

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Амурский государственный университет»**

Кафедра общей математики и информатики

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ
МАТЕМАТИКА**

Основной образовательной программы по специальности
080301.65 – Коммерция

2012 г.

УМКД разработан старшим преподавателем кафедры ОМиИ Гришкиной Татьяной
Евгеньевной

Рассмотрен на заседании кафедры ОМиИ

Протокол заседания кафедры от «14» сентября 2012 г. № 1

Заведующий кафедрой _____ Г. В. Литовка

УТВЕРЖДЕН

Протокол заседания УМСС _____

от « » _____ 20 г. №

Председатель УМСС _____ / _____

Содержание

I. Рабочая программа.....	4
1. Цели и задачи освоения дисциплины	4
2. Место дисциплины в структуре ооп впо	4
3. Структура и содержание дисциплины.....	4
4. Содержание разделов и тем дисциплины.....	5
5. Самостоятельная работа	12
6. Образовательные технологии и формы.....	12
7. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов	13
8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.....	24
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины.....	24
II. Методические рекомендации профессорско-преподавательскому составу.....	26
III. Конспекты лекций.....	29
IV. Методические указания по выполнению контрольных работ.....	192
V. Методические указания по выполнению домашних заданий.....	192
VI. Комплект заданий для самостоятельных, домашних работ.....	193
VII. Комплект заданий для контрольных работ.....	205
VIII. Комплект экзаменационных билетов	226

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель дисциплины: получение фундаментального образования, соответствующего развитию личности; формирование у студентов практических навыков использования необходимого математического аппарата, позволяющего моделировать, решать и анализировать прикладные экономические задачи.

Задачи дисциплины:

- развитие логического и алгоритмического мышления студента;
- выработка умения моделировать реальные экономические процессы;
- освоение приемов решения и исследования математически формализованных задач.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП ВПО

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но так же элементом общей культуры. Изучение студентами экономических специальностей математики формирует у них научное мировоззрение, расширяет кругозор, повышает общую культуру.

Современная экономическая наука немыслима без построения экономико-математических моделей. Данные модели включают комплекс из многих сотен уравнений и тождеств: они могут быть линейными и нелинейными, непрерывными и дискретными, детерминированными и вероятностными. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую в системе фундаментальной подготовки современного экономиста.

Предлагаемая дисциплина относится к базовой части математического и естественнонаучного цикла ООП.

Для успешного освоения данной дисциплины необходимы базовые знания курса «Математика» в объеме средней общеобразовательной школы.

3. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 226 часов.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)			Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические работы	Самостоятельная работа	
1	Введение в анализ с элементами аналитической геометрии	1	1-9	16	18	8	контрольная работа, расчетно-графическая работа, коллоквиум
2	Дифференциальное исчисление	1	10-18	20	18	8	контрольная работа, расчетно-графическая работа

	ИТОГО	1		36	36	16	экзамен
3	Элементы линейной алгебры	2	1-5	10	10	4	контрольная работа, расчетно-графическая работа
4	Экономико-математические модели: линейное, целочисленное программирование	2	6	2	4	2	контрольная работа
5	Интегральное исчисление	2	7-11	10	10	4	контрольная работа, расчетно-графическая работа
6	Дифференциальные уравнения	2	12-16	10	8	4	контрольная работа, коллоквиум
7	Ряды	2	17,18	4	4	2	контрольная работа
	ИТОГО	2		36	36	16	экзамен
8	Теория вероятностей	3	1-7	16	8	5	контрольная работа, расчетно-графическая работа
9	Математическая статистика	3	8-11	2	4	5	контрольная работа, расчетно-графическая работа
10	Экономико - математические методы и модели	3	12-18	0	6	4	контрольная работа
	ИТОГО	3		18	18	14	зачёт

4. СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ И ТЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Государственный стандарт курса учебной дисциплины «Математика»

Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Дифференциальное и интегральное исчисления. Ряды. Дифференциальные уравнения. Элементы теории вероятностей. Математические методы в экономике: линейное и динамическое программирование; теория массового обслуживания; теория игр; элементы теории графов.

4.1. Лекции

Темы дисциплины и их содержание

Раздел 1. Введение в математический анализ с элементами аналитической геометрии.

Тема 1. Числа. Переменные. Множества. Отображения. Действительные и комплексные числа. Понятие множества. Конечные и бесконечные множества. Абсолютная величина действительного числа.

Тема 2. Функциональная зависимость.

Понятие функции. Область определения функции. Способы её задания. Основные элементарные функции, их графики. Сложная функция. Классификация функций, их графики. Преобразование графиков функции. Экономические функции.

Тема 3. Элементы аналитической геометрии.

Уравнение линии на плоскости и в пространстве. Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Угол между прямыми на плоскости и в пространстве. Уравнение плоскости. Кривые и поверхности второго порядка.

Тема 4. Пределы и их свойства.

Понятия о числовых последовательностях. Предел последовательности. Предел

функции. Основные теоремы о пределах. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их основные свойства. Два замечательных предела. Раскрытие неопределённости различного вида.

Тема 5. Непрерывность функции.

Непрерывные функции. Свойства непрерывных функций. Точки разрыва их классификация. Непрерывность функции на интервале и на отрезке.

Раздел 2. Дифференциальное исчисление.

Тема 1. Производная функции.

Понятие производной. Её геометрический и физический смысл. Уравнение касательной и нормали к графику функции.

Тема 2. Правила дифференцирования.

Основные правила и формулы дифференцирования функций. Производные высших порядков.

Тема 3. Дифференциал функции.

Дифференциал функции, его свойства. Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал сложной функции. Применение дифференциала к приближённым вычислениям. Производные и дифференциалы высших порядков.

Тема 4. Основные теоремы дифференциального исчисления.

Теоремы Роля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя.

Тема 5. Приложения производной к исследованию функций.

Возрастание и убывание функции. Точки экстремума функции. Выпуклость и вогнутость. Точки перегиба. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке. Асимптоты. Схема исследования поведения функции с помощью первой и второй производных.

Тема 6. Приложение производной в экономике.

Экономический смысл производной. Эластичность функции. Исследование экономических функций.

Тема 7. Понятие о функции нескольких переменных. Производные и дифференциалы ФНП. Геометрический смысл полного дифференциала. Приближённые вычисления с помощью полного дифференциала. Частные производные высших порядков. Экстремум ФНП. Условный экстремум. Производная по направлению. Градиент.

Тема 8. Применение частных производных в экономике.

Функция спроса. Эластичности спроса от собственной цены, от цены альтернативного товара, от дохода. Полезность. Предельная полезность. Предельная норма замещения. Производственная функция. Предельный продукт капитала. Предельная производительность труда. Кривые безразличия производства. Коэффициент заменяемости ресурсов.

Раздел 3. Элементы линейной алгебры.

Тема 1. Матрицы.

Разновидности матриц. Алгебра матриц. Основные свойства операций над матрицами.

Тема 2. Определители.

Определители квадратных матриц: определения и основные свойства. Вычисление определителей. Обратная матрица.

Тема 3. Системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений: основные понятия. Элементарные преобразования систем. Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений общего вида. Методы решения систем линейных уравнений: решение систем методом Гаусса, по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы. Собственные векторы и собственные значения матрицы.

Тема 4. Векторное пространство и линейные преобразования.

Векторное пространство: определение и примеры. Линейно зависимые системы

векторов и их свойства. Базис линейного пространства. Размерность линейного пространства. Векторное и смешанное произведение векторов.

Тема 5. Применение элементов линейной алгебры в экономике.

Балансовый анализ. Модель равновесных цен. Линейная модель торговли.

Раздел 4. Экономико-математические модели (линейное, целочисленное программирование).

Тема 1. Линейное программирование. Линейные неравенства и область решений системы линейных неравенств. Основная задача линейного программирования. Геометрическая интерпретация ЗЛП и графический метод решения. Линейная производственная задача. Целочисленное программирование.

Раздел 5. Интегральное исчисление.

Тема 1. Неопределённый интеграл.

Первообразная функция и неопределённый интеграл. Неопределённый интеграл и его свойства. Таблица неопределённых интегралов. Методы интегрирования: непосредственное, заменой переменных, по частям. Методы интегрирования некоторых классов элементарных функций. Примеры интегралов, не выражающихся через элементарные функции.

Тема 2. Определённый интеграл.

Понятие об определённом интеграле. Свойства определённого интеграла. Теорема о существовании определённого интеграла. Формула Ньютона – Лейбница. Замена переменной. Интегрирование по частям. Несобственный интеграл. Приближённое вычисление определённых интегралов.

Тема 3. Понятие о кратных (двойных и тройных) интегралах. Вычисление кратных интегралов. Сведение их к повторным.

Тема 4. Геометрические приложения определённого интеграла.

Вычисление площадей плоских фигур. Вычисление длины дуги кривой. Вычисление объёмов тел. Объём тел вращения. Геометрические и физические приложения кратных интегралов.

Раздел 6. Дифференциальные уравнения.

Тема 1. Основные понятия.

Примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.

Тема 2. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Различные виды дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные уравнения.

Тема 3. Дифференциальные уравнения высших порядков.

Уравнения второго порядка, решаемые понижением порядка. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Структура общего решения. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

Тема 4. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Общие понятия. Нормальная система дифференциальных уравнений. Задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Раздел 7. Ряды.

Тема 1. Числовые ряды.

Понятие о числовом ряде. Свойства рядов. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами: признак сравнения, признак Даламбера, радикальный

признак Коши, интегральный признак Коши. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

Тема 2. Функциональные ряды.

Понятие о функциональном ряде. Степенной ряд. Интервал сходимости степенного ряда. Действия со степенными рядами. Разложение функции в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена. Применение ряда Маклорена к разложению в степенные ряды некоторых функций. Применение рядов к приближённым вычислениям.

Раздел 8. Теория вероятностей.

Тема 1. Случайные события. Основные понятия. Основные формулы комбинаторики, классическое определение вероятностей. Операции над событиями.

Тема 2. Сложение и умножение вероятностей.

Теорема сложения вероятностей, условные вероятности, теорема умножения вероятностей, независимые события и их свойства. Вероятность появления хотя бы одного события.

