Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВПО «АмГУ»)

Кафедра высшей математики и информатики

Учебно-методический комплекс дисциплины

«Математический анализ»

Основной образовательной программы по направлению подготовки

080100.62-«Экономика»

Благовещенск 2012

УМКД разработан доцентом кафедры ОМиИ Торопчиной Г.Н.

Рассмотрен и рекомендован на заседании кафедры общей математики и информатики

Протокол заседания кафедры от «11» мая 2012г. № 9

Заведующий кафедрой _____ / Г. В. Литовка /

Утвержден

Протокол заседания УМСС по направлению подготовки «Экономика»

от « » _____ 2012г. №_____

Председатель УМСС _____ /_____

I. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

По дисциплине «Математический анализ»

Для направления подготовки 080100.62 – Экономика

Квалификация (степень) выпускника – «Бакалавр»

Курс I Семестр I – 2

Лекции 36 (час) Экзамен I, 2

Практические (семинарские) занятия 72 (час.)

Самостоятельная работа 108 (час.)

Общая трудоемкость дисциплины 288 (час.) (8 зач. ед.)

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Математика является универсальным языком науки и частью общей культуры человечества. Поэтому математическое образование − важная составляющая в системе подготовки современного специалиста.

Целью изучения дисциплины является получение фундаментального образования, способствующего развитию личности; формирование математического мышления и математической культуры. Основной целью курса «Математический анализ» является накопление необходимого запаса сведений по математике (основные определения, теоремы, правила), а также освоение математического аппарата, помогающего моделировать, анализировать и решать экономические задачи, помощь в усвоении математических методов, дающих возможность изучать и прогнозировать процессы и явления из области будущей деятельности студентов; развитие логического и алгоритмического мышления, способствование формированию умений и навыков самостоятельного анализа исследования экономических проблем, развитию стремления к научному поиску путей совершенствования своей работы,
ознакомление с фундаментальными методами дифференциального и интегрального исчислений.

Задачами преподавания курса «Математический анализ» является накопление необходимого запаса сведений по математике (основные определения, теоремы, правила), а также освоение математического аппарата, помогающего моделировать, анализировать и решать экономические задачи, ознакомление с фундаментальными методами дифференциального и интегрального исчислений.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП:

Курс «Математический анализ» представляет собой дисциплину базовой части математического и естественнонаучного цикла дисциплин (Б.2).

Дисциплина базируется на курсах алгебры и геометрии средней школы и формирует знания студентов для освоения всех дисциплин естественно-научного цикла (Б.2) и дисциплин профессионального цикла (Б.3): Теория вероятностей и математическая статистика, Методы оптимальных решений, Теории игр, Макроэкономика, Микроэкономика, Теория отраслевых рынков, Экономика общественного сектора, Институциональная экономика, Дискретные математические модели, Эконометрика.

3. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ:

В процессе изучения дисциплины у студента должны быть сформированы компетенции:

1) ключевые:

а) к самому себе как субъекту:

– актуализировать знания адекватно проблемной ситуации;

– расширять и структурировать систему математических знаний;

– проектировать деятельность по анализу и решению проблем на основе развитого логического и алгоритмического мышления;

– проводить личностную и предметную рефлексию, определять пути самосовершенствования и саморазвития;

б) к взаимодействию:

– осуществлять коммуникацию в форме устного, письменного текста, диалога, монолога, деловой переписки с использованием компьютерных технологий на основе толерантного отношения к другому;

в) к деятельности:

– ставить и решать познавательные задачи;

– формулировать проблемные ситуации и предлагать нестандартные решения;

– осуществлять научно-исследовательскую деятельность;

– планировать, проектировать, прогнозировать деятельность, владеть способами ее осуществления;

– организовывать работу коллектива и работать в нем;

2) междисциплинарные:

– корректно употреблять математические понятия и символы для выражения количественных и качественных отношений между объектами;

– осуществлять выбор математического аппарата адекватно стоящей проблеме для эффективного ее решения;

– проводить математический анализ прикладных задач, давать оценку полученному результату;

– использовать основные понятия и методы математики в решении научных и практических задач;

– разрабатывать модели простейших систем и процессов в естественнонаучных и технических областях;

– применять математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов;

– понимать роль и место математики как особого способа познания мира,

обеспечивающие успешное прохождение студентами дисциплин общетехнического, специального и профессионального направления.

В процессе освоения дисциплины Бакалавр формирует и демонстрирует следующие общекультурные и общепрофессиональные компетенции при освоении ООП ВПО, реализующей ФГОС ВПО:

− владеть культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения (ОК-1);

– уметь логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь
(ОК-6);

- владеть методами количественного анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОК-15);

способен собрать и проанализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов (ПК-1);

способен на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы рассчитать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов, (ПК-2);

способен выполнять необходимые для составления экономических разделов планов расчеты, обосновывать их и представлять результаты работы в соответствии с принятыми в организации стандартами (ПК-3);

способен выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы (ПК-5);

способен на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные теоретические и экономические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты (ПК-6);

Бакалавр знает:

- основные понятия математического анализа (ОК-15, ОК-6);

Бакалавр умеет:

- формализовать прикладную задачу в терминах дисциплины (ОК-1, ОК-15, ПК-1, ПК-2);
- решить задачу, оценить и интерпретировать полученные результаты решения с точки зрения исходной постановки задачи (ПК-6, ПК-5, ПК-2, ПК-3, ОК-15).

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

4.1 Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов / зачетных единиц	Семестры	
		1	2
Аудиторные занятия (всего)	108	54	54
В том числе:	-	-	-
Лекции	36	18	18
Практические занятия (ПЗ)	72	36	36
Семинары (С)			
Лабораторные работы (ЛР)			
Самостоятельная работа (всего)	108	54	54
В том числе:	-	-	-
Курсовой проект (работа)	-	-	-
Расчетно-графические работы	20	+	+
Реферат			
Другие виды самостоятельной работы			
Самостоятельная работа	68	+	+
Выполнение домашнего задания	20	+	+
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен)	72	+	+
Общая трудоемкость: часы	288		
зачетные единицы	8		

4.2. Разделы дисциплины

п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)			Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра). Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
1	Раздел 1Введение в анализ. Комплексные числа.	1	1-2	Л(1)	ПЗ(5)	СР(4)	2 нед.– КР, Экзамен
2	Раздел 2. Теория пределов	1	3-6	Л(5)	ПЗ(9)	СР(14)	6 нед.– РГР, Кол – 7, Экзамен
3	Раздел 3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной	1	7-12	Л(6)	ПЗ(12)	СР(18)	10 нед. – КР, 12 нед. – ДЗ, Экзамен
4	Раздел 4. Интегральное исчисление	2	1-6	Л(6)	ПЗ(12)	СР(18)	4 нед. – КР, Экзамен
5	Раздел 5. Функции нескольких переменных	1	7-11	Л(6)	ПЗ(10)	СР(18)	11 нед. – КР. Экзамен
6.	Раздел 6.Числовые ряды. Степенные ряды.	2	13-18	Л(6)	ПЗ(10)	СР(18)	15 нед. – КР Экзамен
7.	Раздел 7. Основы обыкновенных дифференциальных уравнений	2	7-12	Л(6)	ПЗ(14)	СР(18)	13 нед. – КР, 13 – ДЗ, Экзамен

Л – лекции, ПЗ – практические занятия, С – семинары, СР – самостоятельная работа, КОЛ – коллоквиумы, КР – контрольные работы, ДЗ − домашние задания.

4.3 Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ зан.	СРС	Всего Час.
1	Основания математики	1	5	6	12
2	Введение в анализ	5	9	14	28
3	Дифференциальное исчисление	6	12	18	36
4	Интегральное исчисление	6	12	18	36
5	Функции нескольких переменных	6	10	16	32
6	Ряды	6	10	16	32
7	Дифференциальные уравнения	6	14	20	40
	Итого	36	72	108	**216**

5. СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ И ТЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Темы, разделы дисциплины	Кол-во час. (л, лр, пз)	Компетенции	
		Коды компетенций	Общее кол-во компетенций
1	2	3	4
Раздел 1			

		Компетенции	
1. Множества. Операции с множествами. Комплексные числа.	1/0/6	ОК-1 ОК-6	2
2. Функция. График функции. Основные элементарные функции.	1/0/2	ОК-1, ОК-6	2
Раздел 2			
3. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности.	1/0/0	ОК-1 , ОК-6, ОК-15	3
4. Предел функции в точке и на бесконечности.	2/0/6	ОК-1, ОК-6, ОК-15	3
5. Непрерывность функции.	2/0/4	ОК-1, ОК-6, ОК-15	3
Раздел 3			
6. Производная функции.	1/0/4	ОК-1, ОК-6, ОК-15, ПК-5, ПК-6, ПК-3	6
7. Понятие дифференциала функции одной переменной.	1/0/2	ОК-1, ОК-6, ОК-15	3
8. Понятие об экстремумах функции одной переменной.	1/0/2	ОК-5, ОК-6, ОК-15, ПК-5, ПК-6, ПК-3	6
9. Теоремы о среднем значении (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши) и их геометрическая интерпретация.	1/0/2	ОК-1, ОК-6, ОК-15, ПК-5	4
10. Исследование функции одной переменной с использованием первой и второй производных и построение ее графика.	2/0/4	ОК-1, ОК-6, ОК-15 ПК-5, ПК-6, ПК-3	6
Раздел 4			
17 . Первообразная. Неопределенный интеграл. Методы интегрирования.	2/0/8	ОК-1, ОК-6, ОК-15	3
18. Определенный интеграл. Интеграл как функция переменного верхнего предела. Формула Ньютона-Лейбница. Несобственные интегралы.	4/0/6	ОК-1, ОК-6, ОК-15	3
Раздел 5			
19. Функции нескольких переменных. Область определения, предел, непрерывность.	2/0/2	ОК-1, ОК-6, ОК-15	3
20. Частные производные, полный дифференциал. Частные производные высших порядков.	2/0/4	ОК-1, ОК-6, ОК-15, ПК-5	4
21Формула Тейлора. Экстремумы, необходимые условия, достаточные условия. Условный экстремум, метод множителей Лагранжа.	2/0/4	ОК-1, ОК-6, ОК-15, ПК-6, ПК-5 ,ПК-3	6
Раздел 6			
22. Понятие о числовых рядах.	2/0/8	ОК-5, ОК-6, ОК-15	3

		Компетенции	
23. Функциональные ряды. Степенные ряды.	4/0/4	ОК-5, ОК-6, ОК-15 ПК-6, ПК-3	3
Раздел 7			
24. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Классификация дифференциальных уравнений.	1/0/1	ОК-5, ОК-6, ОК-15, ПК-5, ПК - 6	5
25. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Изоклины. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Основные классы уравнений, интегрируемых в квадратурах.	1/0/5	ОК-5, ОК-6, ОК-15, ПК- 3, ПК-5, ПК -6	6
26. Линейные дифференциальные уравнения: однородные и неоднородные. Общее решение.	2/0/4	ОК-5, ОК-6, ОК-15, ПК-31	4
27. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнения с правой частью специального вида.	2/0/6	ОК-5, ОК-6, ОК-15,ПК-5, ПК-6, ПК - 3	6

5. Содержание разделов дисциплины

1. Элементы теории множеств и функций.

Понятие множества и подмножества. Пустое множество. Множество всех подмножеств множества. Операции над множествами. Взаимно однозначное соответствие. Эквивалентные множества, счетные и несчетные множества. Примеры. Элементы математической логики: логические символы, утверждение, следствие, прямая и обратная теоремы, необходимые и достаточные условия. Понятие отображения (функции), его области определения и области значений. Элементарные функции. Обратное отображение. Композиция отображений. Множество всех действительных чисел и множество всех точек числовой прямой, эквивалентность этих множеств. Свойства действительных чисел. Подмножества множества действительных чисел.

2. Предел и непрерывность функции одной переменной.

Примеры последовательностей. Предел числовой последовательности. Существование предела у ограниченной монотонной последовательности. Предел функции одной переменной. Односторонние и двусторонние пределы. Бесконечно малые (бесконечно большие) величины и их связь с пределами функций. Свойства операции предельного перехода. Предельный переход в сложной функции. Первый и второй замечательные пределы раскрытия неопределенностей. Непрерывность функции в точке и на множестве. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва и их классификация. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность основных элементарных функций. Непрерывность сложной функции.

3. Производная и дифференциал функции одной переменной.

Понятие производной функции одной переменной. Геометрическая и экономическая интерпретации производной. Уравнение касательной. Связь непрерывности и дифференцируемости функции одной переменной. Производная суммы, произведения, частного, сложной и обратной функции. Дифференцирование функций,

заданных параметрически. Производные основных элементарных функций. Понятие дифференциала функции одной переменной. Геометрическая интерпретация дифференциала. Свойства дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной и их свойства.

Понятие об экстремумах функции одной переменной. Локальный экстремум (внутренний и граничный) функции одной переменной. Необходимое условие внутреннего локального экстремума (теорема Ферма).

Теоремы о среднем значении (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши) и их геометрическая интерпретация. Правило Лопиталя. Формулы Тейлора и Маклорена и их использование для представления и приближенного вычисления значений функций. Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции на интервале. Достаточные условия локального экстремума функции одной переменной. Выпуклые (вогнутые) функции одной переменной. Необходимое и достаточное условие выпуклости (вогнутости). Точка перегиба. Необходимое и достаточное условия точки перегиба. Вертикальные и невертикальные асимптоты графика функции одной переменной. Исследование функции одной переменной с использованием первой и второй производных и построение ее графика. Определение глобального максимума (минимума) функции одной переменной в области ее определения.

4. Интегрирование.

Первообразная и неопределенный интеграл. Первая основная теорема интегрального исчисления (о существовании первообразной у непрерывной функции). Свойства неопределенного интеграла. Интегралы от основных элементарных функций. Табличные интегралы. Приемы интегрирования (разложением, заменой переменной и по частям). Интегральная сумма Римана, определенный интеграл и его геометрическая интерпретация. Свойства определенного интеграла (связанные с подынтегральной функцией, с отрезком интегрирования). Теорема о среднем значении. Определенный интеграл с переменным верхним пределом и его производная по этому пределу. Формула Ньютона-Лейбница. Вторая основная теорема интегрального исчисления (о существовании определенного интеграла у непрерывной функции). Интегрируемые по Риману функции. Замена переменной и формула интегрирования по частям для определенного интеграла. Несобственные интегралы. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Признаки сходимости.

5. **Функции нескольких переменных (ФНП).**

Функции двух переменных. Понятие о множестве (линии) уровня функции двух переменных. Предел функции нескольких переменных. Арифметические операции над функциями, имеющими конечные предельные значения. Предел функции по направлению. Повторные предельные значения. Теорема о существовании повторного предела. Непрерывность функции нескольких переменных в точке и на множестве. Точки непрерывности и точки разрыва функции. Взаимосвязь между непрерывностью функции по совокупности переменных и по каждому отдельному направлению. Арифметические операции над непрерывными функциями.

Частные производные и частные дифференциалы. Градиент ФНП. Дифференцируемость ФНП. Главная линейная часть приращения ФНП. Полный дифференциал ФНП. Достаточное условие дифференцируемости ФНП. Геометрическая интерпретация частных производных. Касательная плоскость к графику ФНП. Дифференцируемость сложных ФНП. Инвариантность формы дифференциала ФНП. Производная по направлению. Ортогональность градиента и множества уровня ФНП в точке ее дифференцируемости. Частные производные и дифференциалы порядка выше первого. Теорема о равенстве смешанных частных производных. Формула Тейлора для функций двух переменных.

6. **Числовые, функциональные и степенные ряды.**

Понятие о числовых рядах. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Необходимое условие сходимости ряда. Признаки сходимости для знакопостоянных и знакочередующихся рядов. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов. Функциональные ряды. Сходимость и равномерная сходимость функционального ряда. Непрерывность суммы функционального ряда, почленное дифференцирование и интегрирование функциональных рядов. Степенные ряды. Промежуток и радиус сходимости степенного ряда. Формула для вычисления радиуса сходимости. Понятие ряда Тейлора и аналитической функции.

7. Дифференциальные уравнения.

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Классификация дифференциальных уравнений.
Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Изоклины. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Основные классы уравнений, интегрируемых в квадратурах. Линейные дифференциальные уравнения: однородные и неоднородные. Общее решение. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнения с правой частью специального вида.

ОСНОВНЫЕ ТЕМЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Основные элементарные функции.
2. Вычисление пределов числовых последовательностей.
3. Методы вычисления пределов функций. Первый и второй замечательные пределы.
4. Непрерывность и точки разрыва.
5. Вычисление производных и дифференциалов.
6. Приложение производных и дифференциалов.
7. Формула Тейлора и её приложения.
8. Приложение производных и дифференциалов для исследования функций и построения их графиков.
9. Функции двух переменных (область определения, график, линии уровня, предел, непрерывность).
10. Частные производные. Полный дифференциал.
11. Градиент. Производная по направлению. Частные производные высших порядков.
12. Экстремум функции двух переменных. Метод множителей Лагранжа.
13. Табличные интегралы.
14. Методы интегрирования (подведение под знак дифференциала, замена переменной, по частям).
15. Формула Ньютона-Лейбница, замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
16. Несобственные интегралы.
17. Необходимый и достаточные признаки сходимости числовых рядов.
18. Нахождение интервала и области сходимости степенных рядов.
19. Решение дифференциальных уравнений первого порядка: с разделяющимися переменными, однородных, линейных, Бернулли.
20. Метод решения линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами.
21. Метод решения линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

6. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

№ раздела	№ недели	Формы текущего контроля по неделям семестра, формы промежуточной аттестации	Трудоемкость в часах
1,2	1 - 6	Элементы теории множеств и функций Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Защита типового расчета. Проведение контрольных, самостоятельных работ и теста. Проверка домашних заданий.	42
3	7-12	Производная и дифференциал функции одной переменной Математический диктант. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Выполнение тренировочных заданий. Защита типового расчета. Подготовка к контрольным, самостоятельным работам и тесту Подготовка домашних заданий.	40
4	1-6	Интегрирование Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Защита типового расчета. Подготовка к контрольным, самостоятельным работам и тесту. Выполнение домашних заданий.	38
5	13-18	Функции нескольких переменных Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Защита типового расчета. Поведение контрольных, самостоятельных работ и теста. Проверка домашних заданий.	33
6	13-18	Числовые, функциональные и степенные ряды Математический диктант. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Выполнение тренировочных заданий. Защита типового расчета. Подготовка к контрольным, самостоятельным работам и тесту Подготовка домашних заданий.	25

№ раздела	№ недели	Формы текущего контроля по неделям семестра, формы промежуточной аттестации	Трудоемкость в часах
7	7-12	Дифференциальные уравнения Устный опрос. Проверка рабочей тетради. Решение задач. Проверка выполнения тренировочных заданий. Защита типового расчета. Подготовка к контрольным, самостоятельным работам и тесту. Выполнение домашних заданий.	38

7. МАТРИЦА КОМПЕТЕНЦИЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ.

Разделы	Компетенции						Итого Σ общее количество компетенций
	ОК-1	ОК-6	ОК-15	ПК-5	ПК-6	ПК-3	
1	+	+					2
2	+	+					2
3	+	+	+	+	+	+	6
4	+	+	+				3
5	+	+	+	+	+	+	6
6	+	+	+				3
7	+	+	+	+	+	+	6

8. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

При реализации программы дисциплины «Математика» используются различные образовательные технологии. Аудиторные занятия (108 часов) проводятся в виде лекций и практических занятий. Практические занятия включают разбор конкретных примеров и задач с целью формирования и развития профессиональных навыков обучающихся. Самостоятельная работа студентов (108 часов) предусматривает работу под руководством преподавателей (консультации), выполнение домашних заданий (ДЗ), расчетно-графических работ (РГР) и подготовку к экзамену по дисциплине (108 часов). Усвоенные знания в дальнейшем служат основой для изучения других базовых, а также специальных дисциплин.

9. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

9.1 Текущий контроль работы студентов

В течение преподавания курса «Математический анализ» в качестве текущей аттестации бакалавров используются такие формы, как выполнение и защита расчетно-графических работ, собеседование при приеме результатов домашних заданий с оценкой и контрольных работ с оценкой. В течение каждого семестра запланировано выполнение не

менее одной расчетно-графической работы, одного домашнего задания и двух и более контрольных работ. По итогам обучения в 1 и 2 семестрах проводится экзамен, на каждый из которых выделяется по 36 часов.

Текущий контроль знаний студентов осуществляется с применением балльно-рейтинговой системы. Она предусматривает еженедельный мониторинг и оценку в баллах учебной активности и уровня знаний по дисциплине:

1. По этой системе в баллах оценивается уровень следующих видов учебной деятельности студентов:
   - активность на практических занятиях;
   - экспресс тестирования на лекциях;
   - расчетно-графическая работа;
   - контрольная (самостоятельная) работа;
   - коллоквиум;
   - лабораторная работа.

   Указанные виды учебной деятельности имеют следующее содержание.

   Активность на практических занятиях. Оценивается учебная активность и самостоятельность работы студентов.

   Экспресс-тестирование на лекциях. Систематически проводится на лекциях с целью проверки усвоения текущего теоретического материала. Заключается в ответе на один теоретический вопрос или решение одной простейшей задачи. Проводится письменно, как правило, в течение 5-6 минут.

   Контрольная (самостоятельная) аудиторная работа. Проводится письменно, с целью оперативного контроля степени усвоения изученного материала, например, базовых положений отдельных дидактических единиц.

   Расчетно-графическая работа. РГР содержит задачи, решение которых требует применения типового арсенала вычислительных приемов, усвоенных при изучении соответствующих дидактических единиц. РГР зависит от содержания и вычислительной сложности дидактической единицы.

   С целью выявления качества усвоения изученного материала вводится процедура **«Защита РГР».**

   Коллоквиум. проводится письменно, с целью корректировки до экзаменационной оценки уровня теоретических знаний и практических навыков.

   Лабораторная работа. Проводится по темам, требующим применения вычислительных методов.
2. Рейтинговая оценка студента по дисциплине складывается из оценки за работу в семестре максимально **60 баллов** и экзаменационной оценки – максимально **40 балов**. Таким образом, максимально возможное количество баллов, которыми оценивается успеваемость за семестр по дисциплине, равно **100**.
3. При пропуске рейтингового теста или контрольной работы в течении семестра по документально подтвержденной уважительной причине студент имеет право написать их в дни консультаций преподавателя группы. В случае пропуска теста по неуважительной причине или при неудовлетворительной оценке за тест (менее половины от максимально возможного балла), переписывание теста возможно только в течение последней недели семестра (не белее двух встреч с преподавателем на все тесты и контрольные работы). Баллы, полученные студентом в таком случае, учитываются с коэффициентом **0,8.**
4. Студент, активно участвовавший в учебном процессе (доклады, рефераты, выступления на олимпиадах и конференциях) может быть поощрен лектором потока или заведующим кафедрой дополнительными баллами (как правило, не более 5 баллов за семестр).

5. Минимальное количество баллов за работу в семестре, необходимое для получения студентом допуска на экзамен, равно **30** баллов (половина баллов от максимального балла за работу в семестре).

Минимальное количество баллов за выполнение экзаменационной работы, необходимое для получения оценки:

«удовлетворительно» – **15 баллов**;

«хорошо» – **20 баллов**;

«отлично» – **30 баллов**.

6. В течение семестра студенты выполняют рейтинговые мероприятия, которые доводятся до их сведения в начале каждого семестра.

7.Соответствие итогового рейтинга студента и традиционных оценок устанавливается по следующей шкале:

Баллы (%)	Оценка
0-50	Неудовлетворительно
51-75	Удовлетворительно
76-90	Хорошо
91-100	Отлично

8. Студент, набравший в семестре **менее 30 баллов**, сдает экзамен по дисциплине в два этапа: **предварительный** и **основной**.

8.1. **Предварительный этап экзамена**

Предварительный этап проходит в день сдачи экзамена своей группы. На нем студент выполняет практическое экзаменационное задание по материалу, изученному в семестре и вошедшему в тесты, контрольные и домашние работы по данной дисциплине. Это практическое задание оценивается в **20** баллов. Предварительный экзамен считается сданным при условии набора на нем **10 и более** баллов. Результат **сданного** предварительного экзамена **суммируется** с семестровым рейтингом, а студент со своим новым рейтингом допускается к основному экзамену. При наборе студентом на предварительном этапе менее **10 баллов** экзамен считается **не сданным** и его результат **не добавляется** в итоговый рейтинг. В любом из указанных случаев после предварительного этапа экзамена в ведомость студенту выставляется оценка «**Неудовлетворительно**», а в графу «Суммарный балл» проставляется рейтинг с учетом результата предварительного экзамена.

8.2. **Основной этап экзамена**

Для студентов, успешно сдавших предварительный экзамен, основной экзамен проводиться в установленный на кафедре день пересдач.

Как исключение, студент, имевший семестровый рейтинг **в диапазоне от 20 до 30 баллов** и успешно сдавший предварительный этап экзамена (т.е. набравший на нем 10 баллов и более), с разрешения ответственного экзаменатора, назначенного на экзамен, может быть допущен к основному экзамену в день сдачи предварительного экзамена (т.е. со своей группой).

Студенты, имеющее семестровый рейтинг **в диапазоне от 10 до 20 баллов** и успешно преодолевшие предварительный этап (10 баллов и более), сдают основной экзамен только в день пересдач.

Студенты, набравшие в семестре **менее 10 баллов** и успешно прошедшие предварительный этап экзамена, допускается к сдаче основного экзамена **только по назначению заведующего кафедрой**.

Замечание. Руководству кафедры сдаются экзаменационные работы:

- предварительного экзамена (10 и более баллов) – в день его сдачи студентом;
- основного экзамена (для прошедших предварительный экзамен) – в день основного экзамена.

8.3. Устранение задолженности студента по отдельным контролируемым темам дисциплины может проходить в течение семестра в часы дополнительных занятий или консультаций, установленных в расписании.
8.4. Устранение задолженности по текущему контролю для допуска студента к зачету проводится на последней неделе теоретического обучения по данной дисциплине.

9.2 Контрольные вопросы для текущего контроля знаний

Раздел 1. Элементы теории множеств и функций.

(ОК-1, ОК-6)

1КВ1. Сформулируйте определение функции, области определения, области значений, четности, периодичности.

Раздел 2. Предел и непрерывность функции одной переменной.
(ОК-1,ОК-6,ОК-15)

2КВ1. Сформулируйте понятие предела числовой последовательности.
2КВ2. Сформулируйте определение предела функции одной переменной при $x \to a$.
2КВ3. Сформулируйте определение предела функции одной переменной при $x \to \infty$.
2КВ4. Сформулируйте определение одностороннего предела функции одной переменной при $x \to a$.
2КВ5. Сформулируйте свойства пределов.
2КВ6. Сформулируйте первый замечательный предел и вычислите заданный предел.
2КВ7. Сформулируйте второй замечательный предел и решите задачу.
2КВ8. Дайте определение непрерывности функции в точке и докажите непрерывность $y = x^2$
2КВ9. Что такое точка разрыва первого рода?
2КВ10. Что такое точка разрыва второго рода?
2КВ11. Сформулируйте арифметические операции над непрерывными функциями.
2КВ12. Сформулировать непрерывность сложной функции.
2КВ13. Исследуйте на непрерывность $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

Раздел 3. Производная и дифференциал функции одной переменной.
(ОК-1, ОК-6, ОК-15, ПК-5, ПК-6 ,ПК-3)

3КВ15. Дайте определение производной функции.
3КВ16. Объясните геометрический смысл производной.
3КВ17. Сформулируйте и докажите связь непрерывности и дифференцируемости функции.
3КВ18. Сформулируйте и докажите по выбору свойства производной: суммы, произведения, частного, сложной и обратной функции.
3КВ19. Докажите свойство производной сложной функций и решите заданный пример.
3КВ20. Выведите формулы производной функции, заданной параметрически и решите заданный пример.
3КВ21. Дайте определение дифференциала функции одной переменной.
3КВ22. Какой геометрический смысл дифференциала.
3КВ23. В чем состоит свойство инвариантности формы первого дифференциала.
3КВ24. Дать определение локальных экстремумов.
3КВ25. Сформулировать необходимые условия локальных экстремумов.
3КВ26. Сформулируйте теорему Лагранжа.
3КВ27. Сформулируйте теорему Ролля.
3КВ28. Сформулируйте правило Лопиталя.
3КВ29. Выведите формулу Тейлора.
3КВ30. Выведите формулу Маклорена для $y = e^x$.
3КВ31. Сформулируйте достаточные условия локального экстремума.

