчёта можно брать в любой точке пространства;

- классическое пространство – изотропно, то есть все направления в пространстве эквивалентны, поэтому направление осей координат можно выбирать произвольно;

- классическое пространство – евклидово, то есть описывается геометрией Евклида.

Время в классической механике имеет ряд свойств:

- классическое время – абсолютно, не зависит ни от пространства, ни от материи, ни от движения, то есть классическое время считается непрерывно изменяющийся величиной, оно течет от прошлого к будущему, одинаково в любой точке пространства и в любой системе отсчета (так называемое абсолютное время);

- классическое время – однородно, то есть все моменты времени эквивалентны, поэтому результаты опытов не зависят от того, в какой конкретно момент времени они проводятся.

Время $t>0$ считается универсальной непрерывно изменяющейся скалярной переменной (аргумент). Все другие переменные величины (расстояния, скорости и т.д.) рассматриваются как изменяющиеся с течением времени, т.е. как функции времени t. Отсчет времени ведется от некоторого начального момента времени t=0, о выборе которого в каждом случае уславливаются. Отрицательное время t<0 соответствует событиям, имевшим место в прошедшем времени, положительное время t>0 - будущим событиям.

В философском смысле слова пространство и время есть формы существования материи. Законы теории относительности показали, что пространство и время связаны с движением тел. В двух системах, перемещающихся с разными скоростями, время будет протекать по-разному. В процессах, которые происходят при скоростях близких к скорости света, пространство (как протяженность) и время взаимосвязаны и влияют друг на друга.

В классической механике, основанной на законах Галилея – Ньютона, считается, что пространство и время не зависят от движения материальных объектов.

Применение метода научной абстракции позволило теоретической механике выявить и установить общие законы механического движения материальных тел, которые в последующих технических дисциплинах используются как основные, базовые законы для построения той или иной науки.

Методом научной абстракции мы пользуемся очень часто, иногда даже не подозревая об этом. Во всех случаях, когда нам из общего надо выделить что-то частное – мы пользуемся методом абстракции. Это позволяет нам сосредоточить свое внимание на конкретном объекте или определенном свойстве.

Кинематика – раздел теоретической механики, в котором изучается движение в пространстве и во времени независимо от тех причин, которые обуславливают это движение (т.е. движение изучается с геометрической точки зрения). Таким образом, в кинематике не учитываются массы движущихся материальных тел и действующие на тела силы. Кроме научного значения кинематики, она имеет непосредственное применение в технике, в которой широко пользуются законами и формулами кинематики. Очень большое значение кинематика имеет в теории механизмов и машин. В настоящее время кинематика является хорошо исследованной областью науки. Дальнейшее развитие кинематики происходит преимущественно в виде применения ее к различным задачам техники.

Основной объект нашего изучения простейший вид движения – механическое движение. А что такое механическое движение?

Механическое движение есть изменение с течением времени взаимного положения материальных тел или их частей в пространстве и происходящие при этом силовые (механические) взаимодействия между нами.

В этом определении просматриваются две стороны механического движения: перемещение тел или их частей относительно друг друга и силовое взаимодействие между ними.

Изучать механическое движение можно последовательно: по частям. Вначале изучить одну сторону механического движения, например, силовое взаимодействие между телами, абстрагируясь (отвлекаясь) при этом от перемещений тел относительно друг друга; затем изучить перемещение тел или их частей, относительно друг друга, абстрагируясь от силовых взаимодействий между ними, а затем установить связь между этими двумя сторонами механического движения.

В кинематике изучается перемещение тел относительно друг друга вне зависимости от силовых взаимодействий между телами. То есть в кинематике изучаются геометрические свойства механического движения. В кинематике ставится вопрос «как движется точка или тело?». По прямой или по кривой линии, равномерно или не равномерно, каковы скорость или ускорение точки в различные моменты времени и т.д. Но в кинематике не ставится вопрос «почему движется точка?», «что ее заставляет двигаться?». Это – предмет изучения динамики.

Местоположение в пространстве всякого предмета можно определить только относительно других предметов. Движение в его геометрическом представлении имеет относительный характер, то есть главным свойством механического движения является его относительность, поэтому, прежде всего, выбирают тело отсчёта – это физическое тело относительно которого рассматривается механическое движение других тел (тело отсчета считается неподвижным). С телом отсчета связывают систему отсчёта – это система координат, жестко связанная с телом отсчёта. Выбор системы отсчета в кинематике произволен (определяется целью исследования), и в отличие от динамики все кинематические зависимости, полученные при изучении движения в какой-либо одной системе отсчета, будут справедливы и в любой другой системе отсчета. Любое движение по отношению к телу отсчета будем считать абсолютным движением, а величины, которые описывают движение относительно неподвижной системы отсчета абсолютными величинами.

Абсолютными величинами называются величины, не зависящие от выбора системы отсчёта, то есть одинаковые во всех системах отсчёта. Классической абсолютной величиной является: скорость света. В теоретической механике к абсолютным величинам относятся - время, масса, длина, ускорение.

Относительными величинами называются величины, которые зависят от выбора системы отсчёта. Примерами относительных величин в теоретической механике являются: скорость и координата (траектория).

В кинематике обычно изучают следующие задачи:

- определение условий, позволяющих установить положение объекта, движущегося в пространстве, в произвольный момент времени $t > 0$;

- закон движения материального тела в пространстве (он может быть выражен одним уравнением, или системой уравнений);

- траектория объекта, который рассматривается как материальная точка;

- закон распределения скоростей отдельных точек движущегося тела;

- законы распределения ускорений отдельных точек тела в процессе его движения.

Для решения задач кинематики необходимо, чтобы изучаемое движение было каким-либо образом задано (описано).

При движении тела все его точки в общем случае совершают различные движения, поэтому изучение кинематики начинается с изучения простейшего объекта движения – кинематики точки.

1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Движение точки по отношению к избранной системе отсчёта считается заданным, если известен способ, при помощи которого можно определить положение точки в любой момент времени. В кинематике точки рассматриваются три основных способа описания движения точки: векторный, координатный и естественный.

1.1 Векторный способ задания движения точки

а) ***Положение точки*** в векторном способе задания движения определяется радиус-вектором $\vec{r}\left(t\right)=OM_i\ (i=1,\ 2,\ ...,\ \mathrm{n})$, направленным из начала координат (от тела отсчёта) к данной точке (Рис.1).

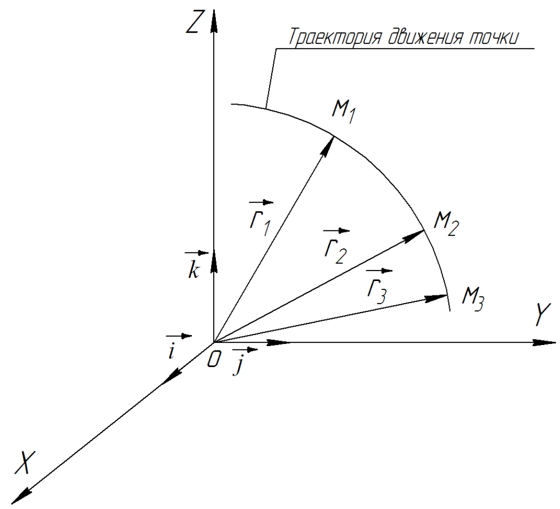


Рис.1.

Задать вектор как функцию времени – это значит уметь находить его модуль и направление в любой момент времени. При движении точки M вектор $\vec{r}$ будет с течением времени изменяться и по модулю, и по направлению. Если каждому значению скалярного аргумента t поставить в соответствие вектор $\vec{r}(t)$. , то $\vec{r}=\vec{r}(t)$ называется векторной функцией скалярного аргумента, который описывает характер движения материальной точки. Это однозначная функция, потому что точка M в каждое мгновение находится в каком-либо одном месте, она не может быть одновременно в нескольких местах.

Равенство $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определяет собой ***закон движения*** материальной точки в векторном виде и называется ***векторным уравнением движения материальной точки.***

Годографом вектора называется геометрическое место концов вектора в различные моменты времени, начало которых совмещены в одной фиксированной точке, то есть годограф – это кривая. Годографом радиус – вектора является траектория (Рис.1).

Траекторией называется геометрическое место последовательных положений движущейся точки. Если в интервале времени $t_1<t<t_2$ траектория прямая линия, то движение в этом интервале *прямолинейное*, в противном случае – *криволинейное*. В частности, движение называется *круговым*, если в этом интервале времени траектория движения точки – окружность.

б) Пусть движущая точка находится в момент времени t_1 в положении M_1, определяемом радиус-вектором $\vec{r}_1$, а в момент t_2 приходит в положение M_2, определяемом вектором $\vec{r}_2$ (Рис.2).

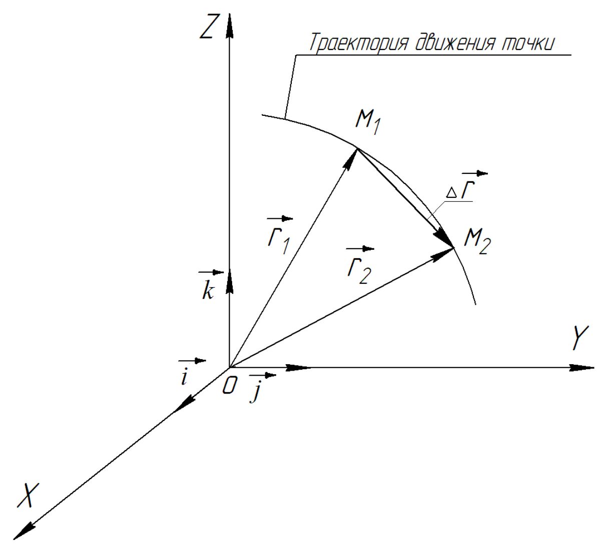


Рис.2

Перемещение из точки M_1 в точку M_2, – это вектор, направленный из одной точки, в точку конечного положения $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, то есть перемещение - это изменение радиус-вектора (Рис.2).

Вектор перемещения направлен по хорде, если точка движется по криволинейной траектории, и вдоль самой траектории, если движение точки прямолинейное.

Перемещение (вектор $\Delta\vec{r}$) отмечает положение точки М только в начальное и конечное мгновения промежутка времени - $\Delta\vec{t}$, но не определяет, положение точки в каждое из мгновений этого промежутка. Чтобы это определить, необходимо время движения разбить на возможно меньшие отрезки.

в) Одной из основных кинематических характеристик движения точки является векторная величина, называемая скоростью точки. Понятие «скорость» возникло еще в доисторическую эпоху. Сравнивая движение тел, люди усвоили тогда представление о быстроте и медленности движения. Обозначение скорости буквой υ было введено Л. Эйлером. Введем сначала понятие о средней скорости точки за какой-либо промежуток времени.

Средняя скорость – это отношение изменения радиус-вектора к тому промежутку времени, за которое оно произошло, то есть - это перемещение в единицу времени. Средняя скорость характеризует собой быстроту и направление движения точки по траектории.

$$\vec{\upsilon}_{\text{ñð.}} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (1)$$

Вектор средней скорости $\vec{\upsilon}_{\text{ñð.}}$ параллелен вектору перемещения $\Delta\vec{r}$, направлен в сторону движения точки, и не имеет точки приложения (Рис 3).

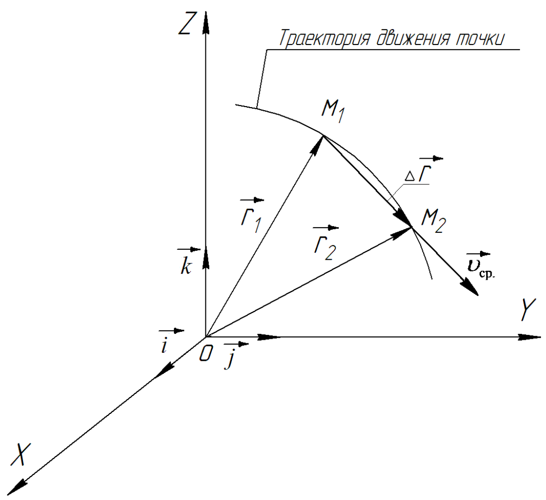


Рис.3

г) ***Мгновенная скорость*** или ***истинная скорость точки.***

Очевидно, что чем меньше будет промежуток времени, для которого вычислена средняя скорость, тем величина $\vec{\upsilon}_{ср.}$ будет точнее характеризовать движение точки. Для нахождения скорости точки в фиксированный момент времени уменьшим интервал Δt до нуля и рассмотрим предел, к которому стремится средняя скорость $\vec{\upsilon}_{ср.}$. Этот предел и будет скоростью движущийся материальной точки в данный момент (мгновенной или истинной скоростью):

$$\vec{\upsilon} \;=\; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \;\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \qquad (2)$$

Производная по времени от функции обозначается точкой над символом этой функции, а вторая производная – двумя точками.

Следовательно, **при векторном способе задания движения точки скоростью называется первая производная радиус - вектора точки по времени.** Скорость точки в этом случае характеризует быстроту изменения радиус – вектора с течением времени.

д) ***Направление скорости***

При $\Delta t \to 0$ направление секущей M_1M_2 (Рис. 3) в пределе является направлением касательной. Поэтому: ***вектор скорости $\vec{\upsilon}$ в данный момент времени направлен по касательной к годографу радиус – вектора в данной точке, т.е. по касательной к траектории точки (Рис.4).***

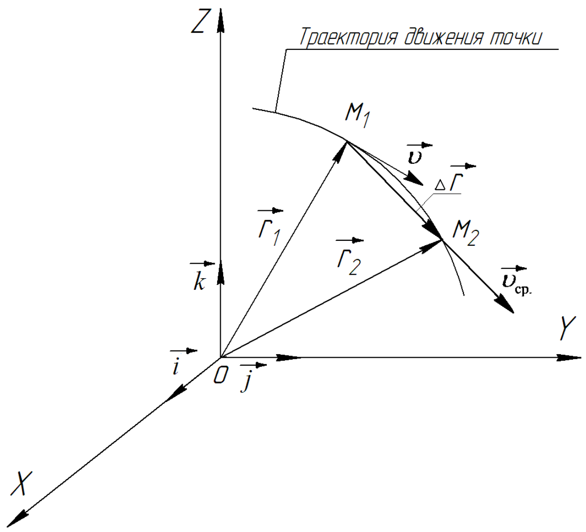


Рис.4

При прямолинейном движении точки вектор скорости $\vec{\upsilon}$ все время направлен вдоль прямой, по которой движется точка, и может изменяться лишь по величине, а при криволинейном движении все время изменяется и направление вектора скорости точки (Рис.5). Единица измерения скорости в системе СИ - [м/с].

Годограф скорости – геометрическое место концов векторов скорости движущейся точки в последовательные моменты времени, начало которых совмещены в одной фиксированной точке.

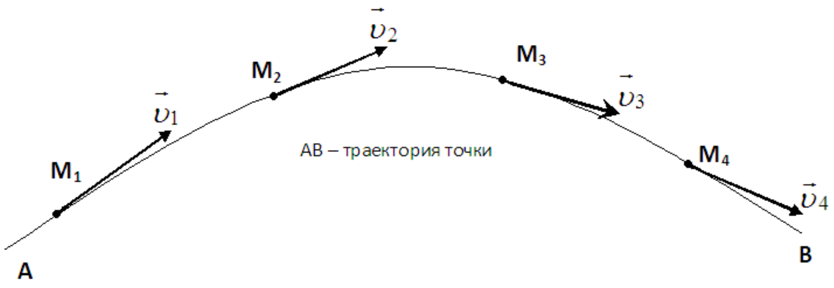


Рис.5

е) Ускорение – вторая важнейшая характеристика движущейся точки. Только при прямолинейном движении точки ее скорость сохраняет свои численное значение и направление. При неравномерном криволинейном движении скорость точки изменяется и по модулю и по направлению.

Среднее ускорение точки – это отношение изменения скорости точки к тому промежутку времени, за которое оно произошло. **Ускорение точки это векторная величина, которая характеризует быстроту изменения модуля и направления вектора скорости точки.**

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{t_2 - t_1} \qquad (3)$$

ё) ***Мгновенное ускорение*** или ***истинное ускорение точки*** – это предел, к которому стремится среднее ускорение при $\Delta t \to 0$, то есть:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \dot{\vec{\upsilon}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \qquad (4)$$

Ускорением называется первая производная по времени от вектора скорости $\vec{\upsilon}$ или вторая производная по времени от радиус – вектора $\vec{r}$.

Размерность ускорения в системе СИ [м/с^2].