Тема 3. Формулы полной вероятности и Байеса. Схема Бернулли.

Формула полной вероятности, формула Байеса, схема повторных испытаний Бернулли, формула Бернулли.

Тема 4. Случайные величины.

Случайная величина. Виды случайных величин (конечные, дискретные, непрерывные). Закон и таблица распределения конечных и дискретных случайных величин. Функция распределения случайной величины и её свойства. Плотность распределения непрерывной случайной величины и её свойства. Математическое ожидание случайной величины и её свойства. Определение суммы и произведения случайных величин. Свойства математического ожидания. Дисперсия случайной величины и её свойства. Среднее квадратичное отклонение.

Тема 5. Основные законы распределения случайных величин.

Биноминальное распределение и его характеристики. Распределение Пуассона и его характеристики. Теорема Пуассона. Равномерное распределение и его характеристики. Показательное распределение и его характеристики. Нормальное распределение и его характеристики. Функция Лапласа.

Тема 6. Закон больших чисел.

Неравенство Чебышева. Теоремы Чебышева и Бернулли. Предельные теоремы. Теорема Муавра-Лапласа.

Тема 7. Система случайных величин.

Случайные векторные величины. Функция и плотность распределения случайной двумерной величины. Корреляционный момент связи двух случайных величин. Коэффициент корреляции.

Тема 8. Элементы теории массового обслуживания. Случайный процесс и его характеристики.

Понятие о случайном процессе со счётным множеством состояний. Поток событий. Простейший поток и его свойства. Нестационарный пуассоновский поток. Поток Пальма. Поток Эрланга. Марковский случайный процесс.

Раздел 9. Математическая статистика.

Тема 1. Задачи математической статистики. Выборки. Вариационные ряды. Статистические оценки параметров распределения. Оценки и связанные с ними понятия. Точечные оценки вероятности, математического ожидания, дисперсии и их свойства. Интервальные оценки. Понятие доверительных оценок. Построение доверительных интервалов для параметров нормального распределения: случаи, когда один из параметров известен и когда неизвестны оба параметра.

Тема 2. Проверка статистических гипотез о параметрах распределения.

Постановка задачи проверки гипотез. Критерий оценки и его мощность. Критическая область и область принятия гипотезы. Правило знаков. Проверка гипотез о значениях параметров нормального распределения.

Тема 3. Проверка статистических гипотез о законах распределения. Критерии согласия Пирсона и Колмогорова.

Тема 4. Корреляционный и регрессионный анализ.

Функциональные и корреляционные зависимости случайных величин. Линейная и нелинейная регрессия. Составление уравнений прямых регрессий, метод наименьших квадратов. Статистическая оценка коэффициента корреляции и её свойства. Построение доверительных интервалов для параметров линейной регрессии. Проверка статистической значимости регрессии и адекватности модели регрессии результатам наблюдения.

Раздел 10. Экономико-математические методы и модели.

Тема 1. Транспортная задача.

Экономическая и математическая формулировки транспортной задачи. Основные способы построения начального опорного решения. Метод потенциалов.

Тема 2. Динамическое программирование.

Понятие динамического программирования. Принцип поэтапного построения оптимального управления. Простейшие экономические задачи, решаемые методом динамического программирования.

Тема 3. Элементы теории игр.

Основные понятия и определения. Классификация игр и методов решения игровых задач. Оптимальность в антагонистических играх. Принцип максимина. Нижнее значение игры. Принцип минимакса. Верхнее значение игры. Ситуация равновесия в чистых стратегиях. Седловая точка. Значение игры. Смешанные стратегии. Существования минимаксов в смешанных стратегиях. Методы решения игры (решение игры “2*2”, графический метод решения игры “2*2”, графоаналитический метод решение игр “2*n”, “m*2”). Способы редуцирования игр “m*n”. Доминирование стратегий.

Тема 4. Элементы теории графов. Основные понятия и определения. Задание графов. Плоские графы; эйлеровы графы; гамильтоновы графы; орграфы. Сетевые модели.

№ п/п	Темы лекций
Семестр I .	
Раздел 1. Введение в анализ с элементами аналитической геометрии.	
1	Числа. Переменные. Множества. Отображения.
2	Функциональная зависимость.
3	Элементы аналитической геометрии.
4	Элементы аналитической геометрии.
5	Элементы аналитической геометрии.
6	Пределы и их свойства.
7	Пределы и их свойства.
8	Непрерывность функции.
Раздел 2. Дифференциальное исчисление.	
9	Производная функции.
10	Правила дифференцирования.
11	Дифференциал функции.
12	Основные теоремы дифференциального исчисления.
13	Приложения производной к исследованию функции.
14	Приложение производной в экономике.
15	Функции нескольких переменных.
16	Функции нескольких переменных.
17	Функции нескольких переменных.

18	Применение частных производных в экономике.
Семестр II.	
Раздел 3. Элементы линейной алгебры.	
1	Матрицы.
2	Определители.
3	Системы линейных уравнений.
4	Векторное пространство и линейные преобразования.
5	Применение элементов линейной алгебры в экономике.
Раздел 4. Экономико-математические модели.	
6	Линейное, целочисленное программирование.
Раздел 5. Интегральное исчисление	
7	Неопределённый интеграл.
8	Неопределённый интеграл.
9	Определённый интеграл.
10	Кратные интегралы.
11	Геометрические приложения определённого интеграла.
Раздел 6. Дифференциальные уравнения.	
12	Основные понятия.
13	Дифференциальные уравнения первого порядка.
14	Дифференциальные уравнения высших порядков.
15	Дифференциальные уравнения высших порядков.
16	Системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
Раздел 7. Ряды.	
17	Числовые ряды.
18	Степенные ряды.
Семестр III.	
Раздел 8. Теория вероятностей.	
1	Предмет теории вероятностей. Основные понятия.
2	Теоремы сложения и умножения вероятностей.
3	Формулы полной вероятности и Байеса. Схема Бернулли.
4	Случайные величины.
5	Основные законы распределения случайных величин.
6	Закон больших чисел.
7	Система случайных величин.
8	Элементы теории массового обслуживания.
Раздел 9. Математическая статистика.	
9	Задачи математической статистики. Статистические оценки параметров распределения.

Практические занятия

№ п/п	Темы практических занятий
Семестр I.	
Раздел 1. Введение в анализ с элементами аналитической геометрии.	
1	Числа. Переменные. Множества. Отображения.
2	Функциональная зависимость.
3	Элементы аналитической геометрии.
4	Элементы аналитической геометрии.
5	Элементы аналитической геометрии.
6	Пределы и их свойства.
7	Пределы и их свойства.
8	Пределы и их свойства.

9	Непрерывность функции.
Раздел 2. Дифференциальное исчисление.	
10	Производная функции.
11	Правила дифференцирования.
12	Правила дифференцирования.
13	Приложения производной к исследованию функции.
14	Приложения производной к исследованию функции.
15	Приложение производной в экономике.
16	Функции нескольких переменных.
17	Функции нескольких переменных.
18	Применение частных производных в экономике.
Семестр II.	
Раздел 3. Элементы линейной алгебры.	
1	Матрицы.
2	Определители.
3	Системы линейных уравнений.
4	Системы линейных уравнений.
5	Применение элементов линейной алгебры в экономике.
Раздел 4. Экономико-математические модели.	
6	Линейное программирование.
7	Целочисленное программирование
Раздел 5. Интегральное исчисление.	
8	Неопределённый интеграл.
9	Неопределённый интеграл.
10	Неопределённый интеграл.
11	Определённый интеграл.
12	Геометрические приложения определённого интеграла.
Раздел 6. Дифференциальные уравнения.	
13	Дифференциальные уравнения первого порядка.
14	Дифференциальные уравнения высших порядков.
15	Дифференциальные уравнения высших порядков.
16	Системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
Раздел 7. Ряды.	
17	Числовые ряды.
18	Степенные ряды.
Семестр III.	
Раздел 8. Теория вероятностей.	
1	Случайные события. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
2	Формулы полной вероятности и Байеса.
3	Схема Бернулли. Повторные независимые испытания.
4	Случайные величины. Основные законы распределения случайных величин.
Раздел 9. Математическая статистика.	
5	Проверка статистических гипотез о параметрах и законах распределения.
6	Корреляционный и регрессионный анализ.
Раздел 10. Экономико-математические методы и модели.	
7	Транспортная задача.
8	Динамическое программирование.
9	Элементы теории игр. Сетевые модели.

5. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

№ п/п	№ раздела (темы) дисциплины	Форма (вид) самостоятельной работы	Трудоемкость в часах
1	1	Выполнение индивидуальной расчётно-графической работы №1. Выполнение домашних заданий.	8
2	2	Выполнение индивидуальной расчётно-графической работы №2. Выполнение домашних заданий.	8
3	3	Выполнение индивидуальной расчётно-графической работы №3. Выполнение домашних заданий.	4
4	4	Выполнение домашних заданий.	2
5	5	Выполнение индивидуальной расчётно-графической работы №4. Выполнение домашних заданий.	4
6	6	Выполнение домашних заданий.	4
7	7	Выполнение домашних заданий.	2
8	8	Выполнение индивидуальной расчётно-графической работы №5. Выполнение домашних заданий.	5
9	9	Выполнение индивидуальной расчётно-графической работы №6. Выполнение домашних заданий.	5
10	10	Выполнение домашних заданий.	4
Итого			46

6. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ФОРМЫ

Интегральную модель образовательного процесса по дисциплине формируют технологии методологического уровня: модульно-рейтинговое обучение, технология поэтапного формирования умственных действий, технология развивающего обучения, элементы технологии развития критического мышления.

Образовательный процесс по дисциплине строится на основе комбинации следующих методов обучения:

1. Неимитационные методы обучения

Проблемная лекция начинается с вопросов, с постановки проблемы, которую в ходе изложения материала необходимо решить. Лекция строится таким образом, что деятельность студента по ее усвоению приближается к поисковой, исследовательской. Обязателен диалог преподавателя и студентов.

Лекция-визуализация учит студента преобразовывать устную и письменную информацию в визуальной форме; используются схемы, рисунки, чертежи и т.п., к подготовке которых привлекаются обучающиеся. Хорошо использовать на этапе введения в новый раздел, тему, дисциплину.