3КВ32. Дайте определение точки перегиба, сформулируйте необходимые и достаточные условия. Решите предложенную задачу.
3КВ33. Что такое асимптоты графика функции и как их найти? Найдите асимптоты заданной функции.
3ДЗ1. Назовите основные этапы исследования функции. Проведите исследование заданной функции.

Раздел 4. Интегрирование.

(ОК-5, ОК-6, ОК-15, ПК-5, ПК-6)

4КВ1.Что такое первообразная функции и неопределенный интеграл?
4КВ2. Перечислите и докажите основные свойства неопределенного интеграла.
4КВ3. Выведите (по выбору) интегралы от основных элементарных функций.
4КВ4. Перечислите табличные интегралы. Решите пример.
4КВ5. Докажите метод разложения для вычисления интегралов. Решите пример.
4КВ6. Приведите доказательство метода замены переменной. Решите пример.
4КВ7. Сформулируйте метод интегрирования по частям. Решите пример.
4КВ8. Опишите основные приемы применения метода интегрирования по частям. Решите пример.
4КВ9. Что такое интегральная сумма?
4КВ10. Сформулируйте определение и условия существования определенного интеграла.
4КВ11. Сформулируйте и докажите (на выбор) основные свойства определенного интеграла.
4КВ12. Что такое определенный интеграл с переменным верхним пределом и его свойства.
4КВ13. Докажите формулу Ньютона-Лейбница. Решите пример.
4КВ14. Опишите алгоритм применения замены переменной в определенном интеграле. Решите пример.
4КВ15. Опишите алгоритм применения формулы интегрирования по частям в определенном интеграле. Решите пример.
4КВ16. Дайте определение несобственного интеграла первого рода. Решите пример.
4КВ17. Сформулируйте теоремы сравнения для исследования на сходимость несобственного интеграла первого рода. Решите пример.
4КВ18. Дайте определение несобственного интеграла второго рода. Решите пример.

Раздел 5 . Функции нескольких переменных (ФНП).
(ОК-1, ОК-6, ОК-15, ПК-5, ПК-6,ПК-3)

5КВ1. Дайте понятие области определения и графика функции двух переменных.
5КВ2. Что такое линии уровня? Найдите линии уровня заданной функции.
5КВ3. Дайте определение предела функции двух переменных.
5КВ4. Сформулируйте теорему о существовании повторного предела.
5КВ5. Дайте определение непрерывности функции двух переменных в точке.
5КВ6. Что такое частные производные и каков их геометрический смысл? Решите пример.
5КВ7. Дайте определение полного дифференциала.
5КВ8. Что такое градиент?
5КВ9. Что такое производная по направлению и какова её связь с градиентом?
5КВ10. Как определяются частные производные и дифференциалы высших порядков.
5КВ11. Сформулируйте теорему о равенстве смешанных частных производных. Решите пример.
5КВ12. Дайте определение экстремумов для функции двух переменных.
5КВ13. Докажите необходимые условия существования экстремумов.
5КВ14. Сформулируйте достаточные условия экстремумов для функции двух переменных. Решите пример.

5КВ15. Что такое условный экстремум? Решите пример.
5КВ16. Опишите метод множителей Лагранжа.

Раздел 6. Числовые, функциональные и степенные ряды.
(ОК-1, ОК-6, ОК-15)

6КВ1. Дайте определение сходимости числового ряда. Решите пример.
6КВ2. Сформулируйте и докажите необходимый признак сходимости числового ряда. Решите пример.
6КВ3. Сформулируйте признак сравнения числовых рядов. Решите пример.
6КВ4. Докажите признак Даламбера. Решите пример.
6КВ5. Докажите интегральный признак. Решите пример.
6КВ6. Дайте определение абсолютной и условной сходимости числовых рядов.
6КВ7. Докажите признак Лейбница для знакочередующихся рядов. Решите пример.
6КВ8. Дайте определение степенного ряда.
6КВ9. Докажите теорему Абеля.
6КВ10. Опишите алгоритм нахождения области сходимости степенного ряда. Решите пример.
6КВ11. Что такое ряд Маклорена. Решите пример.

Раздел 7. Дифференциальные уравнения.
(ОК-1, ОК-6, ОК-15, ПК-5, ПК-6, ПК-3)

7КВ1. Опишите пример задачи, приводящей к дифференциальному уравнению.
7КВ2. Дайте классификацию дифференциальных уравнений.
7КВ3. Опишите геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка.
7КВ4. Укажите признаки и метод решения уравнения с разделяющимися переменными. Решите пример.
7КВ5. Укажите признаки и метод решения уравнения однородного уравнения первого порядка. Решите пример.
7КВ6. Укажите признаки и метод решения уравнения линейного уравнения первого порядка. Решите пример.
7КВ7. Что такое задача Коши?
7КВ8. Какова структура общего решения линейного однородного уравнения второго порядка?
7КВ9. Как найти общее решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами. Решите пример.
7КВ10. Какова структура общего решения линейного неоднородного уравнения второго порядка.
7КВ11. Как найти частное решение неоднородного уравнения с правой частью вида $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$? Решите пример.
7КВ12. Как найти частное решение неоднородного уравнения с правой частью вида $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$? Решите пример.

9.3 Примерные варианты тестов и контрольных работ

Тест по теме «Комплексные числа»

1. Если $z_1 = 2 + 4i$, $z_2 = -3 + 5i$ - комплексные числа, то, $z_1 - z_2$ равно:
   1) -1+9i; 2) 5+i; 3) 5- i; 4) -1+9i.
   2. Сумма мнимой и действительной частей числа $z = -3 + 2i$ равна:
   1) 3; 2) -3; 3) 1; 4) -1.

3. Произведение числа $z = 1 - 2i$ на сопряженное $\bar{z}$ равно:
1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6.

4. Аргумент комплексного числа $z = -3 + 3i$ равен:
1) $\pi + \frac{\pi}{4}$; 2) $\pi - \frac{\pi}{4}$; 3) $2\pi - \frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{4}$.

5. В показательной форме комплексное число $z = \sqrt{3} - i$ запишется
1) $\sqrt{3}e^{\frac{11\pi}{6}i}$; 2) $2e^{\frac{11\pi}{6}i}$; 3) $3e^{\frac{5\pi}{6}i}$; 4) $2e^{\frac{\pi}{6}i}$.

6. Комплексное число z = cos 270° + i sin 270° в алгебраической форме имеет вид:
1) i; 2) $-i$; 3) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

7. Действительная часть комплексного числа $z = 4e^{\frac{\pi i}{2}}$ равна:
1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 4.

8. Мнимая часть комплексного числа $z = 4\left(\cos 120^0 + i\sin 120^0\right)$ равна:
1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $2\sqrt{3}$.

9. Число $z = 4e^{\pi i}$ в алгебраической форме запишется:
1) 4; 2) 4i; 3) -4i; 4) -4.

10. Для комплексного числа z = 1– 2i z^{-1} равно:
1) $\frac{2-i}{5}$; 2) $\frac{1+2i}{5}$; 3) $\frac{-1-2i}{5}$; 4) $\frac{1-2i}{5}$.

11. Мнимая часть комплексного числа $z = (1+3i)^2$ равна:
1) – 8; 2) 9; 3)6; 4) 3.

12. Если z = 2+ 3i, Re z^2 равна: 1) – 5; 2) 13; 3) 12; 4) 5.

13. Дано комплексное число $z = 1 + 3i$ то f(z) = 2z – 1 равно:
1) 2+2i; 2) 1+6i; 3) 3i; 4) 6i.

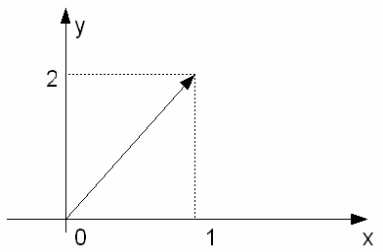
14. Вещественными решениями x и y уравнения 2x - (2 i)y = 3 + 10i являются: 1) – 2, –3; 2) 2, –5; 3) –2, 3; 4) $\frac{3}{2}$, -5.

15. Если z = 5 + 3i, то $2\bar{z} + 3z$ равно:
1) – 1+2i; 2) –1– 2i ; 3) 25+3i ; 4) 15+3i .

16. Сумма корней уравнения $x^3 - 27 = 0$;
1) 3; 2) 9; 3) 27; 4) 0.

17. Число z = – 2 в тригонометрической форме запишется:
1) $2(\cos\pi + i\sin\pi)$; 2) $2(\cos 0 + i\sin 0)$;
3) $-2(\cos 0 + i\sin 0)$; 4) $2(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$.

18. На рисунке изображено комплексное число:



1) 2– 1i ; 2) 2+ i; 3) 1– 2i; 4) 1+ 2i .

19. Решениями уравнения $x^2+4=0$ являются:

1) ± 2; 2) $\pm 2i$; 3) 4; 4) – 4.

20. Результат вычисления выражения $3i^{24}-5i^8$ равен:

1) -2; 2) 3-5i; 3) 2; 4) -5.

21. Результат умножения комплексных чисел

$\frac{1}{2}\left(cos25^0+i\sin 25^0\right)\cdot 4\left(\cos 35^0+i\sin 35^0\right)$ равен:

1) $1+\sqrt{3}i$; 2) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 3) $-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$; 4) $\sqrt{3}+\frac{1}{2}i$.

22. Аргумент комплексного числа $z=2-2\sqrt{3}i$ равен:

1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $-\frac{5\pi}{3}$; 3) $\frac{5\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{6}$.

23. Сумма корней квадратного уравнения $x^2+4x+29=0$ равна:

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) – 4.

24. Вычислить $(1+i)^{16}$:

1) 2^{16}; 2) -2^4; 3) 2^8; 4) -2^8.

25. Вещественными решениями x и y уравнения

$(1-3i)x+(2+4i)y=4+8i$ являются:

1) (0;2); 2) (3;4); 3) (4;3); 4) (– 4;2).

Контрольная работа по теме «Комплексные числа»

1. Выполнить действия:

а) $(7+5i)+(-6+6i)-4(2-7i)$; б) $(3-4i)(-5+7i)$;

в) $\frac{2-3i}{1+2i}$; г) $2i^7+i^{12}-3i^{15}-4$

д) $\frac{1}{4}(\cos 30°+i\sin 30°)\cdot 2(\cos(60°)+i\sin(60°))$;

е) $\frac{8(\cos 270°+i\sin 270°)}{2(\cos 90°+i\sin 90°)}$.

2. Решить уравнения:

1) $x^2+4x+29=0$; 2) $x^3-64=0$;

3) $x^4-625=0$; 4) $x^3+\sqrt{3}-i=0$.

3. Вычислить:

1) $\sqrt[3]{-3-3\sqrt{3}i}$; 2) $(1-i)^8$.

4. Составить приведенное квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее корень $z=4-i$.

Вариант контрольной работы по теме «Ведение в анализ»

Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+x-1}{5x^2-4x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos 4x}}{3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$.

5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{4x+5}-3}{\sqrt{x}-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-5)[\ln(2x-3)-\ln(2x+4)]$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{2x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+2x-4}{x^4-8x^2+16}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cdot ctg5x}{\sin 3x}$.

Тест по теме «Введение в анализ»

1. Областью определения функции $y=\sqrt{\frac{x^3+9x^2}{x-1}}$ является множество…

1) [-9; 0); 2) (-∞; -9], {2}, (1; ∞); 3) (1; ∞); 4) (-9; 0)U(1; ∞).

2. Для данных функций периодическими являются функции

1) $y=x^3-6x^2$, 2) y=5sin 3x, 3) y=(5-x)·ctg 2x, 4) y=ln(x-3)+cos x….

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

3. Для данных функций четными являются функции

1) $y=x^2-5|x|$, 2) $y=\frac{\sin x}{x}$, 3) $y=xe^x$, 4) y=sin x….

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

4. Для данных функций нечетными являются функции

1) $y=|x|+2$, 2) $y=\frac{x^3}{x^2+1}$, 3) y=sin x+cos x, 4) $y=x^5-3x^3-x$…

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

5. Из данных функций ограниченными являются

1) $y=x^2+4x+1$, 2) $y=2^x$, 3) y=3-cos x, 4) y=ln x…

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

6. Для заданной функции $y=\frac{2x}{x+3}$ взаимно обратной является функция…

1) $y=\frac{x+3}{3}$; 2) $y=\frac{2}{x+3}$; 3) $y=\frac{2-3x}{x}$; 4) $y=\frac{3x}{2-x}$.

7. Для функции *f(x)*=arctg 5x при $x\to 0$ эквивалентной является функция…

1) y= tg 5x; 2) $y=\frac{1}{5x}$; 3) y=x; 4) y=5x.

8. При $x\to 0$ бесконечно малыми являются функции…

1) y=sin 5x; 2) $y=\frac{x^2-4}{x}$; 3) y=tg x+1; 4) y=ln x.

9. Из данных функций: 1) $y=\frac{2x+5}{x}$; 2) $y=\frac{x^2-3}{x+2}$; 3) y=ln x+2; 4) y=cos x

при $x\to 0$ бесконечно большими являются функции

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

10. Даны функции: 1) $y=\frac{x-3}{x}$; 2) $y=x+x^2$; 3) $y=\frac{x^2+4}{x}$; 4) $y=\frac{x^2-5x+4}{x^3+2x}$.

Из них правильными дробно- рациональными функциями являются….

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

11. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-x^2}{x^2-5x^4}$ равен… 1) $\frac{1}{5}$; 2) $-\frac{1}{5}$; 3) 0 ; 4) ∞.

12. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos4x}{4x^2}$ равен… 1) $\frac{1}{4}$; 2) 2; 3) -1; 4) 4.

13. Предел $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-3x+4}{x^2+4x+3}$ равен… 1) $-\frac{5}{2}$; 2) $\frac{5}{2}$; 3) 1; 4) $-\frac{3}{4}$.

14. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+2x}$ равен… 1) $-\frac{1}{20}$; 2) 1; 3) ∞; 4) $\frac{1}{20}$.

15. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{5x}\right)^{3x}$ равен… 1) $e^{\frac{5}{6}}$; 2) $e^{-\frac{5}{6}}$; 3) $e^{-\frac{6}{5}}$; 4) $e^{\frac{6}{5}}$.

16. В точке x = 0 непрерывными являются функции:

1) $y=x^2$; 2) $y=\frac{tgx}{2x}$; 3) $y=e^{3x}$; 4) $y=\frac{\ln x}{5-x}$.

17. Среди графиков, приведенных на рис. 1, укажите все, на которых функция имеет в точке *a* разрыв второго рода.

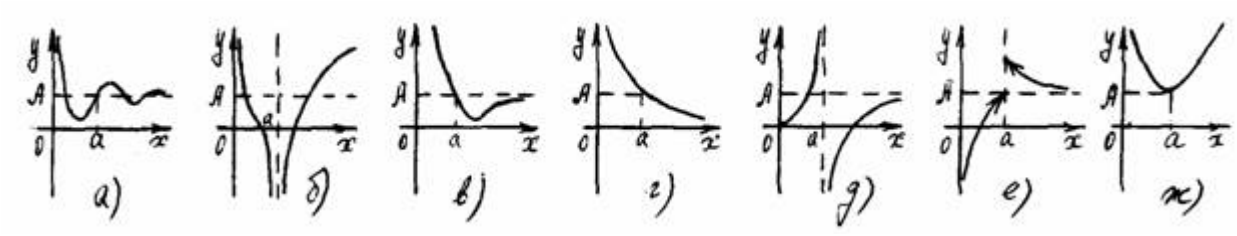


Рис. 1.

1) (а; б); 2) (в; г); 3) (б; д); 4) (е; ж).

18. Если $a=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{3x}$, то ln*a* равен: 1) -5; 2) 5; 3) 3; 4) 1.

19. Установите характер разрыва функций в точке x=0

1) $y=\frac{tgx}{x+2}$; 2) y=ln(3x+6); 3) $y=\frac{x-4}{x}$; 4) y=ctg 2x.

1) непрерывна; 2) непрерывна; 3) первого рода; 4) второго рода.

20. Если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=15$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ равен:

1) 3; 2) – 3; 3) 0; 4) ∞; 5) не существует.

21. Из данных функций: 1) y=arctg(x+4); 2) $y=\frac{x^2-1}{x}$; 3) y=ln x; 4) $y=x^2y-x^3$

выберите функции, заданные неявно…. 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

22. Известно, что при $x\to 0$ α(x)=sin 2x и $\beta(x)=x^2$ – бесконечно малые .

Какое из следующих утверждений верно при $x\to 0$:

1) α(*x*) и β(*x*) эквивалентны;
2) α(*x*) более высокого порядка малости, чем β(*x*);
3) α(*x*) более низкого порядка малости, чем β(*x*);
4) α(*x*) и β(*x*) одного порядка малости.

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

23.При затратах на производство y=50+3x и доходе от реализации продукции y=14+4x (y- тыс. руб; x- количество месяцев) производство будет рентабельным начиная с месяца…

1) 35; 2) 36; 3) 37; 4) 38.

24.При исходной стоимости автомобиля 250 тыс. руб. и линейной зависимости стоимости от времени при норме амортизации 5 % стоимость автомобиля через лет равна…..

1) 160 000; 2) 170 000; 3) 180 000; 4) 200 000.

25. Даны функции спроса q=-3q=12 и предложения s=2+2p где p- цена товара . Тогда равновесная цена равна …..

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5.

Вариант контрольной работы по теме « Приложение производной»

1. Найти интервалы вогнутости и точки перегиба графиков функций

$y=x^4-3x^5$.

2. Найти асимптоты графиков функций $y = \frac{2x}{x+1}$;

3. Заданы функции полного дохода $R = -q^2 + 10q$ и полных издержек C = 3q + 6, где q – количество проданного товара. Определить границы

прибыльности производства q_1 и q_2, и точку q_0, в которой прибыль достигает максимального значения.

4. Вычислить пределы следующих функций, используя правило Лопиталя:

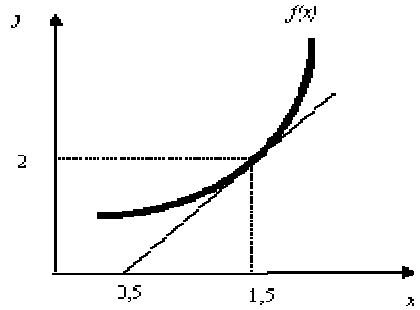
а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{2x} + x + 1}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$;

5. Опытным путем установлены функции спроса $q = 20 - 3p$, предложения $S=4+p$, где S и q количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу, p – цена товара. Найти: а) равновесную цену; б) эластичность спроса и предложения для равновесной цены; с) построить графики функций.

Тест по теме «Приложение производной»

1. Какое из ниже перечисленных предложений определяет производную функции (когда приращение аргумента стремится к нулю)?
   1) Отношение приращения функции к приращению аргумента;
   2) Предел отношения функции к приращению аргумента;
   3) Отношение функции к пределу аргумента;
   4) Отношение предела функции к аргументу;
   5) Предел отношения приращения функции к приращению аргумента.
2. Первая производная функции показывает
   1) скорость изменения функции; 2) направление функции;
   3) приращение функции; 4) приращение аргумента функции.
3. Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в некоторой точке, равен
   1) отношению значения функции к значению аргумента в этой точке;
   2) значению производной функции в этой точке;
   3) значению дифференциала функции в этой точке;
   4) значению функции в этой точке;
4. Функции полного дохода $R = -x^2 + 17x$ и полных издержек C =3x+8.

   Объем выпускаемой продукции x_0 при максимальном доходе равен...
   1) 4; 2) 3; 3) 5; 4) 7.
5. Касательная к графику функции $y = \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$ наклонена к оси ох под углом 30^0 в точке с координатами…. 1) $(\frac{2}{3}; \frac{\sqrt{3}}{9})$; 2) $(-\frac{2}{3}; \frac{\sqrt{3}}{9})$; 3) $(\sqrt{3}; 2)$; 4 $(2; \sqrt{3})$.
6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите значение $f'(5)$



1) $\frac{2}{3}$; 2) 2; 3) 5; 4) 1.

7. Дифференциал функции равен…

а) отношению приращения функции к приращению аргумента;

б) произведению приращения функции на приращение аргумента;

в) произведению производной на приращение аргумента;

г) приращению функции; д)приращению аргумента.

8. Найти предел, используя правило Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{2x}}{\sin x}$ …1) 0; 2)2; 3) 4; 4) ∞.

9. Определить оптимальное для производителя значение выпуска x_0, при условии, что весь товар реализуется по фиксированной цене за единицу $p=79$ и известен вид функции издержек $C(x)= 20+4x+x^3$ …

1)1; 2) 4; 3) 3; 4) 6 .

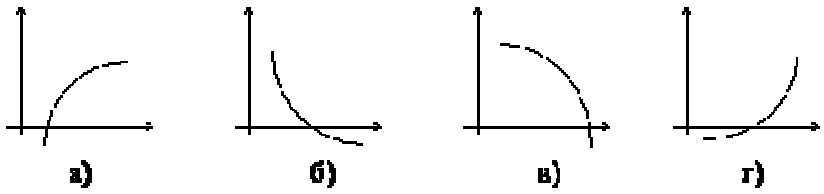
10. Функция $y = 2x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}$ возрастает в интервале…

1) (1;2); 2) $(-\infty;-1)\cup(2;\infty)$; 3) $(-2;\infty)$; 4) (-1;2).

11. Сколько точек перегиба имеет функция $y = x+36x^2-2x^3-x^4$ ...

1) ни одной; 2) одну; 3) две; 4) три; 5) больше трех.

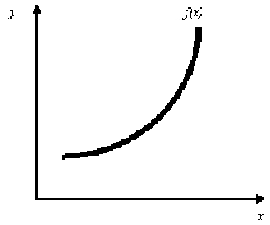
12. Какой из графиков на рисунке соответствует функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условиям $f'(x) < 0; f''(x) > 0$?



13. Какому условию удовлетворяет функция, график которой изображен на рисунке ….

1) $f'(x) > 0$ и $f''(x) > 0$; 2) $f'(x) > 0$ и $f''(x) < 0$;

3) $f'(x) < 0$ и $f''(x) > 0$; 4) $f'(x) < 0$ и $f''(x) < 0$.

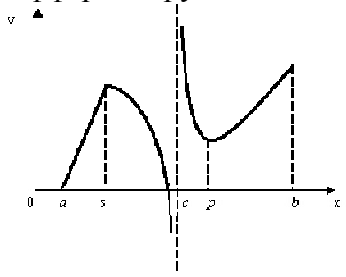


14. Укажите точки экстремума непрерывной на всей числовой прямой функции $y(x)$, если $y' = (x=6)^2(x+2)$ ...

1)x=- 6 −точка max; 2) x=-6 −точка min; 3) x=-2 −точка max;

4) x=-2 −точка min; 5) точек экстремума нет.

15. Укажите точки на $(a; b)$, в которых функция, изображенная на рисунке не дифференцируема.



1) p; 2) c; 3) s .

16. Среди перечисленных функций горизонтальную асимптоту имеет функция…

1) y=cosx; 2) y= $4e^{-5x}$; 2) y= $x^2 - 4x + 1$; 4) y= $\frac{4 - x^3}{1 + x}$

17. Написать уравнение касательной к графику функции y = $3 - \sin 4x$ в точке x=0…
1) –y+4x-3=0; 2) - y+4x+3=0; 3) 4x+y-3=0; 4) y+4x+3=0.

18. Наибольшее значения функции y=2,5x−4 $\sqrt{x}$ на отрезке $[1;4]$ равно…
1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) 8.

19. Материальная точка движется по закону y= 0,04$\sin^2$ 6t. Тогда ее ускорение в момент времени t = $\frac{\pi}{6}$ равно…
1) 2,68; 2) 2,72; 3) 2,8; 4) 2,88.

20. Зависимость между издержками производства C и объемом продукции Q выражается функцией $C = 64q - 0{,}08Q^2$. Тогда предельные издержки при объеме производства Q=200 равно… 1) 20; 2) 30; 3) 32; 4) 45.

21. Даны функции спроса q=-3p+22 и предложения s= p+2, где p – цена товара. Тогда равновесная цена равна… 1) 2; 2) 1; 3) 4; 4) 5.

22. Значение производной второго порядка функции y= e^{-3x} в точке x=0 равно …
1) -3; 2) 3; 3) -9; 4) 9 .

23. Асимптотами графика функции y = $\frac{4x^2 - 5x + 1}{x - 31}$ является прямые…
1) x=-3; 2) x=3 ; 3) y=0; 4) y=4x+7; 5) y=4x.

24. Найти $f'(-3)$, если $f(x)$ = x(x+3)(x-4)(x+5) … 1) 36; 2) 38; 3) 40; 4) 42.

25. Зависимость между спросом q=6 − 0,3p и ценой p =10 за единицу продукции, выпускаемой некоторым предприятием то эластичность спроса равна …
1)- 3; 2) -1 ; 3) -0,6 ; 4) -4 .

Вариант контрольной работы по разделу «Интегральное исчисление».

1. Найти интегралы: *а)* $\int \frac{3 \cdot (x-1)^3}{x^2} dx$, *в)* $\int \sin 2x \cdot \sin x dx$,

б) $\int \frac{2xdx}{x^2 + 3}$, *г)* $\int x \cdot \cos 3x dx$.

2. Вычислить определенные интегралы: **а)** $\int_2^5 \frac{dx}{2x - 3}$ **б)** $\int_1^2 \frac{x + 2}{3 - x} dx$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2x$ и $y = 3x + 6$.

4.Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 4}$; **б)** $\int_0^3 \frac{dx}{(3 - x)^3}$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг OX фигуры, ограниченной линиями: $xy = 6$, $x = 1$, $x = 4$ $y = 0$.

Тест по разделу « Интегральное исчисление».

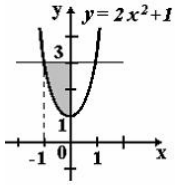
1. Неопределённый интеграл $\int x \sin x\, dx$ равен: а) $-x\cos x + C$;
б) $-x\cos x + \sin x + C$; в) $-x\cos x - \sin x + C$; г) $x\cos x + \sin x + C$.

2. Дан интеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$. Тогда замена переменной $x+1=t^6$ приводит его к виду… а) $6\int \frac{t^3(t^6-1)dt}{t+1}$ б) $\int \frac{(t^6-1)dt}{t^2(t+1)}$ в) $\frac{1}{7}\int \frac{t^5(t^6-1)dt}{t+1}$ г) $6\int \frac{t^3(t^6+1)dt}{t+1}$.

3. Площадь фигуры, ограниченной прямыми $y=2x$, $y=6x$, $x=1$, вычисляется с помощью определенного интеграла: а) $\int_0^1 6xdx$

б) $\int_0^1 (2x-6x)dx$; в) $\int_0^1 2xdx$; г) $\int_0^1 (6x-2x)dx$.

4. Определённый интеграл $\int_{-1}^{1} \sin x\,dx$ равен: а) 0; б) $-\frac{2}{3}$; в) $\frac{2}{3}$; г) 1.



5. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, определяется интегралом…

а) $\int_{-1}^{0}(2-2x^2)dx$ б) $\int_{-1}^{0}(2x^2-2)dx$ в) $\int_{0}^{3}(3-2x^2)dx$ г) $\int_{-1}^{0}(2x^2+1)dx$.

6. Определённый интеграл $\int_{-1}^{1} x^3dx$ равен: а) 0; б) $-\frac{2}{3}$; в) $\frac{2}{3}$; г) 1.