ж) ***Направление ускорения***

Вектор среднего ускорения направлен по хорде (секущей) M_1M_2 годографа скорости (Рис.6).

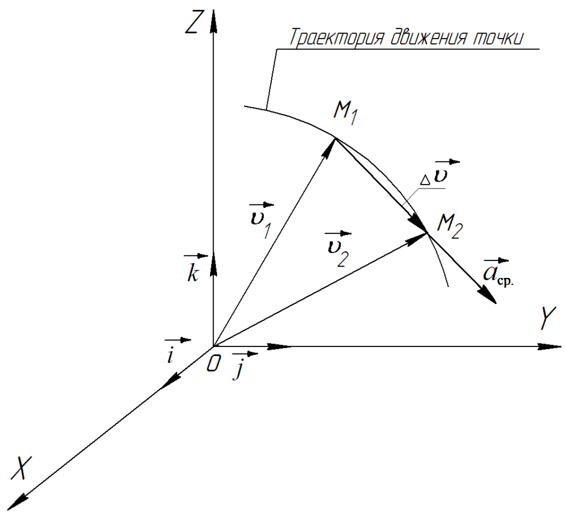


Рис.6

При $\Delta t \to 0$, точка M_2 стремится к точке M_1 и секущая в пределе превращается в касательную к годографу скорости, то есть **вектор ускорения направлен по касательной к годографу скорости в данной точке** (Рис.7).

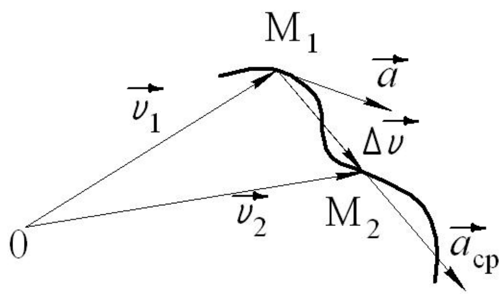


Рис. 7

При прямолинейном движении точки вектор ускорения $\vec{a}$ направлен вдоль прямой, по которой движется точка.

Векторный способ описания движения применяют, как правило, при доказательстве теорем. При решении задач используют координатный и естественный способы задания движения точки.

1.2 Координатный способ задания движения точки (Прямоугольные декартовы координаты)

а) ***Положение точки***

Пусть OXYZ – неподвижная декартова система координат. Положение точки в системе координат OXYZ определяется тремя координатами: x, y, z (Рис.8).

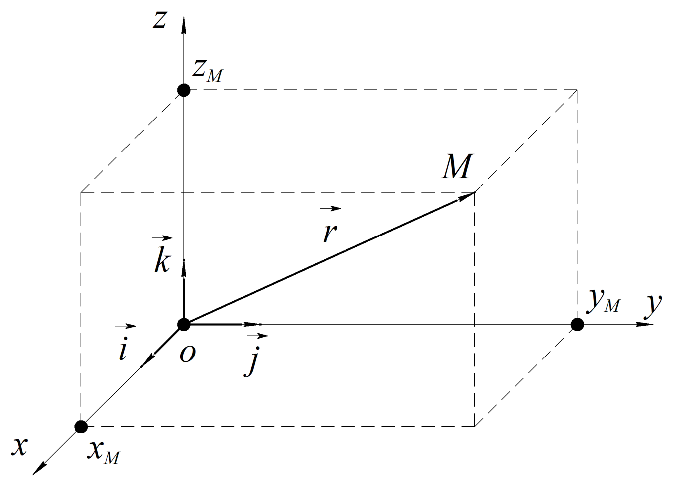


Рис. 8

При движении точки М меняются её координаты, то есть они являются функциями времени.

Уравнениями движения точки в прямоугольных декартовых координатах называется зависимость координат точки от времени, которые однозначно определяют положение точки в любой момент времени, то есть задают ее движение:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Если движение точки происходит все время в одной и той же плоскости, то приняв эту плоскость, например, за плоскость *Oxy,* получим в этом случае два уравнения движения:

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\} \tag{6}$$

При прямолинейном движении точки, если вдоль ее траектории направить одну из координатных осей, (например *Ox*), движение точки будет определяться одним уравнением (законом прямолинейного движения точки)

$$x = x(t) \tag{7}$$

При введении единичных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (ортов декартовой системы координат), можно записать выражение для радиус-вектора движущейся материальной точки и получить связь между векторным и координатным способами задания движения точки:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \tag{8}$$

б) ***Траектория и её уравнение***

Уравнения движения точки являются также и уравнениями траектории точки, заданными параметрически. Для получения явного вида уравнения траектории, то есть уравнения той кривой, которая целиком или в некоторой ее части является траекторией точки, следует из уравнений движения исключить время.

Примеры 1 - 7.

По заданным уравнениям движения точки в плоскости *OXY* (1 – 7) $x = x(t)$, $y = y(t)$. найти уравнение ее траектории в координатной форме (x.y – в сантиметрах, *t* – в секундах):

1. $x = 3t - 5;\ y = 4 - 2t;$
2. $x = 2t;\ y = 2t^{2;}$
3. $x=2t+4;\ \ y= 2t^3;$
4. $x = 5\cos \omega t;\ y = 2+5\sin \omega t;$
5. $x = 3\sin \omega t;\ y = 5\cos \omega t$
6. $x = (t + 1);\quad y = \dfrac{1}{2t+2};$
7. $x = \cos(\pi t);\ y = 2\sin(\pi t/2)$
8. $x = cht = 0,5(e^{t} + e^{-t}),\ y = sht = 0,5(e^{t} - e^{-t});$

Решение

Для получения уравнения траектории исключим время из уравнений движения:

1. Из первого уравнения определяем время:

$$t = \frac{x+5}{3};$$

Подставив во второе, получим:

$$y = 4 - \frac{2}{3}(x+5);$$

Полученное уравнение есть уравнение прямой.

2. Из первого уравнения определяем время:

$$t = \frac{x}{2}$$

Подставив во второе, получим:

$$y = \frac{x^2}{2};$$

Полученное уравнение – уравнение квадратной параболы.

3. Из первого уравнения определяем время - $t=(x-4)/2$. Это значение подставим во второе уравнение и получим уравнение траектории в виде уравнения кубической параболы:

$$y = \frac{(x-4)^3}{4};$$

4. Поскольку время - t входит в аргументы тригонометрических функций, то используем основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Получим:

$$\cos\omega t = \frac{x}{5};$$

$$\sin\omega t = \frac{(y-2)}{5};$$

Возведём в квадрат обе части и складывая получим:

$$x^2 + (y-2)^2 = 25$$

Полученное уравнение – уравнение окружности с центром в точке

$x = 0$; $y = 2$ и радиусом равным 5 *см*.

5. Решение аналогично пункту 3.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Полученное уравнение – уравнение эллипса.

6. Преобразуем второе уравнение:

$$y = \frac{1}{2t+2} = \frac{1}{2(t+1)},$$

Подставив полученное значение x, получим:

$$y = \frac{1}{2x}$$

Полученное уравнение – уравнение гиперболы.

7. Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

Получим:

$$\cos(\pi t) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

Тогда уравнение примет вид:

$$x = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

Из второго уравнения:

$$\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) = \frac{y}{2}$$

Подставив, получим:

$$x = 1 - 0{,}5y^2$$

8. Возведем в квадрат обе части заданных уравнений движения, получим:

$$x^2 = ch^2 t = \frac{1}{4}(e^{2t} + 2 + e^{-2t}),$$
$$y^2 = sh^2 t = \frac{1}{4}(e^{2t} - 2 + e^{-2t});$$

Вычтем из первого уравнение второе, получим:

$$x^2 - y^2 = 1$$

Полученное уравнение – уравнение равнобочной гиперболы.

в) ***Скорость точки***

Определение вектора скорости при координатном способе задания движения точки сводится к нахождению проекций скорости на координатные оси *x, y, z*.

По определению скорости:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{\mathrm{r}}(\mathrm{t})}{d\mathrm{t}} = \frac{d(x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k})}{d\mathrm{t}} \tag{9}$$

Это равенство продифференцируем по времени, учитывая, что единичные орты не изменяются по величине и направлениям, то есть эти векторы постоянны. Получим:

$$\vec{\upsilon} = \frac{dx(t)}{d\mathrm{t}}\vec{i} + \frac{dy(t)}{d\mathrm{t}}\vec{j} + \frac{dz(t)}{d\mathrm{t}}\vec{k} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t) \tag{10}$$

Отсюда находим проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат:

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_x &= \dot{x}(t); \\ \upsilon_y &= \dot{y}(t); \\ \upsilon_z &= \dot{z}(t); \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Проекции скорости точки на оси координат равны первым производным соответствующих координат точки по времени. Знак производных $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ показывает направление проекций скоростей по отношению к соответствующим осям.

Алгебраическое значение вектора скорости (модуль вектора скорости) вычисляется по формуле:

$$\left|\vec{\upsilon}\right| = \upsilon = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \tag{12}$$

г) ***Направление скорости*** определяется через направляющие косинусы:

$$\left.\begin{aligned} \cos(\vec{\upsilon} \wedge x) &= \frac{\upsilon_x}{\left|\vec{\upsilon}\right|} \\ \cos(\vec{\upsilon} \wedge y) &= \frac{\upsilon_y}{\left|\vec{\upsilon}\right|} \\ \cos(\vec{\upsilon} \wedge z) &= \frac{\upsilon_z}{\left|\vec{\upsilon}\right|} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

д) ***Ускорение***

Только при равномерном прямолинейном движении точки ее скорость сохраняет свое численное значение и направление. При неравномерном криволинейном движении скорость точки изменяется по модулю и направлению. Определение вектора ускорения при координатном способе задания движения точки сводится к нахождению проекций ускорения на координатные оси *x, y, z.*

По определению:

$$\vec{\mathrm{a}} = \frac{d\vec{\upsilon}}{d\mathrm{t}} = \dot{\vec{\upsilon}} = \ddot{\vec{\mathrm{r}}} \tag{14}$$

$$\vec{\mathrm{a}} = \frac{d}{d\mathrm{t}}(\upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k}) = \frac{d\upsilon_x}{d\mathrm{t}}\vec{i} + \frac{d\upsilon_y}{d\mathrm{t}}\vec{j} + \frac{d\upsilon_z}{d\mathrm{t}}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}; \tag{15}$$

где: проекции ускорения на координатные оси *x, y, z:*

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \ddot{x}; \\ a_y &= \ddot{y}; \\ a_z &= \ddot{z}; \end{aligned}\right\} \qquad 1(6)$$

Проекции ускорения точки на оси координат равны вторым производным соответствующих координат точки по времени или первым производным по времени от проекций вектора скорости. Знак производных $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ показывает направление проекций ускорений по отношению к соответствующим осям.

По известным проекциям на оси координат находим ***модуль ускорения***:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \qquad (17)$$

ё) ***Направление ускорения*** определяется через направляющие косинусы:

$$\left.\begin{aligned} \cos(\vec{a} \wedge x) &= \frac{a_x}{|\vec{a}|} \\ \cos(\vec{a} \wedge y) &= \frac{a_y}{|\vec{a}|} \\ \cos(\vec{a} \wedge z) &= \frac{a_z}{|\vec{a}|} \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

ж) ***Прямолинейное движение точки. Прямая и обратная задачи***

1. Задача называется ***прямой***, если задано уравнение прямолинейного движения точки *x=x(t)* и требуется вычислить скорость и ускорение точки.

Пример 8 Решение прямой задачи

Прямолинейное движение точки задано уравнением *x=5sin(t)*. Вычислить скорость и ускорение точки в момент времени $t = \dfrac{\pi}{3}$ с.

Решение:

В начальный момент времени точка находится в координате *x=0* и начинает движение вправо до координаты *x=5*, далее движется влево до координаты *x = - 5* и т.д. В момент времени $t = \dfrac{\pi}{3}$, точка имеет координату

$$x\Big|_{t=\frac{\pi}{3}} = 5\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4,33 \text{ ì}$$

Вектор скорости и вектор ускорения совпадают с осью *x*. Скорость и ускорение точки:

$$\upsilon = \dot{x} = 5\cos(t)\,.$$

$$a = \ddot{x} = -5\cos(t)$$

Подставив заданное значение времени, получим:

$$\upsilon = \dot{x}\Big|_{t=\frac{\pi}{3}} = 5\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2,5 \text{ ì /c}$$

$$a = \ddot{x}\Big|_{t=\frac{\pi}{3}} = -5\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4,33 \text{ ì /c}^2$$

Знаки производных определяют направление векторов $\vec{\upsilon}$ è $\vec{a}$, поэтому точка в этот момент времени движется замедленно, вектор скорости и вектор ускорения направлены по оси *Ox* в противоположные стороны (рис. 9).

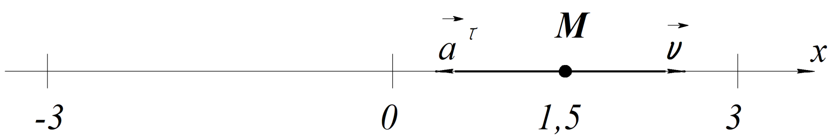


Рис. 9

2. Задача называется ***обратной***, если задано ускорение движущейся точки, т.е. задана функция *a=a(t)* и требуется определить уравнение движения точки *x=x(t)*.

При решении обратной задачи необходимо дважды проинтегрировать функцию *a=a(t)*. При интегрировании появляются постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий задачи. ***Начальные условия*** это значения координат ($x\big|_{t=0} = x_0$) и проекций скоростей ($\dot{x}\big|_{t=0} = \dot{x}_0 = \upsilon_{0x}$) в тот момент времени, который принимают за начало отсчета. Начальные условия задачи определяют её единственное решение.

При интегрировании уравнений с помощью определенных интегралов, нижние пределы интегрирования должны соответствовать значениям интегрируемых величин в начальный момент времени, т.е. начальным условиям задачи, а верхние пределы интегрирования должны соответствовать значению интегрируемых величин при текущем времени *t*.

Пример 9. Решение обратной задачи.

Точка движется вдоль оси *Ox* с ускорением *a=3t.* В начальный момент времени $x\big|_{t=0} = x_0$, $\upsilon\big|_{t=0} = \upsilon_{0x}$. Найти уравнение движения точки.

Решение

По определению, ускорение точки определяется формулой

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

Разделив переменные, получим:

$$d\upsilon = a \cdot dt$$

Подставим заданное значение ускорения:

$$d\upsilon = 3tdt$$

Взяв от обеих частей равенства интегралы в соответствующих пределах, получим:

$$\upsilon = \int_{\upsilon_0}^{\upsilon(t)} 3tdt = 3\int_0^t tdt;$$

или:

$$\upsilon\text{-}\upsilon_0 = \frac{3}{2}\cdot t^2;$$

Получили скорость:

$$\upsilon = \upsilon_0 + \frac{3}{2}\cdot t^2.$$

Учитывая, что скорость точки определяется по формуле

$$\upsilon = \frac{dx}{d\mathrm{t}}$$

и, разделяя переменные, получим:

$$dx = \upsilon dt,$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \upsilon_0 \int_0^t dt + \frac{3}{2}\int_0^t t^2 dt;$$

$$x - x_0 = \upsilon_0 t + \frac{3}{2}\cdot\frac{t^3}{3}.$$

Получили уравнение движения в виде:

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{t^3}{2}.$$

1.3 Естественный способ задания движения точки

Естественный способ применяется, когда траектория движущейся точки известна заранее.

а) ***Положение точки***.

Положение точки при естественном способе задания движения точки определяется дуговой координатой *S,* связанной с траекторией движения.

Для того чтобы координата *S* определяла положение точки на траектории необходимо:

- задать траекторию движения точки и закон ёе движения по ней;

- выбрать начало отсчёта дуговой координаты и положительное направление отсчёта (за положительное направление отсчета, примем то направление, которое соответствует возрастанию дуговой координаты);

- выбрать масштаб на траектории.

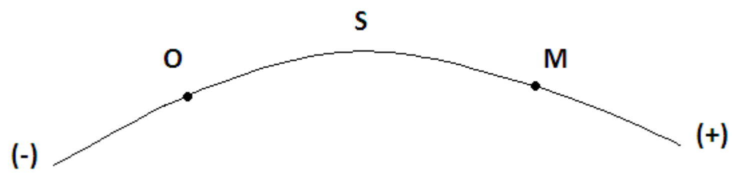


Рис. 10

С ростом времени, $\Delta t \to 0$, дуговая координата изменяется так, что каждому фиксированному моменту времени $t=t_1$ можно поставить в соответствие определенное значение дуговой координаты $S = S(t)$, то есть, в конкретный момент времени координата “S” определяет положение точки на траектории, являясь числом.