Лекция с заранее запланированными ошибками. Ошибки должны обнаружить студенты и занести их в конспект. Список ошибок передается студентам лишь в конце лекции и

проводится их обсуждение.

2. Неигровые имитационные методы обучения

Контекстное обучение направлено на формирование целостной модели будущей профессиональной деятельности студента. Знания, умения, навыки даются не как предмет для запоминания, а в качестве средства решения профессиональных задач.

Тренинг – специальная систематическая тренировка, обучение по заранее отработанной методике, сконцентрированной на формировании и совершенствовании ограниченного набора конкретных компетенций.

3. Игровые имитационные методы

Мозговой штурм – наиболее свободная форма дискуссии, позволяющей быстро включить в работу всех членов учебной группы. Используется там, где требуется генерация разнообразных идей, их отбор и критическая оценка. Этапы продуцирования идей и их анализа намеренно разделены: во время выдвижения идей запрещается их критика. Внешне одобряются и принимаются все высказанные идеи. Больше ценится количество выдвинутых идей, чем их качество. Идеи могут высказываться без обоснования.

7. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Результативность работы обеспечивается системой контроля, которая включает опрос студентов на практических занятиях, проверку выполнения текущих заданий, контрольные работы, тесты, выполнение и защита типовых расчётов (РГР), проведение коллоквиумов, экзаменов. Рубежный контроль осуществляется контрольными работами и тестами. Контроль за выполнением индивидуального задания осуществляется в два этапа: проверка письменных отчётов; защита задания в устной или письменной форме.

Для самостоятельной работы используется учебно-методическое обеспечение на бумажных и электронных носителях. Тематика самостоятельной работы соответствует содержанию разделов дисциплины и теме домашнего задания.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля выбираются из содержания разделов дисциплины. Выполнение домашнего задания обеспечивает непрерывный контроль за процессом освоения учебного материала каждого обучающегося, своевременное выявление и устранение отставаний и ошибок.

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины: экзамен (1, 2 сем.), зачет (3 сем.).

Вопросы к экзамену (1 семестр)

Раздел 1. Введение в анализ с элементами аналитической геометрии.

1. Комплексные числа.
2. Действия с комплексными числами.
3. Понятие множества.
4. Операции над множествами.
5. Числовые множества.
6. Постоянные и переменные величины.
7. Функция как одно из понятий математики.
8. Область определения и множество значений функции.
9. Способы задания функции.
10. Классификация функций.
11. Понятие об обратной функции.
12. Основные элементарные функции и их графики.
13. Понятие об уравнении линии.
14. Уравнение прямой на плоскости.
15. Уравнение плоскости.

16. Уравнение прямой в пространстве.
17. Угол между прямыми.
18. Кривые второго порядка на плоскости.
19. Поверхности второго порядка.
20. Пределы: числовых последовательностей, переменных, функций.
21. Основные теоремы о пределах.
22. Виды и раскрытие неопределенностей при нахождении пределов.
23. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
24. Сравнение функций. Эквивалентные бесконечно малые.
25. Асимптоты графика функций одной переменной.
26. Понятие неопределенности функции в точке.
27. Свойства функций, непрерывных в точках.
28. Свойства функций, непрерывных на множестве.
29. Непрерывность сложной функции.
30. Односторонняя непрерывность.
31. Непрерывность обратной функции.
32. Точка разрыва функции и их классификации.

Раздел 2 Дифференциальное исчисление.

1. Производная функции.
2. Дифференцируемость и дифференциал функции.
3. Геометрический смысл производной и дифференциала.
4. Физический смысл производной и дифференциала.
5. Приложение производной в экономике. Эластичность функции.
6. Правила вычисления производной и дифференциала.
7. Производная и дифференциал сложной функции.
8. Логарифмическое дифференцирование.
9. Производные и дифференциалы высших порядков.
10. Производная обратной функции.
11. Производная параметрически заданной функции.
12. Производная неявно заданной функции.
13. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций
14. Формула Тейлора.
15. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.
16. Признаки монотонности функции.
17. Экстремум функции.
18. Наибольшее и наименьшее значение функции на множестве.
19. Направление выпуклости графика функции.
20. Точки перегиба графика функции.
21. Общая схема исследования функции.
22. Частные производные функции нескольких переменных.
23. Полное приращение функции нескольких переменных.
24. Дифференцируемость функции нескольких переменных.
25. Дифференциал функции нескольких переменных.
26. Градиент функции нескольких переменных.
27. Частные производные высших порядков.
28. Экстремумы функции нескольких переменных.
29. Наименьшее и наибольшее значение функции нескольких переменных.
30. Системы функциональных уравнений и неравенств.
31. Особые точки множеств.
32. Условные экстремумы функций нескольких переменных.
33. Наименьшее и наибольшее значение функции на множестве решений системы

- уравнений и неравенств.
34. Экстремумы выпуклых и вогнутых функций.
 35. Интерполяция.
 36. Интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона.
 37. Интерполирование сплайнами.
 38. Приближенное решение уравнений (методами хорд, касательных).
 39. Функции полезности.
 40. Кривые безразличия.
 41. Функции спроса.
 42. Уравнение Слуцкого.
 43. Кривые "доход-потребление".
 44. Кривые "цены-потребление".
 45. Функции выпуска продукции.
 46. Производственные функции затрат ресурсов.
 47. Модели поведения фирмы в условиях совершенной и несовершенной конкуренции.
 48. Модели общего экономического равновесия.
 49. Модель Эрроу-Гурвица.

Вопросы к экзамену (2 семестр)

Раздел 3. Элементы линейной алгебры.

1. Матрицы. Основные понятия. Разновидности матриц.
2. Алгебра матриц.
3. Определитель, его определение. Вычисление определителей.
4. Минор. Алгебраическое дополнение.
5. Основные свойства определителей.
6. Обратная матрица (определение). Нахождение обратной матрицы.
7. Системы линейных уравнений. Основные понятия.
8. Теорема Кронекера - Капелли.
9. Системы линейных уравнений общего вида.
10. Матричный метод решения систем линейных уравнений.
11. Решение систем линейных уравнений с помощью формул Крамера.
12. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
13. N-мерные векторы. Действия с n-мерными векторами.
14. Скалярное произведение n-мерных векторов. Свойства скалярного произведения.
15. Длина вектора. Угол между n-мерными векторами.
16. Линейная зависимость векторов.
17. Базис и размерность линейного пространства.
18. Балансовый анализ.
19. Модель равновесных цен.
20. Собственные значения и собственные векторы матриц.
21. Линейная модель торговли.

Раздел 4. Элементы линейного и целочисленного программирования.

1. Линейные неравенства и область решений системы линейных неравенств.
2. Основная задача линейного программирования.
3. Геометрическая интерпретация ЗЛП и графический метод решения.
4. Линейная производственная задача.
5. Целочисленное программирование.

Раздел 5. Интегральное исчисление.

1. Понятие неопределённого интеграла.
2. Свойства неопределённого интеграла.
3. Таблица основных неопределённых интегралов.
4. Метод непосредственного интегрирования.
5. Метод замены переменной.
6. Метод интегрирования по частям.
7. Интегрирование простейших рациональных дробей.
8. Интегрирование рациональных функций.
9. Интегрирование тригонометрических функций.
10. Интегрирование иррациональных функций.
11. «Неберущиеся» интегралы.
12. Определённый интеграл как предел интегральной суммы.
13. Геометрический смысл определённого интеграла.
14. Формула Ньютона-Лейбница.
15. Основные свойства определённого интеграла.
16. Замена переменной в определённом интеграле.
17. Интегрирование по частям в определённом интеграле.
18. Несобственные интегралы.
19. Приложения определённого интеграла.
20. Приложения определённого интеграла в экономике.
21. Кратные интегралы и их вычисление.

Раздел 6. Дифференциальные уравнения.

1. Дифференциальные уравнения. Основные понятия.
2. Д. У. с разделяющимися переменными.
3. Однородные Д. У. I-го порядка.
4. Уравнения приводящиеся к однородным.
5. Линейные Д.У. I-го порядка.
6. Уравнение Бернулли.
7. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.
8. Линейные Д. У. n-го порядка. Теоремы о структуре решений однородных линейных уравнений.
9. Решение линейных однородных Д. У. с постоянными коэффициентами.
10. Метод вариации произвольных постоянных.
11. Линейные неоднородные Д. У. высших порядков с постоянными коэффициентами.
12. Нормальная система дифференциальных уравнений.
13. Понятие решения системы дифференциальных уравнений.
14. Задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

Раздел 7. Ряды.

1. Числовые ряды. Основные понятия.
2. Основные теоремы о сходящихся числовых рядах.
3. Необходимый признак сходимости числового ряда.
4. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами.
5. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница.
6. Знакопеременные ряды. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов.
7. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов.
8. Степенные ряды. Основные понятия.
9. Интервал и радиус сходимости степенных рядов.

10. Действия со степенными рядами.
11. Ряды Тейлора и Маклорена.
12. Некоторые приложения степенных рядов.

Вопросы к зачету (3 семестр)

Раздел 8 . Теория вероятностей.

1. Случайные события и их классификация.
2. Различные подходы к введению вероятности.
3. Теорема сложения вероятностей несовместимых событий.
4. Элементы комбинаторики.
5. Теорема умножения вероятностей.
6. Теорема сложения вероятностей, совместимых событий.
7. Формула полной вероятности.
8. Теорема Байеса.
9. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число наступления события.
10. Теоремы Лапласа.
11. Вероятность отклонения частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.
12. Случайные величины. Закон распределения дискретных случайных величин.
13. Функция распределения, и ее свойства.
14. Плотность распределения, и ее свойства.
15. Функция случайной величины и ее распределение.
16. Математическое ожидание случайной величины, свойства математического ожидания.
17. Дисперсия случайной величины, свойства дисперсии.
18. Эксцесс и асимметрия.
19. Биноминальное распределение.
20. Распределение Пуассона.
21. Равномерное распределение.
22. Показательное распределение.
23. Нормальное распределение.
24. Вероятность попадания нормального распределенной величины на заданный участок. Правило трех сигм.
25. Понятие о теореме Ляпунова.
26. Оценка отклонения распределения случайной величины от нормального.
27. Показательное распределение.
28. Неравенство Чебышева.
29. Теорема Чебышева.
30. Теорема Бернулли.
31. Понятие о системе случайных величин. Закон распределения системы случайных величин.
32. Функция распределения системы случайных величин, ее свойства.
33. Плотность распределения системы случайных величин, ее свойства.
34. Условные законы распределения.
35. Зависимые и независимые случайные величины.
36. Числовые характеристики системы случайных величин.
37. Системы массового обслуживания и их классификация.
38. Основные понятия: поток, очередь, канал обслуживания.
39. Простейший поток и его свойства.
40. Нестационарный пуассоновский поток.
41. Поток Пальма. Поток Эрланга.