7. Укажите среди перечисленных утверждений то, которое соответствует истине: а) если функция непрерывна внутри некоторого отрезка, то она интегрируема на этом отрезке; б) б) если функция дифференцируема на некотором интервале, то она имеет на нём первообразную; в) если функция дифференцируема на некотором интервале, то её первообразная выражается в элементарных функциях; г) если функция непрерывна на всём данном интервале, то она интегрируема на этом интервале.

8. Первообразной для функции $y=\frac{1}{x}$ на интервале $(-\infty;0)$ является функция: а) $y=\ln(-x)$; б) $y=\ln x$; в) $y=\ln|x|$; г) ни одна из перечисленных функций.

9. Неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ равен: а) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}+C$; б) $\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+C$; в) $3\sqrt[3]{x}+C$; г) $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+C$.

10. Функция $y=-\frac{1}{x}$ является первообразной для функции $y=\frac{1}{x^2}$ на интервале:

а) $(-\infty;\infty)$; б) $[0;\infty)$; в) $(0;\infty)$; г) ни на одном из перечисленных интервалов.

11. Неопределённый интеграл $\int x\cdot e^x dx$ равен: а) $x\cdot e^x+e^x+C$; б) $x\cdot e^x-x+C$;

в) $x\cdot e^x+C$; г) $x\cdot e^x-e^x+C$.

12. Выберите среди перечисленных ниже вариантов правильный ответ на вопрос «Значение определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$ зависит от …»:

а) … подынтегральной функции; б) … длины частичных отрезков Δx_i; в) … выбора точек c_i в каждом отрезке; г) … способа разбиения отрезка $[a;b]$.

13. Среди предложенных вариантов ответа выберите значение площади фигуры, ограниченной линиями $y=0, x=0, y=\cos x$: а) 0; б) $\frac{\pi}{2}$; в) 1; г) π.

14. Значение несобственного интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+1}$ равно: а) $\frac{\pi}{8}$;

б) интеграл расходится в) 0 г) 1

15. Неопределённый интеграл $\int \ln x\,dx$ равен: а) $x\ln x - x + C$;

б) $x\ln x + x + C$; в) $x\ln x - \ln x + C$; г) $x\ln x + C$.

16. Укажите среди перечисленных утверждений то, которое соответствует истине:

а) если функция имеет первообразную на некотором интервале, то она непрерывна на нём; б) если функция непрерывна на некотором интервале, то она имеет первообразную на нём; в) если функция дифференцируема на некотором интервале, то её первообразная выражается в элементарных функциях; г) если функция определена на всём данном интервале, то она интегрируема на нём.

17. Неопределенным интегралом для функции $y=f(x)$ на множестве X называется

а) одна из первообразных, б) предел интегральной суммы $I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$, в) совокупность всех первообразных $F(x)+C$, г) одна из интегральных сумм $\sum_{i=0}^{\infty} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$

18. Укажите среди перечисленных вариантов ответов общий вид первообразных функции $y=\frac{1}{2}\cos 2x$: а) $y=-\frac{1}{4}\sin 2x + C$; б) $y=-\frac{1}{4}\sin x + C$; в) $y=\frac{1}{4}\sin x + C$; г) $y=\frac{1}{4}\sin 2x + C$.

19. Неопределённый интеграл $\int 3^{3x}dx$ равен: а) $\frac{3^{3x}\ln 3}{3}+C$; б) $\frac{3\cdot 3^{3x}}{\ln 3}+C$; в) $\frac{3^{3x}}{3\ln 3}+C$; г) $3^{3x+1}\cdot\ln 3 + C$.

20 . Неопределённый интеграл $\int \sin 2x\cos x\,dx$ равен: а) $2\cos^2 x - \sin^2 2x + C$; б) $2\sin^2 2x\cos^2 x + C$; в) $\frac{1}{3}\sin^3 2x + C$; г) $-\frac{2}{3}\cos^3 x + C$.

21. Одной из первообразных функции $\frac{x}{4+x^2}$ является а) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}$; б) $\frac{1}{2}\ln(4+x^2)$; в) $\frac{1}{12}arctg\frac{x}{3}$; г) $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$.

22. Сходящимися являются несобственные интегралы …

а) $\int_1^{+\infty} x^{-2}dx$ б) $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}dx$ в) $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{1}{4}}dx$ г) $\int_1^{+\infty} x^{-4}dx$

23. Неопределённый интеграл $\int e^{-x^2/2}dx$ равен: а) $-2x^2e^{-x^2/2}+C$; б) $-2x\cdot e^{-x^2/2}+C$; в) $-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2/2}+C$; г) не выражается в элементарных функциях.

24. Множество первообразных функции $f(x)=\sqrt[5]{x^7}$ имеет вид:

а) $\frac{5}{12}\sqrt[5]{x^{12}}+C$ б) $\frac{12}{5}\sqrt[5]{x^{12}}+C$ в) $\frac{7}{5}\sqrt[3]{x^2}+C$ г) $\sqrt[5]{x^{12}}+C$.

25. Определенный интеграл $\int_0^5 e^{\frac{x}{5}}dx$ равен…

а) $5(e-1)$ б) $\frac{1}{5}(1-e)$ в) $5e-1$ г) $5(1-e)$.

10. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература:

1. Высшая математика для экономистов [Текст] : учеб.: рек. Мин. обр. РФ / под ред. Н. Ш. Кремера. - 3-е изд. - М. : ЮНИТИ, 2008. - 480 с.
2. Высшая математика для экономистов [Текст] : учеб. : рек. Мин. обр. РФ / под ред. Н. Ш. Кремера. - 3-е изд. - М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2009. - 479 с.
3. Красс, М.С. Математика для экономистов [Текст] : учеб. пособие : рек. УМО / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. - СПб. : Питер, 2008, 2009, 2010.- 464 с.

Дополнительная литература:

1. Высшая математика для экономических специальностей [Текст] : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ / под ред. Н. Ш. Кремера. - 3-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт : Высшее образование, 2010. - 910 с.
2. Задачник по высшей математики [Текст]: : учебное пособие: доп. Мин. Обр. РФ/ В.С. Шипачев. –9-е изд. ,стер. – М. Высш. шк., 2009 . –304с.
3. Мышкис А.Д. Математика для технических вузов [Текст]: специальные курсы: учебное пособие/ А. Д. Мышкис –.3 –е изд, стер. – СПБ. Лань., 2009 . – 633с.

3. Программное обеспечение и Интернет-ресурсы

www.exponenta.ru

11. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Лекционная аудитория с мультимедийным оборудованием.

Краткое изложение программного материала

В данном разделе излагается содержание лекций, к каждому лекционному занятию приводятся ключевые вопросы и ссылки на литературу.

1 семестр

Модуль 1. Введение в математический анализ

Комплексная цель, объединяющая содержание модуля на компетентностной основе: формирование четкого представления о базовых понятиях математического анализа: множество, функция, предел, непрерывность; овладение основными идеями и методами использования аппарата математического анализа при вычислении предела последовательности и функции, исследовании функции на непрерывность.

Краткое изложение программного материала.

Понятие множества. Понятие множества – это первичное понятие математики, оно не определяется через более простые понятия. Интуитивно множество понимают как некоторую совокупность или набор объектов.

Если все элементы множества А являются одновременно и элементами множества В, то говорят, что А включено в В и пишут $A \subset B$. В том случае, когда $A \subset B$ и $B \subset A$, множества А и В совпадают (равны): $A = B$. Пустое множество Ǿ - это множество, не содержащее ни одного элемента. Множества А и В называются эквивалентными (А~В), если каждому элементу множества А соответствует единственный элемент множества В и наоборот.

Определение. Объединением множеств А и В называется множество С, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств А или В, $C = A \bigcup B$.

Определение. Пересечением множеств А и В называется множество С, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно как множеству А так и множеству В: $C = A \bigcap B$.

Определение. Разностью множеств А и В называется множество С, состоящее из всех элементов множества А, не принадлежащих множеству В: $C = A \setminus B$.

Мощность множества. Используя свойства эквивалентности множеств, выберем произвольное бесконечное множество А и соберем в одну группу все множества ему эквивалентные. Каждому множеству образованного класса поставим в соответствие символ $\overline{\overline{A}}$ и назовем мощностью множества А.

Т.о. мощность есть то общее, что присуще классу эквивалентных множеств.

Простейшим среди бесконечных множеств является множество натуральных чисел *N*.

Определение. Всякое множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, называется счетным множеством.

Определение. Бесконечное множество называется несчетным, если оно не эквивалентно N.

Теорема. Множество бесконечных десятичных дробей, заключенных между 0 и 1 несчетно.

Действительные числа. Множество, состоящее из чисел, называется числовым множеством.

Объединение множеств рациональных и иррациональных чисел называется множеством действительных (вещественных) чисел.

Некоторые свойства вещественных чисел.

1. Свойство упорядоченности.
2. Аксиома Архимеда.
3. Свойство полноты.
4. Свойство плотности.

Границы числовых множеств. Числовое множество X называется ограниченным сверху (снизу), если существует такое число $M \in R$ ($m \in R$), что для всех значений $x \in X$ выполняется неравенство $x \le M$ ($x \ge m$).
Число *M* называется верхней границей, а *m* – нижней границей множества *X*.

Если множество ограничено и сверху и снизу, то оно называется ограниченным.

Определение. Наименьшая из всех верхних границ множества X называется точной верхней границей множества X и обозначается $\sup X$.

Определение. Наибольшая из всех нижних границ множества X называется точной нижней границей множества X и обозначается $\inf X$.

Основное свойство точных границ множества:

1) $(\forall x \in X)\ x \le \sup X \qquad (x \ge \inf X)$

2) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists\ x_0 \in X)\big|\ x_0 > \sup X - \varepsilon \qquad (x_0 < \inf X + \varepsilon)$.

Аксиома (о точной границе). Любое непустое, ограниченное сверху (снизу) множество $X \subset R$ имеет точную верхнюю (нижнюю) границу.

Модуль вещественного числа. Модулем вещественного числа *a* называется само число *a*, если *a* – неотрицательное и – *a*, если *a* – отрицательное, т.е.

$$|a| = \begin{cases} a, & если\ a \ge 0, \\ -a, & если\ a < 0 \end{cases}.$$

Понятие функции. Пусть X и Y – два произвольных множества. Если каждому элементу $x \in X$ соответствует определенный элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана функция f (или отображение) и пишут $f : X \to Y$ или $y = f(x)$.

Предел числовой последовательности, его свойства. Если каждому значению $n \in N$ соответствует определенное число $a_n \in R$, то говорят, что задана числовая последовательность.

Обозначается (a_n), где a_n – общий член последовательности, n – его номер.

Числовая последовательность является частным случаем функции, т.е. $f : N \to R$.

Определение. Число a называется пределом последовательности (a_n), если для любого числа $(\forall \varepsilon > 0)$ существует такое число $n_0 \in N$, что как только $n > n_0$, так $|a_n - a| < \varepsilon$.

Обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a\ при\ n \to \infty$.

Последовательность, имеющую конечный предел, называют сходящейся. Если же $a = \infty$ или не существует, то (a_n) называют расходящейся.

Геометрический смысл предела последовательности состоит в том, что какую бы окрестность $U(a, \varepsilon)$ точки a мы не задали, найдется такое число $n_0 \in N$, что все точки последовательности (a_n) с номерами $n > n_0$ попадут в заданную окрестность.

Теорема 1. Если существует предел $(\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a)$, то этот предел единственный.

Теорема 2. (О сжатой переменной) Если начиная с некоторого номера, $x_n \le y_n \le z_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Теорема 3. Если последовательность (x_n) монотонно возрастает (убывает) и ограничена сверху (снизу), то она сходится.

Теорема 4. Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

Теорема 5. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot x_n)=c\cdot a$, где c – const ; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}$ *при* $b\neq 0$.

Предел функции в точке. δ-окрестностью точки a называется множество точек $U(a,\delta)=\{x|\ |x-a|<\delta\}$.

Проколотой δ-окрестностью точки a называется множество точек $\overset{0}{U}(a,\delta)=\{x|\ 0<|x-a|<\delta\}$.

Пусть $X\subset R$ некоторое множество действительных чисел.

Определение. Точка *a* называется предельной точкой (точкой сгущения) множества X, если в любой ее δ-окрестности содержится бесконечно много точек множества X. Предельная точка множества самому множеству может принадлежать, а может и не принадлежать.

Определение (на языке последовательностей (Гейне)). Число A называется пределом функции *f(x)* при $x\to a$, если для любой последовательности (x_n), сходящейся к точке *a* ($x_n\neq a$), последовательность соответствующих значений функции (f(x_n)) сходится к числу A. Обозначается: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

Определение (на языке ε–δ (Коши)). Число A называется пределом функции f(x) в точке a, если для любого ε > 0 найдется такая проколотая δ-окрестность точки a $\overset{0}{U}(a,\delta)\subset X$, что как только $x\in\overset{0}{U}(a,\delta)$ так $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Данные определения предела функции в точке эквивалентны.

Введем понятие бесконечного предела.

Определение. Говорят, что в точке a функция y = f(x) имеет бесконечный предел, если для любого сколь угодно большого числа M > 0 можно указать такое число δ > 0, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$ $x\neq a$ будет выполняться неравенство $|f(x)|>M$.

Замечательные пределы. Имеют место соотношения:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.

Следствия из первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$$

Непрерывность функции в точке. Пусть $f:X\to R,\ x_0\in X\subset R$.

Определение. Функция *f* называется непрерывной в точке x_0, если выполняется хотя бы одно из условий:

1) $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0:\ \forall x\in X\bigcap U(x_0,\delta)\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ (по Коши);

2) $\forall x_n\to x_0\ (x_n\in X)\ f(x_n)\to f(x_0)\ (n\to\infty)$ (по Гейне);

3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ (Если x_0 - предельная точка множества X);

4) $f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0)$ (Если x_0 - предельная точка множества $X\bigcap(-\infty,x_0)$ и предельная точка множества $X\bigcap(x_0,+\infty)$).

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 справа (слева), если существует $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 + 0) = f(x_0)$ (соответственно $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 - 0) = f(x_0)$).

Точки разрыва и их классификация.

Определение. Говорят, что функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет устранимый разрыв, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы функции, они равны между собой, но или не совпадают со значением функции в этой точке, или в этой точке функция не определена.

Определение. Точка x_0 называется точкой разрыва I рода, если в этой точке существуют ее оба конечных, односторонних предела, но они не равны между собой, т.е.

Определение. Точка x_0 называется точкой разрыва II рода, если в этой точке хотя бы один односторонний предел не существует или обращается в бесконечность.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Теорема 1. (об ограниченности непрерывной функции). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [a,b], то она ограничена на этом отрезке.

Теорема 2. (о достижении непрерывной функцией своих точных границ). Функция, непрерывная на отрезке, достигает на этом отрезке своей точной верхней грани и своей точной нижней грани, т.е.

$$\exists\ x_1 \in [a,b], \text{ такое, что } \sup_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_1),$$

$$\exists\ x_2 \in [a,b], \text{ такое, что } \inf_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_2).$$

Теорема 3. (об обращении непрерывной функции в нуль). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, т.е. $f(a)\cdot f(b) < 0$. Тогда существует $c \in (a,b)$ такое, что

$$f(c) = 0.$$

Теорема 4. (о пробегании непрерывной функцией всех промежуточных значений).

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ и пусть с – любое число, удовлетворяющее условию

$$\alpha \le c \le \beta, \text{ если } \alpha \le \beta,$$

$$\beta \le c \le \alpha, \text{ если } \beta \le \alpha.$$

Тогда существует точка $x_0 \in [a,b]$ такая, что $f(x_0) = c$.

Лекция 1. Введение в математический анализ. Понятие функций одной переменной.

План лекции.

1. Элементы теории множеств.
   1.1 Основные понятия теории множеств – множество, элементы и принадлежность;
   1.2 Способы задания множеств;
   1.3 Операции над множествами;
2. Функциональная зависимость.
   2.1 Способы задания функций;
   2.2 Основные свойства функций;
   2.3 Основные элементарные и элементарные функции;
   2.4 Обратная функция;
   2.5 Сложная функция.

Ключевые вопросы: понятие функции.

Литература: [1, гл. 1, гл.3, § 1, §8].

Лекция 2. Предел функции.
План лекции.

1. Предел числовой последовательности;
2. Определение предела функции;
3. Основные теоремы о пределах;
4. Замечательные пределы.
5. Способы вычисления пределов функций;
6. Бесконечно малые и бесконечно большие функции;
7. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций.

Ключевые (базисные) вопросы: 1. Предел функции. 2. Бесконечно малые функции.

Основные задачи. 1.Вычисление пределов. 2.Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций.

Литература: [1, гл. 1, гл.3, § 1, §8].

Лекция 3. Непрерывность функции.
План лекции.

1. Понятие непрерывности функции;
2. Непрерывность некоторых элементарных функций;
3. Точки разрыва функции;
4. Основные свойства непрерывных функций.

Ключевые (базисные) вопросы: 1. Непрерывность функции в точке.

Основные задачи. 1. Исследование непрерывности функций.

Литература: [1, гл. 1, гл.3, § 1, §8].

Знания, которыми должен владеть студент

Знания на уровне понятий, определений, описаний, формулировок

1. Множество. Элементы теории доказательств.
2. Функция.
2.1. Числовая последовательность.
2.2. Классификация функций.
2.3. Сложная функция.
2.4. Обратная функция.
2.6. Элементарные функции.
3. Предел.
3.1. Предел числовой последовательности.
3.2. Различные определения предела функции.
3.3. Бесконечно малые (б.м.) и бесконечно большие (б.б.).
3.4. Эквивалентные функции в окрестности предельной точки.
3.5. Таблица эквивалентных б.м.
4. Непрерывность.
4.1. Непрерывность функции в точке и на промежутке.
4.2. Свойства непрерывных функций.
4.3. Точки разрыва функции и их классификация.

Знания на уровне доказательств и выводов

1. Теоремы о сумме, произведении, частном функций или последовательностей (выборочно).
2. Замечательные пределы
3. Теорема о непрерывности сложной функции.
4. Теорема о сохранении знака функции в окрестности точки непрерывности этой функции.

Литература: [1, гл. 2, гл.3, § 2 – 9].

Модуль 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Комплексная цель, объединяющая содержание модуля на компетентностной основе: формирование четкого представления о базовых понятиях математического анализа: производная, дифференциал, дифференцируемость; овладение основными идеями и методами использования аппарата математического анализа при решении простейших задач экономики, при исследовании функции на монотонность, экстремум, перегиб, построении касательной к графику функции, нахождении мгновенной скорости материальной точки.

Краткое изложение программного материала.

Производная функции. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy в этой точке к вызвавшему его приращению аргумента Δx, при $\Delta x \to 0$, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функция, имеющая конечную производную, называется дифференцируемой, а действие нахождения производных называется дифференцированием.

Введем понятие правой и левой производной от функции $y = f(x)$ в точке x_0:

Конечные пределы справа и слева в точке x_0 (если они существуют)

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \qquad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

называются соответственно правой и левой производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$.

Производная функции *f(x)* в данной точке x_0 геометрически представляет собой угловой коэффициент касательной к кривой в точке $(x_0,\ f(x_0))$, то есть тангенс угла между касательной и положительным направлением оси *Ox*.

Теорема. Если функция f(x) дифференцируема в точке x, то она непрерывна в этой точке.

Правила дифференцирования. Если функции U(x) и V(x) дифференцируемы в точке *x,* то функция y = C·U(x), (C – const), y = U(x)+V(x), y = U(x)·V(x), y = $\frac{U(x)}{V(x)}$ (при $V(x) \neq 0$) также дифференцируемы в точке x, причем:

1. $(CU)' = C \cdot U'$; 2. $(U + V)' = U' + V'$; 3. $(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$;

4. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$.

Теорема. (Производная сложной функции) Если функция $y = f(U)$ дифференцируема в точке $U = U_0 \in D(f)$, а функция $U = \varphi(x)$ дифференцируема в соответствующей точке $x = x_0 \in D(\varphi)$, $(U(x_0) = U_0 \in D(f))$, то сложная функция $F(x) = f(\varphi(x))$ также дифференцируема в точке x_0, причем

$$F'_x(x_0) = f'_U(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'_x(x_0),$$

или, короче,

$$y'_x = y'_U \cdot U'_x.$$

Теорема. Если функция $y = f(x)$ обратима в некоторой окрестности точки x_0 и существует производная $f'(x_0) \neq 0$, то и обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причем $x'_y(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Дифференциал функции. Пусть функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет конечную производную $f'(x_0)$. Так как $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то переменную $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ можно представить в виде суммы ее предела и бесконечно малой величины

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha, \ \ \alpha \to 0 \ \ при \ \ \Delta x \to 0.$$

Откуда $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Под дифференциалом функции в заданной точке понимается произведение значения производной в этой точке $f'(x_0)$ на приращение независимой переменной Δx:

$$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x, \text{ или}$$
$$dy = y' \cdot dx$$

Определение. Функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, называется дифференцируемой при $x = x_0$, если ее приращение в этой точке

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \ \ \Delta x = x - x_0,$$

представимо в виде $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)$,

где A – постоянная (при фиксированном x_0 A есть некоторое число, не зависящее от Δx; но при изменении точки x_0 число А в общем случае меняется) и $\alpha(\Delta x) = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Теорема. Для того, чтобы функция f была дифференцируемой в некоторой точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке производную; при этом

$$dy = f'(x_0)dx.$$

Инвариантность формы первого дифференциала относительно преобразования независимой переменной. Пусть функция $y = f(U)$ дифференцируема в точке $U = U_0 \in D(f)$, а функция $U = \varphi(x)$ дифференцируема в соответствующей точке $x = x_0 \in D(\varphi)$, $(U(x_0) = U_0 \in D(f))$. Как известно сложная функция $F(x) = f(\varphi(x))$ также дифференцируема в точке x_0, причем

$$F'_x(x_0) = f'_U(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'_x(x_0) \text{ или } y'_x = y'_U \cdot U'_x. \quad (4)$$

Тогда дифференциал сложной функции $F(x) = f(\varphi(x))$ равен

$$dy = f'(U_0)dU = F'(x_0)dx. \ (5)$$

В этой формуле $dU = \varphi'(x)dx$ является дифференциалом функции, а dx - дифференциалом независимой переменной.

Таким образом, дифференциал функции имеет один и тот же вид: произведение производной по некоторой переменной на дифференциал этой переменной – независимо от того, является эта переменная в свою очередь функцией или независимой переменной.

Производные и дифференциалы высших порядков. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором интервале *(a,b)*, то есть в каждой точке $x \in (a,b)$ определено число $f'(x)$. Тогда производная $f'(x)$ сама является функцией. Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то можно говорить о ее производной.

Определение. Производной второго порядка (или второй производной) от функции *f(x)* называется производная от производной $f'(x)$ и обозначается

$$f''(x) \text{ или } \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Теорема. Пусть функции $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ имеют производные n-го порядка в точке x_0. Тогда функции $y_1 + y_2 = f_1(x) + f_2(x)$ и $y_1 \cdot y_2 = f_1(x) \cdot f_2(x)$ также имеют производные n-го порядка в точке x_0, причем

$$(y_1 + y_2)^{(n)} = y_1^{(n)} + y_2^{(n)}, \qquad (1)$$

$$(y_1 \cdot y_2)^{(n)} = y_1^{(n)} \cdot y_2 + C_n^1 y_1^{(n-1)} y_2^{(1)} + C_n^2 y_1^{(n-2)} y_2^{(2)} + \ldots + y_1 y_2^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)} \cdot y_2^{(k)} \quad (2)$$

где, как обычно, C_n^k обозначает число сочетаний из n элементов по k $(k = 0,\ 1,\ 2,\ldots,n)$.

Формула (2) обычно называется формулой Лейбница.

Определение. Значение дифференциала $d(dy)$, т.е. дифференциал от первого дифференциала, в некоторой точке x_0 называется вторым дифференциалом функции f в этой точке и обозначается через $d^2 y$, т.е. $d^2 y = f''(x_0) dx^2$.

Подобным образом в случае, когда при $x = x_0$ существует производная n-го порядка $y^{(n)}$, определяется дифференциал n-го порядка $d^n y$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 как дифференциал от дифференциала (n - 1)-го порядка $d^{n-1} y$: $d^n y = d(d^{n-1} y)$.

Справедлива формула $d^n y = y^{(n)} dx^n$

Дифференцирование функций, заданных параметрически. Пусть задана функция $y = f(x)$, причем связь между переменными x и y задана не непосредственно, а через переменную t системой равенств:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

Предположим, что функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ имеют производные, причем $\varphi'(t) \ne 0$. Кроме того, для $x = \varphi(t)$ существует обратная функция $t = \chi(x)$, имеющая конечную производную $\chi'(x)$. Тогда, применяя правила дифференцирования сложной и обратной функций, находим:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} \qquad \text{или} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Если функции $x(t)$ и $y(t)$ дважды дифференцируемы по переменной t, то можно найти $y''_{xx} = (y'_x)'_x$:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(y'_t / x'_t)'_t}{x'_t} = \frac{1}{x'_t} \cdot \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^2} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

Основные теоремы дифференциального исчисления.

Теорема 1 (Теорема Ферма). Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале $(a,\ b)$ и во внутренней точке x_0 этого интервала принимает наибольшее (наименьшее) значение. Тогда если в точке x_0 существует конечная производная, то она равна нулю, т. е. $f'(x_0) = 0$.

Теорема 2 (Теорема Ролля). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, дифференцируема в интервале $(a,\ b)$ и $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$, такая что $f'(c) = 0$.

Теорема 3 (Теорема Лагранжа). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, дифференцируема в интервале $(a,\ b)$. Тогда существует точка $c \in (a,b)$, такая что $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Теорема 4 (Теорема Коши). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,\ b]$, дифференцируемы в интервале $(a,\ b)$, причем $g(x) \neq 0$. Тогда найдется такая точка $c \in (a,b)$, что будет выполняться равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Правило Лопиталя. Рассмотрим простой прием для раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ при вычислении пределов, связанный с применением производной.

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке *a*, дифференцируемы в проколотой окрестности точки *a*, причем $g'(x) \neq 0$. Если при этом $f(a) = g(a) = 0$ и существует $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Теорема 2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в промежутке $(a,\ \infty)$, причем $g'(x) \neq 0$ и $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$. Тогда если существует $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Эти теоремы применяются для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$. Аналогичные теоремы имеют место в случае неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$.

REM 1. Случаи нахождения предела, когда имеют место неопределенности вида $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ сводятся к случаю $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ путем преобразования функции к виду дроби.

REM 2. Случаи нахождения предела, когда имеют место неопределенности вида 1^{∞}, ∞^0, 0^0 сводятся к случаю $0 \cdot \infty$ (а затем к случаю $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$) следующим путем: функция логарифмируется и сначала находится предел ее логарифма, а затем по найденному пределу логарифма находится и предел самой функции.

Формула Тейлора.

Лемма 1. Пусть функция $y = f(x)$ в интервале (a,b) дифференцируема *n* раз, а также непрерывна на $[a,b]$ вместе со своими производными до $(n-1)$ – го порядка включительно и

$$f(a) = f(b) = f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0.$$

Тогда существует точка $c \in (a,b)$ такая, что $f^{(n)}(c) = 0$.