Следует иметь в виду, что дуговая координата определяет положение точки на траектории, а не пройденный ею путь. Например, если точка M начала двигаться из точки отсчета O в положительном направлении, прошла по траектории 3 *м* и затем вернулась в точку O, то конечное значение ее дуговой координаты равно нулю, а пройденный точкой путь составит 6 *м*.

Функциональная зависимость $\boldsymbol{S = S(t)}$ называется законом движения материальной точки по траектории.

Задание уравнения движения точки осуществляется различными способами, например, уравнениями, таблицей, в виде графика…

Примером естественного способа движения является движение поезда: траектория и направление движения определены рельсами, а уравнение движения задано расписанием.

в) ***Орты естественных координат (естественный трёхгранник)***

Пусть точка движется по какой-либо неплоской траектории, и, в данный момент времени, находится в точке *M*. Проведем в точке *M* к кривой соприкасающуюся плоскость, нормальную плоскость, перпендикулярную касательной, и спрямляющую плоскость, перпендикулярную соприкасающейся и нормальной плоскостям, образующую с этими плоскостями естественный трехгранник (Рис.11).

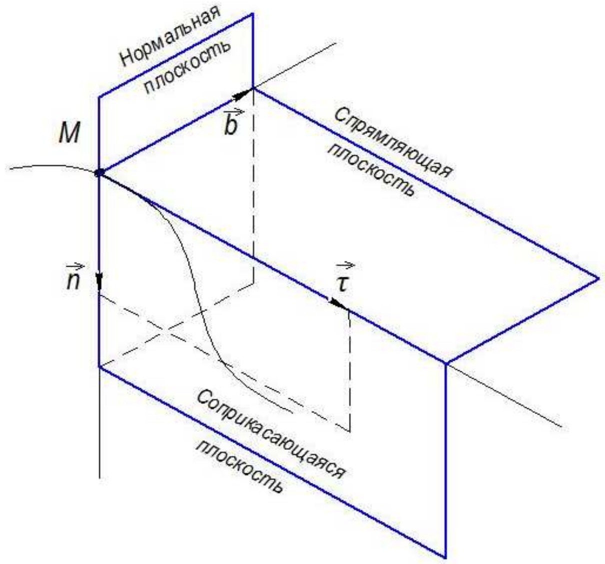


Рис. 11

Линия пересечения соприкасающейся и нормальной плоскостей называется главной нормалью кривой.

Линия пересечения нормальной и спрямляющей плоскостей называется бинормальной кривой.

Ортами естественных координат являются три взаимно перпендикулярных орта: главная нормаль ($\vec{n}$), касательная ($\vec{\tau}$) и бинормаль ($\vec{b}$). Эти орты образуют естественный трёхгранник, который привязан к материальной точке и движется вместе с ней, меняя свою ориентацию в пространстве, то есть орты $\vec{n}, \vec{\tau}$, $\vec{b}$, при движении точки меняются по направлению, оставаясь неизменными по величине (Рис.12).

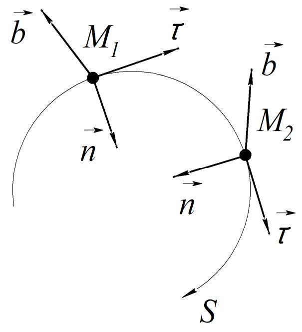


Рис.12

Направление:

$\vec{n}$ – орт главной нормали направлен в сторону вогнутости траектории (по радиусу кривизны к центру кривизны траектории к данной точке). Центр кривизны кривой в данной точке – центр окружности, наилучшим образом аппроксимирующий ход кривой в окрестности данной точки;

$\vec{\tau}$ - орт касательной к траектории в данной точке, направленный в сторону возрастания дуговой координаты;

$\vec{b}$ - орт бинормали перпендикулярный и нормали и касательной, направленный по отношению к касательной и главной нормали так же, как ось *Oz* направлена по отношению к осям *Ox* и *Oy* в правой системе координатных осей.

г) ***Скорость точки в естественных координатах***

При естественном способе задания движения точки ее дуговая координата задается как функция времени. Используем определение скорости:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}; \qquad (19)$$

Преобразовав, получим:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dS}{dS} = \frac{dS}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dS}; \qquad (20)$$

Из дифференциальной геометрии известно, что производная некоторого вектора по любому скалярному аргументу представляет собой вектор, направленный по касательной к годографу дифференцируемого вектора. При этом, модуль вектора $\frac{d\vec{r}}{dS} = 1$ (как предел отношения длины хорды, к длине стягиваемой ею дуги). Таким образом:

$$\vec{\upsilon} \doteq S\frac{d\vec{r}}{dS} = \dot{S} \cdot \vec{\tau}; \tag{21}$$

Проекция скорости на **касательную или алгебраическая величина (модуль)** скорости определяется по формуле:

$$\left.|\vec{\upsilon}| = \dot{S} = \frac{dS}{dt}\right\} \tag{22}$$

Единичный вектор $\vec{\tau}$ определяет направление скорости.

Так как вектор скорости $\vec{\upsilon}$ может быть направлен по касательной к траектории движущийся точки, как в сторону возрастания, так и в сторону убывания дуговой координаты *S(t)* в зависимости от направления движения, то проекция скорости будет либо положительной, либо отрицательной величиной (Рис.13).

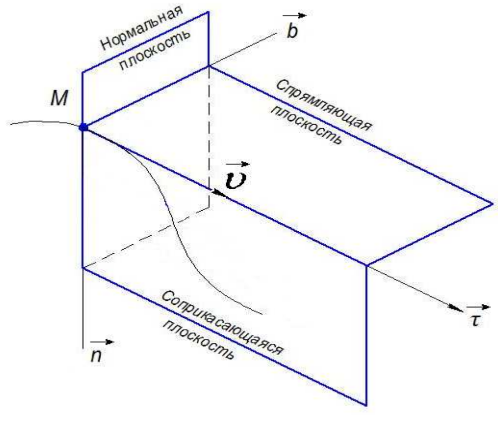


Рис.13

д) ***Ускорение в естественных координатах***

Определим проекции ускорения точки на оси естественных координат. Для этого найдем первую производную по времени от вектора скорости:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{S}\cdot\vec{\tau}) = \frac{d\dot{S}}{dt}\cdot\vec{\tau} + \dot{S}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{dt}; \tag{23}$$

Преобразуем:

$$\vec{a} = \ddot{S}\vec{\tau} + \dot{S}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{dt}\cdot\frac{dS}{dS} = \ddot{S}\vec{\tau} + \dot{S}\cdot\frac{dS}{dt}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{dS} = \ddot{S}\vec{\tau} + \dot{S}^2\cdot\frac{d\vec{\tau}}{dS}; \tag{24}$$

Вектор $\frac{d\vec{\tau}}{dS}$ называется ***вектором кривизны***, он равен производной от орта касательной к кривой по дуговой координате:

$$K = \frac{d\vec{\tau}}{dS} \tag{25}$$

На различных участках кривой кривизна различна. Единственная кривая, для которой кривизна везде одинакова – это окружность, не считая прямой, для которой кривизна всегда равна нулю.

Радиусом кривизны кривой ρ в точке называют величину, обратную кривизне кривой в этой точке.

Вектор кривизны связан с единичным вектором нормали к кривой $\vec{n}$, следующим соотношением:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dS} = K\vec{n} = \frac{1}{\rho}\vec{n} \tag{26}$$

Таким образом, проекции ускорения на оси естественного трехгранника:

$$\vec{a} = a^{\tau} \cdot \vec{\tau} + a^{n} \cdot \vec{n} + a^{b} \cdot \vec{b}; \tag{27}$$

где:

$$a^{\tau} = \dot{S} = \dot{\upsilon} \tag{28}$$

- проекция ускорения точки на касательную (касательная или тангенциальная составляющая ускорения точки), которая равна второй производной от дуговой координаты точки по времени или первой производной от алгебраической величины скорости точки по времени. Эта проекция имеет знак плюс, если направления касательного ускорения точки $\vec{a}^{\tau}$ è î ðòà $\vec{\tau}$ ñî âï àäàþ ò, è çí àê ì èí óñ, åñëè î í è ï ðî òèâî ï î ëî æí û .

$$a^{n} = \frac{\dot{S}^{2}}{\rho} = \frac{\upsilon^{2}}{\rho} \tag{29}$$

- проекция ускорения точки на главную нормаль (нормальная или центростремительная составляющая ускорения точки), которая равна квадрату модуля скорости точки, деленному на радиус кривизны траектории в соответствующей точке. Эта проекция всегда положительна.

$a_в = 0$ – бинормальная составляющая ускорения точки, модуль которой равен нулю.

Таким образом, ускорение точки при естественном способе задания ее движения определяется по формуле:

$$\vec{a} = \ddot{S} \cdot \vec{\tau} + \frac{\dot{S}^2}{\rho} \cdot \vec{n}; \tag{30}$$

Тот факт, что модуль ускорения бинормали равен нулю, говорит о том, что вектор ускорения полностью лежит в плоскости траектории, то есть в соприкасающейся плоскости.

Так как орт нормали перпендикулярен орту касательной, то векторы нормального и касательного ускорений взаимноперпендикулярны ($\vec{a}^n \perp \vec{a}^\tau$) и от их значений зависит характер движения (Рис.14).

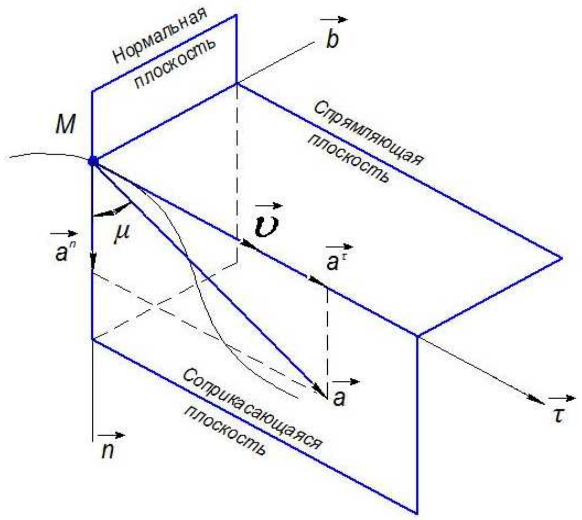


Рис.14

Вектор касательного ускорения $\vec{a}^\tau$ - направлен по линии скорости, по касательной к траектории, значит, изменяет скорость по величине, и, если $\left|\vec{a}^\tau\right|$=0, то величина скорости постоянна, т.е. движение является равномерным.

Вектор нормального ускорения $\vec{a}^n$ - направлен перпендикулярно скорости, ($\vec{a}^n \perp \vec{\upsilon}$), поэтому, нормальное ускорение изменяет скорость по направлению. Если нормальное ускорение равно нулю, то направление вектора скорости $\vec{\upsilon}$ не изменяется, т.е. движение прямолинейное.

Вектор ускорения точки изображается диагональю параллелограмма, построенного на составляющих $\vec{a}^{\tau}$ и $\vec{a}^{n}$.

Учитывая ортогональность векторов нормального и касательного ускорений, то модуль вектора ускорения и угол его отклонения от нормали определяется формулами:

$$\vec{a} = \sqrt{\left(\vec{a}^{n}\right)^2 + \left(\vec{a}^{\tau}\right)^2}\ ; \tag{31}$$

$$tg\alpha = \frac{\left|a^{\tau}\right|}{a^{n}} \tag{32}$$

е) ***Связь координатного и естественного способа задания движения точки.***

Если движение точки задано координатным способом, то для перехода к естественному способу задания необходимо определить уравнение траектории, положение точки в начальный момент времени, направление движения, уравнение движения точки по ее траектории. Элемент дуги связан с координатами следующим соотношением:

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}. \tag{33}$$

Интегрируя это уравнение, получим уравнение движения точки:

$$S(t) = \int_0^t \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \ = \int_0^t \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}dt = \int_0^t \upsilon dt. \tag{34}$$

где: $S_{|t=0} = 0;\ \ dx = \dot{x}dt;\ \ dy = \dot{y}dt;\ \ dz = \dot{z}dt.$

Скорость при естественном способе задания тогда будет определяться по формуле:

$$\upsilon = \dot{S} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \tag{35}$$

Для касательной составляющей ускорения получим:

$$\left|\vec{a}^{\tau}\right| = \left|\dot{\upsilon}\right| = \frac{d\left|\vec{\upsilon}\right|}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{\upsilon_x{}^2 + \upsilon_y{}^2 + \upsilon_z{}^2}\right) = \frac{2\upsilon_x\dot{\upsilon}_x + 2\upsilon_y\dot{\upsilon}_y + 2\upsilon_z\dot{\upsilon}_z}{2\sqrt{\upsilon_x{}^2 + \upsilon_y{}^2 + \upsilon_z{}^2}},$$

$$\grave{o}\,.\mathring{a}. \qquad \left|\vec{a}^{\tau}\right| = \frac{\upsilon_x a_x + \upsilon_y a_y + \upsilon_z a_z}{\left|\upsilon\right|} \tag{36}$$

1.4 **Анализ видов и кинематических параметров движения точки**

1. Прямолинейное движение.

В случае, если траекторией движения точки является прямая линия, то радиус кривизны траектории бесконечен ($\rho = \infty$) и нормальное ускорение точки всегда будет равно нулю: $\vec{a}^{n} = \dfrac{\upsilon^2}{\rho} = 0.$

Ускорение точки при прямолинейном движении точки будет равно одному касательному ускорению, при этом скорость может меняться только по величине. От значения касательного ускорения будет зависеть характер движения.

1.1 Равномерное прямолинейное движение ($\vec{a}^{\tau} = 0;\ \vec{a}^{n} = 0;\ \grave{o}.\mathring{a}.\ \vec{a} = 0$) è $\vec{\upsilon} = const$.

Единственным движением, при котором ускорение точки все время равно нулю, является равномерное прямолинейное движение *(Рис.15).*

Такое движение называется **движением по инерции.** Это означает, что равнодействующая всех сил, действующих на движущуюся материальную точку, равна нулю. При этом точка может находиться и в состоянии покоя.

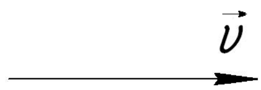


Рис. 15

1.2. Прямолинейное равнопеременное движение.

Движение, при котором касательное ускорение сохраняется постоянную величину $\vec{a}^{\tau} = const.$, называется ***равнопеременным***. Оно бывает ***равноускоренным*** и ***равнозамедленным.***

При ускоренном прямолинейном движении (Рис. 16) направление скорости и касательного ускорения совпадают $(\vec{a}^{\tau} > 0;\ \vec{a}^{n} = 0)$.

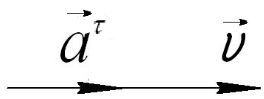


Рис. 16

При замедленном прямолинейном движении, (Рис. 17) скорость и ускорение точки направлены в противоположные стороны $(\vec{a}^{\tau} < 0;\ \vec{a}^{n} = 0)$

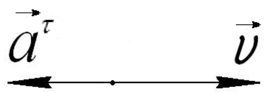


Рис.17

2. Криволинейное движение

2.1 Равномерное криволинейное движение.

Равномерным называется такое криволинейное движение точки, при котором алгебраическое значение скорости во время движения остается постоянным: $\vec{\upsilon} = const.$

Тогда:

$$a^{\tau} = \frac{d\upsilon}{dt} = 0$$

и ускорение точки будет равно только нормальному ускорению:

$$\vec{a} = \vec{a}^n = \frac{\upsilon^2}{\rho}$$

Вектор ускорения направлен при этом все время по главной нормали к траектории движения точки, а угол между вектором скорости и ускорением прямой (Рис. 18).

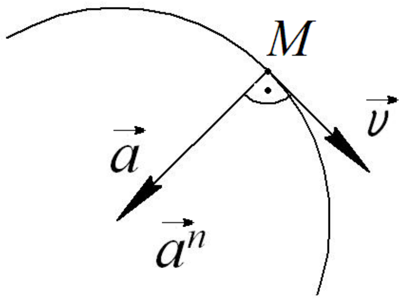


Рис. 18

Закон равномерного криволинейного движения записывается в виде:

$$S = S_0 + \upsilon \cdot t$$

Это уравнение определяет величину дуговой координаты в любой момент времени. Для определения пройденного точкой пути σ следует интегрировать модуль скорости:

$$\sigma = \int_0^t \upsilon dt.$$

При равномерном движении $\sigma = \upsilon \cdot t$

2.2 Равнопеременное криволинейное движение.