42. Марковский случайный процесс.

Раздел 9. Математическая статистика.

1. Основные задачи математической статистики.
2. Статистическая функция распределения.
3. Статистический ряд. Гистограмма.
4. Числовые характеристики статистического распределения.
5. Выравнивание статистических рядов, метод наибольшего правдоподобия.
6. Свойства точечных оценок.
7. Доверительный интервал. Доверительная вероятность.
8. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения.
9. Понятие выборки случайных величин.
10. Понятие о выборочном методе.
11. Понятие генеральной совокупности (генеральной выборки).
12. Статистические гипотезы.
13. Статистический критерий проверки нулевой гипотезы. Наблюдаемое значение критерия.
14. Критическая область. Критические точки и их нахождение.
15. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей.
16. Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых известны.
17. Критерии согласия Пирсона и Колмогорова.
18. Понятие регрессии, регрессионные зависимости.
19. Регрессионная зависимость как “ослабленная” функциональная зависимость.
20. Виды регрессионной зависимости.
21. Метод наименьших квадратов как метод аналитического сглаживания и определения параметров регрессионной зависимости.
22. Множественная регрессия.
23. Корреляционная зависимость между случайными величинами.
24. Ковариация. Коэффициент корреляции.
25. Различия между регрессионной и корреляционной зависимостями.
26. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости

Раздел 10. Экономико-математические методы.

1. Экономическая и математическая формулировки транспортной задачи.
2. Основные способы построения начального опорного решения.
3. Метод потенциалов.
4. Понятие динамического программирования.
5. Принцип поэтапного построения оптимального управления.
6. Простейшие экономические задачи, решаемые методом динамического программирования.
7. Классификация игр и методов решения игровых задач.
8. Принцип максимина.
9. Нижнее значение игры.
10. Принцип минимакса.
11. Верхнее значение игры.
12. Ситуация равновесия в чистых стратегиях.
13. Седловая точка. Значение игры.
14. Смешанные стратегии.
15. Существования минимаксов в смешанных стратегиях.
16. Решение игры “2*2”, графический метод решения игры “2*2”.
17. Графоаналитический метод решения игр “2*n”, “m*2”.

18. Способы решения игр “m*n”.
19. Доминирование стратегий.
20. Элементы теории графов. Основные понятия и определения.
21. Сетевые модели.

Примерные варианты контрольных работ

1. Комплексные числа.

Задание 1: Вычислить: а) $\frac{1+3i}{-2+i} \cdot (-2i) + 1$; б) $\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \cdot (-4 - 3i)$;

в) $\left(\frac{i^{16} + 3}{i^6 + 3} \right)^5$; д) $\frac{1+i}{(\sqrt{3}+i)(1+i\sqrt{3})}$

Задание 2: Найти модуль и аргумент комплексного числа:

а) $z = (-5 + i)(-5 - i)$; б) $z = \left(\frac{4 + 3i}{5} \right)^{10}$

Задание 3: Решить уравнение: а) $z^2 - 8iz - 15 = 0$; б) $z^3 + 8i = 0$.

Задание 4: Составить приведенное квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее корень: $z = 1 + i$

2. Аналитическая геометрия.

1. Даны вершины треугольника: A(2, 3), B(6, 1), C(2, -2).

Найти:

1. Длину стороны АВ.
2. Уравнения сторон АВ, ВС, АС.
3. Уравнение высоты из вершины А.
4. Уравнение медианы из вершины В.
5. Расстояние от точки С до прямой АВ.

2. Построить кривые:

1. $y = \sqrt{4 - x^2}$.
2. $2x^2 + 3y = 9$.
3. Построить плоскость $4x + 2y + 3z = 12$.

3. Введение в анализ. Приложение производной.

1. Вычислите y'

$$y = \frac{2 - \arcsin 2x}{\cos(1 - 3x)}$$

2. Вычислите y''

$$y = \sqrt{1 - x^2} + 4x$$

3. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}$$

4. Исследовать функцию на непрерывность

$$y = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 0 \\ 3 + 4x, & x > 0 \end{cases}$$

5. Решить задачу.

Производитель реализует свою продукцию по цене p за единицу, а издержки при этом задаются функцией $C(x) = 9x + 0,2x^2$, где x - объем выпускаемой продукции в условных единицах ($x > 0$) Найти оптимальный для производителя объем выпуска

продукции и соответствующую ему прибыль, если $p=49$ ден. ед.

4. Функции нескольких переменных.

1. Найти все частные производные второго порядка

$$z = yx^2 - e^{xy}.$$

2. Фирма производит продукцию на двух заводах; x и y – соответственно объёмы этой продукции за месяц. Сколько продукции ежемесячно следует выпускать на каждом заводе при наименьших суммарных затратах, если функция издержек заводов имеет вид:

$$C = x^2 + y^2 - 10x - 40y + 5500.$$

3. Задана производственная функция:

$Q = 10\sqrt{L}\sqrt{K} + 15\sqrt{K}$. Вычислить предельный продукт труда и предельный продукт капитала при $L=100$, $K=2500$.

5. Элементы линейной алгебры.

1. Задана матрица $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Требуется найти:

транспонированную матрицу A^T ;

ранг матрицы A ;

произведение матриц $A^T \cdot A$ и $A \cdot A^T$;

обратную матрицу A^{-1} .

2. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

1)методом обратной матрицы;

2)по формулам Крамера;

3)методом Гаусса.

6. Неопределённый интеграл.

1. $\int \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x} dx$;

2. $\int \sqrt[3]{3x-2} dx$;

3. $\int \frac{x dx}{1+x^2}$;

4. $\int x \cos 3x dx$;

5. $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 5}$;

6. $\int \arcsin 2x dx$;

7. $\int \frac{x dx}{x+6}$;

8. $\int \cos 3x \sin 7x dx$;

9. $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+4)}$;

10. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

7. Определённый интеграл

Задание 1: Вычислить определенный интеграл:

$$1) \int_1^2 (x^2 + 1) dx; \quad 2) \int_0^3 e^{-\frac{x}{3}} dx; \quad 3) \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx; \quad 4) \int_1^e \ln x dx; \quad 5) \int_{1/2}^1 x^2 \cdot (2x-1)^8 dx$$

Задание 2: Вычислить несобственный интеграл:

$$1) \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx; \quad 2) \int_3^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 + 4} dx$$

Задание 3: Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

$$1) y = x^2, y = 2 - x^2; \quad 2) y = x(3 - x), y = x - 3.$$

8. Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

1. $\frac{y'}{e^{2x-1}} = \operatorname{tg} y \quad y(0) = 0;$
2. $y' \sqrt{1-x} = \frac{1}{\sqrt{1-y}};$
3. $y' - \frac{y}{x-2} = x + 2;$
4. $y''' + 2y'' + 5y' = 0;$
5. $y'' + y' - 2y = 3e^x.$

9. Теория вероятностей: случайные события.

1. Студент знает 45 из 60 вопросов программы. Каждый Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Найти вероятность того, что: а) студент знает все три вопроса, содержащиеся в билете; б) студент знает только два вопроса; в) студент знает только один вопрос своего экзаменационного билета.
2. В ящике имеется 15 деталей, из которых 10 стандартных. Сборщик наугад берёт 3 детали. Найти вероятность того, что все взятые детали будут стандартными.
3. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,3. Производится 5 выстрелов. Чему равна вероятность того, что цель будет поражена?
4. Вероятность того, что клиент банка не вернёт заём в период экономического роста, равна 0,04, а в период экономического кризиса – 0,13. Предположим, что вероятность того, что начнётся период экономического роста, равна 0,65. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернёт полученный кредит?
6. Вероятность того что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 4 абонента?
7. В партии деталей двух сходных форматов число крупных деталей вдвое больше числа мелких. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу 10 деталей окажется 6 крупных?
8. Вероятность допущения дефекта при производстве механизмов равна 0,4. Случайным образом отбирается 500 механизмов. Установить величину наибольшего отклонения частоты изготовленных механизмов с дефектами от вероятности 0,4, которую можно гарантировать с вероятностью 0,9973.

10. Теория вероятностей: случайные величины.

1. Производится 4 выстрела по некоторой цели. Вероятность попадания в цель от выстрела к выстрелу не меняется и остаётся равной 0,4. Требуется для С. В. Х – числа попаданий составить ряд распределения и построить многоугольник распределения.

- Детали, выпускаемые цехом по размеру диаметра распределяются по нормальному закону с параметрами: $a=5$ см, и $\sigma=0,9$. найдите границы в которых следует ожидать размер диаметра детали, чтобы вероятность невыхода за эти границы была равна 0,95
- СВ X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найдите плотность вероятности, $M(X)$, $D(X)$.

- Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого имеет показательное распределение $F_1(t) = 1 - e^{-0,02t}$, второго $F_2(t) = 1 - e^{-0,05t}$. Найдите вероятность того, что за время $t=6$ ч хотя бы один элемент откажет.
- Найти числовые характеристики СВ X , распределённой равномерно в промежутке $[6, 10]$.
- Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,05. Оценить вероятность того что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом отказов за время T окажется меньше 2.
- Вероятность вынуть из урны белый шар $1/3$. Вынули (с возвращением) 300 шаров. Оценить вероятность того, что отклонение частоты появления белых шаров от вероятности будет менее $1/15$.

11. Математическая статистика.