Выведем теперь формулу Тейлора.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - P(x)$, где *P(x)* – многочлен

$$P(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + A_3(x-a)^3 + \ldots + A_n(x-a)^n.$$

Найдем производные функции $\varphi(x)$ до n – го порядка включительно.

$$\varphi(x) = f(x) - A_0 - A_1(x-a) - A_2(x-a)^2 - A_3(x-a)^3 - \ldots - A_n(x-a)^n,$$

$$\varphi'(x) = f'(x) - A_1 - 2A_2(x-a) - 3A_3(x-a)^2 - \ldots - nA_n(x-a)^{n-1},$$

$$\varphi''(x) = f''(x) - 2A_2 - 3\cdot 2A_3(x-a) - \ldots - n(n-1)A_n(x-a)^{n-2},$$

……..,

$$\varphi^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - (n-1)!\,A_{n-1} - n(n-1)\cdot\ldots\cdot A_n(x-a),$$

$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - n!\cdot A_n.$$

Найдем коэффициенты A_1, $A_2,\ldots,A_n$, потребовав, чтобы функция $\varphi(x)$ удовлетворяла условиям леммы

$\varphi(a) = \varphi'(a) = \ldots = \varphi^{(n-1)}(a) = 0$ и

$$\varphi(b) = f(b) - A_0 - A_1(b-a) - \ldots - A_n(b-a)^n = 0. \quad (*)$$

Тогда получим

$$A_0 = f(a),\ \ A_1 = f'(a),\ \ A_2 = \frac{f''(a)}{2!},\ldots,A_{n-1} = \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$

По лемме существует точка $c \in (a,b)$ такая, что

$$\varphi^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) - n!\cdot A_n = 0 \Rightarrow A_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

Тогда равенство (*) запишем в виде

$$f(b) = f(a) + f'(a)\cdot(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} +$$

$$+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n.$$

Заменив b на x, получим *формулу Тейлора*:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} +$$

$$+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n,$$

где $r_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ называется остаточным членом в форме Лагранжа. При $a = 0$ получаем формулу Маклорена

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\cdot x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\cdot x^n,$$

где $c \in (0,x)$.

Условия постоянства, возрастания и убывания функции.

Теорема 1. Для того чтобы дифференцируемая на интервале (a,b) функция $y = f(x,y)$ была постоянной на этом интервале необходимо и достаточно, чтобы во всех его точках ее производная была равна нулю, т. е.

$$f'(x) = 0 \text{ для } \forall\ x \in (a,b).$$

Теорема 2. Для того чтобы дифференцируемая на интервале (a,b) функция $y = f(x,y)$ возрастала (убывала) на этом интервале необходимо и достаточно, чтобы во всех его точках производная была неотрицательной, $f'(x) \geq 0$ (соответственно, неположительной $f'(x) \leq 0$).

Экстремум функции. Пусть функция $y = f(x, y)$ задана на множестве X и x_0 является внутренней точкой этого множества. Если существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, что выполняется неравенство

$$f(x_0) > f(x), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad x \neq x_0,$$

то говорят, что в точке x_0 данная функция имеет максимум.

Если существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, что выполняется неравенство

$$f(x_0) < f(x), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad x \neq x_0,$$

то говорят, что в точке x_0 данная функция имеет минимум.

Точки минимума и максимума функции называются ее точками экстремума, а значения *f(x)* в этих точках называют минимумом и максимумом функции или экстремумами функции.

Необходимое условие экстремума. Если точка x_0 является точкой экстремума функции *f(x),* то в этой точке производная $f'(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.

Точки, в которых производная функции равна нулю, называются стационарными точками этой функции.

Точки, в которых производная функции равна нулю либо не существует, называются критическими точками функции *f(x)* или «подозрительными» на экстремум.

Достаточное условие экстремума. Если функция *f(x)* непрерывна в точке x_0 и в некоторой ее окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ производная $f'(x)$:

а) слева от точки x_0 положительная, а справа – отрицательная, то x_0 – точка максимума функции;

б) слева от точки x_0 отрицательная, а справа – положительная, то x_0 – точка минимума функции.

Теорема. Пусть x_0– стационарная точка функции $f(x)$ и существует непрерывная вторая производная в точке x_0. Тогда если $f''(x) < 0$, то x_0 – точка максимума, а если $f''(x) > 0$, то x_0 – точка минимума.

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке. Рассмотрим функцию $f(x)$, непрерывную на отрезке $[a, b]$. Если для всех значений x из отрезка $[a, b]$, то $f(x_1)$ называется наибольшим значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается $f(x_1) = \max\limits_{[a,b]} f(x)$. Если $f(x_2) \leq f(x)$ для всех $x \in [a, b]$, то $f(x_2)$ называется наименьшим значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается $f(x_2) = \min\limits_{[a,b]} f(x)$. Непрерывная функция $f(x)$ может иметь несколько (или ни одного) экстремумом на отрезке $[a, b]$, но всегда имеет только по одному наименьшему и наибольшему значению на этом отрезке. Эти значения либо совпадают с локальными экстремальными значениями функции внутри отрезка $[a, b]$, либо с ее значениями на концах отрезка. В частности, если $f(x)$ монотонна на всем отрезке $[a, b]$, то ее наименьшее и наибольшее значения совпадают со значениями на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$.

Направление вогнутости кривой. Точки перегиба. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, дифференцируемую в точке $x_0 \in X$.

Определение. Кривая называется выпуклой «вверх» (рис. 1) («вниз» (рис. 2), т. е. вогнутой) в точке $x = x_0 \in X$, если существует такое $\delta > 0$, что для $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ кривая расположена ниже (выше) касательной в этой точке.

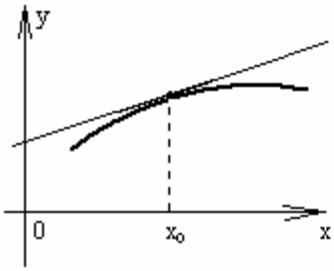


Рис. 1

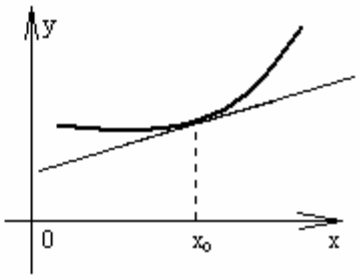


Рис. 2

Теорема. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную положительную (отрицательную) вторую производную, то график функции в этой точке вогнут (выпуклый).

Определение. Точкой перегиба функции $y = f(x)$ называют такую точку $x = x_0 \in X$, в которой кривая переходит с одной стороны касательной на другую, т. е. меняет направление выпуклости.

<u>Необходимое условие точки перегиба.</u> Если x_0 – точка перегиба функции $y = f(x)$, то либо $f''(x_0) = 0$, либо вторая производная в этой точке не существует.

<u>Достаточное условие существования точки перегиба.</u> Если в точке x_0 можно провести касательную к графику функции $y = f(x)$ и в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$ вторая производная $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0, то x_0 – точка перегиба функции $y = f(x)$.

Асимптоты кривой. Прямая линия называется асимптотой для кривой $y = f(x)$, если расстояние точки М, лежащей на кривой, от этой прямой стремится к нулю при движении точки М вдоль какой-нибудь части кривой в бесконечность.

Различают три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

<u>Вертикальные асимптоты.</u>

Если хотя бы один из односторонних пределов функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен бесконечности:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty,$$

то прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

<u>Горизонтальные асимптоты.</u>

Прямая $y = a$ называется горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \quad \text{или} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = a.$$

<u>Наклонные асимптоты.</u>

Наклонной асимптоты графика функции $y = f(x)$ имеют вид $y = ax + b$, где

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax).$$

Лекция 4. Производная функции одной переменной.

План лекции.

1. Задача о касательной;
2. Определение производной;

3. Дифференцируемость и непрерывность функций;
4. Геометрический, физический и экономический смысл производной;
5. Правила и формулы дифференцирования.

Ключевые вопросы: понятия производной функции.

Основные задачи. 1. Отыскание производной 1-го порядка функций, заданных явно, неявно, параметрически.

Лекция 5. Дифференциал функции одной переменной.

План лекции.

1. Понятие дифференциала функции;
2. Связь дифференциала функции с производной;
3. Геометрический смысл дифференциала;
4. Приложение дифференциала в приближенных вычислениях;
5. Производные и дифференциалы высших порядков;
6. Основные теоремы дифференциального исчисления

Ключевые (базисные) вопросы: 1. Дифференциал функции и его приложения. *Основные задачи.* ***1.***. Отыскание дифференциала 1-го и высших порядков явно заданных функций. 2. Получение приближённых формул для функций. 3. Вычисление пределов.

Лекция 6. Приложения производной функции одной переменной.

План лекции.

1. Условия монотонности функции.
2. Локальный экстремум функции.
3. Интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;
4. Точки перегиба графика
5. Асимптоты графика.

Ключевые (базисные) вопросы: 1. Возрастание и убывание функции. 2. Локальный экстремум функции. 3. Точки перегиба графика. 4. Асимптоты графика.

Основные задачи. ***1.***. Исследование функций и построение графиков.

Знания и умения, которыми должен владеть студент

Знания на уровне понятий, определений, описаний, формулировок

1. Определение производной; физический и геометрический смысл.
2. Таблица производных основных элементарных функций и общих правил их отыскания.
3. Правила и формулы для производных функций, заданных неявно и параметрически.
4. Определение дифференциала; связь с приращением функции и производной. Понятие дифференцируемой функции.
5. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью.
6. Таблица дифференциалов.
7. Геометрический смысл дифференциала.
8. Применение дифференциалов к приближенным вычислениям.
9. Определения производных и дифференциалов высших порядков; связь между ними.
10. Формула Лагранжа. Различные ее модификации.
11. Правило Лопиталя раскрытия неопределённостей.
12. Формула Тейлора.
13. Определение возрастания, убывания функции на интервале.
14. Определение экстремумов функции.
15. Правило отыскания экстремумов функций.
16. Правило отыскания наибольших и наименьших значений функции на замкнутом промежутке.
17. Определение направления выпуклости, точек перегиба графика функции.
18. Правило отыскания точек перегиба графика функции.

19. Определения и правило отыскания вертикальных, горизонтальных, наклонных асимптот графика функции.

20. Схема построения графика функции.

<u>Знания на уровне доказательств и выводов</u>

1. Производные основных элементарных функций и общие правила отыскания производных.
2. Производные 1-го и высших порядков функций, заданных параметрически.
3. Теорема о связи дифференциала и производной.
4. Теорема о непрерывности дифференцируемой функции.
5. Теоремы Ферма, Ролля, Коши.
6. Правило Лопиталя (частный случай О/О).
7. Достаточные условия возрастания (убывания) функции на интервале.
8. Необходимые и достаточные условия экстремума по первой и второй производной.
9. Достаточные условия выпуклости графика функции вверх (вниз) на интервале.
10. Формулы для нахождения наклонных асимптот графика функции.

Литература: [1, гл. 4, гл.5].

Модуль 3. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных.

Комплексная цель, объединяющая содержание модуля на компетентностной основе: формирование четкого представления о базовых понятиях математического анализа: метрическое пространство, функция многих переменных (ФМП), предел ФМП, непрерывность ФМП, частные производные ФМП, дифференцируемость ФМП, экстремумы ФМП, неявная функция и ее дифференцируемость; овладение основными идеями и методами использования аппарата математического анализа при исследовании ФМП на экстремум, при нахождении наибольшего и наименьшего значений ФМП на отрезке.

Краткое изложение программного материала.

При рассмотрении функций нескольких переменных ограничимся подробным описанием функций двух переменных, т.к. все полученные результаты будут справедливы для функций произвольного числа переменных.

Определение: Если каждой паре независимых переменных *(x, y)* из некоторого множества по какому – либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z, то переменная z называется *функцией двух переменных* обозначается $z = f(x, y)$.

Определение: Если паре чисел (x, y) соответствует одно значение z, то функция называется **однозначной**, а если более одного, то – **многозначной**.

Определение: Областью определения функции z называется совокупность пар *(x, y),* при которых функция z существует.

Определение: Окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ радиуса r называется совокупность всех точек (*x*, y), которые удовлетворяют условию $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r$.

Определение: Число A называется **пределом** функции f(x, y) при стремлении точки M(x, y) к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r > 0$, что для любой точки M(x, y), для которых верно условие

$MM_0 < r$ также верно и условие $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.т записывают: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$

Определение: Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции *f(x, y).* Тогда функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной* в точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0) \qquad (1)$$

причем точка M(*x, y*) стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом.

Если в какой – либо точке условие (1) не выполняется, то эта точка называется *точкой разрыва* функции *f*(x, y). Это может быть в следующих случаях:

1) Функция $z = f(x, y)$ не определена в точке $M_0(x_0, y_0)$.
2) Не существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$.
3) Этот предел существует, но он не равен $f(x_0, y_0)$.

<u>Свойство.</u> Если функция *f(x, y, ...)* определена и непрерывна в замкнутой и ограниченной области D, то в этой области найдется по крайней мере одна точка $N(x_0, y_0, \ldots)$, такая, что для остальных точек верно неравенство

$$f(x_0, y_0, \ldots) \geq f(x, y, \ldots)$$

а также точка $N_1(x_{01}, y_{01}, \ldots)$, такая, что для всех остальных точек верно неравенство

$$f(x_{01}, y_{01}, \ldots) \leq f(x, y, \ldots)$$

тогда $f(x_0, y_0, \ldots) = M$ – наибольшее значение функции, а $f(x_{01}, y_{01}, \ldots) = m$ – наименьшее значение функции *f*(x, y, …) в области D.

Непрерывная функция в замкнутой и ограниченной области D достигает по крайней мере один раз наибольшего значения и один раз наименьшего.

Производные и дифференциалы функций нескольких переменных

Определение. Пусть в некоторой области задана функция z = *f*(x, y). Возьмем произвольную точку M(x, y) и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется *частным приращением функции по x.*

Производные функций нескольких переменных.

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$ называется *частной производной* функции $z = f(x, y)$ по переменной *x*..

Обозначение частной производной: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$; $f'_x(x,y)$.

Аналогично определяется частная производная функции по y.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Геометрическим смыслом частной производной (допустим $\dfrac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $y = y_0$.

Полное приращение и полный дифференциал.

Определение. Для функции *f*(x, y) выражение $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ называется *полным приращением* функции $z = f(x, y)$ в точке M(*x, y*), соответствующие приращениям аргументов *Δx и Δy.*

Определение. Выражение $\Delta z = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$ называется **полным приращением** функции *f*(x, y) в некоторой точке (x, y), где α_1 и α_2 – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ соответственно.

Определение. Полным дифференциалом функции z = *f*(x, y) называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке M(*x, y*).

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy\,.$$

Приближенные вычисления с помощью полного дифференциала.

Пусть функция f(x, y) дифференцируема в точке (x, y). Найдем полное приращение этой функции:

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\,,$$

то получим приближенную формулу:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y\,.$$

Частные производные высших порядков.

Если функция *f*(x, y) определена в некоторой области D, то ее частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ тоже будут определены в той же области или ее части.

Будем называть эти производные частными производными первого порядка.

Производные этих функций будут частными производными второго порядка.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y);\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y);\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = f''_{xy}(x,y);\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = f''_{yx}(x,y).$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

Определение. Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y};\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x};\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial y}$ и т.д. называются **смешанными производными.**

<u>Теорема.</u> Если функция *f*(x, y) и ее частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке M(x, y) и ее окрестности, то верно соотношение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},$$

т.е. частные производные высших порядков не зависят от порядка дифференцирования.

Производная и градиент скалярного поля.

Рассмотрим функцию u(x, y, z) в точке M(x, y, z) и точке M_1(x + Δx, y + Δy, z + Δz).

Далее предположим, что функция u(x, y, z) непрерывна и имеет непрерывные частные производные по переменным *x*, y, z и задан вектор $\vec{S}$.

Определение. Предел $\lim\limits_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S}$ называется производной функции u (*x, y, z*) по направлению вектора $\vec{S}$ в точке с координатами (*x, y, z*) и записывается

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\,.$$

Определение. Если в некоторой области D задана функция *u = u(x, y, z)* и некоторый вектор, проекции которого на координатные оси равны значениям частных производных функции u в соответствующей точке, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x};\quad \frac{\partial u}{\partial y};\quad \frac{\partial u}{\partial z},$$

то этот вектор называется **градиентом** функции u: $\overrightarrow{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{dy}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$.

Связь градиента с производной по направлению.

$$\left|\overrightarrow{gradu}\right| \cdot \cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial s}$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства и является проекцией вектора $\overrightarrow{gradu}$ на вектор $\vec{S}$.

Для иллюстрации геометрического и физического смысла градиента скажем, что градиент – вектор, показывающий направление наискорейшего изменения некоторого скалярного поля u в какой- либо точке. В физике существуют такие понятия как градиент температуры, градиент давления и т.п. Т.е. направление градиента есть направление наиболее быстрого роста функции.

С точки зрения геометрического представления градиент перпендикулярен поверхности уровня функции.

Экстремум функции нескольких переменных.

Определение. Если для функции z = *f*(x, y), определенной в некоторой области и некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$

то точка M_0 называется *точкой максимума***.**

Определение. Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области и некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

то точка M_0 называется *точкой минимума***.**

Необходимые условия экстремума.

Если функция *f*(x,y) в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует.

Эту точку (x_0, y_0) будем называть *критической точкой***.**

Достаточные условия экстремума.

Пусть в окрестности критической точки (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Рассмотрим выражение:

$$\Delta(x, y) = f''_{x^2}(x, y) \cdot f''_{y^2}(x, y) - \left[f''_{xy}(x, y)\right]^2.$$

1) Если $\Delta(x_0, y_0) > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет экстремум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ − максимум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ − минимум.
2) Если $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) не имеет экстремума
3) В случае, если $\Delta = 0$, то для решения вопроса о наличии или отсутствия экстремума в точке M_0 требуется дальнейшее исследование, например по знаку приращения Δf вблизи этой точки.

Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

Условный экстремум находится, когда переменные *x* и *y*, входящие в функцию *u = f(x, y),* не являются независимыми, т.е. существует некоторое соотношение *φ(x, y) =C,* которое называется *уравнением связи***.**

Определение. Точка (x_0, y_0) называется точкой **условного максимума (минимума),** если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек (x, y) из этой окрестности удовлетворяющих условию *φ(x, y) = C,*
Выполняется неравенства $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ *и* $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$.

Наиболее простым способом нахождения условного экстремума функции двух переменных является сведение задачи к отысканию экстремума функции одной переменной. Тогда из переменных *x* и *y* только одна будет независимой, т.к. другая может быть выражена через нее из уравнения связи тогда *u = f(x, y(x)),* т. е. получим функцию одной переменной. Ее экстремум и будет условным экстремумом функции *u = f(x, y).*

Однако в более сложных случаях сделать это не удается. Для отыскания условного экстремума в общем случае используется метод множителей Лагранжа.

Рассмотрим функцию трех переменных

$$F(x,y,\lambda) = f(x, y) + \lambda(C - \varphi(x, y)).$$

Эта функция называется функцией Лагранжа, а λ − множителем Лагранжа.

Теорема. Если точка (x_0, y_0) является точкой условного экстремума функции $u = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = C$, то существует значение λ_0 такое, что точка (x_0, y_0, λ_0) является точкой экстремума функции $F(x,y,\lambda)$.

Таким образом, для нахождения условного экстремума функци $u = f(x, y)$
При условии $\varphi(x, y) = C$ требуется найти решение системы

$$F'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) - \lambda\varphi'_x(x,y) = 0,$$
$$F'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) - \lambda\varphi'_y(x,y) = 0,$$
$$F'_\lambda(x,y,\lambda) = C - \varphi(x,y) = 0.$$

Полученная система уравнений является необходимыми условиями условного экстремума. Однако это условие не является достаточным.

Но отметим, что во многих задачах критическая точка функции Лагранжа оказывается единственной и соответствует не только локальному, но и глобальному условию минимуму или максимуму.

Приложения функции нескольких переменных к решению экономических задач.

В многих задачах экономике некоторая величина может зависеть не от одной, а от нескольких переменных. На спрос могут влиять: доходы потребителя, цена взаимозаменяемых и взаимодополняющих товаров, расходы на рекламу.

Взаимозаменяемыми товаров называются те, которые служат одним и тем же целям.

Взаимодополняющими товарами называются те, которые в совокупности удовлетворяют одну и ту же потребность.

В общем случае спрос но отдельный товар при прочих равных условиях зависит от уровня цен всех товаров. Наибольший интерес представляет изучения влияния цены одного товара от цены альтернативного. Таким образом, спрос − эта функция трех переменных

$$D = f(p, p_A, y) \text{ где}$$

p − цена товара, p_A − цена альтернативного товара, y − величина дохода.

Рассмотрим как меняется спрос при изменении цен и доходов с помощью понятия эластичности.

1. Эластичность спроса от собственной цены при неизменных значений цены альтернативного товара p_A и доходов y

$$E_p = \frac{p}{D} \cdot D'_p .$$

Знак E_p всегда отрицательный. При $|E_p| > 1$ функция спроса эластична, $|E_p| < 1$ − неэластичная,

2. Эластичность спроса цены альтернативного товара

$$E_{p_A} = \frac{p_A}{D} \cdot D'_{p_A} .$$

Знак E_{p_A} может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Если $E_{p_A} > 0$, то рост цены p_A приводит к увеличению спроса D (товар взаимозаменяемый).

Если $E_{p_A} < 0$, то рост цены p_A приводит к уменьшению спроса D (товар взаимодополняемый).

3. Эластичность спроса от дохода $E_y = \frac{y}{D} \cdot D'_y$.

Коэффициенты эластичности спроса от дохода различны для разных товаров, они могут иметь как положительные, так и отрицательные значения.
С ростом доходов предпочтение начинает отдаваться более качественным товарам.
Поэтому для качественных товаров спрос увеличивается с ростом доходов, т. е. $E_y > 0$.

С другой стороны, потребление низкосортных товаров с ростом доходов уменьшается. Для таких товаров $E_y < 0$, т. е.эластичность спроса от дохода отрицательна.

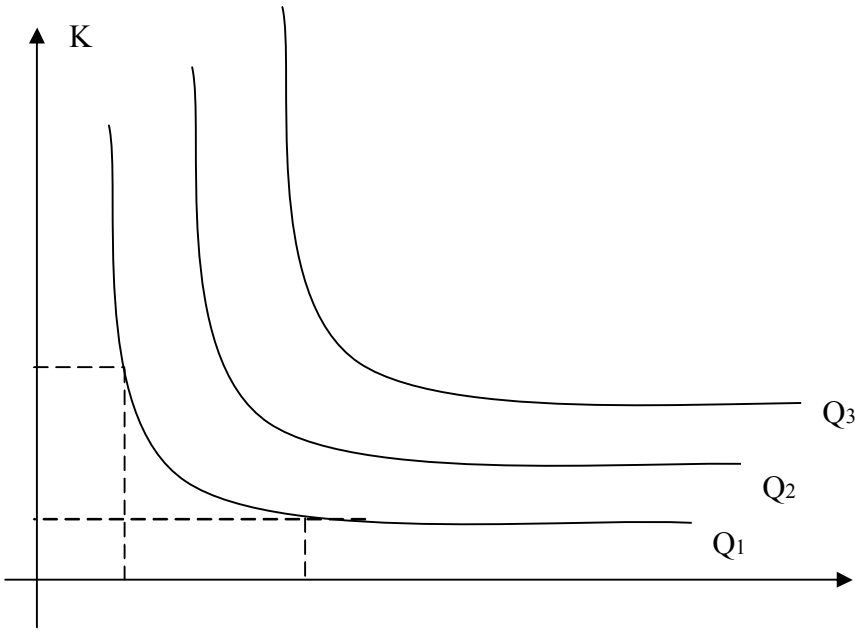
Полезность. Потреблению благ ставится в соответствие число U, называемое полезностью. Чем выше оценка, которую дает потребитель этим благам , тем больше число U. Предположим, например, что имеется два вида товаров G_1 и G_2 и потребитель приобретает первый товар в количестве x_1, а второй − в количестве x_2. Полезность тогда представляет некоторую функцию x_1 и x_2, которая может быть записана как $U = U(x_1, x_2)$. Если переменные x_1 и x_2 меняются незначительно, то результирующее изменение полезности можно приближенно получить по следующей формуле $\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}\Delta x_2$.

Предельным продуктом фактора производства называется добавочный продукт, полученный в результате добавления одной единицы данного фактора (ресурса) при неизменной величине остальных факторов производства.

Если производственная функция задана $Q = f(K, L)$. Предельный продукт капитала Q'_K**, а** предельный продукт туда Q'_L**.**

Кривые безразличия производства. Линия, в каждой точке которой различные сочетания факторов производства капитала К и труд L дают одно и то же количество выпускаемой продукции, называется **изоквантой**, или **кривой безразличия производства.** Таким образом, изокванта состоит из таких пар точек (К. L) которых значения производственной функции одинаковы. Математически изокванта определяется уравнением $f(K, L) = Q_0$,
где Q_0 − некоторая постоянная величина выпуска.

Характерные графики изоквант приведены на рисунке.



При увеличении затрат одного ресурса объем производства можно сохранить на том же уровне при меньших затратах другого ресурса.

Коэффициент заменяемости ресурсов равен предельному продукту труда, деленному на предельный продукт капитала $R = \frac{Q'_L}{Q'_K}$.

Рассмотрим типичную задачу нахождения экстремума функции нескольких переменных, возникающую в экономике.

Прибыль от производства разных видов товара

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ - количества производимых m разновидностей товара, а их цены – соответственно P_1, P_2, …, P_m (все P_i - постоянные величины). Пусть затраты на производство этих товаров задаются функцией издержек

$$C=S(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Тогда функция прибыли имеет вид

$\Pi=P_1x_1+P_2x_2+\ldots+P_mx_m - S(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Максимум прибыли естественно искать как условие локального экстремума функции многих переменных (8.11) при $x_i \geq 0$ (при отсутствии других ограничений).

$\partial\Pi/\partial x_i=0$, i=1, 2, …m. (1)

Это условие приводит к системе алгебраических уравнений относительно переменных x_i

$P_i - \partial S/\partial x_i=0$, i=1, 2, …, m. (2)

Система уравнений реализует известное правило экономики: предельная стоимость (цена) товара равна предельным издержкам на производство этого товара. Решениями этой системы уравнений являются наборы, состоящие из m значений каждый. Нужно заметить, что сам процесс нахождения решения системы уравнений зависит от вида функции издержек и может быть достаточно сложным.

Лекция 7. Частные производные функции нескольких переменных.

План лекции.

1. Пространство R^n;
2. Понятие функции нескольких переменных;
3. Предел функции;
4. Непрерывность функции;
5. Свойства функций, непрерывных в замкнутой ограниченной области;
6. Частные производные функции нескольких переменных.

Ключевые (базисные) вопросы: 1. Функция многих переменных как функция точки. 2. Предел, непрерывность функции многих переменных. 3. Частная производная.

Основные задачи. 1. Отыскание области определения функции нескольких переменных. 2. Отыскание частных производных первого порядка явно заданных функций.

Лекция 8. Дифференциал функции нескольких переменных.

План лекции.

1. Дифференцируемость ФМП в точке.
2. Дифференциал функции двух переменных;
3. Условия дифференцируемости.
4. Теорема о дифференцируемости сложной функции.
5. Теорема о существовании и дифференцируемости неявной функции
6.Частные производные и дифференциалы старших порядков.
7.Теорема о смешанных производных.
8.Производная по направлению;
9. Градиент и его свойства;

Ключевые (базисные) вопросы: 1. Полный дифференциал функции двух переменных;

Основные задачи. 1. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях.

Лекция 9. Экстремумы функции нескольких переменных.
План лекции.

1. Локальный экстремум функции нескольких переменных;
2. Необходимые и достаточные условия существования локального экстремума;
3. Условный экстремум;
4. Наибольшее и наименьшее значения функции на множестве.

Ключевые (базисные) вопросы: 1. Локальный, условный и глобальный экстремумы.
Основные задачи. 1. Отыскание экстремумов, наибольших и наименьших значений функций; 2. Приложения дифференциального исчисления функций нескольких переменных к решению задач оптимизации.

Знания, которыми должен владеть студент

Знания на уровне понятий, определений, описаний, формулировок

1. Функция.
2. Предел.
3. Непрерывность.
4. Производная.
4.1. Частное приращение и частная производная функции.
4.2. Частные производные высших порядков.
4.3. Производные сложных функций (выборочно).
4.4. Производные неявных функций (выборочно).
4.5. Геометрический смысл частных производных функции двух аргументов.
5. Дифференциал.
5.1. Полное приращение и полный дифференциал функции; его выражение через частные производные. Дифференцируемая функция.
5.2. Полные дифференциалы высших порядков.
6. Экстремум функции.
6.1. Максимум, минимум, экстремум функции точки.
6.2. Необходимое условие экстремума.
6.3. Достаточные условия экстремума (выборочно).
6.4. Условный экстремум.
7. Наибольшее и наименьшее значения функции. Правило отыскания наибольшего и наименьшего значений функции в ограниченной замкнутой области.
8. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности. Вектор нормали к поверхности.
9.Функции полезности.
10. Кривые безразличия.
11.Функции спроса..
12.Кривые " доход-потребление".
13.Кривые " цены-потребление".
14.Функции выпуска продукции.
15.Производственные функции затрат ресурсов

Знания на уровне доказательств и выводов

1. Формула, выражающая полный дифференциал функции двух аргументов через её частные производные.
2. Необходимое условие экстремума.
3. Метод Лагранжа отыскания условного экстремума в простейших случаях.