Найдем законы, определяющие скорость и дуговые координаты точки при равнопеременном движении. Будем считать, что при $t=0$: $S=S_0$, а $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_0$, где:

S_0 – положение точки в начальный момент времени;

$\vec{\upsilon}_0$ - скорость точки в начальный момент времени.

Кинематическая зависимость точки при её равнопеременном движении (ускоренном или замедленном) имеет вид:

$$\upsilon=\upsilon_0+a^{\tau}\cdot t \tag{37}$$

$$S(t)=S_0+\upsilon_0\cdot t+\frac{1}{2}a\cdot t^2; \tag{38}$$

Если при криволинейном движении модуль скорости возрастает, и угол между вектором скорости и вектором ускорения ($\vec{\upsilon}\wedge\vec{a}$) острый (Рис.19), то движение называется ускоренным криволинейным движением ($\vec{a}^{\tau}>0$; $\vec{a}^{n}>0$)

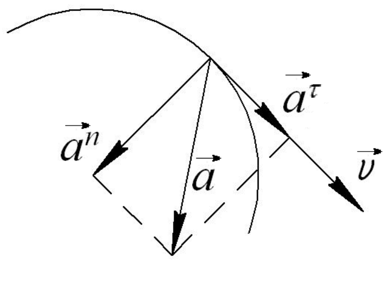


Рис.19

Если при криволинейном движении модуль скорости убывает, и угол между вектором скорости и вектором ускорения ($\vec{\upsilon}\wedge\vec{a}$) тупой (Рис.20), то движение называется замедленным криволинейным движением $(\vec{a}^{\tau} < 0;\ \vec{a}^{n} > 0)$

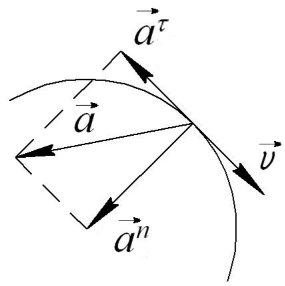


Рис.20

2.3. Особые точки на кривой.

Случаи обращения в нуль касательного ускорения получают из условия:

$$a^{\tau} = \left|\frac{d\upsilon}{dt}\right| = 0$$

Это условие выполняется, в том случае, когда скорость не изменяется по модулю $(\upsilon = const)$, т.е. при равномерном движении.

Касательное ускорение точки при неравномерном движении может обратиться в нуль и в тот момент времени, когда модуль скорости принимает максимальное или минимальное значение (рис.21).

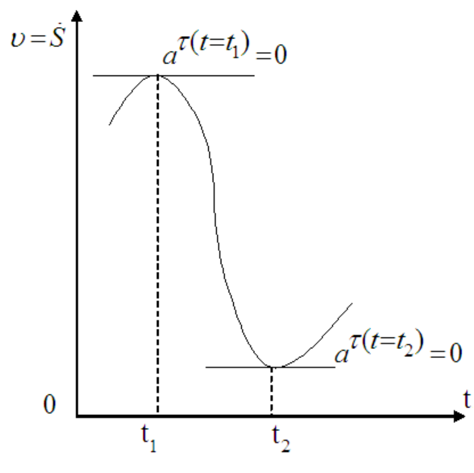


Рис. 21

Случаи обращения в нуль нормального ускорения следуют из условия $a_n = \dfrac{\upsilon_\tau^2}{\rho} = 0,$ которое выполняется при $\rho = \infty$, т.е. при прямолинейном движении точки.

Нормальное ускорение точки при движении по криволинейной траектории равно нулю только в точках перегиба, в которых происходит изменение выпуклости траектории на вогнутость и наоборот (Рис.22).

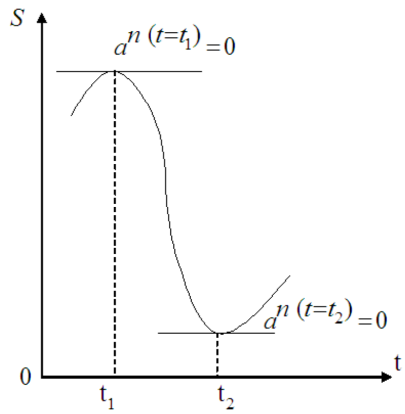


Рис. 22

2.4 Круговое движение точки.

При движении точки по окружности радиус кривизны остается постоянным: $\rho = R = const.$ При движении точки будет меняться только угол между радиус-вектором и осью (Рис.26), а модуль радиус-вектора остается постоянным. Описать такое движение можно с помощью угла поворота радиус-вектора.

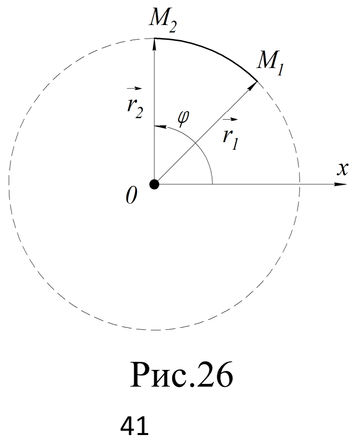


Рис.26

1.5 Кинематические графики

Кинематические графики – это графики изменения пути, скорости и ускорений в зависимости от времени.

Равномерное движение (Рис.23)

График равномерного движения изображается прямой линией, направленной под углом к оси абсцисс, график скорости в этом случае прямая, параллельная оси абсцисс (υ=const), а график касательного ускорения - прямая, совпадающая с осью абсцисс ($a^{\tau} = 0$).

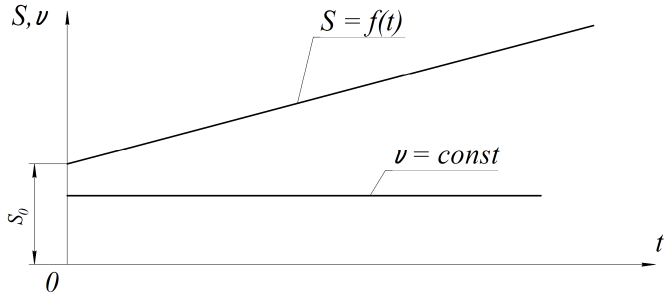


Рис.23

Равнопеременное движение (Рис. 24), (Рис.25)

Для равнопеременного движения (на рис.24 ускоренное движение, на рис.25 замедленное движение), график движения изображается ветвью параболы, график скорости прямой, направленной под углом к оси абсцисс, а график касательного ускорения - прямой, параллельной оси абсцисс.

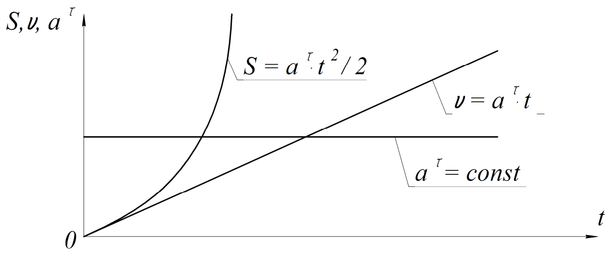


Рис.24

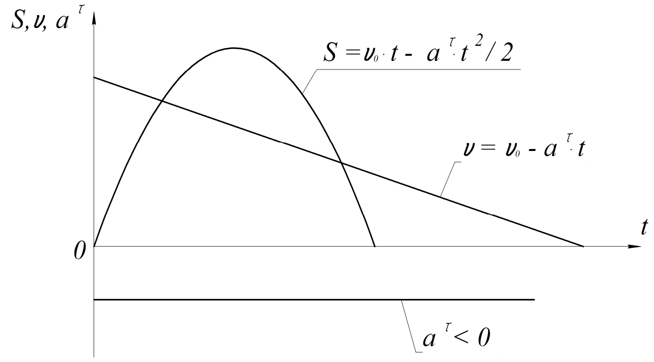


Рис.25

Если при равнопеременном движении скорость растет, значит, ускорение положительная величина и график пути – вогнутая парабола (Рис.24).

При торможении скорость падает, ускорение (замедление) – отрицательная величина, график пути – выпуклая парабола (Рис.25).

2. Вопросы для самоконтроля

1. В чем состоит сущность движения с позиций кинематики?

2. В чем выражается абсолютность пространства и времени?

3. Какие задачи изучаются в кинематике?

4. В чем различие между телом отсчета и системой отсчета?

5. Какие кинематические способы задания движения точки существуют, и в чем состоит каждый из этих способов?

6. Что называют траекторией движения точки?

7. Чем является траектория точки при векторном способе задания движения точки?

8.Что называется законом или уравнением движения точки по данной траектории?

9.Что называется перемещением точки за фиксированный промежуток времени?

10. Как по уравнениям движения точки в координатной форме определить ее траекторию?

11. Как направлена средняя скорость точки за некоторый промежуток времени?

12. Чему равен вектор скорости точки в данный момент времени, и, какое направление он имеет?

13.Дайте определение среднего ускорения точки за некоторое время.

14. Как связан орт касательной к кривой с радиус-вектором движущейся точки?

15. Чему равна проекция скорости точки на касательную к ее траектории и модуль ее скорости?

16. Как определяются проекции скорости точки на неподвижные оси декартовых координат?

17. Что представляет собой годограф скорости?

18. Какая существует зависимость между радиус-вектором движущейся точки и вектором скорости этой точки?

19. Какой вид имеет годограф скорости прямолинейного неравномерного движения и равномерного движения по кривой, не лежащей в одной плоскости?

20. Чему равен вектор ускорения точки и как он направлен по отношению к годографу скорости?

21. Как направлены естественные координатные оси в каждой точке кривой?

22. Приведите определения соприкасающейся, спрямляющей и нормальной плоскостей.

23. Как направлены естественные координатные оси в каждой точке кривой?

24. Что должно быть известно при естественном способе задания движения точки?

25. При каких условиях значение дуговой координаты точки в некоторый момент времени равно пути, пройденному точкой за промежуток от начального до данного момента времени?

26. Каковы модуль и направление вектора кривизны кривой в данной точке?

27. В какой плоскости расположено ускорение точки и чему равны его проекции на естественные координаты оси?

28. Что характеризует собой касательное и как оно направлено по отношению к вектору скорости?

29. Что характеризует собой нормальное ускорение точки и как оно направлено по отношению к скорости точки?

30. При каком движении точки равно нулю касательное ускорение точки, и при каком – нормальное ускорение?

31. Как классифицируются движения точки по ускорениям?

32. В какие моменты времени нормальное ускорение в криволинейном движении может обратиться в нуль?

33. Чем отличается график пути от графика движения точки?

34. Как по графику движения определить алгебраическое значение скорости точки в любой момент времени?

35. Что такое равнопеременное движение точки?

36. Что такое равноускоренное (равнозамедленное) движение точки

37. Напишите формулу для определения касательного ускорения точки и укажите, в каких случаях оно равно нулю.

38. Можно ли утверждать в общем случае, что в те моменты, когда скорость точки равна нулю, ее ускорение также обязательно имеет нулевое значение?

3. Практические занятия

Тема: Кинематика точки

Цель занятий:

- иметь представление о пространстве, времени, траектории, пути, скорости и ускорении;

- знать способы задания движения точки;

- уметь составлять уравнения движения точки и уравнение траектории;

- знать обозначения, единицы измерения, взаимосвязь кинематических параметров движения, формулы для определения скоростей и ускорений, радиуса кривизны траектории.

3.1 Вопросы для подготовки:

1.Кинематические способы задания движения точки. Определение траектории точки.

2. Переход от уравнений движения в декартовых координатах к естественному способу задания движения точки.

3.Определение скорости и ускорения точки при задании ее движения в декартовой системе координат.

4. Определение скорости и ускорения точки при естественном способе задания ее движения.

5. Определение радиуса кривизны траектории по известному закону движения точки.

6. Комплексное определение различных кинематических параметров движения точки, заданного координатным способом.

В результате освоения темы «Кинематика точки» студенты должны демонстрировать следующие результаты образования:

3.1.1 Знать:

1. Уравнение движения. Уравнение траектории.

2. Отличие пути от расстояния.

3. Составление уравнений движения.

4. Знать порядок построения графика пути и графика расстояний.

5. Знать порядок действий по составлению уравнений движения.

6. Знать, что дают уравнения движения и что дает уравнение траектории.

7. Знать, зачем составляются уравнения движения.

8. Чем отличаются уравнения движения от уравнения траектории, изложенного в явном, непараметрическом виде.

9. Какие возможности анализа открывают те и другие уравнения.

10. Определение модуля и направления скорости точки при координатной и естественной форме исходной информации.

11. Что означает определить скорость точки в данный момент (определить модуль и направление скорости в заданный момент времени).

12. Знать метод разложения вектора (радиус вектор, скорость, ускорение) на три составляющие в декартовой и естественной системе.

13. Знать, как определяется ускорение точки при любой исходной информации.

14. Определение радиуса кривизны траектории.

15. Модуль и направление ускорения при координатной форме и при естественной форме исходной информации.

16. Знать формулы касательного и нормального ускорения.

3.1.2 Уметь:

1. Уметь по заданным уравнениям движения в координатной форме получить уравнение траектории.

2. По заданному уравнению движения в естественной форме уметь определить путь, пройденный точкой в течение заданного интервала времени.

3. Уметь составить уравнение движения при любой, достаточной для этого исходной информации.

4. Уметь пояснить, чем отличаются понятия: «производная пути по времени» и «производная расстояния по времени»; что характеризует каждое из них.

5. Уметь провести простейший анализ уравнений движения.

6. Уметь определить модуль и направление скорости точки при любой достаточной исходной информации.

7. Уметь построить годограф скорости при координатном способе исходной информации.

8. Уметь анализировать уравнение: модуль скорости – функция времени.

9. Уметь составить уравнение движения в естественной форме, отвечающее равномерному движению, равнопеременному движению.

10. Уметь определить модуль и направление вектора скорости точки, принадлежащей ободу колеса, по заданным уравнениям ее движения.

11. По заданным уравнениям движения и координатной форме уметь определить радиус кривизны траектории.

12. Уметь определить модуль и направление вектора ускорения точки, принадлежащей ободу колеса. Уметь определять тангенциальное и нормальное ускорение точки.

13. Уметь показать, что ускорение всегда направлено во внутрь кривизны траектории точки.

14. Уметь ясно показать, что характеризует тангенциальное ускорение и что характеризует нормальное ускорение точки.

3.2 Методические рекомендации к решению задач по теме кинематика точки.

Задачи по кинематике точки отличаются большим разнообразием. Они могут включать в себя в комплексе или в виде отдельных вопросов следующие темы:

1) Нахождение закона движения точки (составление уравнений движения точки).

Для нахождения закона движения точки, прежде всего выбирается неподвижная система координат. Вид системы и начало координат выбираются исходя из условий задачи, так, чтобы дальнейшее решение было более простым. Далее в этой системе координат на основании условий задачи составляются уравнения движения точки, т.е. устанавливается функциональная зависимость координат точки от времени.

2) Определение по заданным уравнениям движения точки ее траектории, положения точки, скорости, ускорения и радиуса кривизны траектории.

При определении траектории точки в первую очередь находится уравнение кривой, по которой движется точка, для чего из уравнений движения исключается время. Затем определяется начальное положение точки на траектории (в момент t=0), устанавливается направление ее движения и находятся ограничивающие точки, которые выявляют участок кривой, по которому в действительности перемещается точка.

3) Переход от уравнений движения точки в декартовых координатах к естественному способу задания движения.

Для перехода от декартовой системы координат к естественному способу задания движения находят последовательно: уравнение траектории, положение точки при $t=0$ и ее направление движения. Начало отсчета совмещают с начальным положением точки. Затем определяют закон движения точки по траектории, используя формулу:

$$S(t) = \pm\int_0^t \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}dt ,$$

в которой, знак перед интегралом зависит от соотношения между выбранным положительным направлением отсчета дуги и направлением движения точки. Если в момент $t=0$движение точки начинается в сторону возрастания дуги, то перед интегралом ставится знак плюс, в противном случае – знак минус.

4) Определение по некоторым заданным кинематическим параметрам движения точки других его параметров (например, пройденного пути по заданному времени или, наоборот, времени движения по известному положению точки, уравнения движения по заданному ускорению и т.п.).

Скорость точки находится путем дифференцирования по времени уравнений движения, которое дает в функции времени проекции скорости на координатные оси. По проекциям определяются модуль и направление скорости, так же как функции времени, и затем, вычисляются их значения в заданный момент времени. Для построения годографа скорости ее проекции на оси координат рассматриваются как координаты точки, вычерчивающей годограф. Из выражений для этих координат исключают время для получения уравнения годографа.