- Предположим, что на некотором предприятии собраны данные о числе дней, пропущенных работником по болезни:

Число дней, пропущен. в данном мес.	0	1	2	3	4
Число работников	10	17	25	28	24

Постройте полигон распределения частот. Найдите среднее число пропущенных дней, стандартное отклонение, коэффициент вариации. Объясните полученные результаты.

- Аудиторская фирма хочет проконтролировать состояние счетов одного из коммерческих банков. Для этого случайно отбираются 50 счетов. По 20 счетам из 50 отобранных имело место движение денежных средств в течение месяца. Постройте 99%-й доверительный интервал, оценивающий долю счетов в генеральной совокупности, по которым имело место движение денежных средств в течение месяца.
- Компания занимающаяся консультированием в области инвестиций заявляет, что среднегодовой процент по акциям определённой отрасли промышленности составляет 11,5%. Инвестор, желая проверить истинность этого утверждения на основе случайной выборки 50 акций выявил, что среднегодовой процент по ним составил 10,8% с исправленным средним квадратическим отклонением $s=3,4\%$. На основе имеющейся информации определите, имеет ли инвестор достаточно оснований, чтобы опровергнуть заявление компании? Принять уровень значимости $\alpha = 0,05$.

12. Элементы линейного и целочисленного программирования.

- Предприятие располагает тремя производственными ресурсами (А, В, С) и может организовать производство продукции двумя различными способами (I, II). Расход ресурсов за один месяц и общий ресурс при каждом

способе производства даны в таблице:

Ресурсы	Расход ресурсов за 1 мес. при работе		Общий ресурс
	способом I	Способом II	
A	1	2	4
B	1	1	3
C	2	1	8

При I способе производства предприятие выпускает за один месяц 3 тыс. изделий, при II – 4 тыс. Сколько месяцев должно работать предприятие каждым из этих способов, чтобы при наличных ресурсах обеспечить максимальный выпуск продукции?

2. Решить задачи линейного программирования:

$$f = 4x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$f = 2x_1 - 6x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$f = 2x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ -x_1 - 2x_2 \geq -10 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$f = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Решить задачи целочисленного программирования:

$$L(x) = 16x_1 + 9x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_{1,2} \geq 0 - \text{целые.} \end{cases}$$

$$L(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 9 \\ 3x_1 - 4x_2 \geq 3 \\ x_{1,2} \geq 0 - \text{целые.} \end{cases}$$

8. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Основная литература:

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -2-е изд., перераб. и доп.. – М.: Банки и биржи: ЮНИТИ, 2008.- 472с.
3. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

Дополнительная литература:

1. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.
2. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.
5. Математика в экономике:В 2 ч.: учеб.: рек. Мин.обр.РФ/ А.С. Солодовников [и др.]. -2-е изд., перераб и доп.. –М.: Финансы и статистика. – 2003, 2005. Ч.1 .-2003.-2005.-384 с.
6. Математика в экономике:В 2 ч.: учеб.: рек. Мин.обр.РФ/ А.С. Солодовников [и др.]. -2-е изд., перераб и доп.. –М.: Финансы и статистика. – 2003, 2005. Ч.2 .-2003.-2005.-560 с.
7. Математика: учеб.-метод. комплекс для спец. 080301 – Коммерция /АмГУ, ФМиИ; сост. Т.Е. Гришкина. – Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2007. -344с.
8. Математика: энцикл. / гл. ред. Ю. В. Прохоров. - репр. изд. "Математического энциклопедического словаря" 1988 г. - М. : Большая Рос. энцикл., 2003. - 848 с.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

№	Наименование ресурса	Краткая характеристика
1	http://www.iqlib.ru	Интернет-библиотека образовательных изданий, в которой собраны электронные учебники, справочные и учебные пособия. Удобный поиск по ключевым словам отдельным темам и отраслям знаний
2	http://elibrary.ru	Научная электронная библиотека журналов

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Лекционная аудитория с мультимедийным оборудованием.

Рейтинг-план дисциплины
МАТЕМАТИКА
1 семестр

		Модуль 1	Модуль 2	Модуль 3	Модуль 4	Модуль 5		
	Вид работы	Комплексные числа	Аналитическая геометрия	Введение в анализ	Приложение производной	Функции нескольких переменных	Итоговая работа за семестр	
1.	Контрольная работа		5		5	5		
2.	Тест						5	
3.	Расчётно- графическая работа		5		5			
4.	Коллоквиум			5				
5.	Домашние задания	5	5	5	5	5		
	Σ	5	15	10	15	10	5	60
	Экзамен							40

Расчётно-графическая работа:

Сдача в срок -2 балла

Защита: «3»-1балл

«4»-2балла

«5»-3 балла

Коллоквиум:

«5»-5 баллов

«4»-4 балла

«3»-3 балла

Контрольная работа:

«5»-5 баллов

«4»-4 балла

«3»-3 балла

Рейтинг-план дисциплины
МАТЕМАТИКА
2 семестр

		Модуль 1	Модуль 2	Модуль 3	Модуль 4	Модуль 5		
	Вид работы	Элементы линейной алгебры	Экономико-математические модели	Интегральное исчисление	Дифференциальные уравнения	Ряды	Итоговая работа за семестр	
1.	Контрольная работа	5	5	5	5	5		
2.	Тест						5	
3.	Расчётно-графическая работа	5		5				
4.	Коллоквиум				5			
5.	Домашние задания	4	2	4	3	2		
	Σ	14	7	14	13	7	5	60
	Экзамен							40

Расчётно-графическая работа:

Сдача в срок -2 балла

Защита: «3»-1 балл

«4»-2 балла

«5»-3 балла

Коллоквиум:

«5»-5 баллов

«4»-4 балла

«3»-3 балла

Контрольная работа:

«5»-5 баллов

«4»-4 балла

«3»-3 балла

Тест 25 заданий:

7-12 –1 балл

13-19 –3 балла

20-22 –4 балла

23-25 –5 баллов

**Рейтинг-план дисциплины
МАТЕМАТИКА
3 семестр**

		Модуль 1	Модуль 2	Модуль 3		
	Вид работы	Теория вероятностей	Математичес- кая статистика	ЭММиМ	Итоговая работа за семестр	
1.	Контрольная работа	5/5	5/5	5/5		
2.	Тест				5	
3.	Расчётно-графическая работа	5	5			
4.	Домашние задания	5	5	5		
	Σ	20	20	15	5	60
	Экзамен					40

Расчётно-графическая работа:

Сдача в срок -2 балла

Защита: «3»-1 балл

«4»-2 балла

«5»-3 балла

Контрольная работа:

«5»-5 баллов

«4»-4 балла

«3»-3 балла

Тест 25 заданий:

7-12 –1 балл

13-19 –3 балла

20-22 –4 балла

23-25 –5 баллов

II. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПРОФЕССОРСКО-ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОМУ СОСТАВУ

1. Методические рекомендации по проведению лекционных занятий.

Целью лекций является изложение теоретического материала и иллюстрация его примерами и задачами. Основным теоретическим результатам должны сопутствовать пояснения об их приложениях в экономике. Курс лекций должен строиться на основе чётких формулировок и доказательств основных теорем. При введении основных понятий предпочтение следует отдавать классическому подходу. При составлении курса лекций используется принцип повышения уровня фундаментальной математической подготовки студентов с усилением её прикладной экономической направленности. Всюду, где это возможно даётся геометрический и экономический смысл математических понятий (например, производной), приводятся математические формулировки ряда экономических законов, рассматриваются простейшие приложения высшей математики в экономике.

Существенным для восприятия материала лекции студентами является темп речи преподавателя: оптимальным является темп не выше 60-70 слов в минуту, если студенты не записывают, а просто слушают. Для записи темп должен быть гораздо ниже. Изображение материала на доске должно быть чётким и аккуратным.

Кроме того, преподавателю математики целесообразно учитывать аспекты, связанные со спецификой дисциплины и психологией студентов:

- необходимость повышать мотивацию студентов к изучению математики и искать пути для концентрации их внимания, особенно при доказательстве теорем;
- введение оптимальной доли гуманитарной направленности на лекциях по математике (например, историческая справка).

2. Методические рекомендации по проведению практических занятий.

Лекционный курс дисциплины «Математика» сопровождается практическими занятиями.

Целью практических занятий является закрепление теоретического материала лекций и выработка умения решать примеры и задачи.

Целесообразно разделить практическое занятие на следующие составляющие: контроль теоретических знаний, полученных на лекции, проверка домашнего занятия, обсуждение темы настоящего занятия, решение задач по рассматриваемой теме.

Предлагаемые на практических занятиях задачи делятся на 2 группы: задачи, позволяющие студентам освоить типовые приёмы, и задачи повышенной сложности, требующие от студента умения владеть материалом и мыслить логически. Преподавателю в процессе решения отводится роль консультанта и помощника. Задания, вызвавшие трудности у большинства студентов, разбираются на доске.

В конце занятия подводятся итоги работы, преподаватель оценивает работу группы, указывает на недостатки.

В конце практического занятия выдается задание к следующему занятию. Преподаватель сообщает тему будущего занятия, теоретические вопросы, задачи.

Студенты, пропустившие практические занятия, должны их выполнить во внеаудиторное время и отчитаться до начала зачетно-экзаменационной сессии.

3. Методические рекомендации по организации контроля знаний студентов

В Университете качество освоения образовательных программ оценивается путем осуществления текущего и рубежного контроля успеваемости, проведения промежуточных аттестаций и итогового контроля по окончании семестра.

К системе межсессионного контроля успеваемости и посещаемости занятий относятся аттестации студентов, которые проводятся 2 раза за семестр.

Результативность работы обеспечивается системой текущего и рубежного контроля, которая включает опрос студентов на практических занятиях, проверку выполнения текущих заданий, контрольные работы, выполнение и защиты типовых расчётов (РГР), проведение коллоквиумов. Каждое практическое занятие рекомендуется начинать с краткого (10-15 мин.) опроса студентов по теоретическому материалу и выяснение вопросов по текущим заданиям. На лекциях и практических занятиях рекомендуется проведение мини-контрольных работ. Рубежный контроль осуществляется контрольными работами. Данная программа предусматривает проведение в течение семестра 3-4 рубежных контрольных работы и двух индивидуальных заданий (РГР). Контроль за выполнение индивидуального задания осуществляется в два этапа:

Проверка письменных отчётов;

1. Защита задания в устной или письменной форме.
2. Выполнение каждого индивидуального задания требует не менее 6 часов самостоятельной работы студентов.