Литература: [1, гл. 8].

Модуль 4. Интегральное исчисление функции одной переменной

Комплексная цель, объединяющая содержание модуля на компетентностной основе: формирование четкого представления о базовых понятиях математического анализа: первообразная, неопределенный интеграл, интеграл Римана, несобственный интеграл; овладение основными идеями и методами использования аппарата математического

анализа при нахождении пути, пройденного материальной точкой, площади криволинейной трапеции, длины плоской кривой, объема и площади поверхности тела вращения.

Краткое изложение программного материала

Неопределенный интеграл

Если для всех значений x из некоторого промежутка X выполняется неравенство $F'(x) = f(x)$ (или $dF(x) = f(x)\cdot dx$), то функция $F(x)$ называется <u>*первообразной*</u> для функции $f(x)$ на этом промежутке.

Очевидно, если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $F(x) + C$ тоже первообразная для $f(x)$. (Здесь C – произвольная постоянная).

Множество всех первообразных функций для данной функции $f(x)$ называется <u>*неопределенным интегралом*</u> от функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Замена переменной и подстановка. Пусть $x = \varphi(t)$ дифференцируемая функция. Тогда

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Преобразование левого интеграла в данной формуле в интеграл, находящийся справа, называют интегрированием <u>*заменой переменной*</u>, а справа налево – интегрированием <u>*подстановкой*</u>.

Так как при интегрировании заменой переменной приходится возвращаться от переменной t к переменной x, то есть находить $t = \varphi^{-1}(x)$, то для обеспечения существования обратной функции требуется монотонность функции $x = \varphi(t)$.

Интегрирование по частям. Пусть функции $U(x)$ и $V(x)$ дифференцируемы в промежутке X и на X существует интеграл от $V(x)\cdot U'(x)$. Тогда существует и интеграл $\int U(x)V'(x)dx$, причем

$$\int U(x)\cdot V'(x)\cdot dx = U(x)\cdot V(x) - \int V(x)\cdot U'(x)\cdot dx$$

Короче формулу интегрирования по частям можно записать так

$$\int U\cdot dV = U\cdot V - \int V\cdot dU.$$

Смысл интегрирования по частям состоит в переходе от интеграла $\int U\cdot dV$ к интегралу $\int V\cdot dU$ с надеждой на то, что последний находится сравнительно просто.

<u>Замечание.</u> Методом интегрирования по частям находят интегралы типа $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin\alpha x dx$, $\int P(x)\log_a x dx$, $\int P(x)arctgx dx$ и другие. Здесь $P(x)$ – многочлен.

Интегрирование рациональных функций. Существует много элементарных функций, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции, например,

$$\int\frac{\sin x}{x}dx,\ \int e^{-x^2}dx,\ \int\frac{dx}{\ln x},\ \int\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}},\ \text{где } 0<k<1 \text{ и другие.}$$

Важный класс функций, интегралы от которых выражаются через элементарные функции, представляют дробно-рациональные функции $Q(x) = \dfrac{P(x)}{H(x)}$, где $P(x)$ и $H(x)$ – многочлены. Если степень $P(x)$ меньше степени $H(x)$, то дробь $\dfrac{P(x)}{H(x)}$ называется <u>*правильной*</u>, в противном случае – <u>*неправильной*</u>. Например, дробь $\dfrac{x+3}{x-1}$ - неправильная, а дробь $\dfrac{3x^2+4}{x^3+2x^2+x+2}$ является правильной дробно-рациональной функцией. Всякую

неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена (в частности, константы) и правильной рациональной дроби.

Любую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы конечного числа простых дробей следующих 4-х типов: 1) $\frac{A}{x-a}$, 2) $\frac{A}{(x-a)^n}$ ($n=2,3,4,\ldots$), 3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, 4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ ($n=2,3,4,\ldots$). Здесь A, B, M, N, a, p, q – постоянные действительные числа.

Для интегрирования дроби 4-го типа применяется следующая рекурентная формула

$$I_n=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}=\frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{a^2(2n-2)}I_{n-1}+C$$

Интегрирование иррациональных функций. Основной способ интегрирования иррациональных функций состоит в выборе такой подстановки, в результате выполнения которой получается интеграл от рациональной функции. Этот способ называется способом *рационализации* интеграла.

а) Способ вычисления интегралов вида $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+px+q}}dx$ покажем на примере:

$$\int\frac{(x-3)dx}{\sqrt{x^2+8x+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{2x+8-14}{\sqrt{x^2+8x+1}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+8x+1)}{\sqrt{x^2+8x+1}}$$

$$-7\int\frac{d(x+4)}{\sqrt{(x+4)^2-15}}=\sqrt{x^2+8x+1}-7\ln\left|x+4+\sqrt{x^2+8x+1}\right|+C.$$

Ответ. $\sqrt{x^2+8x+1}-7\ln\left|x+4+\sqrt{x^2+8x+1}\right|+C$.

б) Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ рационализируется подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d}=t^m$.

в) Интеграл вида $\int\frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ подстановкой $px+q=\frac{1}{t}$ преобразуется к табличному интегралу.

г) Рационализация интегралов вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ достигается с помощью подстановок Л. Эйлера.

1) Если $a>0$, то можно выполнить подстановку $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}\cdot x$, тогда $ax^2+bx+c=t^2\pm2\sqrt{a}tx+ax^2$, отсюда $x=\frac{t^2-c}{b\mp2\sqrt{a}}$. Ясно, что и dx рационально выражается через t. Получаем $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R_1(t)dt$, где $R_1(t)$ – некоторая рациональная функция от t.

2) Если $c>0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$ и $ax^2+bx+c=t^2x^2\pm2\sqrt{c}tx+c$, $ax+b=t^2x\pm2\sqrt{c}t$, отсюда $x=\frac{\pm\sqrt{c}t-b}{a-t^2}$. Очевидно что и dx рационально выражается через t. Следовательно, $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R_2(t)dt$.

3) Пусть α и β – действительные корни трехчлена, тогда $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$. Выполним подстановку $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha)$, $ax^2+bx+c=t^2(x-\alpha)^2$, то есть $a(x-\alpha)(x-\beta)=t^2(x-\alpha)^2$. Отсюда

$a(x-\beta)=t^2(x-\alpha)$, значит, $x=\dfrac{a\beta-t^2\alpha}{a-t^2}$. Дифференциал dx также выражается через t. Следовательно, и в этом случае $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R_3(t)dt$.

Интегрирование тригонометрических функций

а) Для нахождения интегралов $\int \sin\alpha x\cdot\cos\beta x\cdot dx$, $\int \sin\alpha x\cdot\sin\beta x\cdot dx$ и $\int \cos\alpha x\cdot\cos\beta x\cdot dx$ применяются формулы

$$\sin\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x),$$

$$\sin\alpha x\cdot\sin\beta x=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x),$$

$$\cos\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x).$$

б) $\int \sin^m x\cdot\cos^n x\cdot dx,\ где\ m,n\in Z$.

Если число m или n нечетные, то применяют подстановки соответственно $cosx=t$ или $sinx=t$. Если оба показателя m и n – четные числа, то используют формулы

$$\cos^2 t=\frac{1}{2}(1+\cos 2t),\ \ \sin^2 t=\frac{1}{2}(1-\cos 2t).$$

в) Интеграл $\int R(tgx)dx$ рационализируется подстановкой $tgx=z,\ x=arctgz$, $dx=\dfrac{dz}{1+z^2}$.

г) Интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$ рационализируются универсальной подстановкой

$$tg\frac{x}{2}=t,\ \ x=2arctgt,\ \ dx=\frac{2dt}{1+t^2},\ \ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Определенный интеграл

Основная формула интегрального исчисления. Пусть на отрезке *[a,b]* задана функция *y=f(x)*, принимающая в каждой точке *[a,b]* конечные значения. Выполним разбиение *T* отрезка на *n* произвольных частей

$$T:\ \ a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n=b. \qquad (1)$$

На каждом из элементарных отрезков $[x_i,\ x_{i+1}]$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ выберем произвольно точку $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$, вычислим значение функции $f(\xi_i)$, умножим его на $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ и составим интегральную сумму

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i. \qquad (2)$$

Наибольшую из длин элементарных отрезков обозначим через λ и назовем рангом (диаметром) разбиения *T*: $\lambda=\max\limits_i \Delta x_i$.

Если существует конечный предел *I* интегральных сумм (2) при $\lambda\to 0$, который не зависит ни от способа дробления *T* отрезка *[a,b]*, ни от выбора точек ξ_i, то этот предел называется определенным интегралом функции *f(x)* по отрезку *[a,b]*

$$I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i. \qquad (3)$$

Число *I* обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, а подынтегральная функция *f(x)* называется интегрируемой по Риману на отрезке *[a,b]*.

Содержательный смысл предела в равенстве (3) отличается от стандартного и состоит в том, что $(\forall\varepsilon > 0)$ $(\exists\delta(\varepsilon) > 0)$ такое, что при любом способе разбиения *T*, при котором $\lambda < \delta$ и при любом выборе $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ выполняется неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$.

На практике для вычисления определенных интегралов часто применяют формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

в которой *f(x)* непрерывна на *[a,b]*, а *F(x)* – произвольная первообразная функции *f(x)*.

Замена переменной в определенном интеграле. Пусть задана функция *y=f(x)*, непрерывная на отрезке *[a,b]*. Пусть *x=φ(t)* – некоторая функция, удовлетворяющая условиям:

1. Функции *φ(t)* и *φ'(t)* непрерывны на сегменте *[α,β]*;
2. $(\forall t \in [\alpha, \beta])$ соответствующее значение $\varphi(t) \in [a, b]$;
3. $\varphi(\alpha) = a$ *и* $\varphi(\beta) = b$.

Тогда имеет место формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt, \qquad (5)$$

которая в случае применения слева направо называется формулой замены переменной, а в случае применения справа налево – формулой подстановки в определенном интеграле.

Примечание. В качестве функции *x=φ(t)*, а также в качестве функции $t=\varphi^{-1}(x)$ удобно использовать монотонную функцию.

Интегрирование по частям. Для вычисления определенных интегралов часто применяется формула интегрирования по частям

$$\int_a^b U \cdot dV = U \cdot V\Big|_a^b - \int_a^b V \cdot dU, \qquad (6)$$

Где функции *U(x)*, *V(x)* и их производные непрерывны на *[a,b]*.

Вычисление площади плоской фигуры

Площадь криволинейной трапеции, то есть плоской фигуры, ограниченной сверху графиком непрерывной, неотрицательной на *[a,b]* функции *y=f(x)*, с боков – прямыми *x=a* и *x=b*, а снизу отрезком *[a,b]* оси абсцисс (рис. 1), может быть вычислена по формуле

$$mes(D) = \int_a^b f(x)dx.$$

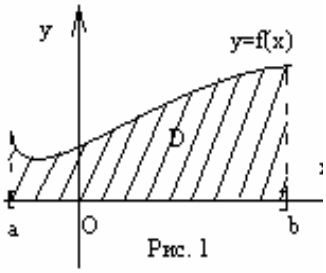


Рис. 1

Аналогично площадь криволинейной трапеции, изображенной на рис. 2, вычисляется по формуле

$$mes(D_1) = \int_c^d g(y)dy.$$

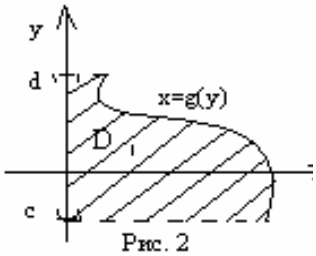


Рис. 2

Для вычисления площади искомой фигуры D_2, ограниченной сверху графиком функции $y=f_1(x)$, снизу –

графиком функции $y=f_2(x)$, с боков – прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис.3), применяется формула

$$mes(D_2)=\int_a^b \left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx.$$

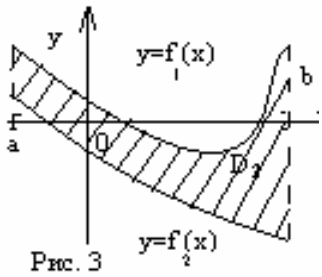


Рис. 3

Для вычисления площади криволинейного сектора в полярных координатах, ограниченного непрерывной кривой $r=r(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$ (рис. 4) используется формула

$$mes(D_3)=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi.$$

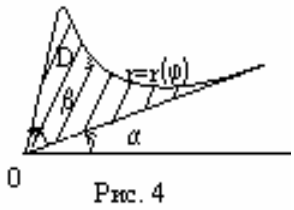


Рис. 4

Длина дуги спрямляемой кривой

Кривая, длина которой существует, называется спрямляемой. Пусть функция $f(x)$и ее производная $f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$. Обозначим точки $A(a,f(a))$ и $B(b,f(b))$. Кривая AB в этом случае спрямляема и ее длина выражается формулой

$$l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \qquad (7)$$

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ при $\alpha \le t \le \beta$, то

$$l=\int_\alpha^\beta \sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt. \qquad (8)$$

Здесь $x(t)$, $y(t)$ и их производные непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$. Если кривая AB определяется полярным уравнением $r=r(\varphi)$, где $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, а функции $r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ непрерывны на $[\varphi_1,\varphi_2]$, то

$$l=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi. \qquad (9)$$

Вычисление объемов тел. Пусть дано некоторое тело (V) и существует его объем V (то есть тело кубируемо). Допустим, что известна площадь $S(x)$ любого сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, где $a \le x \le b$ (ось Ox выбирается, вообще говоря, произвольно). Будем считать функцию $S(x)$ непрерывной на отрезке $[a,b]$. Предположим, что любая пара сечений, ортогонально спроектированная на плоскость, перпендикулярную к оси Ox, дает проекции, целиком лежащие одна в другой. Тогда объем тела равен

$$V=\int_a^b S(x)dx. \qquad (10)$$

В частности, объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной функции $f(x)$, ординатами в точках a и b и отрезком $[a,b]$ оси Ox, равен

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx. \qquad (11)$$

Если же криволинейная трапеция, ограниченная графиком непрерывной функции $g(y)$, абсциссами в точках c и d и отрезком $[c,d]$ оси Oy, вращается вокруг оси Oy, то

$$V=\pi\int_c^d g^2(y)dy. \qquad (12)$$

Несобственные интегралы. Пусть функция *f(x)* определена в промежутке *[a,+∞)* и $(\forall A \geq a)$ существует определенный интеграл $\int_a^A f(x)dx$.

Определение 1. Если существует предел $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$, то он называется несобственным интегралом первого рода от функции *f(x)* по полупрямой *[a,+∞)* и обозначается символом $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Аналогично $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{A\to-\infty}\int_A^b f(x)dx$, где *f(x)* определена в промежутке *(-∞,b]*.

Несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ определяется как предел $\lim\limits_{\substack{A_1\to-\infty\\ A_2\to+\infty}}\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx$, где *f(x)* существует на всей прямой $-\infty < x < +\infty$.

Если указанные пределы существуют, то говорят, что соответствующие несобственные интегралы сходятся, в противном случае – расходятся.

Существуют различные признаки сходимости несобственных интегралов 1-го рода. Достаточный признак можно сформулировать так: пусть $f(x) \geq 0$ и непрерывна в промежутке $[a,+\infty)$;

1) Если при $\alpha > 1$ предел $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}\cdot f(x) = D \neq \infty$, то интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходится.

2) Если при $\alpha \leq 1$ предел $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}\cdot f(x) = D \neq 0$, то интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ расходится.

Пусть функция *f(x)* задана на промежутке *[a,b)* и не ограничена на *[a,b),* но ограничена на любом отрезке $[a,b-\varepsilon]\subset[a,b)$ и интегрируема на любом таком отрезке. (Точка *b* называется особой для *f(x)*).

Определение 2. Если существует предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то он называется несобственным интегралом второго рода от функции *f(x)* по отрезку *[a,b]* и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

Говорят в этом случае, что несобственный интеграл сходится. Если же указанный предел не существует, то несобственный интеграл расходится.

Лекция 10. Неопределенный интеграл.

План лекции.

1.Понятие первообразной функции;
2.Неопределенный интеграл и его свойства;
3.Таблица интегралов;
4.Замена переменной в неопределенном интеграле;
5. Интегрирование по частям.

Литература: [1, гл. 6].

Лекция 11. Определенный интеграл.

План лекции.

1.Определенный интеграл как предел интегральных сумм;
2. Свойства определенного интеграла;

3. Формула Ньютона–Лейбница;
4. Методы определенного интегрирования.

Лекция 12. Приложения интегралов. Несобственные интегралы.

План лекции.

1.Геометрические приложения определенного интеграла;
2. Несобственные интегралы.

Ключевые (базисные) вопросы: 1. Первообразная. 2. Неопределенный интеграл. 3. Интегральная сумма по отрезку. 4. Несобственные интегралы.

Основная задача. 1. Нахождение неопределённого интеграла. 2. Вычисление определённых интегралов. 3. Исследование сходимости и вычисление несобственных интегралов. 4. Вычисление аддитивных величин геометрического характера (площадь, объём, длина дуги).

Знания, которыми должен владеть студент

Знания на уровне понятий, определений, описаний, формулировок

1. Первообразная.
2. Неопределённый интеграл, свойства.
3. Таблица неопределённых интегралов.
4. Интегрирование функций.
5. Интегрирование по частям. Некоторые классы функций, интегрируемых по частям.
6. Интегрирование простейших элементарных дробей.
7. Интегрирование рациональных дробей.
8. Интегрирование функций R(sinx, cosx).
9. Задача о нахождении площади криволинейной трапеции.
10. Свойства определённого интеграла. Теорема о среднем.
11. Интеграл с переменным верхним пределом. Непрерывность, дифференцируемость.
12. Определение и вычисление длины дуги плоской кривой.
13. Технология сведения геометрических и физических задач вычисления аддитивных величин к определённому интегралу.
14. Несобственные интегралы 1-го и 2-го родов. Сходимость интеграла. Распространение на эти интегралы формулы Ньютона-Лейбница, методов интегрирования подстановкой и по частям.

Знания на уровне доказательств и выводов

1. Свойства неопределённого интеграла.
2. Теорема о замене переменной.
3. Формула интегрирования по частям.
4. Теорема о замене переменной в определённом интеграле.
5. Формула интегрирования по частям.
6. Необходимое условие существования определённого интеграла.
7. Свойства определённого интеграла (выборочно).
8. Теорема о среднем.
9. Производная интеграла с переменным верхним пределом.
10. Формула Ньютона-Лейбница.
11. Вычисление длины дуги плоской кривой.
12. Нахождение объёмов тел вращения.

Литература: [1, гл. 7].

Модуль 5. Элементы теории дифференциальных уравнений.

Комплексная цель: освоить основы теории дифференциальных уравнений.

Краткое изложение программного материала

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнения вида: $F(x,y,y')= 0$, $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, $y' = f(x)$.

Решением дифференциального уравнения первого порядка называется дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение, обращает его в тождество.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется его интегрированием.

Простейшим дифференциальным уравнением является уравнение вида $y' = f(x)$. Решением этого уравнения являются функции $y = \int f(x)dx + C$, где C- произвольная постоянная.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка

$y' = f(x,y)$ в некоторой области Д называется функция $y = \varphi(x,c)$, обладающая следующими свойствами:

а) функция $\varphi(x,c)$ является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной С, принадлежащих некоторому множеству;

б) для любого начального условия $y(x_0)=y_0$ такого, что $(x_0, y_0)\in Д$, существует единственное значение $C=C_0$, при котором решение $y=\varphi(x,c_0)$ удовлетворяет начальному условию.

Всякое решение $y = \varphi(x,c_0)$, получающееся из общего решения

$y = \varphi(x,c)$ при конкретном значении $C = C_0$, называется частным решением.

Задачу отыскания частного решения называют задачей Коши. Если функция $f(x,y)$ и ее частная производная $\partial f/\partial y$ непрерывны в области, содержащей точку $M_0(x_0,y_0)$, то уравнение $y' = f(x,y)$ имеет единственное решение $y = \varphi(x,c_0)$, такое, что $y(x_0) = y_0$.

Построенный на плоскости ХОУ график всякого решения $y = \varphi(x)$ данного дифференциального уравнения называется интегральной кривой этого уравнения. Общему решению $y=\varphi(x,c)$ на плоскости ХОУ соответствует семейство интегральных кривых, зависящих от одного параметра- произвольной постоянной C, а частному решению, удовлетворяющему начальному условию $y(x_0) = y_0$,- кривая этого семейства, проходящая через заданную точку $M_0(x_0,y_0)$.

Уравнение вида $f_1(x)f_2(y)dx - \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0$ называется уравнением с разделяющимися переменными.

Заметим, что в уравнениях с разделяющимися переменными коэффициенты при dx и dy разлагаются на множители, зависящие от одной переменной.

Исключим из рассмотрения точки, в которых $\varphi_1(x)=0$ и $f_2(y)=0$.

Разделим обе части уравнения на $f_2(y)\,\varphi_1(x)\neq 0$, получим уравнения

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx = \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy \ ,$$

в котором переменные разделены. Общее решение этого уравнения находится почленным интегрированием $\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx = \int \frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)}dy$.

Уравнение первого порядка $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ или $y'=f(x,y)$ называется однородным, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$- однородные функции одной степени однородности или $f(x,y)$- однородная функция нулевой степени однородности. Функция $P(x,y)$ называется однородной степени k, если $P(\lambda x,\lambda y)=\lambda^k \cdot P(x,y)$.

Однородное уравнение может быть приведено к виду $y'=\varphi(\frac{y}{x})$.

Решения однородного уравнения сводится к решению уравнению с разделяющими переменными подстановкой

$$\frac{y}{x} = u, \quad y = ux, \; y' = u'x + u.$$

Уравнение вида $y'+P(x)y = Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$- непрерывные функции аргумента x , называется линейным уравнением первого порядка.

Посредством замены функции y произведением двух вспомогательных функций $y=U\cdot V$, $y' = U'V + UV'$ линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными относительно каждой из вспомогательных функций.

Уравнения высших порядков, допускают понижение порядка в следующих случаях:

а).Уравнение вида $y^{(n)}=f(x)$ решается последовательным интегрированием обеих частей уравнения n раз. Общий интеграл уравнения содержит n произвольных постоянных.

б) Уравнение 2-го порядка $F(x,y',y'')=0$, не содержащее явно функцию y, преобразуется в уравнение 1-го порядка посредством подстановки $y'=p$, $y''=p$, где $p = p(x)$−функция от x.

в). Уравнение 2-го порядка $F(y,y',y'')=0$, не содержащее явно аргумент x, преобразуется в уравнение 1-го порядка посредством подстановки $y' = p$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$, где p = p(y).

Линейным однородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+a_2 y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1} y'+a_n y=0 \quad (1)$$

Общее решение линейного однородного уравнения n-го порядка (1) имеет вид

$$y=C_1 y_1(x)+C_2 y_2(x)+\ldots+C_n y_n(x), \qquad (2)$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots,y_n(x)$ – линейно независимые частные решения этого уравнения.

Для нахождения общего решения уравнения составляют характеристическое уравнение

$$k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} +\ldots+ a_{n-1}k + a_n = 0. \qquad (3)$$

В зависимости от корней характеристического уравнения (3) возможны случаи:

а) Если все корни характеристического уравнения $k_1, k_2, \ldots ,k_n$ – действительные и различные, то общее решение имеет вид:

$$y=C_1e^{k1x} + C_2e^{k2x} + \ldots+C_ne^{knx} \quad .$$

б) Если среди корней характеристического уравнения $k_1, k_2,\ldots, k_n$ имеются кратные ($k_1=k_2=\ldots=k_n=k$), а остальные различные, то общее решение (2) примет вид

$$y=e^{kx}(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_mx^{m-1})+C_{m+1}e^{km+1\cdot x}+\ldots+C_ne^{km-n\cdot x}$$

где m- кратность корня.

в) Если среди корней характеристического уравнения имеется пара комплексных корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то общее решение примет вид

$$y= e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

Линейным неоднородным уравнением называется уравнение первой степени относительно искомой функции и всех ее производных

$y^{(n)}+ a_1 y^{(n-1)}+\ldots+ a_{n-1} y'+ a_n y= f(x)$, где f(x) непрерывная функция непрерывная.

Общее решение такого уравнения $y=y^*+ \overline{y}$, где

y^* - общее решение соответствующего однородного уравнения,

$\overline{y}$ - какое-либо частное решение неоднородного уравнения.

Частное решения $\overline{y}$ можно найти методом подбора в следующих случаях:

1. Если $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен n-ой степени, то $\overline{y}=e^{\alpha x}\cdot Q_n(x)\cdot x^r$, где $Q_n(x)$ – многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, но с неопределенными коэффициентами, а r показывает, сколько раз число α встречается среди корней характеристического уравнения.

2. Если $f(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]$, то $\overline{y}=e^{\alpha x}[M_S(x)\cos\beta x+N_S(x)\sin\beta x]\cdot x^r$, где $M_S(x)$ и $N_S(x)$ – многочлены степени $S=max\{n,m\}$, а r – кратность корня $\alpha+\beta i$ характеристического уравнения.

Ключевые (базисные) вопросы: 1. Обыкновенное дифференциальное уравнение. 2. Задача Коши. Частное, общее решения уравнения.

Основные задачи: 1. Нахождение общего решения дифференциального уравнения. 2. Нахождение частного решения дифференциального уравнения по заданным начальным условиям. 3. Построение дифференциального уравнения по условиям задачи.

Лекция 13. Дифференциальные уравнения первого порядка.

План лекции.

1. Примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям;
2. Понятие о дифференциальном уравнении. Порядок дифференциального уравнения.
3. Решения дифференциального уравнения. Семейство решений. Теорема существования и единственности решения (без доказательства). Задача Коши. Геометрическое истолкование решения. Общее и частное решение дифференциального уравнения.
4. Уравнения с разделяющимися переменными.
5. Линейные уравнения первого порядка.

Ключевые вопросы: общее и частное решения дифференциального уравнения.

Решение уравнений с разделяющимися переменными.

Литература: [1, гл. 9].

Лекция 14. Дифференциальные уравнения высших порядков.

План лекции.

1. Возможные случаи понижения порядка дифференциального уравнения (на примере уравнений второго порядка).

2.Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Подбор частных решений при специальном виде правой части.

Лекция 15. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

План лекции.

1. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
2. Подбор частных решений при специальном виде правой части.

Знания, которыми должен владеть студент

Знания на уровне понятий, определений, описаний, формулировок

1. Дифференциальное уравнение.

1.1. Обыкновенное дифференциальное уравнение, его запись, порядок, решение, интегральная кривая.

1.2. Начальные условия. Задача Коши.

1.3. Теорема существования и единственности решения уравнения 1-го порядка.

1.4. Частное, общее, особое решения (интегралы).

1.5. Теорема существования и единственности решения для дифференциального уравнения *n-го* порядка.

1.6. Частное, общее, особое решения уравнения *n-го* порядка.

1.7. Линейное дифференциальное уравнение, однородное, неоднородное.

1.9. Линейно зависимые и независимые функции на множестве. Критерий для случая двух функций.

Знания на уровне доказательств и выводов

1. Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка с разделяющимися переменными, линейных, Бернулли, однородных, в полных дифференциалах.

2. Необходимое и достаточное условие полного дифференциала.

3. Понижение порядка дифференциального уравнения (на примере уравнений 2-го порядка).

4. Структура общего решения линейного однородного и неоднородного дифференциальных уравнений.

5. Метод вариации произвольных постоянных для отыскания решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (на примере уравнений 2-го порядка).