Полное ускорение точки находится по его проекциям на оси декартовой системы координат, которые определяются дифференцированием по времени выражений для проекций скорости на координатные оси. По проекциям находят модуль полного ускорения и его направление по направляющим косинусам.

Определяют касательное ускорение точки по формуле

$$\left|\vec{a}^{\tau}\right| = \frac{\upsilon_x a_x + \upsilon_y a_y + \upsilon_z a_z}{|\upsilon|},$$

в которой знак плюс соответствует движению точки в сторону возрастания дуги (при этом точка движется ускоренно, т.е. направление скорости и ускорения совпадают), а знак минус – в сторону убывания дуги.

При известных полном и касательном ускорениях определяют нормальное ускорение точки по формуле:

$$a^n = \sqrt{(a)^2 - (a^\tau)^2}$$

Определяют радиус кривизны траектории по формуле:

$$a = a^n = \frac{\upsilon^2}{\rho}$$

3.3 Примеры решения задач.

Пример 10

Движение точки в плоскости *оху* задано уравнениями:

$$x = a\sin t;$$

$$y = 2a\cos(2t);$$

где:

a = const (a>0); t – время.

Определить траекторию точки и исследовать ее движение.

Решение:

Заданные уравнения движения точки являются уравнениями траектории в параметрическом виде. Для получения уравнения кривой, по которой движется точка. в непараметрической форме исключаем время из уравнений движения. Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу:

$$y = 2a \cdot \cos 2t = 2a \cdot (1 - 2\sin^2 t)$$

Из первого уравнения найдем:

$$\sin t = \frac{x}{a};$$

тогда:

$$y = 2a \cdot (1 - \frac{2x^2}{a^2})$$

Это уравнение параболы, вершина которой находится в точке (0, 2a), а ветви направлены вниз. Однако не вся полученная парабола является траекторией точки. Из условия задачи следует, что

$$|x| \le a, \qquad |y| \le 2a,$$

т.е. траекторией точки является часть параболы, заключенная внутри прямоугольника со сторонами *2a* и *4a* (Рис.27)

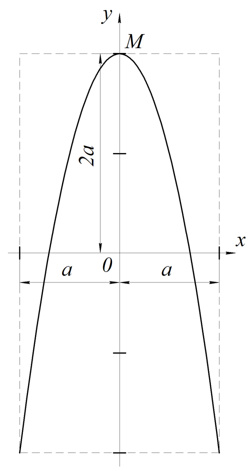


Рис.27

Таким образом, уравнением траектории точки является:

$$y = 2a \cdot (1 - \frac{2x^2}{a^2}) \text{ при } -a \le x \le a.$$

Найдем начальное положение точки.

При $t=0$ получаем: $x_{|t=0} = 0, \quad \mathrm{y}_{|t=0} = -2a,$ т.е. в начальный момент точка находилась в вершине параболы. При возрастании t от 0 до $\frac{\pi}{2}$ сек абсцисса x увеличивается, а ордината y уменьшается, т.е. точка движется по параболе вправо. При $t=t_1=\frac{\pi}{2}$ сек. имеем: $x_{|t=t_1} = a, \quad \mathrm{y}_{|t=t_1} = -2a.$

В промежутке $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}$ сек. точка движется по параболе влево, проходя ее вершину в момент времени $t=t_1=\pi$ сек. Начиная с момента $t=t_1=\frac{3\pi}{2}$ сек., точка снова движется вправо, проходя начальное положение в момент $t=t_1=2\pi$ сек., и т.д. Таким образом, точка совершает с течением времени колебательное движение вдоль параболы.

Пример 11 (10.12)**[9]**

Найти уравнение движения и траекторию средней точки *C* шатуна кривошипно-ползунного механизма, а также уравнение движения ползуна В. Определить также скорость, ускорение и радиус кривизны траектории точки *C* в момент времени, когда $\varphi=60^0$. Известно, что длина кривошипа *OA* равна длине шатуна *AB*. ($OA=AB=2l$ [*см*]; $\varphi=\omega t$ [*рад*]; $\omega=2$ [*рад/сек*].).

Решение:

Строим схему механизма (Рис.28).

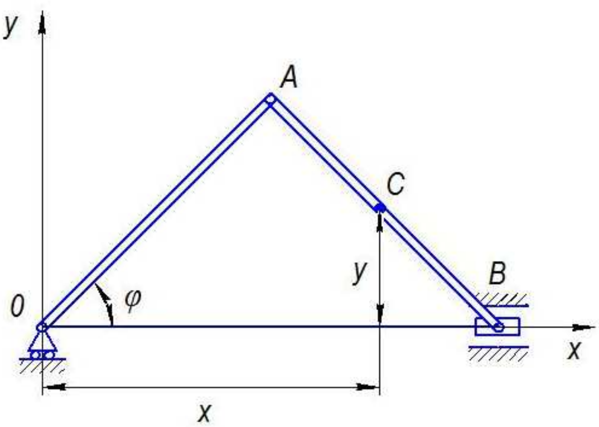


Рис.28

1. Определим уравнение движения точек *C* и *B*, а также траекторию точки *C*.

Уравнение движения точки *C* запишем в виде зависимостей (Рис.28):

$$x_C = x(t); \qquad y_C=y(t);$$

$$x_C=OB\text{-}ВД=2OAcos\omega t\text{-}DCcos\omega t=3\ lcos\omega t;$$

$$y_C=CD=l\sin\omega t;$$

Для того чтобы записать уравнение траектории точки *C,* необходимо из уравнений движения исключить время. Получим:

$$\frac{x_C}{3l}=\cos\omega t;$$
$$\frac{y_C}{l}=\sin\omega t;$$
$$\left(\frac{x_C}{9l}\right)^2+\left(\frac{y_C}{l}\right)^2=1.$$

Полученное уравнение – уравнение эллипса с центром в начале координат и полуосями $a=3l$ [*см*] , $b=l$ [*см*].

Ползун *B* движется вдоль оси *Ox*. Поэтому его движение описывается следующим уравнением:

$$x_B=OB=4l\cos\omega t;$$

$$y_B=0.$$

2. Определим время τ, при котором $\varphi=60^0$.

$$\omega\tau=\frac{\pi}{3};\qquad \tau=\frac{\pi}{6};$$

3. Определяем проекции скорости точки *C* на координатные оси и ее модуль:

$$\upsilon_{\tilde{N}x}=\frac{dx_C}{dt}=-3l\omega\sin\omega t=-6l\sin\omega t;$$
$$\upsilon_{\tilde{N}y}=\frac{dy_C}{dt}=2l\cos\omega t;$$
$$\upsilon_{\tilde{N}}=\sqrt{{\upsilon_{\tilde{N}x}}^2+{\upsilon_{\tilde{N}y}}^2}=l\sqrt{36\sin^2\frac{\pi}{3}+4\cos^2\frac{\pi}{3}};$$

Подставив значение τ, получим:

$$\upsilon_{\tilde{N}_x|t=\tau} = -5{,}196l \ \ [м/с];$$

$$\upsilon_{\tilde{N}_y|t=\tau} = l \ \ [м/с];$$

$$\upsilon_{\tilde{N}|t=\tau} = 5{,}29l, \ \ [м/с]$$

Проекции и модуль скорости ползуна B:

$$\upsilon_{\hat{A}x} = \frac{dx_{\hat{A}}}{dt} = -4l\omega \sin \omega t;$$

$$\upsilon_{By} = \frac{dy_{\hat{A}}}{dt} = 0;$$

$$\upsilon_B = \sqrt{\upsilon_{Bx}{}^2 + \upsilon_{By}{}^2} = 4l\omega \sin \omega t.$$

Подставив значение τ, получим:

$$\upsilon_{\hat{A}|t=\tau} = 6{,}928l, [м/с]$$

4. Определяем проекции ускорения точки C на координатные оси и его модуль:

$$a_{\tilde{N}x} = \frac{d\upsilon_{Cx}}{dt} = -3l\omega^2 \cos \omega t;$$

$$a_{\tilde{N}y} = \frac{d\upsilon_{Cy}}{dt} = -l\omega^2 \sin \omega t;$$

$$a_{\tilde{N}} = \sqrt{a_{\tilde{N}x}{}^2 + a_{\tilde{N}y}{}^2} = l\omega^2 \sqrt{8\cos^2 \omega t + 1};$$

Подставив значение τ, получим:

$$a_{\tilde{N}x_{|t=\tau}} = -6l \ [м/с^2];$$

$$a_{\tilde{N}y|t=\tau} = -3{,}464l \ \ [м/с^2]$$

$$a_{\tilde{N}_{|t=\tau}} = 4l\sqrt{3} = 6{,}928l \ \ [м/с^2]$$

Проекции и модуль ускорения ползуна B:

$$a_{Âx} = \frac{d\upsilon_{Âx}}{dt} = -4l\omega^2 \cos\omega t;$$

$$a_{By} = \frac{d\upsilon_{Ây}}{dt} = 0;$$

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}{}^2 + a_{By}{}^2} = 4l\omega^2 \cos\omega t.$$

Подставив значение τ, получим:

$$a_B = 8l \ \ [м/с^2]$$

5. Определяем касательную и нормальную составляющие ускорения точки *С*.

Касательное ускорение:

$$a^\tau = \frac{\upsilon_x \cdot a_x + \upsilon_y \cdot a_y}{\upsilon} = \frac{\left(-3l\omega \sin\omega t\right)\cdot\left(-3l\omega^2 \cos\omega t\right) + \left(l\omega\cos\omega t\right)\cdot\left(-l\omega^2 \sin\omega t\right)}{l\omega\sqrt{8\sin^2\omega t + 1}};$$

Преобразовав, получим:

$$a^\tau = \frac{8l^2\omega^3 \sin\omega t \cdot \cos\omega t}{l\omega\sqrt{8\sin^2\omega t + 1}} = \frac{8l\omega^2 \sin\omega t \cdot \cos\omega t}{\sqrt{8\sin^2\omega t + 1}};$$

Подставив значение τ, получим:

$$a^\tau{}_{|t=\tau} = \frac{32l^2 \sin 60^0 \cdot \cos 60^0}{l\sqrt{8\sin^2 60^0 + 1}} = \frac{13,856l^2}{2,646l} = 5,237l \ \ [м/с^2].$$

Нормальное ускорение:

$$a_C^n = \sqrt{a_C{}^2 - (a_C^\tau)^2} = \sqrt{(6,928l)^2 - (5,237l)^2} = 4,536l \ \ [м/с^2].$$

6. Определяем радиус кривизны траектории в точке С:

$$\rho = \frac{\upsilon_{\tilde{N}}^2}{a^n};$$

$$\rho_{|t=\tau} = \frac{(6,928l)^2}{4,536l} = 10,58l\ [м]$$

График имеет вид, представленный на Рис.29

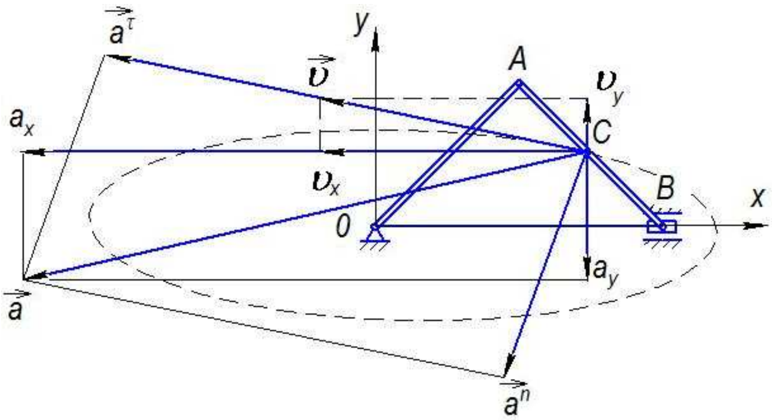


Рис.29

Пример 12 (12.21) [9]

Движение снаряда задано уравнениями

$$x = \upsilon_0 t \cos\alpha_0; \qquad y = \upsilon_0 t \sin\alpha_0 - \frac{1}{2} g t^2;$$

где υ_0 и α_0 - постоянные величины. Найти уравнение траектории снаряда и радиус кривизны траектории при $t=0$ и в момент падения снаряда на землю.

Решение:

1. Исключая время из уравнений движения, получим уравнение кривой, по которой движется снаряд:

$$t = \frac{x}{\upsilon_0 \cos\alpha_0}; \qquad y = xtg\alpha_0 - \frac{gx^2}{2\upsilon_0^2 \cos^2\alpha_0};$$

- траекторией снаряда является парабола.

2. Определяем момент падения снаряда на землю. При $t=t_1$ $y=0$. Получим:

$$t_1 = \frac{2\upsilon_0}{g}\sin\alpha_0;$$

3. Для определения радиуса кривизны ρ необходимо предварительно определить скорость и ускорение снаряда.

Определяем проекции скорости на координатные оси и модуль скорости.

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \upsilon_0 \cos\alpha_0; \qquad \upsilon_{\acute{o}} = \frac{dy}{dt} = \upsilon_0 \sin\alpha_0 - gt; \qquad \upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2};$$

В момент времени $t=0$:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \upsilon_0 \cos\alpha_0; \qquad \upsilon_{\acute{o}} = \frac{dy}{dt} = \upsilon_0 \sin\alpha_0;$$

В момент падения скорость снаряда:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \upsilon_0 \cos\alpha_0; \qquad \upsilon_{\acute{o}} = \frac{dy}{dt} = -\upsilon_0 \sin\alpha_0;$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \upsilon_0;$$

4. Определяем проекции ускорения на координатные оси и модуль ускорения:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = 0; \qquad a_ó = \frac{d\upsilon_y}{dt} = -g; \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = g;$$

5. Определяем касательное ускорение:

$$a^\tau = \frac{\upsilon_x \cdot a_x + \upsilon_y \cdot a_y}{|\upsilon|};$$

Подставляя значения получаем:

$$a^\tau = \frac{(-\upsilon_0 \sin\alpha_0)(-g)}{\upsilon_0} = g\sin\alpha_0;$$

6. Определяем нормальное ускорение:

$$a^n = \sqrt{a^2 - (a^\tau)^2} = \sqrt{g^2 - g^2\sin\alpha_0^2} = g\cos\alpha_0;$$

7. Определяем радиус кривизны траектории при *t=0* и в момент падения на землю:

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{a^n} = \frac{\upsilon_0^2}{g\cos\alpha_0} \ [м].$$

Пример 13 (12.22) [9]

Снаряд движется в вертикальной плоскости согласно уравнениям: $x=300t$, $y=400t-5t^2$ (*t* - в секундах, *x,y* – в метрах).

Найти:

1). скорость и ускорение в начальный момент времени;

2). высоту и дальность обстрела;

3). радиус кривизны траектории в начальной и наивысшей точках.

Решение:

1. Исследуем движение снаряда. В момент начальный времени (при *t=0*) координаты снаряда $x_{|t=0}=0;\ y_{|t=0}=0,$ следовательно, орудие расположено в начале координат. Для определения траектории снаряда, исключает время из уравнений движения:

$$t=\frac{x}{300}; \qquad y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{300^2}x^2;$$

Таким образом получили, что траектория снаряда – квадратная парабола, которая пересекает ось *ox* в двух точках с координатами: $x_{|t=0}=0;\ y_{|t=0}=0,$ и $x_{|t=T}=S;\ y_{|t=T}=0.$

2. По заданным уравнениям движения снаряда определим его скорость υ и ускорение *a* для любого момента времени:

$$\upsilon_x=\frac{dx}{dt}=300; \qquad \upsilon_{\text{y}}=400-10t;\ \upsilon=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}=\sqrt{(300)^2+(400-10t)^2};$$

$$a_x=\frac{d\upsilon_x}{dt}=0; \qquad a_{\text{y}}=-10t;\ a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=10;$$

3. Высоту *H* траектории снаряда и дальность *S* обстрела определим из условий: на вершине траектории при *y=H* вектор скорости параллелен оси *Ox,* следовательно $\upsilon_y=0$. Из этого условия находим время τ полета до вершины и высоту траектории:

$\upsilon_y = 400\text{-}10t = 0$. Отсюда: *τ=40 сек. H=400t-5t^2=8000 м.*

Дальность *S* обстрела и время полета снаряда до цели определим из условий $x_{|t=T} = S;\ \ y_{|t=T} = 0.$

0=400T-5T^2; T=80 сек. Отсюда: *S=300T=24000 м.*

4. Определим значения скорости и ускорения в момент вылета снаряда из орудия и в момент падания на землю:

При *t=0:* $\upsilon = \sqrt{(300)^2 + (400)^2} = 500\ \frac{\grave{i}}{\tilde{n}};\ \ a = 10\ \frac{\grave{i}}{\tilde{n}^2}.$

При *t=T:* $\upsilon = \sqrt{(300)^2 + (-400)^2} = 500\ \frac{\grave{i}}{\tilde{n}};\ \ a = 10\ \frac{\grave{i}}{\tilde{n}^2}.$

Таким образом, в момент взрыва и в момент вылета из орудия снарядимеет одинаковую скорость и ускорение. Вектор ускорения во всех точках траектории направлен вертикально вниз.