Рефераты студенты выполняют по усмотрению преподавателя.

Итоговым контролем являются экзамен и зачёт. Студенты допускаются к сдаче экзамена (за I и II семестр) и зачета (III семестр) при условии выполнения ими на положительную оценку всех форм текущего контроля, предусмотренных программой. Итоговый контроль по математике преследуют цель оценить работу студентов за семестр, полученные теоретические знания, их прочность, развитие творческого мышления, навыки самостоятельной работы, умение синтезировать полученные знания и применять их при решении практических задач. Задания итогового контроля состоят из двух частей: письменного теоретического опроса (3 вопроса) и практических заданий (5 заданий).

Критериями оценки знаний студента являются: уровень освоения теоретического материала, предусмотренного программой курса; умение использовать теоретические знания при решении практических задач; социальные характеристики: посещаемость занятий; корректное общение с преподавателем; прилежание и трудолюбие; общая эрудиция; активность на занятиях; результаты текущего контроля.

Каждый критерий и итоговая оценка знаний студентов оценивается в баллах («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно»).

III. КОНСПЕКТЫ ЛЕКЦИЙ

I семестр.

Лекция 1.

Числа, переменные множества, отображения.

Понятие множества.

Понятие множества принадлежит к числу первичных, не определяемых через более простые.

Под **множеством** понимается совокупность (собрание, набор) некоторых объектов. Объекты, которые образуют множества называются элементами, или точками, этого множества.

Примерами множеств являются: множество студентов данного ВУЗа, множество предприятий некоторой отрасли, множество натуральных чисел и т.п.

Множество обозначаются прописными буквами, а их элементы строчными. Если a есть элемент множества A , то используется запись $a \in A$. Если b не является элементом множества A , то пишут $b \notin A$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается $\emptyset$. Например, множество действительных корней уравнения $x^2+1=0$ есть пустое множество.

Если множество B состоит из части элементов множества A или совпадает с ним, то множество B называется **подмножеством** множества A и обозначается

$B \subset A$.

Если, например, A – множество всех студентов ВУЗа, а B – множество студентов-первокурсников этого ВУЗа, то B есть подмножество множества A , т.е. $B \subset A$.

Два множества называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов.

Объединение двух множеств A и B называется множеством C , состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств, т.е. $C=A \cup B$.

Например, если $A = \{a, b, d, e\}$; $B = \{a, e, f, c, k\}$, то $C = A \cup B = \{a, b, d, e, f, c, k\}$

Пересечением двух множеств A и B называется множество D , состоящее из всех элементов, принадлежащих каждому из данных множеств A и B , т.е. $D = A \cap B$.

Например, 1) если $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, то $D = A \cap B = \{2, 3\}$. 2) если $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$, то $A \cap B = \emptyset$.

Разностью множеств A и B называется множество E , состоящее из всех элементов множества A , которые не принадлежат множеству B , т.е. $E = A \setminus B$.

Например, если $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c\}$, то $A \setminus B = \{a, d\}$.

Пример. Даны множества $A = \{1, 3, 6, 8\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Найти объединение, пересечение и разность множеств A и B .

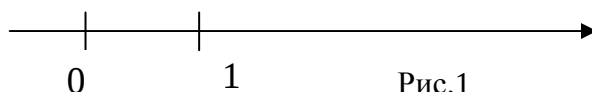
Решение. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$, $A \cap B = \{6, 8\}$, $A \setminus B = \{1, 3\}$

Множество называется **конечным**, если оно состоит из конечного числа элементов, в противном случае оно называется бесконечным.

Множества, элементами которых являются действительные числа, называются **числовыми**. Из школьного курса алгебры известны множества: R – множество действительных чисел, Q – множество рациональных чисел, Z – множество целых чисел, N – множество натуральных чисел.

Очевидно, что $N \subset Z \subset Q \subset R$

Геометрически множество действительных чисел R изображается точками числовой прямой (числовые оси). (Рис.1), т.е. прямой, на которой выбрано начало отчета, положительные направления и единица масштаба.



Между множеством вещественных чисел и точками числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие, т.е. каждому действительному числу соответствует определенная точка числовой прямой, и наоборот, каждой точке прямой – определенное вещественное число.

Множество X , элементы которого удовлетворяют неравенству $a \leq x \leq b$, называется **отрезком** (или **сегментом**), обозначается $[a, b]$, если элементы X удовлетворяют неравенству $a < x < b$ – открытым интервалом (a, b) ; неравенствам $a \leq x < b$ или $a < x \leq b$, называется полусегментами соответственно $[a, b)$ и $(a, b]$.

Абсолютная величина действительного числа. Окрестность точки.

Абсолютной величиной (или **модулем**) действительного числа x называется само число x , если x неотрицательно, и противоположное число $-x$, если x – отрицательно

Свойства абсолютных величин:

1. $|x+y| \leq |x| + |y|$,
2. $|x-y| \geq |x| - |y|$,
3. $|xy| = |x| \cdot |y|$,
4. $|x/y| = |x| / |y|$.

Из определения абсолютной величины числа следует: $-|x| \leq x \leq |x|$. Пусть $|x| < \varepsilon$, можно написать: $-\varepsilon < x < \varepsilon$, или $-\varepsilon < x < \varepsilon$, т.е. значения x лежат на открытом интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Рассмотрим неравенства $|x-a| < \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$). Решениями этого неравенства будут точки открытого интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, или $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

Всякий интервал, содержащий точку a называется окрестностью точки a .

Интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, т.е. множество точек x таких, что $|x-a| < \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$), называется ε – окрестностью точки a (ε – эпсилон, буква греческого алфавита).

Лекция 2.

Функциональная зависимость.

Функция. Классификация функций.

Определение. Рассмотрим два множества X и Y , элементами которых могут быть любые объекты. Предложим, что каждому элементу x множества X по некоторому закону или способу поставлен в соответствие определенный элемент y множества Y , то говорят что на множестве X задана функция $y = f(x)$, (или отображение множества X во множество Y).

Множество X называется областью определения функции f , а элементы $y = f(x)$

образуют множество значений функции – Y .

x – независимая переменная (аргумент).

y – зависимая переменная,

f – закон соответствия, знак функции.

Пусть X и Y множества вещественных чисел.

Пример. Найти область определения и область значений функции $y = x^2 + 1$

Областью определения функции является множество $X = (-\infty, \infty)$, область значений является множество $Y = [0, \infty)$.

Способы задания функции.

Существует несколько способов задания функции:

- а) аналитический способ, если функция задана формулой вида $y = f(x)$;
- б) табличный способ состоит в том, что функция задается таблицей, содержащей значения x и соответствующие значения $f(x)$, например, таблица логарифмов;
- в) графический способ, состоит в изображении графика функции – множество точек (x, y) плоскости, абсциссы которых есть значения аргумента x , а ординаты – соответствующие им значения функции $y = f(x)$;
- г) Описательный способ, если функция записывается правилом ее составления.

Основные элементарные функции.

Все функции, с которыми встречаемся в школьном курсе, элементарные. Перечислим их:

1. $y = x^n$, $y = x^{-n}$, $y = x^{m/n}$, где $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$. Эти функции называются степенными.
2. Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$
4. Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.
5. Обратные тригонометрические функции $y = \operatorname{arcsin} x$, $y = \operatorname{arccos} x$,
 $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Сложная функция (суперпозиция функций).

Пусть функция $y = f(u)$ есть функция от переменной u , определенная на множестве U с областью значений – Y , а переменная $u = \varphi(x)$ функция от переменной x , определенной на множестве X с областью значения U . Тогда заданная на множестве X функция $y = f(\varphi(x))$ называется **сложной функцией** (функцией от функций). Например, $y = \lg \sin 3x$. Эту сложную функцию от x можно расписать, как цепочку простых функций: $y = \lg u$, $u = \sin t$, $t = 3x$.

Понятие элементарной функции.

Функции построенные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий называются элементарными.

Например, $y = \sqrt{x^2 + x + 1} / (\sin^2 x + 3)$ или $y = 2 - \operatorname{tg} x$.

Примером неэлементарной функции является функция $y = |x|$.

Классификация функции.

Элементарные функции делятся на два класса:

1 класс алгебраических функций:

а) $y = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots + A_{n-1}x + A_n$, это многочлен (полином) n – степени или целая алгебраическая функция, где $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ – вещественные числа, коэффициенты многочлена;

б) $y = (A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n)/(B_0x^m + B_1x^{m-1} + \dots + B_m)$, это дробно – рациональная функция, она представляет собой отношения двух многочленов;

в) Иррациональная функция, например, $y = \sqrt{x-1} + x^2$.

2 класс трансцендентных функций.

а) $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, показательная функция,

б) $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, логарифмическая функция,

в) все тригонометрические функции,

г) все обратные тригонометрические функции,

д) функции вида $y = x^L$, где L – иррациональное число.

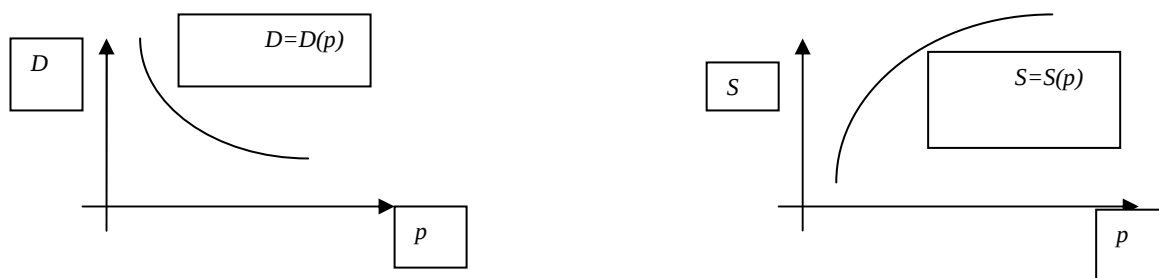
Экономические функции

Микроэкономика занимается анализом деятельности определенных звеньев хозяйственной системы. Это могут быть отдельные фирмы, предприятия, рынки конкретных товаров и услуг. При анализе используются различные функции.