7. Метод Эйлера построения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (на примере уравнений 2-го порядка).

8. Метод неопределенных коэффициентов построения частного решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью (на примере уравнений 2-го порядка).

Литература: [1, гл. 10].

Модуль 6. Элементы теории рядов.

Теория рядов – часть курса математического анализа, изучающая суммы бесконечного множества слагаемых, называемых бесконечными рядами. Ряды являются действенным средством изучения функций и сильным вычислительным аппаратом, позволяющим находить с заданной точностью значения функций, вычислять приближённые значения интегралов и решать многие другие прикладные задачи.

Комплексная цель, объединяющая содержание модуля на компетентностной основе: формирование четкого представления о базовых понятиях математического анализа: числовой и функциональный ряд, сумма ряда, сходимость, интервал и радиус сходимости, равномерная сходимость, ряд Тейлора, необходимые и достаточные признаки сходимости рядов; о способах вычисления суммы ряда, определения сходимости, нахождения радиуса сходимости, разложения функций в степенные ряды; овладение основными идеями и методами использования аппарата математического анализа при вычислении значений функций, интегралов, производных и пределов.

1. Краткое изложение программного материала

Числовые ряды. Пусть задана последовательность действительных чисел $a_1, a_2, .., a_n, ...$ Выражение $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$, составленное из членов этой последовательности, называется числовым рядом. Ряд также записывается в виде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1)

Числа $a_1, a_2, .., a_n, ...$, из которых составлен ряд, называются членами ряда, a_n – общий член ряда. Суммы $S_1 = a_1$; $S_2 = a_1 + a_2$; $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$;…; $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$; …, то есть суммы нескольких первых членов ряда называются частичными суммами ряда, S_n – n-ная частичная сумма ряда.

Определение. Если последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к числу *S*, т.е. если $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд называется сходящимся, а число S – его суммой. Если же последовательность $\{S_n\}$ не имеет предела, то говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Определение. Ряд, членами которого являются члены ряда (1), начиная с (n+1) – го, взятые в том же порядке, что и в исходном ряде, называется n – м остатком ряда (или остаточным членом) и обозначается через $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = R_n$. То есть $S = S_n + R_n$.

Если ряд сходится, то предел остаточного члена равен нулю:

$\lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} R_n$, откуда $S = S + \lim_{n\to\infty} R_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

Критерий Коши сходимости числового ряда.

Теорема. Для того, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного ε нашелся такой номер $n(\varepsilon)$, что для всех частичных сумм ряда, у которых номера $m > n(\varepsilon),\ n > n(\varepsilon)$ имело место неравенство: $|S_n - S_m| < \varepsilon$. (2)

Предположим, что $n = m + k$, тогда $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{m+k}$,

$S_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$, выразим $|S_n - S_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k}| < \varepsilon$.

Из последнего неравенства вытекает еще одна формулировка критерия Коши: *Для того, чтобы числовой ряд сходился необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε нашелся номер n(ε) такой, что как только* $m > n(\varepsilon)$, то $|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k}| < \varepsilon$, где *k* – любое натуральное число.

При *k=1* $\Rightarrow$ $|a_{m+1}| < \varepsilon$. Это означает, что при $m > n(\varepsilon)$ $\lim_{n\to\infty} a_{m+1} = 0$. В общем случае $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Это свойство является необходимым условием сходимости числового ряда:

Теорема. Для того чтобы ряд сходился необходимо, чтобы предел общего члена был равен нулю.

Признаки сходимости числовых рядов. Одной из основных задач теории рядов является установление достаточных условий, позволяющих, зная общий член ряда, утверждать его сходимость (или расходимость). Эти достаточные условия носят название признаков сходимости. Рассмотрим некоторые из этих признаков.

Первый признак сравнения. Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \text{ где } a_n > 0 \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots, \text{ где } b_n > 0 \quad (2)$$

и $a_n \le b_n$ при любом *n*, начиная с некоторого номера n_0. Тогда

1) из сходимости ряда (2) с большими членами следует сходимость ряда (1) с меньшими членами;

2) из расходимости ряда (1) с меньшими членами следует расходимость ряда (2) с большими членами.

Если, хотя бы начиная с некоторого места (скажем, для $n > N$), выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

то из сходимости ряда (2) вытекает сходимость ряда (1) или – что то же – из расходимости ряда (1) вытекает расходимость ряда (2).

Второй признак сравнения. Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \text{ где } a_n > 0 \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots, \text{ где } b_n > 0, \quad (2)$$

причем можно указать такие постоянные $k > 0$ и K, что, начиная с некоторого n,

$$k \le \frac{a_n}{b_n} \le K,$$

тогда ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

Если для рядов (1) и (2) отношение $\frac{a_n}{b_n}$ стремится к некоторому положительному и конечному пределу $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = r > 0$, то ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

Интегральный признак Коши – Маклорена. Пусть дан положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если при $n \ge 1$ существует положительная, непрерывная, монотонно убывающая функция $y = f(x)$, такая что $f(n) = a_n$, то данный ряд и несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходится и расходится одновременно.

Признак Даламбера. Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами, начиная с некоторого номера, отношение последующего члена к предыдущему $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ не будет превосходить некоторого числа $q < 1$, то есть $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$, то этот ряд сходится.

На практике чаще используется признак Даламбера в предельной форме: Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ стремится к некоторому пределу, меньшему единицы $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, то этот ряд сходится. Если $q > 1$, то ряд расходится.

Признак сходимости Коши. Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \quad (1)$

с положительными членами, начиная с некоторого номера n_0, корень $\sqrt[n]{a_n}$ не будет превосходить некоторого числа $q < 1$, т.е. если

$$\sqrt[n]{a_n} \le q < 1 \ (n \ge n_0), \quad (6)$$

то ряд (1) сходится.

Если с другой стороны, для ряда (1), начиная с некоторого номера n_0, корень $\sqrt[n]{a_n}$ будет не меньше, чем некоторое $q > 1$: $\sqrt[n]{a_n} \ge q > 1 \ (n \ge n_0)$, то ряд (1) расходится.

Знакопеременные числовые ряды. Ряды с действительными членами, знаки которых изменяются при изменении номера называются знакопеременными.

Рассмотрим прежде всего так называемые знакочередующиеся ряды, т.е. ряды члены которых поочередно то положительны, то отрицательны.

Теорема Лейбница (достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда). Если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда $a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots$ образуют монотонно убывающую последовательность, стремящуюся к нулю, то есть $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то данный ряд сходится.

Перейдем к рассмотрению знакопеременных рядов.

Теорема. (достаточный признак сходимости знакопеременного ряда). Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если сходится ряд, составленный из модулей его членов $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$

Рассмотрим важные понятия абсолютной и условной сходимости знакопеременного ряда.

Определение 1. Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин этого ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Определение 2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, состоящий из абсолютных величин знакопеременного ряда, расходится, а исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то тогда исходный ряд называется условно сходящимся.

Абсолютно и условно сходящиеся ряды обладают рядом важных свойств, например:

1. Если в абсолютно сходящемся ряде произвольным образом переставить члены, то полученный ряд также будет абсолютно сходится, а сумма его будет равна сумме исходного ряда.

2. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. Тогда каково бы ни было число S, можно надлежащей перестановкой его членов получить сходящийся ряд, сумма которого будет равна S.

Функциональные и степенные ряды Выражение

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots +, u_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

называется функциональным рядом относительно переменной x.

Если переменная x может принимать только вещественные значения, а параметры функций, являющихся членами ряда (1), также все вещественные, то ряд (1) называется вещественным рядом.

Совокупность всех значений переменной x, для которых данный ряд сходится, называется областью сходимости функционального ряда.

Если значение x_0 переменной x принадлежит области сходимости функционального ряда (1), то можно говорить о сумме этого функционального ряда в точке $x = x_0$:

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots = s(x_0) \quad (2)$$

Таким образом, значение суммы функционального ряда зависит от значения x_0 переменной x, т. е. сумма функционального ряда сама является функцией переменной x.

Подчеркнем, что областью заданния суммы функционального ряда является область сходимости этого ряда.

Сходимость последовательности функций

Определение. Последовательность функций

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \ldots,\ s_n(x),\ \ldots \qquad (3)$$

сходится к предельной функции $s(x)$ в точке x_0, если

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_0) = s(x_0),$$

т.е. если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0, что при $n > n_0$

$$|s_n(x_0) - s(x_0)| < \varepsilon .$$

Определение. Последовательность функций (3) сходится к предельной функции $s(x)$ в некоторой области, если для каждого x_0 из этой области

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_0) = s(x_0),$$

т.е. если для каждого $\varepsilon > 0$ и x_0 из нашей области найдется такое n_0, что при $n > n_0$

$$|s_n(x_0) - s(x_0)| < \varepsilon .$$

Заметим, что в этом определении n_0 находится по каждому x_0 из нашей области, т.е. зависит от x_0.

Определение. Последовательность функций (3) сходится к предельной функции $s(x)$ равномерно в некоторой данной области, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что при $n > n_0$ и при любом x_0 из области $|s_n(x_0) - s(x_0)| < \varepsilon$.

Последовательность равномерно сходящихся функций обладает рядом свойств.

Теорема 1. (о пределе последовательности непрерывных функций) Если последовательность непрерывных на сегменте $[a,b]$ функций

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \dots,\ s_n(x),\ \dots$$

сходится на сегменте [a, b] к предельной функции $s(x)$ равномерно, то предельная функция $s(x)$ также непрерывна на этом сегменте.

Теорема 2. (о переходе к пределу под знаком интеграла) Если последовательность непрерывных на сегменте $[a,b]$ функций $s_1(x),\ s_2(x),\ \dots,\ s_n(x),\ \dots$ сходится равномерно в этом сегменте к предельной функции $s(x)$, то при любых $a \le \alpha \le \beta \le b$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta s_n(x)dx = \int_\alpha^\beta s(x)dx .$$

Следствие (о предельном переходе под знаком интеграла с переменным верхним пределом). Если последовательность непрерывных на сегменте $[a,b]$ функций

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \dots,\ s_n(x),\ \dots$$

сходится равномерно в этом сегменте к предельной функции $s(x)$, то при любом x из из этого же сегмента последовательность интегралов

$$\int_\alpha^x s_1(x)dx,\ \int_\alpha^x s_2(x)dx,\dots,\int_\alpha^x s_n(x)dx,\dots$$

с переменным верхним пределом, как последовательность функций, сходится к функции $\int_\alpha^x s(x)dx$ равномерно для всех x из сегмента [a, b].

Теорема 3. (о переходе к пределу под знаком производной). Пусть последовательность функций

$$s_1(x),\ s_2(x),\ \dots,\ s_n(x),\ \dots$$

сходится на сегменте $[a,\ b]$ к предельной функции $s(x)$. Пусть далее, функции из этой последовательности имеют непрерывные производные, последовательность которых

$$s_1'(x),\ s_2'(x),\dots s_n'(x),\dots$$

сходится к некоторой предельной функции $\sigma(x)$ равномерно во всем сегменте $[a,b]$.

Тогда

1) $\dfrac{d}{dx}s(x) = \sigma(x)$;

2) последовательность (3) сходится к своей предельной функции *s(x)* равномерно.

Определение равномерной сходимости функционального ряда. Функциональный ряд (1) называется сходящимся в некоторой области *D* равномерно, если в этой области последовательность его частичных сумм (3) сходится равномерно к своей предельной функции *s(x)*.

Теорема (признак равномерной сходимости Вейерштрасса). Функциональный ряд (1), каждый член которого является функцией, определенной на сегменте [*a, b*], сходится равномерно на этом сегменте, если существует такая последовательность

$$c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n,\ \dots$$

положительных постоянных, что

$$|u_n(x)| \le c_n$$

для любого *x* из [*a, b*] и любого n = 1, 2, ..., а ряд

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots$$

сходится.

Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

Теорема 1. (о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда) Пусть все члены функционального ряда (1) определены на сегменте [*a,b*], непрерывны на нем и составленный из них функциональный ряд сходится на этом отрезке равномерно.

Тогда суммой ряда (1) будет функция, непрерывная на сегменте [*a,b*].

Теорема 2. (о почленном интегрировании функциональных рядов) Если функциональный ряд (1) сходится равномерно на некотором сегменте [*a,b*] и имеет суммой функцию *s(x)*, то ряд интегралов

$$\int_\alpha^\beta u_1(x)dx + \int_\alpha^\beta u_2(x)dx + \dots + \int_\alpha^\beta u_n(x)dx + \dots$$

($a \le \alpha \le \beta \le b$) также сходится равномерно на этом сегменте и имеет суммой функцию

$$\int_\alpha^\beta s(x)dx.$$

*Теорема 3. (о почленном дифференцировании рядов)***.** Пусть ряд (1) сходится на сегменте [*a, b*], имеет сумму *s(x),* а его члены имеют на этом сегменте непрерывные производные, причем составленный из этих производных ряд

$$u_1'(x) + u_2'(x) + \dots + u_n'(x) + \dots$$

сходится на [*a, b*] равномерно и имеет сумму $\sigma(x)$.

Тогда ряд (1) сходится на [*a, b*] равномерно, и производная его суммы равна сумме ряда:

$$\frac{d}{dx}s(x) = \sigma(x).$$

Степенные ряды. Степенным рядом действительной переменной x называется функциональный ряд вида

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots, \qquad (1)$$

где x_0 - некоторое заданное действительное число,

$c_0,\ c_1, \dots,\ c_n, \dots$ - действительные числа, называемые коэффициентами ряда.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ называется также рядом по степеням разности $(x - x_0)$.

Отметим, что областью определения степенного ряда является вся числовая прямая. Степенной ряд, как представитель функциональных рядов, имеет область сходимости и область расходимости. Эти множества для степенных рядов имеют довольно простую

структуру. Заметим, что область сходимости любого степенного ряда всегда не пуста, так как любой степенной ряд сходится при $x = x_0$ и имеет сумму $s(x_0) = c_0$.

Теорема Абеля.

1) Если степенной ряд (1) сходится при $x = x_1$, то он сходится (и притом абсолютно) при всяком значении x, удовлетворяющем неравенству $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$;

2) Если ряд (1) расходится при некотором значении x_1', то он расходится при всяком x, для которого $|x - x_0| > |x_1' - x_0|$.

Теорема Абеля позволяет судить о расположении точек сходимости и расходимости степенного ряда. Действительно, если x_1 есть точка сходимости, то весь интервал ($x_0 - |x_1 - x_0|$; $x_0 + |x_1 - x_0|$) заполнен точками абсолютной сходимости; при всех значениях x вне этого интервала ряд (1) расходится.

Следующая теорема позволяет определить интервал сходимости степенного ряда.

Теорема (об интервале сходимости степенного ряда).

Пусть существует предел $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, тогда степенной ряд (1):

1) сходится абсолютно при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < R$;

2) расходится при любом x: $|x - x_0| > R$.

Число R называется радиусом сходимости степенного ряда.

Интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда.

Замечание. Если $|x - x_0| = R$, то заранее о сходимости или расходимости ряда определённо сказать нельзя и необходимо дополнительное исследование на сходимость в точках $x = x_0 \pm R$.

Замечание 1. Можно показать, что если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 0$, то ряд (1) абсолютно сходится на всей числовой прямой. В этом случае $R = \infty$. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \infty$, то ряд сходится только при $x = x_0$, то есть $R = 0$.

Замечание 2. Радиус сходимости степенного ряда можно также находить по формуле $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$.

Замечание 3. Во всех случаях (в частности, если ряд является неполным) интервал сходимости можно находить, применяя признак Даламбера или признак Коши к ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного ряда.

Ряд Тейлора. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема n раз в окрестности точки x_0. Степенной ряд вида

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

где

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ n = 0,1,2,\ldots;\ f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$$

называется рядом Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0.

Теорема (необходимый признак представимости функции степенным рядом).

Для того чтобы функция $f(x)$ была представима в окрестности точки x_0 степенным рядом вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n , \qquad (1)$$

необходимо, чтобы этот ряд являлся рядом Тейлора, то есть чтобы коэффициенты вычислялись по формулам

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \; n = 0,1,2,... \qquad (2)$$

Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные любого порядка, тогда для неё можно составить формально ряд Тейлора

$$T(f(x), x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n ; \; c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} .$$

Этот ряд может в окрестности точки x_0 либо расходиться, либо сходиться, причём сходиться может к самой функции $f(x)$ или к какой-то другой функции. Поэтому необходимо иметь условия, при которых составленный ряд Тейлора сходится к самой функции $f(x)$.

Критерий представимости функции рядом Тейлора. Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные любого порядка. Для того, чтобы в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ была представима своим рядом Тейлора, необходимо и достаточно чтобы остаточный член формулы Тейлора порядка n стремился к нулю при $n \to \infty$ для любого x из рассматриваемой окрестности.

Разложение некоторых элементарных функций в ряды Тейлора и Маклорена

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ для любого x;

2. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ для любого x;

3. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ для любого x;

4. $f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $f(x) = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

5. для $|x| < 1$ имеет место разложение

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!}x^n + ...$$

1) при $m = -1$ имеем геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \text{ (сходится при } x \in (-1;1)\text{);}$$

2) при $m = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n \text{ (сходится при } x \in [-1;1]\text{);}$$

3) при $m=-\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$$ (сходится при $x\in(-1;1]$);

6. $$\arcsin x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7+\ldots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

Этот ряд сходится при $x\in[-1;1]$; для всех этих значений сумма ряда равна $\arcsin x$.

7. $$arctgx=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots.$$

Этот ряд сходится при всех $x\in[-1;1]$.

8. $$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$ при любом $x\in(-1;1]$.

Ключевые (базисные) вопросы: Числовой ряд. 2. Сумма ряда. 3. Сходимость ряда 4. Абсолютная и условная сходимости. 5. Функциональный ряд. 6. Область сходимости функционального ряда. 7. Степенной ряд.

Основные задачи. 1. Установление сходимости знакопостоянного числового ряда. 2. Установление условной или абсолютной сходимости числовых рядов с членами разных знаков. 3. Нахождение радиуса и промежутка сходимости степенного ряда. 4. Использование рядов в приближённых вычислениях

Лекция 16. Понятие о числовом ряде и его сходимости.

План лекции.

1. Числовые ряды;
2. Сходимость ряда;
3. Сумма ряда;
4. Свойства рядов;
5. Необходимое условие сходимости ряда;
6. Теорема сравнения;
7. Признаки сходимости Даламбера, Коши.

Лекция 17. Знакопеременные ряды. Функциональные ряды, общие понятия.

План лекции.

1. Знакочередующиеся ряды;
2. Абсолютная и условная сходимость;
3. Признак Лейбница;
4. Функциональные ряды;
5. Область сходимости функционального ряда.

Лекция 18. Степенные ряды и их приложения.

План лекции.

1. Степенные ряды;
2. Радиус, интервал и область сходимости;
3. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена или Тейлора;
4. Использование рядов для приближенных вычислений.

Знания и умения, которыми должен владеть студент

Знания на уровне понятий, определений, описаний. Формулировок

1. Числовой ряд. Сумма, остаток ряда. Сходимость ряда.
2. Свойства сходящихся рядов.
3. Знакочередующийся ряд.
4. Абсолютная и условная сходимости ряда.
5. Функциональный ряд; его область сходимости.

6. Степенной ряд; его промежуток и радиус сходимости.

<u>Знания на уровне доказательств и выводов</u>

1. Свойства остатка сходящегося ряда.
2. Необходимое условие сходимости ряда.
3. Признаки сходимости и расходимости рядов с положительными членами: признак сравнения в конечной и предельной формах, Даламбера, радикальный Коши, интегральный Коши .
4. Обобщений гармонический ряд. Исследование его сходимости.
5. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда. Оценка остатка ряда.
6. Необходимое и достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора на основе формулы Тейлора.

Литература: [1, гл. 9].

Методические рекомендации по изучению дисциплины

Учебным планом по дисциплине «Математический анализ» для студентов предусмотрено участие в лекциях, практических занятиях, выполнение типовых расчетов и аудиторных контрольных работ. Завершающим этапом изучения дисциплины является сдача экзамена.

Лекции и практические занятия

Основной составной частью учебного процесса в преподавании студентам дневной формы обучения являются лекции и практические занятия. В ФГБОУ ВПО «АмГУ» посещение занятий является обязательным.

Все лекции студентам необходимо конспектировать. В конспект рекомендуется выписывать определения, формулировки и доказательства теорем, формулы и т.п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем, а также вопросы, вынесенные преподавателем на самостоятельное изучение. Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы при работе с конспектом они выделялись и лучше запоминались. Полезно составить краткий справочник, содержащий важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы дисциплины. К каждой лекции следует разобрать материал предыдущей лекции.

На практических занятиях подробно рассматриваются основные вопросы дисциплины, разбираются основные типы задач. К каждому практическому занятию следует заранее самостоятельно выполнить домашнее задание и ознакомиться с материалом к следующей теме. Систематическое выполнение домашних заданий является важным фактором, способствующим успешному усвоению дисциплины.

Чтение учебника и конспекта лекций

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только в том случае, когда хорошо усвоен предыдущий вопрос. При этом необходимо воспроизводить на бумаге все вычисления, как имеющиеся, так и пропущенные в силу их простоты.

Особое внимание следует обращать на определение основных понятий дисциплины. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют понятия, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Это является одним из важных условий усвоения дисциплины.

Курс содержит большое количество теорем. Нужно помнить, что каждая теорема состоит из условий и утверждений. Все условия должны быть обязательно использованы в доказательстве. При формулировке теоремы необходимо четко выделять все условия и четко представлять, в каком месте доказательства теоремы каждое из условий используется. Студент должен уметь привести пример математических объектов,

обладающих и не обладающих свойствами, указанными в формулировке теоремы. Доказательства теорем нужно выполнять более подробно, чем это сделано в учебнике, с кратким пояснением.

Решение задач

В процессе изучения дисциплины «Математический анализ» студенты, как правило, сталкиваются с рядом трудностей. Чтобы справиться с этими трудностями, нужно решить достаточно много задач, что даст возможность глубже понять теорию, научиться применять ее при анализе конкретной ситуации. В этой связи типовые задачи, рассмотренные в рекомендуемых учебных пособиях, следует разобрать внимательно, обращаясь при необходимости к соответствующим указаниям, подробным решениям или ответам. Задачи должны быть использованы в процессе работы над курсом и при подготовке к экзамену. При этом непременным условием является глубокое усвоение соответствующего материала по конспекту лекций или учебнику.

При решении задач следует обращать внимание не только на формальное выполнение расчетов и использование соответствующих формул, но и на логический анализ содержания задачи, объяснение выполняемых операций, использование условных обозначений, четкую формулировку как промежуточных, так и окончательных результатов решения, используемых понятий и определений. Во многих задачах полезно продумать иные возможные подходы к их решению или решение при некоторых видоизменениях условий задачи.

Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Например, если решалась задача с конкретным физическим или геометрическим смыслом, то необходимо проверить размерность полученного решения.

Решение задач определенного типа следует продолжать до приобретения твердых навыков.

Самопроверка

После изучения определённой темы и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем, проверяя себя каждый раз по учебнику или конспекту лекций. Контрольные вопросы, приводимые по дисциплине, имеют цель помочь студенту в таком повторении, закреплении и проверке прочности усвоения изученного материала.

Часто недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо повторить плохо изученный раздел, внимательно разобрав материал учебника, а также решить задачи.

Выполнение расчетных заданий

В процессе изучения дисциплины «Математический анализ» студент должен выполнить типовые домашние расчеты по основным разделам дисциплины. Не следует приступать к решению очередного расчетного задания до решения достаточного количества задач по материалу, соответствующему этому заданию. Опыт показывает, что чаще всего неумение решить ту или иную задачу типового расчета вызывается тем, что студент не выполнил это требование.

Расчетные задания должны выполняться самостоятельно. В противном случае студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться неподготовленным к защите типового расчета, а в конечном итоге к контрольной работе и к зачету.

Экзамен (Зачет)

Итоговая аттестация знаний студентов осуществляется во время экзамена (зачета) в конце семестра. На экзамене (зачете), прежде всего, выясняется отчетливое усвоение теоретических и прикладных вопросов программы и умение применять полученные знания к решению практических задач. Определения, теоремы и правила должны формулироваться точно и подкрепляться достаточным количеством примеров. Решение задачи должно проделываться без ошибок, необходимые рисунки следует выполнять

аккуратно. Студент должен уметь объяснить выбор схемы решения задачи и все остальные этапы решения задачи.

Методические указания к практическим занятиям

Формы проведения практических занятий определяются преподавателем и могут включать в себя:

- устный и письменный опрос студентов преподавателем по теоретическим вопросам дисциплины (в том числе с элементами взаимоконтроля и самоконтроля);
- фронтальную и индивидуальную работу со студентами по изучению темы модуля;
- работу в малых группах;
- проведение контрольных работ в конце изучения темы или раздела;
- учебную дискуссию, в том числе слайдовую презентацию и обсуждение докладов;
- привлечение студентов к решению проблемных ситуаций;
- учебную игру (способствующей становлению субъектной позиции студентов в обучении);
- работу с дидактическими, методическими и мультимедийными средствами обучения.

На практических занятиях осуществляется текущий контроль успеваемости студентов: на каждом занятии (по соответствующим видам работы); на последнем занятии темы или раздела соответствующего модуля (проведение контрольных работ или тестирование).

1 семестр

Модуль 1. Комплексная цель: овладеть техникой вычисления пределов функции, научиться основным приемам дифференцирования

ПЗ-1 Комплексные числа, действия с ними.

Тематика практического занятия: Понятие комплексного числа. Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексного числа. Формула Эйлера. Показательная форма записи комплексного числа. Корни из комплексных чисел.

1. Выполнить действия:

1.1. $(3+5i)+(2+i)$; 1.2. $(3+5i)-(2+i)$;

1.3. $(1+4i)-(-1-4i)$; 1.4. $5(2-3i)$;

1.5. $(3+2i)\cdot(4-5i)$; 1.6. $(3-2i)^2$;

1.7. $\dfrac{21-i}{1+2i}$; 1.8. $\dfrac{1+i}{3-i}$.

2. Найти модуль и аргумент комплексного числа, записать каждое число в тригонометрической и показательной формах:

2.1. $1+i$; 2.2. $-\sqrt{3}-i$; 2.3. $-\sqrt{3}+i$; 2.4. $1+\sqrt{3}i$;

2.5. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$; 2.6. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$; 2.7. $1-\sqrt{3}i$; 2.8. -4;

2.9. 4i ; 2.10. $-2i$.

3. Представить в алгебраической форме следующие комплексные числа:

3.1. $3(\cos\pi+i\sin\pi)$; 3.2. $4\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$;

3.3. $2(\cos 225^\circ+i\sin 225^\circ)$; 3.4. $3\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. Выполнить действия:

4.1. $3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

4.2 $\frac{1}{2}(\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ)\cdot 8(\cos 25^\circ+i\sin 25^\circ)$;

4.3. $6(\cos 70^\circ+i\sin 70^\circ):3(\cos 25^\circ+i\sin 25^\circ)$;

4.4. $\sqrt{6}(\cos 70^\circ+i\sin 70^\circ):\sqrt{3}(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ)$.

ПЗ-2 Комплексные числа, действия с ними.

Тематика практического занятия: Корни из комплексных чисел. Решение алгебраических уравнений. Основная теорема алгебры. Разложение рациональной дроби на целую часть и элементарные дроби.

1. Найти вещественные решения x и y уравнения;

1) $2(x+y)+(1-y)i=2+(4+x-y)i$;

2) $(4x-3y)+(3x+5y)i=10-(3x-2y-30)i$;

2. Решить уравнения:

1) $x^2-6x+13=0$; 2) $x^3+8=0$;

3) $2x^2+5x+6=0$; 4) $x^3-27=0$;

5) $x^4-1=0$; 6) $x^4+16=0$;

7) $x^2=-1+i$; 8) $x^3+\sqrt{3}+i=0$.

Знания и умения, которыми должен владеть студент

<u>Знания на уровне понятий, определений, описаний, формулировок</u>

1. Комплексные числа; алгебраическая, тригонометрическая, показательная формы записи; геометрическая интерпретация.

2. Сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корня из комплексных чисел.

3. Формулы Эйлера для показательной и тригонометрических функций в области комплексных чисел.

4. Многочлены в области комплексных чисел.

5. Основная теорема алгебры.

6. Разложение многочлена на линейные множители.

7. Определение кратности корня многочлена.

8. Разложение рациональной дроби на целую часть и элементарные дроби.

<u>Знания на уровне доказательств и выводов</u>

1 . Формула извлечения корня из комплексного числа.

2. Теорема Безу.

3. Разложение многочлена с вещественными коэффициентами на линейные и квадратичные множители с вещественными коэффициентами.

<u>Умения в решении задач</u>

Студент должен уметь:

1. Производить действия с комплексными числами.

2. Разлагать рациональные дроби на целую часть и элементарные дроби.

ПЗ-3 Функции. Множества. Операции над множествами.

Тематика практического занятия: Элементы теории множеств. Множество вещественных чисел. Функция. Область ее определения. Способы задания.

Задача 1. Для каждого из следующих множеств выписать все его элементы:

1) {m| m- целое, -5<m<5 };
2) {pg| p,g- простые числа, p<6, g<10};

Задача 2. Для каждого из следующих множеств выписать все его элементы:

1) $\{X \mid \{a,b\} \subset X \subset \{a,b,c,d\}\}$;
2) $\{A \mid A \subset \{a,b,c,d\},\ a \notin A,\ b \notin A\}$;
3) $\{A \mid A \subset \{a,b,c,d\},\ \{a,b\} \not\subset A\}$;

Задача 3. Найти:

1) $[1,3] \cap [2,6]$; 2) $[1,3] \cup [2,6]$; 3) $[1,3] \setminus [2,6]$; 4) $[2,6] \setminus [1,3]$.

Задача 4. Изобразить на чертеже графики следующих функций. Какие из этих функций осуществляют взаимно однозначные отображения?

1) $y = |x|$; 2) $y = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0; \end{cases}$ 3) $y = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0; \end{cases}$ 5) y=1.

Задача 5. Найти область определения функций:

1) $y = \log_3 \sin x + \sqrt{4 - x^2}$; 2) $y = \arccos\frac{2x}{1+x^2}$; 3) $y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt[3]{x+2}$;

Задача 4. Найти область значения функций:

1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \frac{6}{1+x^2}$;

Задача 5. Выяснить четность (нечетность) функций:

1) $y = x^3 \sin x$; 2) $y = x - x^3 + 5x^5$;

Контрольная работа по теме: «Комплексные числа» (1 час).

ПЗ-3 Преобразование графиков функций.

Тематика практического занятия: Основные элементарные функции, их свойства и графики. Преобразование графиков функций. Сложные и обратные функции, их графики. Класс элементарных функций.

Задача1. Построить графики функций:

1) $y = \log_2(x+4)$; 2) $y = 3^{x-1}$; 3) $y = \frac{3x-2}{x+1}$;

4) $y = \sin 2x$; 4) $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$; 5) $y = 2\sin\frac{x}{2} + 1$;

6) $y = |x^2 - 4|$; 7) $y = \log_2|x-2|$.

Задача 2. Построить графики функций: 1) $y = -2x^2+5x-2$, 2) $y = \frac{3}{x-1} - 2$.

ПЗ-4 Вычисление пределов функций.

Тематика практического занятия: Числовые последовательности, их роль в вычислительных процессах. Предел числовой последовательности. Существование предела монотонной ограниченной последовательности. Предел функции в точке. Предел функции в бесконечности. Пределы монотонных функций. Бесконечно малые в точке функции, их свойства. Сравнение бесконечно малых. Первый и второй замечательные пределы.

Задача 1. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2 - 7x + 4)$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2+x+4}\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{3+\sqrt[4]{2x^3}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x}{x-3}$.

Задача 2. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$.

1) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+6x+8}{x^3+8}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{2x^2+3x+4}$; 5) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4+2x^3-1}{3x^2-2x^4+x}$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-x^2+2x}{x^3-x^4}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+..+(2n-1)}{5n^2}$; 11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{2x+4}\right)^{7x}$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!}$; 13) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)\cdot n!}{(n+1)!}$.

14) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$; 15) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$;

16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}\right)$; 17) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x^4}{x^2+x+2}-4x^2\right)$;

18) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-5x}\right)$; 19) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$.

ПЗ-5 Вычисление пределов функций.

Задача1. Используя первый замечательный предел, вычислить:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$; **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 4x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ \operatorname{tg} x}{1-\cos 2x}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$; 7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{1-\cos x}$; 8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$;

9. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg} x}{\pi-x}$; **1**0. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x}$.

Задача 2. Используя второй замечательный предел, вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{5x+1}\right)^{2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+5}\right)^{2x+3}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-1)[\ln(3x+1)-\ln(3x-5)]$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x}}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}(1-6x)^{\frac{4}{x}}$; 7) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{1}{x-2}}$; 8) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{4}{x-3}}$.

ПЗ-6 Непрерывность функции

Тематика практического занятия: Вертикальная, горизонтальная и наклонная асимптоты. Различные определения непрерывности функции. Непрерывность элементарных функций. Односторонняя непрерывность. Классификация точек разрыва Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений, существование промежуточных значений.

Задача 1. Исследовать на непрерывность функцию $y=3^{1/(x+1)}+1$ в точках $x_1=1$ и $x_2=-1$.

Задача 2. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=(3x-2)/(x+2)$ в точках $x_1=0$ и $x_2=-2$.

Задача 3. Исследовать функцию $f(x)=\dfrac{5x+3}{x+2}$ на непрерывность в точках $x_1=-2$ и $x_2=-3$.

Задача 4. Дана функция $f(x)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad x<0,\\ \cos x, & \text{если} \quad 0\le x<\pi/2,\\ 1-x, & \text{если} \quad x\ge \pi/2.\end{cases}$

Исследовать её на непрерывность. Сделать схематический чертёж.
Определить характер точек разрыва:

1. $y=\dfrac{x+2}{x-2}$; 2. $y=\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$;

3. $y=\dfrac{1}{1-e^{1-x}}$; 4. $y=\dfrac{e^x}{(x-1)^2}$;

5. $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\ne 0\\ -1, & x=0\end{cases}$; 6. $y=\begin{cases}e^{\frac{1}{x^2}}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

ПЗ-7 Контрольная работа 1.

В результате изучения модуля студент должен уметь:

1. Проводить простейшее исследование элементарных функций (область определения, множество значений, возрастание, убывание, нахождение обратной функции и т.п.).
2. Вычислять пределы на основе теорем о пределах и непрерывности функций.
3. Раскрывать неопределённости с помощью основных методов.
4. Исследовать непрерывность функций.

Завершается модуль контрольной работой (2 час, во время практ. занятий), сдачей РГР и тестом, содержащим вопросы теории и практические задачи.

Модуль 2. *Комплексная цель: научиться основным приемам дифференцирования, изучить возможности применения теории пределов и дифференцирования к исследованию функций.*

ПЗ-8 Дифференцирование функции одной переменной.

Тематика практического занятия: Правила нахождения производной. Производная сложной и обратной функции. Производные высших порядков.

Задача1. Исходя из определения производной, найдите производную функции:

1**.1.** $y=2x+3$. 1**.2.** $y=1-5x$. 1**.3.** $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{4}$.

1**.4.** $y=(x+1)^2$. 1**.5.** $y=\sqrt{x+1}$. 1**.6.** $y=\dfrac{1}{x-2}$.

Задача 2. Вычислить производные:

2.1. 1) x^2-6x+8; 6) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

2) $1+x+x^2+x^3$; 7) $\sqrt[3]{x}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$;

3) $-1-x^{-1}-x^{-2}$; 8) $x+\dfrac{1}{x}$;

4) $2x+2\sqrt{x}$; 9) $2x-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$;

5) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}$; 10) $-\dfrac{2}{5}\sqrt{x^5}$.

2.2. 1) $\sin x - \cos x$; 4) $x - \operatorname{arctg} x$;

2) $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$; 5) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;

3) $x - \arcsin x$; 6) $\cos x + \arccos x$.

Задача 3. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти производные функций:

3.1. $y=\cos(x^2+2x-4)$. 3.2. $y=\sin(x^3-3x+5)$.

3.3. $y=\sin e^x$. 3.4. $y=\cos \ln x$.

3.5. $y=e^{2x-3}$. 3.6. $y=e^{-x^2}$.

3.7. $y=e^{\operatorname{tg}x}$. 3.8. $y=e^{\sin x}$.

3.9. $y=\ln(1+2\sqrt{x})$. 3.10. $y=\ln(2x^2+4x-1)$.

Задача 4. Найти производные 3-го порядка от функций:

4.1. $y=e^x \times \cos x$. 4.2. $y=x^2 \times e^x$.

4.3. $y=\ln(2x+5)$. 4.4. $y=x\ln x$.

Задача 5. Найти производные n-го порядка от функций:

5.1. $y=\frac{1}{x}$. 5.2. $y=e^{2x}$.

5.3. $y=5^x$. 5.4. $y=\ln(1+x)$

ПЗ- 9 Дифференцирование функций

1. Найти производные y'_x функций, заданных неявно:

1) $2x^2y+y^3-4x=0$; 2) $x^3y^4+xy^2-4x+5y=0$;

3) $e^{x+y}=xy$; 4) $\cos(y^2+x)=y+x^3$;

5) $x\ln y+y\ln x=0$; 6) $x\cos y-y\sin x=0$;

7) $\sqrt{x}+\sqrt{y}-2=0$; 8) $arctg(x+y)=x$.

2. Найти производные степенно - показательных функций:

1) $y=(\sin x)^x$; 2) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

3) $y=x^{\sqrt{\ln x}}$; 4) $y=(\sin x)^{tgx}$;

5) $y=(\cos x)^{\sqrt{x}}$; 6) $y=(x^2+2)^x$;

7) $y=\frac{(8x+4)^2\cdot\sqrt[3]{(3-5x)^2}}{(3-7x)^2}$; 8) $y=\frac{(x^2+1)^3\cdot\sqrt{(6x+9)^3}}{(4x-x^2)^4}$.

3. Найти производные функций, заданных параметрически:

1) $\begin{cases} x=2t+1; \\ y=t^3. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=\frac{1}{t+1}; \\ y=\frac{t}{t+1}. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=t^2+1; \\ y=\ln t. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=e^{2t}; \\ y=t^2. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x=a(\cos t-t\sin t); \\ y=a(\sin t-t\cos t). \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x=a\cos^2 t; \\ y=\sin^2 t. \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x=a(t-\sin t); \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x=e^t\sin t; \\ y=e^t\cos t. \end{cases}$

4.Найти производные второго порядка функций:

1) $y=x^3-4x^2+5x-1$; 2) $y=\ln(x+1)$; 3) $y=\sqrt{1-x^2}$; 4) $y=\sin^2 3x$;

5) $y = xe^x$; 6) $y = \ln x$; 7) $y = \cos 4x^2$; 8) $y = 5^{3x}$;

9) $\begin{cases} x = 2t^2 + t; \\ y = t^3. \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x = \ln t; \\ y = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$

ПЗ-10 Дифференциал функции.

Тематика практического занятия: Дифференциал функции и его применение.

Задача 1. Найти дифференциалы функций:

1.1. $y = x^3 - 3\ln x$. 1.2. $y = \cos x \times e^x$.

1.3. $y = \sin 3x$. 1.4. $y = \operatorname{tg} \ln x$.

1.5. $y = x^2 \operatorname{arctg} x$. 1.6. $y = \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$.

1.7. $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$. 1.8. $y = \sin 2x + 2x\sqrt{x}$.

Задача 2. Найти приближенно приращение Δy:

1) функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, если $x = 4$, $\Delta x = 0{,}08$;

2) функции $y = \sin x$, если $x = \dfrac{\pi}{3}$, $\Delta x = 0{,}02$;

Задача 3. Найти приближенное значение:

3.1. $\ln 0{,}9$. 3.2 $\sin 29^0$.

Контрольная работа № 2.

ПЗ- 11 Приложения производной.

Тематика практического занятия: Правило Лопиталя. Уравнение касательной к кривой в данной точке. Понятие эластичности функции и ее применение в экономическом анализе. Кривые спроса и предложения.

Задача 1. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

1.1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$. 1.2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{e^{2x} - 1}$. 1.3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1 + x)}$. 1.4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{e^x - e^{\sin x}}$.

1.5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$. 1.6. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{1/x}$. 1.7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2 - 2x + 10)}{\ln(3x^2 + x - 5)}$.

1.8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - 1}{\ln x}$. 1.9. $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{\ln(x - 1)}{ctg\pi x}$. 1.10. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$.

Задача 2. Составить уравнения касательных к графикам функций:

2.1. $y = x^2 - 3x + 2$ в точке (3;2) .

2.2. $y = \sqrt{x}$ в точке (4;2) .

2.3. $y = \ln x$ в точке пересечения с осью Ох.

2.4. $y = x^2 - 5x + 6$ в точках пересечения с осью Ох .

2.5. $y = e^{7x}$ в точке пересечения с осью Оу.

ПЗ- 12 Приложения производной к исследованию функции.

Тематика практического занятия: Приложения производной к исследованию функции: интервалы монотонности, точки экстремума функции и нахождение. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке. Исследование выпуклости функции. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

Задача 1. Зависимость спроса (объема продаж) от цены выражается формулой d(p)= $e^{-\frac{p^2}{16}}$. Определить, для каких p спрос эластичен, неэластичен, нейтрален.

Задача 2. Зависимость спроса от цены при p≥ p_0 выражается формулой d(p)= $\frac{1}{p^{\alpha}}$, где α >0-const. Определить, когда спрос будет эластичен, неэластичен, нейтрален.

Задача 3. Пусть x – объем продаж некоторого товара торговой фирмой, p(x) – функция спроса (выражает зависимость между ценой и объемом продаж), Z(x) – функция издержек (затраты фирмы на реализацию товара). Учитывая, что прибыль от продажи товара находится по формуле V(x) = x p(x) – Z(x), определить:
а) интервалы значений объемов продаж, при которых торговля этим товаром будет прибыльной (убыточной);
б) оптимальные значения объема продаж x и цены p, обеспечивающие максимум прибыли V(x), вычислить V_{max}.
Используя эскизы графиков функций выручки W(x) =x p(x) и функции издержек Z(x), дать геометрическую интерпретацию полученным результатам.
Выполнить задание для случаев:
2.1. p(x)=155-3x, Z(x)=1800+5x; 2.2. p(x)= 100-2x, Z(x)= 375+3x^2;
2.3. p(x)= $\frac{10}{\sqrt{x}}$, Z(x)=21+x.

Задача 4. Найти максимумы и минимумы и промежутки возрастания и убывания функций:

1.1. f(x)=x^3 – 3x^2 – 9x + 5; 1.2. f(x)= $\frac{x^2-6x+13}{x-3}$; 1.3. f(x)=xlnx; 1.4. f(x)= x – arctg2x;

Задача 5. Из квадратного листа жести площадью 30см^2 требуется сделать открытую сверху коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом. Каковы должны быть стороны вырезаемых квадратов, чтобы вместимость коробки была наибольшей?

Задача 6. На странице книги печатный текст должен занимать $\boldsymbol{S}$ см^2.Верхние и нижние поля должны быть по $\boldsymbol{a}$ см., левое и правое - по $\boldsymbol{b}$ см. Каковы должны быть размеры страницы для того, чтобы ее площадь была наименьшей?

Задача 7. Резервуар, открытый сверху имеет форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Каковы должны быть размеры резервуара, чтобы на его лужение пошло наименьшее количество материала, если он должен вместить 108 литров воды.

ПЗ- 13 Приложения производной к исследованию функции.

Задача 1. Исследовать функцию и построить ее график:

1. $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$; 2. $y=\frac{4x}{4+x^2}$; 3. $y=\frac{x}{x^2-4}$.

В результате изучения модуля студент должен уметь:

1. Находить производные сложных функций, заданных явно.
2. Находить производные функций, заданных неявно и параметрически.
3. Находить дифференциалы сложных функций.
4. Находить производные и дифференциалы высших порядков.
5. Решать задачи с использованием физического и геометрического смысла производной.

6. Вычислять различного рода пределы при помощи правила Лопиталя.

7. Определять интервалы возрастания (убывания) функции, точки локального экстремума.

8. Находить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

9. Находить интервалы выпуклости вверх (вниз) графика функции и точки перегиба.

10. Находить асимптоты графика функции.

11. Строить графики функций.

Завершается модуль контрольной работой (1 час, во время практ. занятий), сдачей РГР и тестом, содержащим вопросы теории и практические задачи.

Модуль 3. Комплексная цель: освоить технику исследования функций многих переменных на экстремумы (нелинейные задачи оптимизации).

ПЗ-14 Функции нескольких переменных.

Тематика практического занятия: Функции нескольких переменных. Область определения. Предел функции. Непрерывность. Частные производные.

Задача 1. Вычислить:

1.1. значения F(2,3), F(1,2), F(2,1), F(a,0), F(0,a), если $F(x,y) = \dfrac{x-2y}{y^2-x^2}$;

1.2. значения F(2,4), F(4,2), F(1,a), если $F(x,y) = x^y + \sqrt{y-2x+6}$.

Задача 2. Найти области определения функций:

2.1. $z = \dfrac{5}{x^2+y^2}$; 2.2 $z = \dfrac{1}{x+y}$; 2.3. $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$; 2.4. $z = \ln(xy)$;

2.5. $z = \dfrac{4}{x^2-y^2}$; 2.6. $z = \sqrt{x-y}$; 2.7. $z = \arcsin(x^2+y^2)$.

Задача 3. Построить несколько линий уровня функций:

3.1. z=xy; 3.2. $z=y-x^2$; 3.3. $z=\dfrac{5}{x+y}$; 3.4. $z=\ln(x^2+y^2)$; 3.5. $z=\dfrac{7}{x^2+y^2}$.

Задача 4. Найти частные производные 1-го порядка функции:

4.1. $z=x^2-2xy-5y^3$; 4.2. $z=2x^3+3x^2y-y+5$; 4.3. $z=e^{x^2-y^2}$; 4.4. $z=\ln(x^2+y^2$;4.5. $z=\dfrac{y}{x}$;

4.6. $z=\dfrac{x-y}{2x+y}$; 4.7. $z=x^y$. 4.8. $z=x^2e^{xy}$; 4.9. $z=\operatorname{arctg}(\sqrt{x}e^y)$; 4.10. $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

Задача 5. Найти частные производные 2-го порядка:

5.1. $z=x^2-2xy+5y^2$; 5.2. $z=\sqrt{x}y^2$; 5.3. $z=\dfrac{x^2}{1-2y}$; 5.4. $z=\ln(x^2-y^2)$.

Задача 6. Найти частные производные 3-го порядка для функций:

6.1. $z=2x^3+xy^2-y^3+y^2-x$; 6.2. $z=\dfrac{x^3}{\sqrt[3]{y}}$.

ПЗ-15 Приложения функции нескольких переменных

Тематика практического занятия: Производная по направлению и градиент функции. Локальный и глобальный экстремумы. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Примеры применений при поиске оптимальных решений.

Задача 1. Найти grad z(x,y) для функции:

1.1. $z = \sqrt{x}y + tg(y^2)$; 1.2. $z = \dfrac{xy}{e^x+e^y}$;

1.3. $z = \ln(x\sqrt{y} + \sin x)$; 1.4. $z = e^{\cos(x\ln y)}$.

Задача 2. Построить линии уровня и grad z в точке A(1;2) для функций:

2.1. $z=4-x^2-y^2$; 2.2. $z=x^2-y$; 2.3. $z=2x+y-3$; 2.4. $z=\frac{y}{x}$.

Контрольная работа № 3

ПЗ-16 Экстремумы функции нескольких переменных.

Задача 1. Найти экстремумы функции:

1.1. $z= 3x^2 +xy+2y^2+4x-7y+15$; 1.2. $z= -x^2+2xy-2y^2 +2x+20$;

1.3. $z= 5x^2 +2xy - y^2-4x-8y+10$; 1.4. $z= x^3 +8y^3 -6xy +1$;

1.5. $z= 2x^3 -xy^2 +5x^2+y^2$; 1.6. $z= y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

ПЗ-17 Приложения функций нескольких переменных в экономике

Задача 1. Задана функция спроса $D = 500 - 4p + 3p_A + 0{,}006y$, цена данного товара $p = 12$, цена альтернативного товара $p_A = 16$, доход потребителей $y = 2000$. Найти коэффициенты эластичности при заданных значениях p, p_A, y и пояснить их экономический смысл.

Задача 2. Задана функция полезности U= ln (x+2y) + ln (y-30), где x – количество товара X и y- количество товара Y. Требуется оценить изменение полезности, когда x изменяется от $x_1 = 90$ до $x_2 = 96$, а y от $y_1 = 120$ до $y_2 = 115$. Пояснить экономический смысл решения.

Задача 3. Найти предельные полезности и предельную норму замещения товара X на товар Y для функция полезности U= ln (2x+y) + $\frac{y}{x}$, где x – количество товара X и y- количество товара Y в точке M(6, 17).

Задача 4.Задана производственная функция $Q = 6 + KL$, Q – количество произведенных товаров или услуг, K и L – ресурсы. Построить кривые безразличия при $Q = 10$, вычислить коэффициент заменяемости ресурсов R_A, если M(4, 1), пояснить экономический смысл решения.

Задача 5. Производственная функция имеет вид $Q= 3K^2+9LK$, где Q – выпуск продукции в единицу времени; K – капитал; L – труд. Затраты на единицу капитала и труда составляют соответственно a и b, а общая сумма затрат равна c. Требуется определить уровень затрат на капитал и труд, когда выпуск продукции максимальный. Решить задачу двумя способами: методом подстановки и методом множителей Лагранжа, a =7, b =9, c =576.

В результате изучения модуля студент должен уметь:

1. Находить область определения функции двух аргументов.
2. Находить частные производные 1-го и высших порядков явно заданной функции.
3. Находить производные неявных функций.
4. Находить полные дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции двух аргументов.
5. Находить безусловные и условные экстремумы функции.
6. Находить наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области.

Учебно-методическая литература:[1]

Завершается модуль контрольной работой (1 час, во время практ. занятий), сдачей РГР и тестом, содержащим вопросы теории и практические задачи (в РГР и тест включены вопросы модулей 2 и 3).

ПЗ-18 Итоговое занятие

Итоговый тест, включающий вопросы модулей 1, 2, 3.

Семестр 2

Модуль 4. *Комплексная цель: освоить основы теории интегрирования.*

ПЗ-1 Понятие неопределенного интеграла.

Тематика практического занятия: Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Использование таблиц интегралов.

Задача 1. Проверить, что:

1) $\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} arctg \frac{x}{2} + C;$ 2) $\int 2\sqrt{x}dx = \frac{4x\sqrt{x}}{3} + C;$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C;$ 4) $\int e^{-5x}dx = -\frac{1}{5}e^{-5x} + C;$

5) $\int \frac{dx}{x^4+x^2} = -\frac{1}{x} - arctgx + C;$ 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C;$

7) $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx = \frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)} + arctg(x+1) + C.$

Задача 2.Вычислить интегралы:

1. $\int (5x^4 - x^2 + \sqrt{x} + \frac{2}{x})dx.$ 2. $\int (x^3 + 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2})dx.$

3. $\int (2^x+1)^2 dx.$ 4. $\int (\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{1+x^2})dx.$

5. $\int \cos x(2\mathrm{tg}\, x + \frac{e^x}{\cos x} + 4)dx.$ 6. $\int \sin x(1 + \frac{2}{x^3 \sin x} - 4ctgx)dx.$

7. $\int \frac{2 - x\cos^2 x + 3ctg^2 x + 5\cos^3 x}{\cos^2 x}dx.$

ПЗ-2 Методы неопределенного интегрирования.

Тематика практического занятия: Интегрирование по частям и заменой переменной.

Задача 1. Вычислить интегралы:

1.1. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$; 1.2. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}dx$; 1.3. $\int \frac{4x+3}{(x-2)^2}dx$;

1.4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$; 1.5. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$; 1.6. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}dx$.

Задача 2. Вычислить интегралы:

2.1. $\int (4x+1)\sin 2x dx$; 2.2. $\int x^2 \ell^{3x} dx$; 2.3. $\int x^2 \ln 4x dx$;

2.4. $\int x\cos(3x+5)dx$; 2.5. $\int \arcsin x dx$; 2.6. $\int \ln 4x dx$.

ПЗ-3 Интегрирование дробно-рациональных функций.

Задача 1. Вычислить интегралы:

1.1. $\int \frac{3x-7}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x.$ 1.2. $\int \frac{x+8}{x^2+x-2}dx.$

1.3. $\int \frac{dx}{x^2-1}.$ 1.4. $\int \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}.$

1.7. $\int \frac{2x+3}{(x-2)^3}\mathrm{d}x.$ 1.8. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}.$

1.9. $\int \frac{2x+1}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x.$ 1.10. $\int \frac{4x-3}{x^2-2x+5}dx.$

ПЗ- 4 Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций.

ПЗ- 5 Методы определенного интегрирования.

Тематика практического занятия: Определенный интеграл, его свойства. Формула Ньютона—Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов. Методы определенного интегрирования.

Задача 1. Составлением интегральных сумм и переходом к пределу найти интегралы: 1.1. $\int_a^b c\,dx$; 1.2. $\int_0^a x\,dx$; 1.3. $\int_0^a e^x\,dx$

Задача 2. Вычислить интегральную сумму S_5 для интеграла $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, разбив отрезок [1;2] на пять равных частей и взяв в каждой части ее середину. Сравнить с точным значением интеграла.

Задача 3. Выполнить задание предыдущей задачи для интеграла $\int_1^2 x^2 dx$.

Задача 4.Вычислить:

4.1. $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. 4.2. $\int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x)dx$. 4.3. $\int_0^1 e^{2x} dx$. 4.4. $\int_0^1 (\sqrt{x} + x^2)dx$.

4.5. $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$. 4.6. $\int_0^1 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$. 4.7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx$; 4.8. $\int_1^2 \ln x dx$.

4.9. $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$; 4.10. $\int_4^9 \frac{xdx}{\sqrt{x}-1}$; 4.11. $\int_0^1 \left(e^x+4\right)^2 e^x dx$.

ПЗ-6 Приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы.

Тематика практического занятия: Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла. Несобственные интегралы первого и второго рода.

Задача 1. Найти площади фигур, ограниченных линиями:

1.1. $y= e^x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$.
1.2. $y= x^2+5x+6$, $x=-1$, $x=2$, $y=0$.
1.3. $y= -x^2+2x+3$, $y=0$.
1.4. $y=x^7$, $x=2$, $y=0$.
1.5. $y= \ln x$, $x=e$, $y=0$.
1.6. $y= \sin x$, $y=0$, $0 \le x \le \pi$.

Задача 2. Найти объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной линиями:

2.1. $y= 4-x^2$, $y=0$, $x=0$, где $x \ge 0$, вокруг: 1) оси Ox; 2) оси Oy.
2.2. $y= e^x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$ вокруг: 1) оси Ox; 2) оси Oy.
2.3. $y= x^2+1$, $y=0$, $x=1$, $x=2$ вокруг: 1) оси Ox; 2) оси Oy.

Задача 3. Исследовать сходимость и вычислить сходящиеся интегралы:

3.1. 1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$; 3) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$; 4) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a}$, $a > 0$.

3.2. 1) $\int_0^{+\infty} e^x dx$; 2) $\int_{-\infty}^0 e^x dx$. 3.3. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$. 3.4. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Учебно-методическая литература:[1]

ПЗ-7 Контрольная работа № 1.Защита РГР №1.

В результате изучения модуля студент должен уметь:

1. Сводить интегралы к табличным с помощью свойства линейности и подведением под знак дифференциала.

2. Подбирать нужную замену переменной в интегралах известных типов.

3. Интегрировать простейшие рациональные и иррациональные выражения, содержащие квадратный трехчлен.

4. Интегрировать по частям. Знать классы функций, интегрируемых по частям.