В тот момент времени, когда *t= τ,* т.е. точка находится на вершине траектории

$$\upsilon_x = 300\ \frac{\grave{i}}{\tilde{n}};\qquad \upsilon_y = 0;\ \ \upsilon = 300\ \frac{\grave{i}}{\tilde{n}};$$

5. Определяем касательное, нормальное ускорение и радиус кривизны траектории в начальный момент при *t=0:*

$$a^{\tau}_{t=0} = \frac{\upsilon_x \cdot a_x + \upsilon_y \cdot a_y}{|\upsilon|} = \frac{300 \cdot 0 + 400 \cdot (-10)}{500} = -8\ \frac{\grave{i}}{\tilde{n}^2};$$

$$a^n = \sqrt{a^2 - (a^\tau)^2} = \sqrt{10^2 - (-8)^2} = 6\ \frac{\text{ì}}{\text{ñ}^2};$$

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{a^n} = \frac{500^2}{6} \approx 41667\ \text{ì}\ .$$

6. Определяем касательное, нормальное ускорение и радиус кривизны траектории в момент *t= τ:*

$$a^\tau_{t=\tau} = \frac{\upsilon_x \cdot a_x + \upsilon_y \cdot a_y}{|\upsilon|} = \frac{300 \cdot 0 + 0 \cdot (-10)}{500} = 0\ \frac{\text{ì}}{\text{ñ}^2};$$

$$a_{t=\tau}{}^n = \sqrt{a^2_{t=\tau} - (a^\tau_{t=\tau})^2} = \sqrt{10^2} = 10\frac{\text{ì}}{\text{ñ}^2};$$

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{a^n} = \frac{300^2}{10} = 9000\ \text{ì}\ .$$

Ответ:

при *t=0:* $\upsilon_{t=0} = 500\ \frac{\text{ì}}{\text{ñ}};\ a_{|t=0} = 10\ \frac{\text{ì}}{\text{ñ}^2};\ a^\tau_{t=0} = -8\ \frac{\text{ì}}{\text{ñ}^2};\ a^n_{t=0} = 6\ \frac{\text{ì}}{\text{ñ}^2};\ \rho_{t=0} \approx 41667\ \text{ì}\ .$

при *t= τ:* $\upsilon_{t=\tau} = 300\ \frac{\text{ì}}{\text{ñ}};\ a_{|t=\tau} = 10\ \frac{\text{ì}}{\text{ñ}^2};\ a^\tau_{t=\tau} =\ \frac{\text{ì}}{\text{ñ}^2};\ a^n_{t=\tau} = 10\ \frac{\text{ì}}{\text{ñ}^2};\ \rho_{t=\tau} \approx 9000\ \text{ì}\ .$

3.4 Методические указания к самостоятельной работе

Целью самостоятельной работы является закрепление полученных теоретических и практических знаний по курсу теоретической механики, выработка навыков самостоятельной работы и умение применять полученные знания.

Видами самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины являются освоение и проработка тем лекционного материала, выполнение и подготовка к защите домашних работ, выполнение и защита расчетно-графических работ.

Самостоятельная работа включает в себя решение задач [9]: №№ 10.1; 10.2(1-5); 10.4(1-4); 10.7; 10.12; 10.4; 11.2; 11.3; 11.12; 12.9; 12.14; 12.16; 12.17; 12.23; 12.25; 12.27; 12.29.

Ниже приводятся рекомендации по решению задач.

1. Задача № 10.2 [9].

По заданным уравнениям движения точки в координатной форме найти уравнение ее траектории, построить чертеж и указать на чертеже направление движения точки.

Необходимо в каждой задаче провести анализ движения (самостоятельно поставить вопросы о движении точки и дать на них ответы).

Перечень обязательных вопросов на которые необходимо ответить при решении задачи:

1. В какой плоскости движется точка.
2. Получить уравнение траектории и назвать траекторию.
3. Найти координаты начального положения точки (t=0).
4. Указать на чертеже траекторию, начальное положение точки и направление ее движения от начальной точки.

2. Задача № 10.1 [9].

По заданным уравнениям движения точки в естественных координатах построить через равные промежутки времени шесть положений точки, определить расстояние по траектории от начала отсчета до конечного положения точки, а также путь, пройденный точкой в течение заданного интервала времени.

Перечень обязательных вопросов:

1. Сравнить полученные результаты.
2. В каком случае результаты будут совпадать?

3. Как определить наибольшее отклонение точки от начала отсчета расстояний?

3.5 Расчетно-графические работы

Расчетно-графические работы проводятся с целью практической проработки разделов дисциплины, что способствует закреплению, углублению и обобщению теоретических знаний, развивает творческую инициативу и самостоятельность, повышает интерес к изучению дисциплины и прививает навыки научно-исследовательской работы.

Подготовка к защите расчетно-графических работ осуществляется каждым студентом самостоятельно и включает проработку разделов лекционного материала, охватывающего тему данной работы, решение задач для самостоятельной работы и оформление пояснительной записки в соответствии с требованиями. Пояснительная записка оформляется на листах белой бумаги форматом А 4 и включает следующие разделы: титульный лист, задание, решение задач и пояснения к ним, содержащие необходимые уравнения, выводы соответствующих зависимостей, теоремы и расчеты, сопровождаемые требуемыми графическими иллюстрациями. При выполнении пояснительной записки допускается использование ПЭВМ.

Самостоятельные работы, оформленные небрежно и без соблюдения предъявляемых к ним требований, не рассматриваются и не засчитываются.

По теме «Кинематика точки» выполняется расчетно-графическая работа К1 на тему «Определение абсолютной скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения», включающая в себя две задачи. Каждый студент имеет свой вариант задания.

Задание на расчетно-графическую работу К1.

Движение точки задано уравнениями:

1. $x = a \cdot \sin^2(\frac{\pi t}{k}) \pm c; \quad y = b\cos^2(\frac{\pi \mathrm{t}}{\mathrm{n}}) \pm d$;

2. $x = f \cdot \sin(\frac{\pi t}{k}) \pm c; \quad y = h\cos(\frac{\pi t}{n}) \pm d$;

(координаты *x* и *y* заданы в сантиметрах, время *t* в секундах). Постоянные (*a, b, c, d, f, h*) и знаки ($\pm$) задаются преподавателем.

Требуется:

1. Получить уравнение траектории в явном виде.

2. Построить траекторию точки.

3. Определить и отметить на траектории положение точки в момент времени *t=1 с.*

4. Вычислить проекции скорости на координатные оси и модуль скорости как функции времени и в момент времени *t=1 с.*

5. Построить составляющие вектора скорости υ_x и υ_y и вектор скорости $\vec{\upsilon}$ в момент времени *t=1 с.*

6. Построить составляющие вектора ускорения a_x и a_y и вектор ускорения $\vec{a}$ в момент времени *t=1 с.*

7. Определить касательное ускорение a^{τ} и нормальное ускорение a^{n} в момент времени *t=1 с.*

8. Построить векторы касательного ускорения $\vec{a}^{\tau}$ и нормального ускорения $\vec{a}^{n}$ в момент времени *t=1 с.*

9. Определить радиус кривизны траектории в момент времени *t=1 с.*

Пояснения

При построении траектории, векторов скорости и ускорения необходимо помнить о размерностях соответствующих величин. При изображении одноименных величин на графике, необходимо соблюдать пропорциональность, т.е. строить с учетом масштаба.

Пример выполнения задания К1.

Тема: **Кинематика точки. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки по заданным уравнениям ее движения.**

Задача К1.

По заданным уравнениям движения точки определить ее траекторию, скорость, ускорение и радиус кривизны траектории для момента t_1 = 1 сек. Построить график.

Задача №1.

$$\begin{cases} x = 4 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi t}{3}\right) + 2; \\ y = 4 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi t}{3}\right) + 2. \end{cases}$$

1. Определяем траекторию движения точки, исключив время из уравнения движения:

$$\cos^2\left(\frac{\pi t}{3}\right) = \frac{x-2}{4};$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi t}{3}\right) = \frac{y-2}{4};$$

Используем тригонометрические тождества: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Получим:

$$\frac{x-2}{4} + \frac{y-2}{4} = 1,$$

или:

y =(8 – x) - траекторией является прямая.

2. Определяем положение точки на траектории для момента времени t_1 = 1 сек.

$$x_{|t=1} = 4 \cdot \cos^2 60^o + 2 = 4 \cdot 0{,}25 + 2 = 3 \text{ см.}$$

$$y_{|t=1} = 4 \cdot \sin^2 60^o + 2 = 4 \cdot 0{,}866^2 + 2 = 5 \text{ см.}$$

3. Определяем проекции скорости на координатные оси и модуль скорости:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = -4 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) \cdot 2.$$

Используем формулу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, тогда:

$$\upsilon_x = -\frac{4}{3}\pi \cdot \sin\left(\frac{2}{3}\pi t\right);$$

$$\upsilon_{x_{|t=1}} = -\frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot \sin 120^o = -\frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}866 = -3{,}63 \text{ см/с};$$

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = 4 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) \cdot 2\,;$$

$$\upsilon_y = \frac{4}{3}\pi \cdot \sin\left(\frac{2}{3}\pi t\right);$$

$$\upsilon_{y|_{t=1}} = \frac{4}{3}\cdot 3{,}14\cdot 0{,}866 = 3{,}63 \text{ см/с};$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{(-3{,}63)^2 + (3{,}63)^2} = \sqrt{26{,}3} = 5{,}13 \text{ см/с}.$$

4. Определим проекции ускорения на координатные оси и модуль ускорения:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = -\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{2}{3}\pi\cdot\cos\left(\frac{2}{3}\pi t\right);$$

$$a_{x|_{t=1}} = -\frac{8}{9}\cdot 3{,}14^2\cdot\cos 120^o = 4{,}38 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{4}{3}\pi\cdot\frac{2}{3}\pi\cdot\cos\left(\frac{2}{3}\pi t\right);$$

$$a_{y|_{t=1}} = \frac{8}{9}\cdot 3{,}14^2\cdot(-0{,}5) = -4{,}38 \text{ см/с}^2;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(4{,}38)^2 + (-4{,}38)^2} = \sqrt{38{,}4} = 6{,}2 \text{ см/с}^2.$$

5. Определяем касательное ускорение:

$$a^{\tau} = \frac{\upsilon_x \cdot a_x + \upsilon_y \cdot a_y}{\upsilon};$$

$$a^{\tau} = \frac{-3{,}63 \cdot 4{,}38 + 3{,}63 \cdot (-4{,}38)}{5{,}13} = -6{,}2 \text{ см/с}^2.$$

6. Определяем нормальное ускорение:

$$a^n = \sqrt{a^2 - (a^{\tau})^2} = \sqrt{6{,}2^2 - 6{,}2^2} = 0 \text{ см/с}^2.$$

7. Определяем радиус кривизны траектории в данной точке:

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{a^n} = \frac{5{,}13^2}{0} = \infty .$$

8. Для построения графика вводим масштабные коэффициенты:

Примем: 3,63 см/с = 30 мм;

4,38 см/с^2 = 50 мм; тогда: 6,2 см/с^2 = 71 мм.

Таблица ответов:

x, см	y, см	υ_x, см/с	υ_y, см/с	υ, см/с	a_x, см/с^2	a_y, см/с^2	a^{τ}, см/с^2	a, см/с^2	a^n, см/с^2	ρ, см
3	5	-3,63	3,63	5,13	4,38	-4,38	-6,2	6,2	0	∞

9. Строим график (Рис.30)

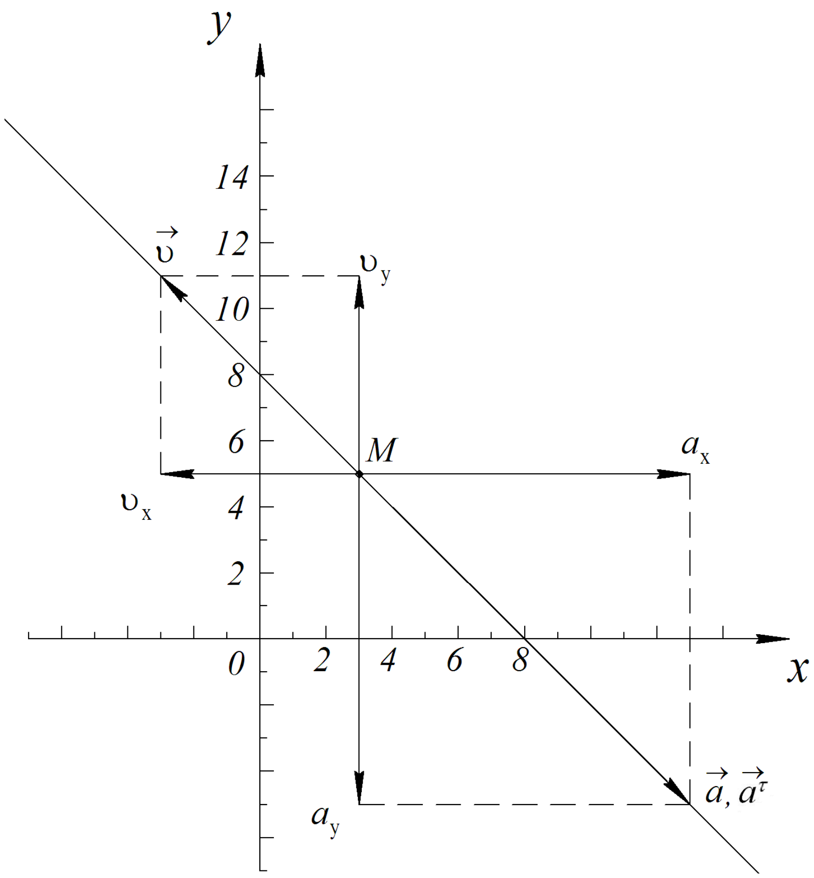


Рис.30

Задача №2.

$$\begin{cases} x = 4 \cdot \cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right) + 3; \\ y = 4 \cdot \sin\left(\dfrac{\pi t}{3}\right) + 2. \end{cases}$$

1. Определяем траекторию движения точки, исключив время из уравнения движения:

$$\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) = \frac{x-3}{4};$$

$$\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) = \frac{y-2}{4};$$

Возведем в квадрат обе части и сложим. Получим:

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1, \text{ или:}$$

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$ – траекторией является окружность со смещенным центром относительно начала координат.

2. Определяем положение точки на траектории для момента времени $t_1 = 1$ сек.

$x_{|t=1} = 4 \cdot \cos 60^o + 3 = 5$ см.

$y_{|t=1} = 4 \cdot \sin 60^o + 2 = 5{,}5$ см.

3. Определяем проекции скорости на координатные оси и модуль скорости:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = -4 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right);$$

$$\upsilon_{x_{|t=1}} = -\frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot \sin 60^o = -3{,}63 \text{ см/с};$$

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = 4 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right);$$

$$\upsilon_{y_{|t=1}} = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot \cos 60^o = 2{,}09 \text{ см/с};$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{(-3{,}63)^2 + (2{,}09)^2} = \sqrt{17{,}545} = 4{,}19 \text{ см/с}.$$

4. Определим проекции ускорения на координатные оси и модуль ускорения:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = -\frac{4}{3}\pi \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right);$$

$$a_x = -\frac{4}{9}\pi^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right);$$

$$a_{x_{|t=1}} = -\frac{4}{9} \cdot 3{,}14^2 \cdot \cos 60^o = -2{,}19 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = -\frac{4}{3}\pi \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right);$$

$$a_{y_{|t=1}} = -\frac{4}{9} \cdot 3{,}14^2 \cdot \sin 60^o = -3{,}795 \text{ см/с}^2;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-2{,}19)^2 + (-3{,}795)^2} = \sqrt{19{,}197} = 4{,}38 \text{ см/с}^2.$$

5. Определяем касательное ускорение:

$$a^\tau = \frac{\upsilon_x \cdot a_x + \upsilon_y \cdot a_y}{\upsilon};$$

$$a^\tau = \frac{(-3{,}63) \cdot (-2{,}19) + 2{,}09 \cdot (-3{,}795)}{4{,}19} = \frac{0{,}0182}{4{,}19} = 0{,}00433 \text{ см/с}^2.$$

6. Определяем нормальное ускорение:

$$a^n = \sqrt{a^2 - (a^\tau)^2} = \sqrt{4{,}38^2 - 0{,}00433^2} = 4{,}379 \text{ см/с}^2.$$

7. Определяем радиус кривизны траектории в данной точке:

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{a^n} = \frac{4{,}19^2}{4{,}379} = 4 \text{ см}.$$

8. Для построения графика вводим масштабные коэффициенты:

примем: 3,63 см/с = 30 мм; тогда 2,09 см/с = 17 мм;

примем: 2,19 см/с^2=40 мм; тогда: 3,795 см/с^2=69 мм; 4,379 см/с^2= 80 мм.