1. Функции спроса и предложения

Рассмотрим какой-нибудь товар. При цене p за единицу товара обозначим D число единиц товара, которые покупатели на рынке желают купить. Функция $D=D(p)$ называется **функцией спроса** на товар. Она убывающая, т.к. при увеличении цены спрос на товар падает.

Рассмотрим функцию $S=S(p)$ - число единиц товара, который предлагают производители для продажи. Эта функция называется **функцией предложения** товара. Она возрастающая, т.к. с увеличением цены на одну единицу товара предложение товара увеличивается.



Цена, при которой спрос и предложение равны, называется **равновесной** (p_0). В точке равновесия $D(p)=S(p)$ спрос приходит в соответствие с предложением, т.е. весь произведенный товар находит своего покупателя.

Рассмотрим отклонение рыночной цены от равновесной. Если рыночная цена p_1 больше p_0 , то предложение превышает спрос. Следствием будет оседание нерализованной продукции на складах. Это побуждает производителя уменьшить цену на продукцию, и рыночная цена p_1 будет стремиться к равновесной p_0 . Такое явление называют «давление рынка».

Если рыночная цена p_2 меньше равновесной цены p_0 , это означает что спрос превышает предложение. В такой ситуации производители товара, пользуясь дефицитом, повышают цену, и рыночная цена p_2 вновь стремится к равновесной цене p_0 .

Безусловно, спрос и предложение зависят не только от цены, но и от ряда других

факторов, поэтому предложенная модель спроса и предложения несколько упрощает действительность.

2. Производственная функция

Производственная функция есть экономико-математическое уравнение, связывающее ресурсы (факторы производства) и выпуск продукции. К ресурсам относятся: земля, капитал (основные фонды), труд, предпринимательская способность. Рассмотрим однофакторные производственные функции Q , зависящие от капитала K , либо от труда L , которые будем записывать: $Q=f(K)$ и $Q=f(L)$.

Производственная функция подчиняется закону убывающей эффективности производства: при увеличении одного из основных факторов производства (K или L) прирост производства, начиная с некоторого значения (K_0 или L_0), является убывающей функцией.

В стратегии капиталовложений можно прогнозировать критический объем затрат, сверх которых дополнительные затраты приводят к меньшей отдаче.

3. Функция прибыли

Прибыль одно из важнейших понятий в экономике, позволяющее оценить деятельность любого предприятия или фирмы.

В наиболее общем виде прибыль можно определить как разницу между полным доходом (выручкой) от реализации продукции или услуг и полными издержками (затратами).

Обозначим прибыль через букву Π , полный доход R и полные затраты C , тогда:

$$\Pi = R - C.$$

Полный доход, получаемый от продажи товара Q объема q по цене p за единицу товара, просчитывается по формуле

$$R = p \cdot q.$$

Цена товара определяется через кривую спроса $D=D(p)$.

Полные издержки состоят из постоянных издержек C_0 (содержание оборудования, зарплата, аренда и др.) и переменных издержек C_1 , пропорциональных объему выпускаемой продукции q (стоимость сырья, электроэнергии и др.)

$$C = C_0 + C_1 = C_0 + kq \quad (k = \text{const}).$$

Если предположить, что весь произведенный товар продан, то производство прибыльно, если полный доход больше полных издержек

4. Функция полезности

Основным понятием теории потребления является функция полезности $U=U(x)$, где x - количество товара X . Данная функция – субъективная числовая оценка данным индивидом полезности $U(x)$ для него количества x товара X .

5. Функция национального дохода

Микроэкономика занимается анализом экономической деятельности на национальном (государственном) уровне. Одним из важнейших показателей, характеризующих успехи хозяйственной деятельности государства, является национальный доход.

Рассмотрим простую двухсекторную модель национального дохода, состоящую из двух секторов — производителей и потребителей. Деньги, получаемые потребителями, т.е. их доход Y , можно разделить на две части: приобретение товаров и услуг, называемое потреблением $C(y)$, и сбережение (инвестиция) $S(y)$. Следовательно, имеем равенство

$$Y = C(y) + S(y).$$

Лекции 3-5.

Элементы аналитической геометрии.

Уравнение линии на плоскости.

Как известно, любая точка на плоскости определяется двумя координатами в какой-либо системе координат. Системы координат могут быть различными в

зависимости от выбора базиса и начала координат.

Определение. Уравнением линии называется соотношение $y = f(x)$ между координатами точек, составляющих эту линию.

Отметим, что уравнение линии может быть выражено параметрическим способом, то есть каждая координата каждой точки выражается через некоторый независимый параметр t .

Характерный пример – траектория движущейся точки. В этом случае роль параметра играет время.

Уравнение прямой на плоскости.

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$Ax + By + C = 0,$$

причем постоянные A, B не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой**.

В зависимости от значений постоянных A, B и C возможны следующие частные случаи:

- $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат
- $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ { $By + C = 0$ } – прямая параллельна оси Ox
- $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$ { $Ax + C = 0$ } – прямая параллельна оси Oy
- $B = C = 0, A \neq 0$ – прямая совпадает с осью Oy
- $A = C = 0, B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Ox

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой по точке и вектору нормали.

Определение. В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами (A, B) перпендикулярен прямой, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(3, -1)$.

Составим при $A = 3$ и $B = -1$ уравнение прямой: $3x - y + C = 0$. Для нахождения коэффициента C подставим в полученное выражение координаты заданной точки A .

Получаем: $3 - 2 + C = 0$, следовательно $C = -1$.

Итого: искомое уравнение: $3x - y - 1 = 0$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Если какой-либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

На плоскости записанное выше уравнение прямой упрощается:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если $x_1 = x_2$.

Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$ называется **угловым коэффициентом** прямой.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, 2)$ и $B(3, 4)$.

Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$y - 2 = \frac{4-2}{3-1}(x-1)$$

$$y - 2 = x - 1$$

$$x - y + 1 = 0$$

Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту.

Если общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

и обозначить $-\frac{A}{B} = k$; $-\frac{C}{B} = b$; т.е. $y = kx + b$, то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом k** .

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору.

По аналогии с пунктом, рассматривающим уравнение прямой через вектор нормали можно ввести задание прямой через точку и направляющий вектор прямой.

Определение. Каждый ненулевой вектор $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2)$, компоненты которого удовлетворяют условию $A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0$ называется направляющим вектором прямой $Ax + By + C = 0$.

Уравнение прямой в отрезках.

Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ $C \neq 0$, то, разделив на $-C$, получим: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ где}$$

$$a = -\frac{C}{A}; \quad b = -\frac{C}{B}$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент a является координатой точки пересечения прямой с осью Ox , а b – координатой точки пересечения прямой с осью Oy .

Пример. Задано общее уравнение прямой $x - y + 1 = 0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

$$C = 1, \quad -\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1, \quad a = -1, \quad b = 1.$$

Нормальное уравнение прямой.

Если обе части уравнения $Ax + By + C = 0$ разделить на число $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, которое называется **нормирующим множителем**, то получим

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0 -$$

нормальное уравнение прямой.

Знак $\pm$ нормирующего множителя надо выбирать так, чтобы $\mu \cdot C < 0$.

p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ – угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ox .

Угол между прямыми на плоскости.

Определение. Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол

между этими прямыми будет определяться как

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.

Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Теорема. Прямые $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ параллельны, когда пропорциональны коэффициенты $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$. Если еще и $C_1 = \lambda C$, то прямые совпадают.

Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы двух уравнений.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку
перпендикулярно данной прямой.

Определение. Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1, y_1)$ и перпендикулярная к прямой $y = kx + b$ представляется уравнением:

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1)$$

Расстояние от точки до прямой.

Теорема. Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то расстояние до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется как

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Кривые второго порядка.

Кривая второго порядка может быть задана уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Существует система координат (не обязательно декартова прямоугольная), в которой данное уравнение может быть представлено в одном из видов, приведенных ниже.

- 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение эллипса.
- 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ - уравнение “мнимого” эллипса.
- 3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение гиперболы.
- 4) $a^2x^2 - c^2y^2 = 0$ – уравнение двух пересекающихся прямых.
- 5) $y^2 = 2px$ – уравнение параболы.
- 6) $y^2 - a^2 = 0$ – уравнение двух параллельных прямых.
- 7) $y^2 + a^2 = 0$ – уравнение двух “мнимых” параллельных прямых.
- 8) $y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых.
- 9) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ – уравнение окружности.

Окружность.

В окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ центр имеет координаты $(a; b)$.

Эллипс.

Определение. Эллипсом называется линия, заданная уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Определение. Фокусами называются такие две точки, сумма расстояний от которых до любой точки эллипса есть постоянная величина.

F_1, F_2 – фокусы. $F_1 = (c; 0); F_2(-c; 0)$
 c – половина расстояния между фокусами;
 a – большая полуось;
 b – малая полуось.

Теорема. Фокусное расстояние и полуоси эллипса связаны соотношением:
$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Определение. Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к большей оси и называется **эксцентриситетом**.

$$e = c/a.$$

Т.к. $c < a$, то $e < 1$.

Определение. Величина $k = b/a$ называется **коэффициентом сжатия** эллипса, а величина $1 - k = (a - b)/a$ называется **сжатием** эллипса.

Коэффициент сжатия и эксцентриситет связаны соотношением: $k^2 = 1 - e^2$.

Если $a = b$ ($c = 0$, $e = 0$, фокусы сливаются), то эллипс превращается в окружность.

Если для точки $M(x_1, y_1)$ выполняется условие: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} < 1$, то она находится внутри эллипса, а если $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} > 1$, то точка находится вне эллипса.