5. Интегрировать рациональные дроби.

6. Сводить интегралы от некоторых иррациональных выражений к интегралам от рациональных функций.

7. Интегрировать простейшие тригонометрические функции и функции вида R(sinx, cosx), *R(tgx)*.

8. Вычислять простые определённые интегралы, используя формулу Ньютона-Лейбница, замену переменной, формулу интегрирования по частям.

9. Вычислять по определению или устанавливать сходимость (расходимость) несобственных интегралов.

10. Строить и использовать формулы для нахождения площадей, длин дуг плоских кривых

Завершается модуль контрольной работой, куда входят тестовые вопросы по теории модуля и практические задачи.

Модуль 5. *Комплексная цель: освоить основы теории дифференциальных уравнений.*

ПЗ-8 Дифференциальные уравнения первого порядка.

Тематика практического занятия: Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Основные классы уравнений, интегрируемых в квадратурах.

Задача 1.Выяснить, является ли функция $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ решением дифференциального уравнения $2y' + y^3 = 0$.

Задача 2. Выяснить, является ли функция $y = x + Cx^2$ решением дифференциального уравнения $xy' - 2y + x = 0$.

Задача 3. Является ли функция $y = Ce^{x^2} + x$ решением дифференциального уравнения $y' - 2xy + x^2 = 0$?

Задача 4. Является ли функция $y = e^{\sin x} + C\cos x$ решением дифференциального уравнения $y' - y\cos x = 0$?

Задача 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

5.1. $\cos x\,(1 + y^4)dx = 2y\,dy$.

5.2. $tgx \cdot y' = ctgy$.

5.3. $\sqrt{x}y' - (1 + 3x)y = 0$.

5.4. $(\sqrt{\sin x \cdot y} + \sqrt{\sin x})y' - \sqrt{y}\cos x = 0$.

Задача 6. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

6.1. $3yy' = \frac{x}{2}$, $y(4) = 2$; 6.2. $xy' = \frac{y}{x}$, $y(1) = 1$.

ПЗ-9 Дифференциальные уравнения первого порядка.

Тематика практического занятия: Однородные и линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

1. Проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения.

1. $y' = \ell^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$; 2. $y' = \frac{y-x}{y+x}$; 3. $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y$;

4. $y' = \frac{y^2}{xy - x^2}$; 5. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$, $y(1) = 0$. 6. $xy' = \frac{x}{\sin\frac{y}{x}} + y$.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения:

2.1. $y' - \frac{3y}{x} = x^3 \sin x$. 2.2. $y' + ytgx = 2\cos^2 x$.2.3. $y' - 2y = 5e^x$. 2.4. $y' - 2xy = \frac{e^{x^2}}{1+x^2}$;

2.5 $y' - \frac{y}{3}\sin x = -y^4 \sin x$.

ПЗ-10 Дифференциальные уравнения высших порядков.

Тематика практического занятия: Дифференциальные уравнения высших порядков, решаемые понижением порядка.

1. Найти общее или частное (если заданы начальные условия) решение дифференциального уравнения.

1. $y'''=6x+1$; 2. $y''' =4\cos 2x$, *если* $y(0)=0$, $y'(0)=0$; $y''(0) = 1$;

3. $xy'' = y'$; 4. $y'' + \frac{y}{x} = 0$; 5. $yy'' = (y')^2$; 6. $y'''x\ln x = y''$;

7. $y'' + (1 + y'^2)^{3/2} = 0$; 8. $4y^3y'' = y^4 - 1$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$;

9. $2xy''' = y'$; 10. $y^3y'' + 64 = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$.

ПЗ-11 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных.

Тематика практического занятия: Решение линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

2.1. $2y''+ y' - y = 0$; 2.2. $y''- 9y = 0$;

2.3. $y'' + 4y' = 0$; 2.4. $y'' - 4y' + 4y = 0$;

2.5. $y'' + y' - 2y = 0$ 2.6. $y'' + 4y' + 5y = 0$.

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее условиям

2.1. $y'' - 4y' + 3y = 0$, *при* $y(0)=6$, $y'(0)=10$;

2.2. $y'' - 2y' + y = \sin x + 2\cos x$, если условиям $y(0)=1$, $y'(0)=0$;

3.Решить задачу Коши $y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\cos \pi x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$

ПЗ-12 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

Тематика практического занятия: Решение линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

1.Решить уравнения.

1. $y'' + y' - 2y = 3xe^{-x}$; 2. $y'' + 4y' + 5y = x^2 - 1$

3. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$; 4. $y'' - 2y' = x^2 - 2$;

5. $y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}$; 6. $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x - 2\cos 2x$;

7. $y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2}\cos 2x$; 8. $y'' - 4y' + 4y = \sin 3x$.

2. Найти частное решение уравнения $y'' - 2y' + y = \sin x + 2\cos x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Учебно-методическая литература:[1]

ПЗ-13 Контрольная работа № 2. Защита РГР №2.

В результате изучения модуля студент должен уметь:

1. Решать дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными, линейные, Бернулли, однородные, в полных дифференциалах.

2. Решать дифференциальные уравнения 2-го порядка путём понижения порядка (в трех случаях, допускающих понижение порядка).

3. Решать линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка методом вариации произвольных постоянных.

4. Решать линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью.

Завершается модуль контрольной работой и защитой РГР.

Модуль 6 . *Комплексная цель:* овладение основными идеями и методами использования аппарата математического анализа при вычислении значений функций, интегралов, производных и пределов.

ПЗ-14 Исследование сходимости рядов с положительными членами.

Тематика практического занятия: Исследование сходимости рядов с помощью признаков сравнения, Даламбера, Коши.

1.Исследовать сходимость данных рядов с помощью признака сравнения.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{4n}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+1}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4n+1}$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2+1}$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+4n+1}$.

2. Исследовать сходимость рядов с помощью признака Даламбера.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$

3. Исследовать сходимость рядов с помощью признака Коши.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+4}{3n+1}\right)^n$.

4. Исследовать сходимость рядов с помощью интегрального признака.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$.

ПЗ-15 Исследование сходимости рядов с произвольными членами.

Тематика практического занятия: Исследование сходимости знакопеременных рядов, вычисление суммы ряда с заданной точностью.

1.Пользуясь признаком Лейбница, исследовать сходимость следующих рядов.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n}{3n+1}$

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n3^n}$ с точностью 0,001.

3. Выяснить, какие из следующих рядов сходятся абсолютно.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{1}{n!}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{1}{3^n}$.

ПЗ-16 Степенные ряды. Разложение функций в степенные ряды.

Тематика практического занятия: Нахождение радиуса и интервала сходимости степенных рядов, методы разложения функций в степенные ряды.

1. Найти области сходимости степенных рядов.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n4^n}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}10^n x^n$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2^n}$; 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{n^2}$; 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n}$.

2. Разложить функции в ряд Тейлора по степеням (x - a). Найти радиус сходимости R полученного разложения:

1) $\frac{1}{x+3}, a=-2.$ 2) $\ln(5x+3), a=1.$

ПЗ-17 Приложения рядов.

Тематика практического занятия: Применение теории рядов к вычислению значений функций, интегралов, решению дифференциальных уравнений.

1. Вычислить определенный интеграл с точностью 0,001, используя разложения в ряд подынтегральной функции.

1. $\int_0^{\frac{1}{3}}\sin x^2 dx$; 2. $\int_0^{\frac{1}{2}}\ell^{-x^2}dx$; 3. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$; 4. $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

2. Вычислить значение $\sin 20^0$ с точностью 0,01.

3. Используя разложения элементарных функций в ряд Тейлора вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(tgx-\sin x)-x^3}{x^5}.$$

Учебно-методическая литература:[1]

В результате изучения модуля студент должен уметь:

1. Устанавливать сходимость или расходимость ряда с положительными членами.
2. Устанавливать сходимость или расходимость, условную или абсолютную сходимость ряда с членами любого знака.
3. Находить радиус и промежуток сходимости степенного ряда.
4. Разлагать функции в степенной ряд.
5. Применять теорию рядов к вычислению значений функции, интегралов, решению дифференциальных уравнений.

Завершается модуль контрольной работой и сдачей индивидуального домашнего задания.

ПЗ-18 Итоговое тестирование.

Тематика практического занятия: тестирование по материалу всех модулей семестра.

Методические указания по самостоятельной работе студентов.

Содержание самостоятельной работы студентов.

Самостоятельную работу студентов (СРС) можно разделить на текущую и творческую.

Текущая СРС направлена на углубление и закрепление знаний студента, подготовку к практическим занятиям, составление конспекта тем, выносимых на самостоятельную работу, подготовку к контрольным работам, выполнение индивидуальных работ, подготовку к зачетам. Объем этой работы соответствует часам учебного времени, отводимого на самостоятельную работу в каждом семестре.

Творческая проблемно-ориентированная самостоятельная работа (ТСР) ориентирована на развитие интеллектуальных умений, профессиональных компетенций, повышение творческого потенциала студентов и включает в себя:

1. Написание рефератов и их презентацию на студенческих конференциях;
2. Участие в олимпиадах различного уровня.

Необходимой составляющей самостоятельной работы является систематическое выполнение индивидуальных домашних заданий – типовых расчетов (РГР), направленных на формирование универсальных алгоритмических навыков применения дисциплины.

Особенность данной формы самостоятельной работы состоит в систематической практической деятельности обучаемого. Отчет о такой работе состоит из решения задач с чертежами и комментариями. Типовые расчеты в достаточной форме обеспечены методической литературой.

Темы типовых расчетов и их распределение по семестрам

1 семестр.

РГР № 1 « Введение в математический анализ»;

РГР № 2 «Дифференциальное исчисление и его приложения»;

ИДЗ « Функции многих переменных».

2 семестр.

РГР № 3 «Приложения интегрального исчисления»;

РГР № 4 «Дифференциальные уравнения»;

ИДЗ «Неопределенный интеграл»;

ИДЗ « Ряды».

12. Контроль знаний

Текущий контроль знаний.

Изучение любой дисциплины невозможно без систематического контроля, который позволяет следить за уровнем усвоения изучаемого материала, провести соответствующую коррекцию в случае необходимости.

Рубежный и итоговый контроль по дисциплине осуществляется на основе рейтинг – плана дисциплины для каждого семестра, в котором в соответствии с учебным и календарным планами указаны все виды отчетности.

Методика проведения текущего и итогового контроля знаний студентов

Вводится балльно-рейтинговая система.

Рейтинговая система оценки успеваемости студентов - комплекс мероприятий, обеспечивающих проверку качества учебной работы студентов при освоении ими основных образовательных программ.

Оценка качества учебной работы студента в рейтинговой системе является кумулятивной (накопительной) и используется для управления образовательным процессом, а также при решении вопросов назначения государственных академических и именных стипендий и т.д.

При оценке преподавателем работы студента в течении семестра учитывается:

-посещаемость учебных занятий;

- результаты прохождения тестирования;

- результаты выполнения контрольных работ (семестровых заданий, практикумов, расчетных работ, лабораторных работ, коллоквиумов и пр.);

- уровень подготовки рефератов и эссе;

- степень участия в форумах и т.д.

Рейтинговая система предусматривает непрерывный контроль знаний студентов на всех этапах обучения, интегрирование результатов контроля от одного этапа к другому, определение рейтинга студента по дисциплине, за семестр, учебный год, период обучения.

Основные задачи

- ✓ поддерживать мотивацию активной и равномерной работы студентов в семестре;
- ✓ существенно расширить, углубить и повысить эффективность регулярной самостоятельной учебной работы студентов в семестре;
- ✓ получить более точную и объективную оценку уровня знаний и уровня профессиональной подготовки студентов.

Организация учебного процесса

Рейтинговая система оценки успеваемости студентов в ходе всех форм контроля осуществляется по 100-балльной шкале. Контроль знаний ведется непрерывно и имеет два уровня: контроль текущей работы в семестре и семестровый контроль (экзамен).

Если по результатам промежуточного контроля студент наберет 60 и более баллов, то автоматически получает семестровый зачет по дисциплине в соответствии со шкалой перевода со 100-балльной системы на 5-балльную. При желании повысить свой рейтинг по дисциплине, завершающейся экзаменом, студент проходит семестровый контроль.

Отметка о зачете «зачтено» выставляется по результатам текущей аттестации, без дополнительного письменного опроса, студенту, набравшему 60 и более баллов.

Студент, набравший по результатам текущего контроля 20 - 59 баллов, допускается к сдаче экзамена по дисциплине, на котором может получить от 20 до 40 баллов.

Итоговая (семестровая) оценка по дисциплине определяется по сумме баллов, полученных студентом при различных формах контроля и баллов, полученных на семестровом контроле.

Итоговая оценка по дисциплине выставляется в зачетную книжку и экзаменационную ведомость в соответствии со следующей шкалой:

Количество баллов	**Оценка**
91÷100	"отлично"
71÷90	"хорошо"
60÷70	"удовлетворительно"
60 и менее	«неудовлетворительно»

При получении на экзамене количества баллов, в сумме с баллами текущей аттестации недостаточного для положительной оценки (менее 60), студент направляется на переэкзаменовку в соответствии с Положением о курсовых экзаменах и зачетах.

Текущий контроль знаний включает контрольные работы, тест, проверку домашних заданий и опросы.

Преподаватель может проводить контрольные работы и тест в аудитории либо дать в качестве самостоятельной работы с последующей защитой работы студентом.

Форма итогового контроля – экзамен (1,2 семестр).

Первостепенное значение среди контролирующих материалов имеют РГР по важнейшим разделам дисциплины, рассчитанные на обязательную систематическую самостоятельную работу. В зависимости от сложности типовые расчеты снабжаются методическими указаниями. Типовые расчеты выполняются по мере прохождения материала, при этом их защита обязательна.

По всем модулям дисциплины предусмотрены контрольные работы разного назначения. Для итогового контроля составлены тестовые контрольные задания, используемые в конце каждого семестра.

Оценка результатов самостоятельной работы организуется как единство двух форм: самоконтроля и контроля со стороны преподавателя. Самоконтроль проводится с использованием списка вопросов, предлагаемых для подготовки к зачетам.

Рубежный контроль осуществляется в виде контрольных работ по теоретической и практической части. По результатам текущего и рубежного контроля формируется допуск студента к экзамену. Экзамен проводится в письменной форме и оценивается преподавателем.

Примерный перечень вопросов для самостоятельной работы

Примерные контрольные работы

Сроки выполнения контрольных работ определены учебно-тематическим планом. Сроки сдачи и порядок выполнения контрольных работ устанавливаются преподавателем.

Тематика контрольных работ:

– ***Контрольная работа №1*** (Введение в математический анализ) :
– вычисление пределов;
– исследование непрерывности функции.
– ***Контрольная работа №2*** (Дифференцирование функции одной переменной):
– нахождение производных различных порядков;
– дифференциал функции.

Контрольная работа №3 (Дифференцирование функций нескольких переменных):
– частные производные первого порядка;
– частные производные высших порядков.

Контрольная работа №4 (интегральное исчисление):
– нахождение неопределенных интегралов;
– вычисление определенных интегралов;
– приложения определенных интегралов;
– несобственные интегралы.

Контрольная работа №5 (дифференциальные уравнения):
– решение уравнений первого порядка;
– решение линейных уравнений;
– решение задачи Коши.

Контрольная работа №6 (ряды):
– исследование сходимости числовых рядов;
– исследование абсолютной и условной сходимости рядов;
– вычисление суммы ряда с заданной точностью.

Содержание типовых расчетов и индивидуальных домашних заданий

РГР № 1 « Введение в математический анализ».
РГР № 2 «Дифференциальное исчисление и его приложения».
РГР № 3 «Определенный интеграл и его приложения».
РГР № 4 « Дифференциальные уравнения».
ИДЗ № 1 «Функции нескольких переменных».
ИДЗ № 2 «Ряды».

8.Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

8.1. Примерный перечень вопросов для самостоятельной работы
Вопросы к экзамену

1. Комплексные числа: формы записи и действия над ними.
2. Определение числовой последовательности. Арифметические действия над ними. Ограниченные и неограниченные последовательности.
3. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Основные свойства бесконечно малых последовательностей.
4. Понятие сходящейся последовательности. Основные свойства сходящихся последовательностей. Предельный переход в неравенствах.
5. Монотонные последовательности. Признак сходимости.
6. Число е.
7. Множества. Операции над множествами.
8. Понятие функции. Основные свойства функций. Элементарные функции. Классификация функций. Основные преобразования графика функции.
9. Приложения функций в экономике. Кривые спроса и предложения. Точка равновесия. Паутинная модель рынка.
10. Предел функции в бесконечности. Геометрический смысл.
11. Предел функции в точке. Геометрический смысл. Односторонние пределы.
12. Бесконечно малые функции. Свойства бесконечно малых функций. Сравнение бесконечно малых.
13. Бесконечно большие функции. Свойства бесконечно больших функций. Сравнение бесконечно малых.
14. Основные теоремы о пределах. Признаки существования предела.
15. Первый и второй замечательные пределы.
16. Приращение аргумента и функции. Понятие непрерывности. Непрерывность основных элементарных функций.
17. Свойства функций, непрерывных в точке. Теоремы о непрерывности сложной и обратной функций.
18. Точки разрыва функции и их классификация.
19. Кусочно-непрерывные функции. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
20. Задачи, приводящие к понятию производной.
21. Общее определение производной. Правая и левая производные.
22. Геометрический, механический и экономический смысл производной.
23. Связь между существованием производной и непрерывностью функции.
24. Основные правила дифференцирования и производные элементарных функций.
25. Производные сложной и обратной функций.
26. Производные простейших функций.
27. Производные высших порядков. Физический смысл производной второго порядка. Формула Лейбница.
28. Понятие дифференциала. Геометрический смысл дифференциала. Свойства дифференциала.
29. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
30. Экстремум функции. Основные теоремы дифференциального исчисления (теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши).
31. Правило Лопиталя.
32. Формула Тейлора. Формула Маклорена.
33. Достаточные признаки монотонности функции.

34. Достаточные признаки существования экстремума функции. Максимизация прибыли.

35. Наибольшее и наименьшее значения функции. Оптимизация налогообложения предприятий.

36. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба, необходимое и достаточное условие.

37. Асимптоты графика функции.

38. Общая схема исследования функции и построение ее графика.

39. Первообразная функция. Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла.

40. Основные методы интегрирования.

41. Понятие определенного интеграла. Геометрический смысл. Формула Ньютона – Лейбница. Основные свойства.

42. Понятие несобственного интеграла.

43. Понятие о дифференциальном уравнении. Виды дифференциальных уравнений первого порядка.

44. Дифференциальные уравнения второго порядка.

45. Числовые ряды. Определение. Сумма ряда, сходящиеся и расходящиеся ряды. Необходимый признак сходимости ряда.

46. Обобщенный гармонический ряд.

47. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости – признаки сравнения, признак Даламбера, признак Коши, интегральный признак

48. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.

Образцы заданий тестового контроля

Контрольный тест

Производная функции $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ **в точке** (x_0, y_0) **по направлению вектора** $\vec{\ell}=4\vec{i}-3\vec{j}$ $\frac{\partial f}{\partial \ell}$ **равна**

A) $\frac{4x_0^2}{5\sqrt{x_0^2+y_0^2}}-\frac{3y_0^2}{5\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$

B) $\frac{3x_0}{5\sqrt{x_0^2+y_0^2}}+\frac{4y_0}{5\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$

C) $\frac{4x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}-\frac{3y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$

D) $\frac{4x_0}{5\sqrt{x_0^2+y_0^2}}-\frac{3y_0}{5\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$

2. **Область определения функции** $y=\sqrt{1+x}$ **есть**

A) интервал $(-\infty, +\infty)$

B) интервал $(-\infty, -1)$

C) интервал $[-1, +\infty)$

D) интервал $(-1, +\infty)$

3. **У графика функции** $y = 3x^3 - 2x^2 + 6x - 1$

A) функция возрастает

B) точка перегиба есть – это $x=\frac{2}{9}$

C) критических точек для y'' нет

D) точки перегиба нет

4. **{C} = C (const)⇒**

A) $\lim\limits_{n\to\infty} c=C$

B) $\lim\limits_{n\to\infty} c=0$

C) предел не существует

D) $\lim\limits_{n\to\infty} c=\infty$

5. Область определения функции $y = x^2$, если известно, что x – сторона квадрата, а y – площадь этого квадрата, есть

A) множество $\{x : x < +\infty\}$

B) интервал $(0, +\infty)$

C) вся числовая ось

D) интервал $[0,+\infty)$

6. $y=\dfrac{3x^2+1}{x-1}$. **Тогда производная** y' **равна**

A) $\dfrac{3x^2-1}{(x-1)^2}$

B) $\dfrac{6x^2-6x-1}{(x-1)^2}$

C) $\dfrac{3x^2-6x-1}{x-1}$

D) $\dfrac{3x^2-6x-1}{(x-1)^2}$

7.**Область определения функции** $y=\dfrac{1}{2-x}$ **есть**

A) интервал $[0, +\infty)$

B) интервал $(-\infty, +\infty)$

C) $\{x : x \neq 2\}$

D) интервал $(-2, +\infty)$

8. $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ y\to\frac{1}{2}}} \arcsin(x+y) =$

A) $\arcsin 1=\dfrac{\pi}{4}$ B) $\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}$ C) $-\dfrac{\pi}{2}$ D) $-\dfrac{\pi}{4}$

9.**Число a называется пределом последовательности** $\{a_n\}$ **(a =** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$**) ⇔** $\alpha_n = a - a_n$ **является**

A) бесконечно малой

B) $\alpha_n \to a_n$

C) бесоконечно большой

D) ограниченной

10. **Область определения функции** $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ **есть**

A) интервал $[-1, +\infty)$

B) интервал $[-1, +\infty)$

C) интервал $(0, +\infty)$

D) интервал $(-\infty, +\infty)$

11. $\alpha = x^2$, $\beta = \sin x$ **– две б.м. при** $x \to 0$**. Тогда**

A) α и β одного порядка
B) α – высшего порядка
C) α и β не сравнимы
D) $\alpha \sim \beta$

12. **α и β – две б.м. α высшего порядка в сравнении с β, если**
A) $\lim\frac{\alpha}{\beta} = 0$, или $\lim\frac{\beta}{\alpha} = \infty$
B) α еще меньше, чем β
C) $\lim\frac{\alpha}{\beta} < 1$
D) $\lim\frac{\beta}{\alpha} > 1$

13. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin\left(4-x^2\right)}{4-x^2}$
A) равен 0
B) предел не существует
C) равен $\frac{1}{2}$
D) равен 1

14. **Интервалами монотонности функции y = |x| будут:**
A) один интервал $(-\infty, 0)$
B) $(0, +\infty)$ – возрастает
C) $(-\infty, +\infty)$
D) $(-\infty, 0)$ – убывает и $(0, +\infty)$ – возрастает

15. **Частные приращения функции z = f(x, y) в точке P_0 равны**
A) $\Delta_x z$ и $\Delta_y z$
B) $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$, $\Delta_y z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$
C) $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$, $\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$
D) $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0)$, $\Delta_y z = f(x_0, \Delta y) - f(x_0, y_0)$

16. **Область значений функции** $y = \sqrt{1+x}$ **есть интервал**
A) $(-\infty, +\infty)$
B) $[0, +\infty)$
C) $[-1, +\infty)$
D) $(0, +\infty)$

17. **Областью определения функции** $z = \frac{1}{\sqrt{x-y}}$ **является множество**
A) $\{(x, y) : x - y \geq 0\}$
B) $\{(x, y) : x \geq y\}$
C) $\{(x, y) : x > y\}$ – это открытая область, состоящая из точек под прямой y = x
D) $\{(x, y) : x < y\}$

18. **Производная** $\frac{\partial z}{\partial l}$ **функции z = $x^3 - y^2$ в точке (1, 1) в направлении, задаваемом вектором** $\bar{l}(3,4)$**, равна**
A) $3x^2\cos\alpha - 2x\sin\alpha$
B) $3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$
C) $3\cos\alpha - 2\sin\alpha$

D) $\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_0 = 3\cdot\frac{3}{5} - 2\cdot\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ ($\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} = 3x^2\Big|_{x=1} = 3$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} = -2y\Big|_{y=1} = -2$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{2}{5}$, α – угол наклона вектора $\bar{l}$)

19. **Функция** $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ **не является нечетной потому, что**

A) содержит четную степень x
B) определена не при всех x
C) $f(-x) \neq -f(x)$,, например $f(1) = 2$, $f(-1) = 0$
D) является четной

20. **α и β – две б.м., причем** $\lim\frac{\alpha}{\beta} = 2$ **. Тогда**

A) α и β эквивалентны
B) α и β одного порядка
C) α более высокого порядка
D) порядок β выше

21. **Наибольшая скорость возрастания функции** $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ **при переходе через точку** (3, 4) **равна**

A) 1 B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{7}{5}$

22. **Полным дифференциалом функции z = *f*(x, y) в точке (x_0, y_0) называется**

A) $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}\Delta y$

B) $\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$

C) $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x_0,y_0}\Delta x$

D) $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x_0,y_0}\Delta x + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}\Delta y$.

Интерактивные технологии и инновационные методы, используемые в образовательном процессе

В соответствии с требованиями ФГОС ВПО по направлению подготовки реализация компетентностного подхода должна предусматривать широкое использование в учебном процессе активных и интерактивных форм проведения занятий (компьютерных симуляций, деловых и ролевых игр, разбор конкретных ситуаций, психологические и иные тренинги) в сочетании с внеаудиторной работой с целью формирования и развития профессиональных навыков обучающихся.

Обучение по дисциплине предполагает следующие формы занятий:

– аудиторные групповые занятия под руководством преподавателя,

– обязательная самостоятельная работа студента по заданию преподавателя, выполняемая во внеаудиторное время, в том числе с использованием технических средств обучения,

– индивидуальная самостоятельная работа студента под руководством преподавателя,

– индивидуальные консультации.

По курсу организуются следующие практические занятия:

- проблемные (обсуждение проблем, связанных с содержанием темы или раздела курса; студенты получают задание предварительно отобрать, сформулировать и разрешить проблемы; групповая дискуссия по проблемам и пр.);

- тематические (внимание акцентируется на актуальной теме курса и наиболее важных и существенных ее аспектах);

- ориентированные (предмет – новые аспекты известных тем или способов решения уже поставленных и изученных проблем, новые публикации в профессиональной печати);

- системные (раздвигаются границы знаний студентов по курсу, обнаруживаются причинно-следственные связи явлений, осуществляется выход за рамки учебного курса).

Активные методы обучения включают в себя любые способы, приемы, инструменты разработки, проведения и совершенствования процесса обучения чему-либо, которые отвечают следующим требованиям:

– приоритет характеристик, запросов, особенностей обучающихся в разработке и организации процесса обучения;

– сотрудничество обучающихся и преподавателя в планировании и реализации всех этапов процесса обучения (от определения учебных целей до оценки степени их достижения);

– активное, творческое, инициативное участие обучающихся в процессе получения необходимого им результата обучения;

– максимальная приближенность результатов обучения к сфере практической деятельности обучающихся; пригодность результатов к практическому внедрению, развитию и совершенствованию после окончания обучения;

– развитие - наряду со специфическими изучаемыми навыками - приемов эффективного обучения.

При активных методах обучения большое внимание уделяется именно практической основе передаваемых слушателям знаний, навыков и умений. Рекомендуется применять следующие формы: тренинги, программированное обучение, групповые обсуждения (обучение в сотрудничестве).

В соответствии с требованиями ФГОС ВПО по направлению подготовки реализация компетентностного подхода должна предусматривать широкое использование в учебном процессе активных и интерактивных форм проведения занятий (компьютерных симуляций, деловых и ролевых игр, разбор конкретных ситуаций, психологические и иные тренинги) в сочетании с внеаудиторной работой с целью формирования и развития профессиональных навыков обучающихся.

Удельный вес занятий, проводимых в интерактивных формах, составляет не менее 20% аудиторных занятий (определяется требованиями ФГОС с учетом специфики ООП). Занятия лекционного типа для соответствующих групп студентов составляют не более 40% аудиторных занятий (определяется соответствующим ФГОС)