Таблица ответов:

x, см	y, см	υ_x, см/с	υ_y, см/с	υ, см/с	a_x, см/с^2	a_y, см/с^2	a^τ, см/с^2	a, см/с^2	a^n, см/с^2	ρ, см
5	5,5	-3,63	2,09	4,19	-2,19	-3,795	0,0043	4,38	4,379	4

9. Строим график (Рис.31)

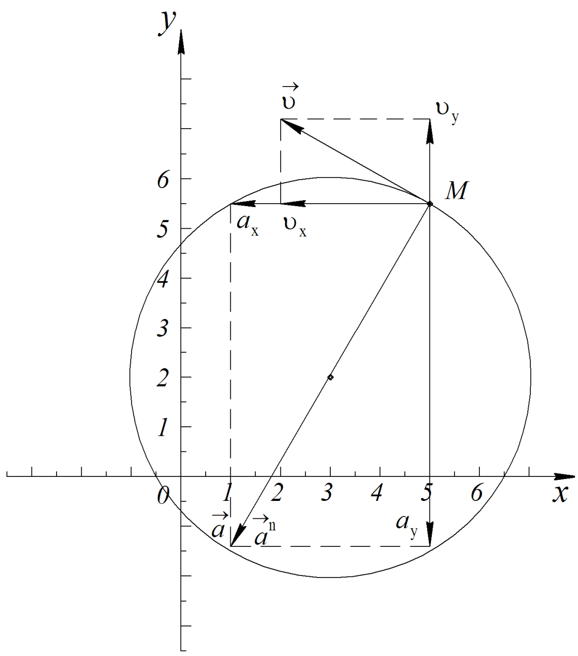
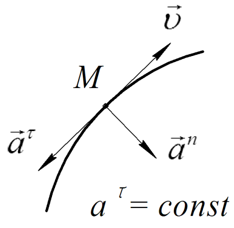
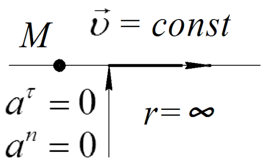
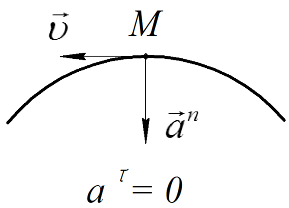
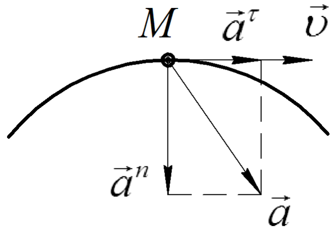
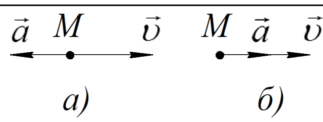
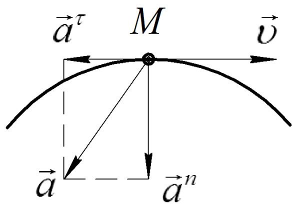
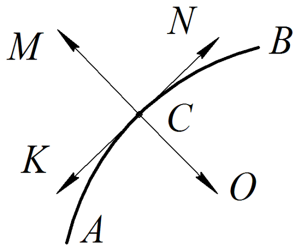
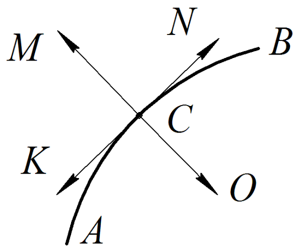


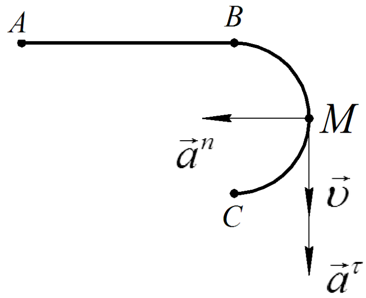
Рис.31

4. Тесты по теме

№ п/п	Задание	Варианты ответа
1.	Что не входит в систему отсчета:	а) тело, движение которого исследуется; б) координатные оси; в) тело отсчета.
2.	Траектория точки – это…	а) путь, пройденный точкой; б) линия, на которой находится точка в любой момент движения; в) расстояние от текущего положения точки до начала координат; с) изменение положения точки за данный промежуток времени.
3.	Векторный способ задания движения можно использовать…	а) только если заранее известна траектория движения; б) всегда; в) когда известна начальная скорость.
4.	Уравнения $\left.\begin{array}{l} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t), \end{array}\right\}$ используются при способе задания движения точки….	а) векторном; б) естественном; с) координатном (в полярной системе координат); д) координатном (в декартовой системе координат).
5.	Если a_n =0, то точка движется…	а) прямолинейно; б) криволинейно.
6.	Укажите закон движения точки в векторной форме.	а) $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$; б) *S=f(t);* в) $\vec{r} = \vec{r}(t)$;

7.	Какое из приведенных соотношений определяет среднюю скорость.	а) $\frac{\Delta S}{\Delta t}$; б) $\frac{dS}{dt}$
8.	Какое ускорение характеризуется изменение скорости по направлению?	а) нормальное ($\vec{a}_n$); б) касательное ($\vec{a}_\tau$); в) полное ($\vec{a}$).
9.	Точка движется по дуге. Охарактеризуйте движение точки. 	а) равномерное; б) равноускоренное; в) равнозамедленное
10.	Точка движется по дуге. Охарактеризуйте движение точки. 	а) равномерное прямолинейное; б) равномерное криволинейное; в) равноускоренное криволинейное; г) равнозамедленное криволинейное.
11.	Точка движется по дуге. Охарактеризуйте движение точки. 	а) равномерное прямолинейное; б) равномерное криволинейное; в) равноускоренное криволинейное; г) равнозамедленное криволинейное.
12.	Укажите, какому виду движения точки соответствует направление скорости и ускорения, показанные на рисунке? 	а) равномерному криволинейному; б) ускоренному криволинейному; в) замедленному криволинейному.

13.	На каком рисунке показано ускоренное движение.	
14.	Какой вид движения точки представлен на рисунке. 	а) равномерное криволинейное; б) ускоренное криволинейное; в) замедленное криволинейное.
15.	Точка движется из А в В по траектории, указанной на рисунке. Укажите направление скорости точки С. 	а) скорость направлена по СК; б) скорость направлена по СМ; в) скорость направлена по CN; г) скорость направлена по СО.
16.	Точка движется из *А* в *В* по траектории *АСВ* равномерно-замедлено. Укажите направление касательной и нормальной составляющих ускорения в точке *С*. 	а) составляющие ускорения направлены по *СК* и *СМ;* б) составляющие ускорения направлены по *СМ* и *CN;* в) составляющие ускорения направлены по *CN* и *СО;* г) составляющие ускорения направлены по *СО* и *СК.*
17.	Может ли проекция нормального ускорения точки на направление главной нормали к траектории быть отрицательной?	а) да; б) нет; в) ответ зависит от закона движения точки; г) ответ зависит от формы траектории точки.

18.	Точка движется по линии *ABC*. По изображенным параметрам определить вид движения. 	а) равномерное; б) равноускоренное; в) равнозамедленное; г) неравномерное.
19.	Значение ускорения точки определяют одним равенством $a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, которое соответствует:	а) криволинейному движению; б) прямолинейному движению.
20.	Наличие (отсутствие) какого ускорения определяет соответственно неравномерность или равномерность движения точки?	а) нормального; б) касательного.
21.	Какому виду движения точки соответствует запись $a_n=0,\ a=a_\tau$?	а) неравномерному прямолинейному; б) неравномерному криволинейному; в). равномерному прямолинейному; г) равномерному криволинейному.
22.	Какая составляющая ускорения любой точки твердого тела равна нулю при равномерном вращении твердого тела вокруг неподвижной оси.	а) нормальное ускорение; б) касательное ускорение; в) полное ускорение.
23.	Какое ускорение характеризуется изменение скорости по величине?	а) нормальное ($\vec{a}_n$); б) касательное ($\vec{a}_\tau$); в) полное ($\vec{a}$).
24.	Можно ли только по заданной траектории точки определить пройденный ею путь?	а) можно; б) нельзя.

25.	Можно ли определить траекторию точки, если известно, как изменяется во времени координаты точки в прямоугольной системе координат (например, $x=at^2;y=bt^2$)?	а) можно; б) нельзя.
26.	Точка движется по прямой с постоянным ускорением, направленным противоположно скорости. Определить, как движется точка.	а) равномерно; б) равномерно-ускоренно; в) равномерно-замедленно.
27.	Назовите движение, в котором ускорение точки все время равно нулю.	а) равнопеременное движение; б) равномерное прямолинейное движение; в) равномерное криволинейное движение.
28.	Точка движется равномерно по криволинейной траектории с $a^{\tau}=0$. Будет ли постоянным нормальное ускорение?	а) да; б) нет; в) только в частном случае (движение по окружности).
29.	Какой способ задания движения точки используют для определения нормального, касательного ускорения и радиуса кривизны траектории.	а) векторный; б) координатный; в) естественный.
30.	Значение скорости точки определяют одним равенством $\upsilon_x = \frac{dx}{dt}$, что соответствует:	а) криволинейному движению; б) прямолинейному движению.
31.	При $a^{\tau}\neq0$ и $a^{n}\neq0$ точка движется:	а) неравномерно по прямолинейной траектории; б) неравномерно по криволинейной траектории; в) равномерно по прямолинейной траектории;

		г) равномерно по криволинейной траектории.
32.	При ускоренном движении касательное ускорение…	а) совпадает с направлением вектора скорости; б) отсутствует; в) противоположно направлению вектора скорости.
33.	Какие из приведенных отношений определяют ускорение в данный момент?	а) $\frac{d\upsilon}{dt}$; б) $\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$.
34.	Не является характеристикой движения:	а) скорость; б) ускорение; в) закон движения; г) сила.
35.	Чем меньше радиус кривизны траектории материальной точки, тем..	а) ускорение не зависит от радиуса кривизны траектории; б) ее касательное ускорение больше; в) ее нормальное ускорение больше; г) ее нормальное ускорение меньше.
36.	Что называется проекцией ускорения на ось?	а) скорость, поделенная на время; б) производная по времени от проекции скорости; в) путь, поделенный на время.
37.	При замедленном движении касательное ускорение…	а) совпадает с направлением скорости; б) отсутствует; в) противоположно направлению вектора скорости.

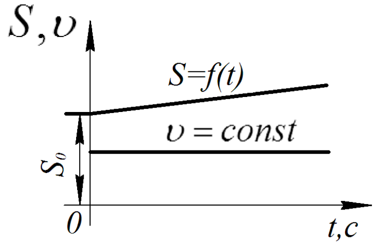
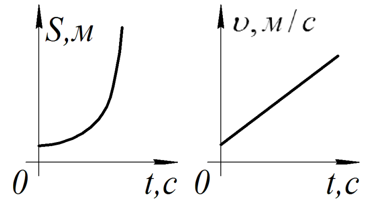
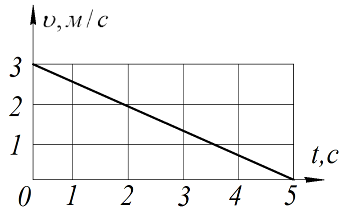
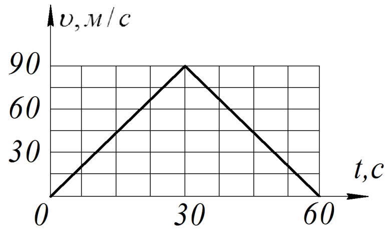
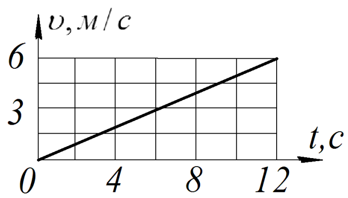
38.	Как определяется скорость точки при естественном способе задания движения точки?	а) $\upsilon = \frac{dS}{dt}$; б) $\upsilon = \frac{S}{t}$; в) $\upsilon = \frac{\Delta S}{\Delta t}$.
39.	Как определяется полное ускорение точки при координатном способе задания движения точки?	а) $a = a^{\tau} + a^{n}$; б) $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$; в). $\vec{a} = \vec{a}^{\tau} + \vec{a}^{n}$.
40.	Что называется проекцией скорости точки на оси?	а) производная по времени от координаты точки; б) путь, разделенный на время; в) произведение пути и времени.
41.	По какой формуле определяется скорость точки при координатном способе задания точки?	а) $\upsilon = \upsilon_x + \upsilon_y$; б) $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$; с) $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x + \upsilon_y}$.
42.	По какой формуле определяется нормальное ускорение точки?	а) $a^{n} = \frac{\upsilon^2}{\rho}$; б) $a^{n} = \frac{\upsilon}{\rho}$ в) $a^{n} = \upsilon \cdot \rho$
43.	Можно ли из уравнения траектории найти скорость и ускорение точки, движущейся по этой траектории?	а) можно; б) нельзя.
44.	Чему равно нормальное ускорение точки, движущейся прямолинейно со скоростью 25 м/с ?	а) 25; б) 10; в) 5; г) 0.
45.	Движение называют равномерным, если оно происходит с…	а) постоянной скоростью; б) постоянным полным ускорением; в) постоянной кривизной траектории; г) постоянным нормальным ускорением.
46.	Движение называют равноускоренным, если оно происходит с…	а) постоянной скоростью; б) постоянным касательным ускорением; в) постоянной кривизной

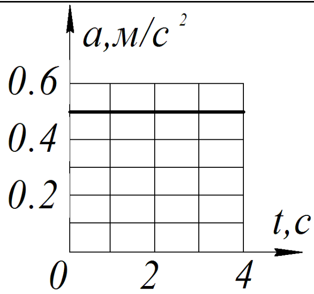
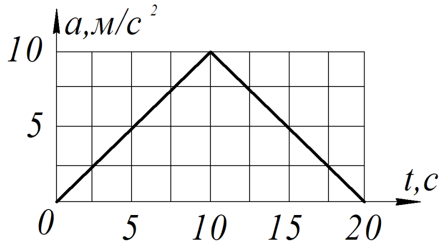
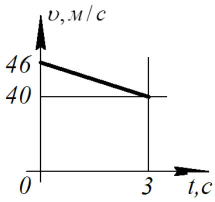
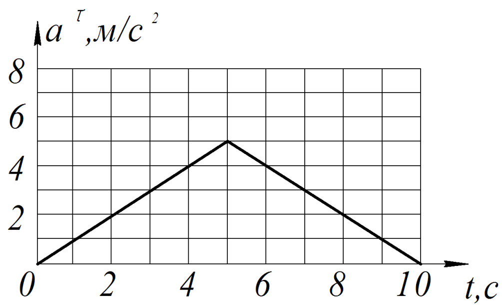
		траектории; г) постоянным нормальным ускорением.
47.	Чему равно нормальное ускорение точки, движущейся прямолинейно с произвольной скоростью?	а) неизвестно чему; б) нулю; в) бесконечно большой величине; г) пройденному пути, деленному на квадрат затраченного времени.
48.	Вектор скорости всегда направлен…	а) по касательной к траектории движения; б) по нормали к центру кривизны траектории; в) может быть и по касательной, а может быть и по нормали; г) ничего определенного сказать нельзя.
49.	Вектор полного ускорения материальной точки может быть направлен…	а) только по касательной к траектории движения; б) только по нормали к центру кривизны траектории; в) может быть и по касательной, а может быть и по нормали, но всегда в сторону вогнутости траектории; г) ничего определенного сказать нельзя.
50.	Чему равно полное ускорение точки, движущейся с постоянной скоростью 4 м/с по дуге окружности радиуса 2 м ?	а) 8 м/с^2; б) 2 м/с^2; в) 4 м/с^2; г) 0 м/с^2.
51.	Чему равно касательное ускорение точки, движущейся с постоянной скоростью 4 м/с по дуге окружности радиуса 2 м ?	а) 8 м/с^2; б) 2 м/с^2; в) 4 м/с^2; г) 0 м/с^2.
52.	Чему равно нормальное ускорение точки, движущейся с постоянной скоростью 4 м/с	а) 8 м/с^2; б) 2 м/с^2; в) 4 м/с^2; г) 0 м/с^2.

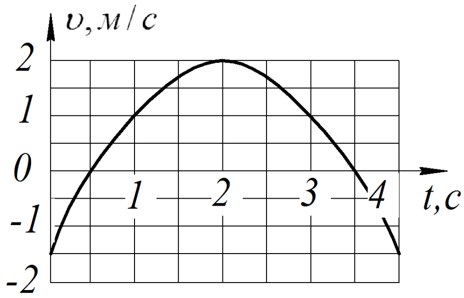
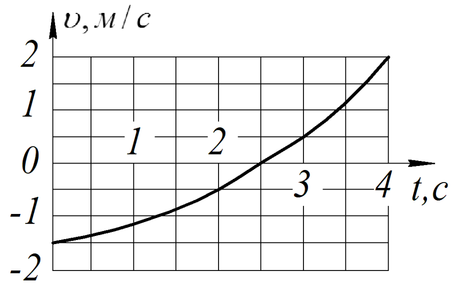
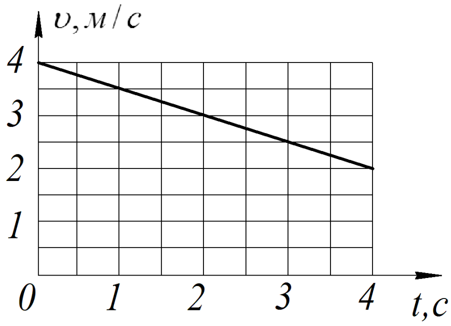
	по дуге окружности радиуса 2 м ?	
53.	Материальная точка М движется по закону $\vec{r} = 2t\vec{i} - \cos\pi t\vec{j} + e^4 t\vec{k}$. Тогда ускорение точки будет направлено…	а) параллельно плоскости *оху*; б) параллельно оси *z*; в) перпендикулярно оси *у*; г) перпендикулярно плоскости *оху*; д) параллельно оси *у*.
54.	Точка движется по окружности, радиус которой *r=8 м* согласно уравнению $S = 0{,}1t^2 + t$ (*S*- в м, *t*- в с). Определить нормальное ускорение точки при t=5c.	а) a_n*=1,25 м/с*^{2}*;* б) a_n*=0,5 м/с*^{2}*;* в) a_n*=0,75 м/с*^{2}*;* г) a_n*=0,25 м/с*^{2}*;*
55.	Точка движется согласно уравнениям: *x=t, y=t*^{3}*+2*. Траекторией является:	а) квадратная парабола; б) окружность; в) гипербола; г) кубическая парабола.
56.	Заданы уравнения движения точки $x = 1 + 2\sin\pi t$; $y = 3t$; Определить координату *x* точки в момент времени, когда её координата *y*=12 м.	а) *x=1 м;* б) *x=3 м;* в) *x=0 м;* г) *x=-1 м.*
57.	Движение точки по известной траектории OM=S задано уравнением $S = 6t^2 + 4t$ (м). В момент времени t=1c нормальное ускорение a_n = 8 м/с^2, радиус кривизны траектории ρ (в метрах) равен…	а) *ρ=3,2 м*; б) *ρ =15 м*; в) *ρ =2 м*; г) *ρ =32 м*; д) *ρ =20 м.*
58.	Точка движется прямолинейно согласно уравнению $S = t^3 + 4t$; (s- в м, t- в с). Определить ускорение точки при *t*=0,08 с.	а) *a=0,96 м/с*^{2}; б) *a=0,24 м/с*^{2}; в) *a=0,64 м/с*^{2}; г) *a=0,48 м/с*^{2};.
59.	Точка движется по окружности радиусом *r*=0.5 *м* согласно уравнению *S=0,2rt* (*s*- в метрах, *t*- в секундах). Определить касательное ускорение точки при *t=0,8 с*.	а) $a^\tau = 0{,}64$ *м/с*^{2}; б) $a^\tau = 0{,}48$ *м/с*^{2}; в) $a^\tau = 0{,}24$ *м/с*^{2}; г) $a^\tau = 0{,}35$ *м/с*^{2}.
60.	Точка движется по окружности радиусом *r=0,18 м* с постоянным касательным ускорением $a^\tau = 0{,}24$ *м/с*^{2}. Определить	а) $a^n = 0{,}5$ *м/с*^{2}*;* б) $a^n = 0{,}4$ м/с^2;

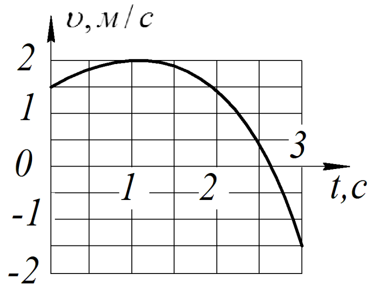
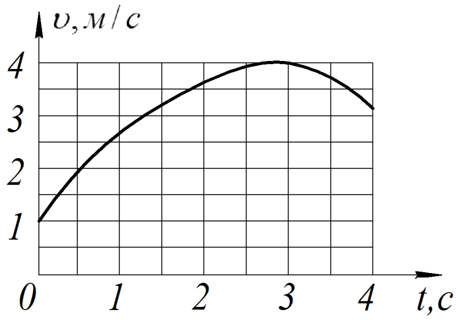
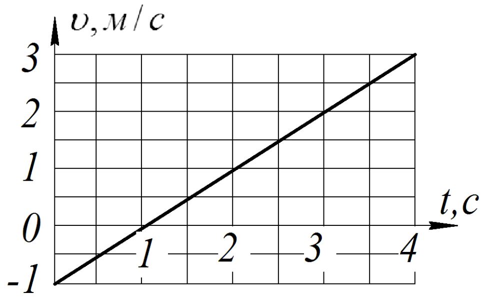
	нормальное ускорение, если $\upsilon_0 = 0$; *t=12 c*.	в) $a^n = 0,6$ м/с^2; г) $a^n = 0,3$ м/с^2.
61.	Точка движется по окружности радиусом r=2 м согласно уравнению $S = 3\sin 2t$ (S- в м, t- в с). Определить нормальное ускорение точки в момент времени $t=\pi$ *c*.	а) $a^n = 36$ *м/с^2;* б) $a^n = 18$ *м/с^2;* в) $a^n = 12$ *м/с^2;* г) $a^n = 24$ *м/с^2*.
62.	Материальная точка М движется по закону $\vec{r} = 7e^{2t}\vec{i} + 5\vec{j} + \sqrt{t+1}\vec{k}$ Тогда ускорение точки будет направлено…	Варианты ответов: а) в плоскости XZ; б) параллельно оси x; в) параллельно плоскости XZ; г) параллельно оси y; д) перпендикулярно плоскости XZ.
63.	Движение точки по известной траектории $OM=S$ задано уравнением $S=6t^2+4t-5$ (*м*). В момент времени *t=1c* нормальное ускорение a_n=8м/с^2, радиус кривизны траектории p (в метрах) равен…	Варианты ответов: а) p = 3,2; б) p = 15; в) p = 2; г) p = 32; д) p = 20.
64.	Движение точки по известной траектории $OM=S$ задано уравнением $S=6t^2+4t-5$ (*м*). . Скорость точки (в м/с) в момент времени t=1c равна…	Варианты ответов: а) υ=-1; б) υ=3; в) υ=-6; г) υ=4; д) υ=-4.
65.	Движение точки по известной траектории $OM=S$ задано уравнением $S=t^2-4t-5$ (*м*). В момент времени *t=1 c* нормальное ускорение a^n*=2 м/с^2*, радиус кривизны траектории p (в метрах) равен…	Варианты ответов: а) p =4,5 *м*; б) p =2 *м*; в) p =1,5 *м*; г) p =1 *м*; д) p =4 *м*.
66.	Движение точки по известной траектории $OM=S$ задано уравнением $S=4-3t+2t^2$ (*м*). Скорость точки (в *м/с*) в момент времени *t=1c* равна…	Варианты ответов: а) υ = 5; б) υ = 1; в) υ = 4; г) υ = -2/
67.	Точка движется по окружности радиусом r=2 м согласно уравнению $S=3\cos 2t$ (S- в м, t- в с). Определить нормальное ускорение точки в момент времени *t=0,5 c*.	а) $a^n = 36$ *м/с^2;* б) $a^n = 18$ *м/с^2;* в) $a^n = 12$ *м/с^2;* г) $a^n = 24$ *м/с^2*.
68.	Мяч подброшен в воздух. Что можно сказать о его скорости в верхней точке	а) она будет максимальна; б) она будет равна нулю;

	траектории?	в) она будет равна ускорению свободного падения; г) ничего определенного сказать нельзя.
69.	Точка движется по окружности радиусом *r=1,8 м* согласно уравнению $S=3t^2$ (*S*- в м, *t*- в с). В какой момент времени *t* нормальное ускорение $a^n = 0,8$ *м/с²*?	а) *t=0,4 с*; б) *t=0,6 с*; в) *t=0,2 с*; г) б) *t=0,8 с*;
70.	Проекции скорости точки во время движения определяется выражением: $\upsilon_x = 0,2t^2$; $\upsilon_y = 3$ м/с. Определить касательное ускорение в момент времени *t=2,5 с*.	
71.	Точка движется по окружности радиусом *r*=16 м согласно уравнению $S=4t^2$ (S- в *м*, *t*- в *с*). В какой момент времени *t* нормальное ускорение $a^n = 0,64$ *м/с²*?	а) *t=0,4 с*; б) *t=0,6 с*; в) *t=0,2 с*; г) б) *t=0,8 с*;
72.	Точка движется по окружности радиусом *r=1,5 м* согласно уравнению $S=0,1rt^3+rt$ (*S*- в *м*, *t* - в *с*). Определить касательное ускорение точки при *t=2,5 с*.	а) $a^\tau = 1,25$ *м/с²;* *б)* $a^\tau = 2,75$ *м/с²;* *в)* $a^\tau = 2,25$ *м/с²;* *г)* $a^\tau = 1,75$ *м/с²*.
73.	Точка движется по окружности равномерно. За каждые *12* с точка проходит *180 м*. Определить радиус окружности, если нормальное ускорение точки $a^n=4,5$ *м/с²*.	а) *r=60 м;* б) *r=60 м;* в) *r=60 м;* г) *r=60 м*.
74.	Точка движется по окружности радиусом *r=0,5 м* с постоянным касательным ускорением $a^\tau = 0,4$ *м/с²*. Определить нормальное ускорение, если $\upsilon_0 = 0$;*t=2 с*.	а) $a^n = 1,36$ *м/с²*; б) $a^n = 1,28$ *м/с²*; в) $a^n = 1,12$ *м/с²*; г) $a^n = 1,48$ *м/с²*.
75.	Тело, двигаясь из состояния покоя равноускорено, за *10 с* достигло скорости *45 м/с*. Определить путь, пройденный за время движения.	а) *105 м*; б) *125 м*; в) *22,5 м*; г) *225 м*.
76.	По кинематическому графику определить закон движения точки.	а) $S(t) = S_0 + \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$ б) $S(t) = S_0 + \upsilon_0 \cdot t$;

		
77.	1. По приведенным кинематическим графикам определите вид движения точки. 	а) $S = \upsilon t$; б) $S = S_0 + \frac{at^2}{2}$; в) $S(t) = S_0 + \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$ г) $S = \upsilon_0 t - \frac{at^2}{2}$.
78.	Дан график скорости движения точки $\upsilon = f(t)$. Определить пройденный путь в момент времени *t*=5 с. 	
79.	Дан график скорости движения точки $\upsilon = f(t)$. Определить пройденный путь в момент времени *t*=5 с. 	
80.	Дан график скорости движения точки $\upsilon = f(t)$. Определить пройденный путь в момент времени *t*=12с. 	
81.	Точка движется по прямой. Дан график ускорения $a = f(t)$. Определить скорость точки в момент времени *t*=5 с, если при t_0=0 скорость υ_0 =0.	

		
82.	Дан график ускорения $a = f(t)$ прямолинейно движущейся точки. Определить скорость точки в момент времени *t=20 с*, если при $t_0=0$ скорость $\upsilon_0=0$. 	
83.	По графику скорости определить время движения точки до полной остановки. Закон движения не меняется. 	а) *t=6 с*; б) *t=12 с*; в) *t=23 с*; г) *t=43 с*.
84.	Дан график изменения касательного уравнения $a^{\tau}=f(t)$. Определить модуль скорости в момент времени $t_1=10$ *с*, если при $t_0=0$ скорость $\upsilon_0=0$. 	
85.	Дан график скорости $\upsilon = \upsilon(t)$ движения точки по окружности радиусом *r*. Найти время *t* интервале от *0* до *4 с*, при котором нормальное ускорение точки	

	будет максимальным. 	
86.	Дан график скорости $\upsilon=\upsilon(t)$ движения точки по окружности радиусом *r*. Найти время *t*, при котором нормальное ускорение $a^n=0$. 	
87.	Дан график скорости $\upsilon=\upsilon(t)$ движения точки по окружности радиусом *r*. Найти время *t*, при котором нормальное ускорение $a^n=0$. 	
88.	Дан график изменения криволинейной координаты $S=S(t)$ движение точки по окружности радиуса *r*. Найти момент времени *t*, когда нормальное ускорение точки $a^n=0$.	

		
89.	Дан график скорости $\upsilon = \upsilon(t)$ движения точки по окружности радиусом *6 м*. Определить нормальное ускорение точки в момент времени *t=3 с*. 	
90.	Дан график скорости $\upsilon = \upsilon(t)$ движения точки по окружности радиусом *8 м*. Определить момент времени*t*, при котором нормальное ускорение a^n*=0,5 м/с*^{2}. 	

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бутенин Н.В. и др. Курс теоретической механики: учеб. пособие: В 2 т:. Рек. Мин. обр. РФ - СПб.: Лань,2004. -730 с.: (и предыдущие издания).

2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник. Рек. Мин. обр. РФ - М.: Высшая школа, 2003, 2006 – 416с. (и предыдущие издания).

3. Яблонский А.А. и др. Курс теоретической механики. учеб. пособие: Рек. Мин. обр. РФ - СПб.: Лань, 2004, -765 с.: (и предыдущие издания).

4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие: Доп. Мин.обр. СССР / Ред. А.А. Яблонский/. - М.: Интеграл-Пресс, 2004. - 382 с. (и предыдущие издания).

5. Богомаз И.В. Теоретическая механика: том 1 Кинематика. Статика. учебное пособие Рек. Мин. обр. РФ - М.: Из-во Ассоциации строительных вузов, 200. -190 с

6. Диевский В.А. Теоретическая механика: учеб. пособие: Рек. УМО/ - СПб.: Лань,2005. -320 с.

7. Аркуша А.И. Руководство к решению задач по теоретической механике: Учеб. пособие: рек.. Мин. обр. РФ/ М.: Высш. шк. 2002. – 336 с.

8. Цывильский В.Л. Теоретическая механика: Учеб. Рек. Мин. обр. РФ - М.: Высшая школа, 2001, 2008. – 319с.

9. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие. – М.: Наука, 2003 (и предыдущие издания).

10. Сборник коротких задач по теоретической механике: Учеб. пособие: Доп. Мин.обр. РФ / Ред. О.Э.Кепе /. - М.: Высшая школа, 2004. - 368 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ В КИНЕМАТИКУ 3
1. Кинематика точки. Способы задания движения точки 10
1.1 Векторный способ задания движения точки 10
1.2 Координатный способ задания движения точки (прямоугольные декартовы координаты) 16
1.3 Естественный способ задания движения точки 27
1.4 Анализ видов и кинематических параметров движения точки 36
1.5 Кинематические графики 42
2. Вопросы для самоконтроля 43
3. Практические занятия 46
3.1 Вопросы для подготовки 46
3.2 Методические рекомендации к решению задач 48
3.3 Примеры решения задач 51
3.4 Методические рекомендации к самостоятельной работе 63
3.5 Расчетно-графические задания 65
4. Тесты по теме 76
Библиографический список 91
Содержание 92

Луганцева Татьяна Анатольевна,

доцент кафедры АППиЭ (механика) АмГУ, канд. техн. наук

Кинематика точки Учебное пособие

Изд-во АмГУ. Подписано к печати______________. Формат 60х84/16. Усл. печ. л.3,87

Тираж_______. Заказ _____.

Отпечатано в типографии АмГУ.