Теорема. Для произвольной точки $M(x, y)$, принадлежащей эллипсу верны соотношения:

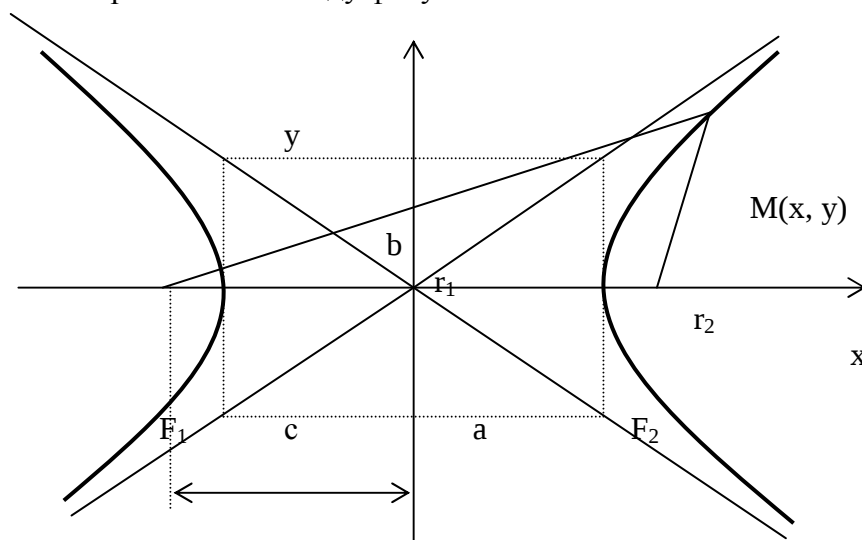
$$r_1 = a - ex, r_2 = a + ex.$$

С эллипсом связаны две прямые, называемые **директрисами**. Их уравнения:
 $x = a/e; x = -a/e$.

Теорема. Для того, чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы отношение расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы равнялось эксцентриситету e .

Гипербола.

Определение. Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых **фокусами** есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.



По определению $|r_1 - r_2| = 2a$. F_1, F_2 – фокусы гиперболы. $F_1F_2 = 2c$.
 Выберем на гиперболе произвольную точку $M(x, y)$. Тогда:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -4a^2 + 4xc$$

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 - a^4 - x^2c^2 = 0$$

$$-x^2(c^2 - a^2) + a^2(c^2 - a^2) + a^2y^2 = 0$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$a^2b^2 = b^2x^2 - a^2y^2$$

обозначим $c^2 - a^2 = b^2$ (геометрически эта величина – меньшая полуось)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Получили каноническое уравнение гиперболы.

Гипербола симметрична относительно середины отрезка, соединяющего фокусы и относительно осей координат.

Ось 2а называется действительной осью гиперболы.

Ось 2b называется мнимой осью гиперболы.

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Определение. Отношение $e = \frac{c}{a} > 1$ называется **эксцентриситетом** гиперболы, где c – половина расстояния между фокусами, a – действительная полуось.

$$\text{С учетом того, что } c^2 - a^2 = b^2: e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}; \quad \frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}.$$

Если $a = b$, $e = \sqrt{2}$, то гипербола называется **равнобочной (равносторонней)**.

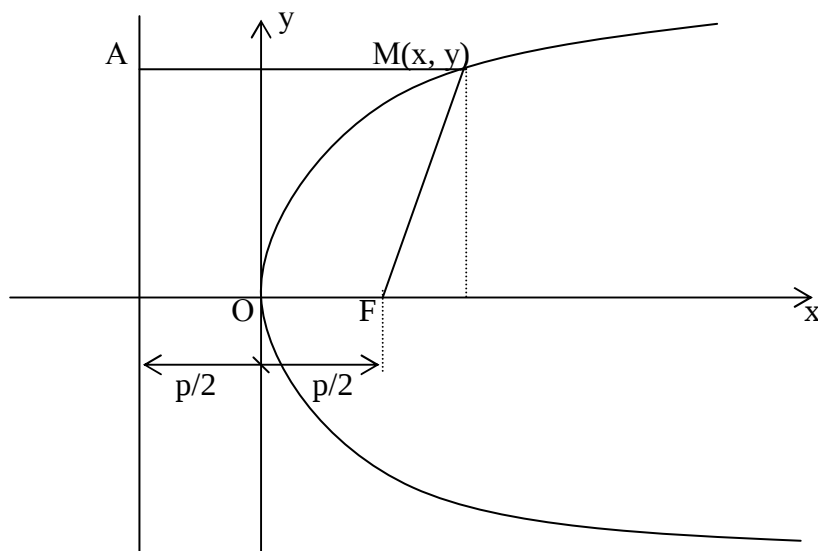
Определение. Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии a/e от него, называются **директрисами** гиперболы. Их уравнения: $x = \pm \frac{a}{e}$.

Теорема. Если r – расстояние от произвольной точки M гиперболы до какого-либо фокуса, d – расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение r/d – величина постоянная, равная эксцентриситету.

Парабола.

Определение. **Параболой** называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой.



Величина p (расстояние от фокуса до директрисы) называется **параметром** параболы. Выведем каноническое уравнение параболы.

Из геометрических соотношений: $AM = MF$; $AM = x + p/2$;

$$\begin{aligned} MF^2 &= y^2 + (x - p/2)^2 \\ (x + p/2)^2 &= y^2 + (x - p/2)^2 \\ x^2 + xp + p^2/4 &= y^2 + x^2 - xp + p^2/4 \end{aligned}$$

$$y^2 = 2px$$

Уравнение директрисы: $x = -p/2$.

Аналитическая геометрия в пространстве.

Уравнение линии в пространстве.

Как на плоскости, так и в пространстве, любая линия может быть определена как совокупность точек, координаты которых в некоторой выбранной в пространстве системе координат удовлетворяют уравнению:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Это уравнение называется уравнением линии в пространстве.

Кроме того, линия в пространстве может быть определена и иначе. Ее можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей, каждая из которых задана каким-либо уравнением.

Пусть $F(x, y, z) = 0$ и $\Phi(x, y, z) = 0$ – уравнения поверхностей, пересекающихся по линии L .

Тогда пару уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

назовем **уравнением линии в пространстве**.

Уравнение прямой в пространстве по точке и направляющему вектору.

Возьмем произвольную прямую и вектор $\vec{S}(m, n, p)$, параллельный данной прямой. Вектор $\vec{S}$ называется **направляющим вектором** прямой.

На прямой возьмем две произвольные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M(x, y, z)$.

Обозначим радиус-векторы этих точек как $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$, очевидно, что $\vec{r} - \vec{r}_0 = \overrightarrow{M_0M}$.

Т.к. векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{S}$ коллинеарны, то верно соотношение $\overrightarrow{M_0M} = \vec{S}t$, где t – некоторый параметр.

Итого, можно записать: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{S} t$.

Т.к. этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки прямой, то полученное уравнение – **параметрическое уравнение прямой**.

Это векторное уравнение может быть представлено в координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

Преобразовав эту систему и приравняв значения параметра t , получаем канонические уравнения прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Определение. Направляющими косинусами прямой называются направляющие косинусы вектора $\vec{S}$, которые могут быть вычислены по формулам:

$$\cos \alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}; \quad \cos \beta = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}; \quad \cos \gamma = \frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Отсюда получим: $m : n : p = \cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma$.

Числа m, n, p называются **угловыми коэффициентами** прямой. Т.к. $\vec{S}$ - ненулевой вектор, то m, n и p не могут равняться нулю одновременно, но одно или два из этих чисел могут равняться нулю. В этом случае в уравнении прямой следует приравнять нулю соответствующие числители.

Уравнение прямой в пространстве, проходящей
через две точки.

Если на прямой в пространстве отметить две произвольные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты этих точек должны удовлетворять полученному выше уравнению прямой:

$$\frac{x_2 - x_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{n} = \frac{z_2 - z_1}{p}.$$

Кроме того, для точки M_1 можно записать:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

Решая совместно эти уравнения, получим:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Это уравнение прямой, проходящей через две точки в пространстве.

Общие уравнения прямой в пространстве.

Уравнение прямой может быть рассмотрено как уравнение линии пересечения двух плоскостей.

Как было рассмотрено выше, плоскость в векторной форме может быть задана уравнением:

$$\vec{N} \cdot \vec{r} + D = 0, \text{ где}$$

$\vec{N}$ - нормаль плоскости; $\vec{r}$ - радиус- вектор произвольной точки плоскости.

Пусть в пространстве заданы две плоскости: $\vec{N}_1 \cdot \vec{r} + D_1 = 0$ и $\vec{N}_2 \cdot \vec{r} + D_2 = 0$, векторы нормали имеют координаты: $\vec{N}_1 (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{N}_2 (A_2, B_2, C_2)$; $\vec{r} (x, y, z)$.

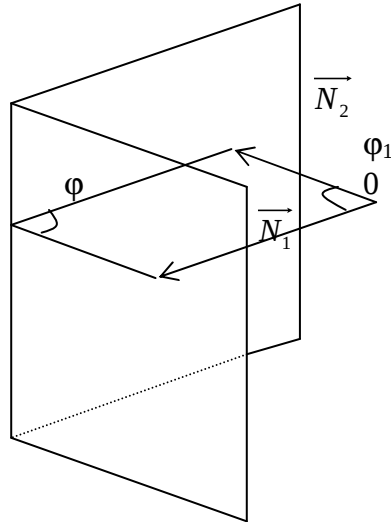
Тогда общие уравнения прямой в векторной форме:

$$\begin{cases} \vec{N}_1 \cdot \vec{r} + D_1 = 0 \\ \vec{N}_2 \cdot \vec{r} + D_2 = 0 \end{cases}$$

Общие уравнения прямой в координатной форме:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Угол между плоскостями.



Угол между двумя плоскостями в пространстве φ связан с углом между нормальными к этим плоскостям φ_1 соотношением: $\varphi = \varphi_1$ или $\varphi = 180^\circ - \varphi_1$, т.е.

$$\cos \varphi = \pm \cos \varphi_1.$$

Определим угол φ_1 . Известно, что плоскости могут быть заданы соотношениями:

$$\begin{cases} \vec{N}_1 \cdot \vec{r} + D_1 = 0 \\ \vec{N}_2 \cdot \vec{r} + D_2 = 0 \end{cases}, \text{ где}$$

$\vec{N}_1 (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{N}_2 (A_2, B_2, C_2)$. Угол между векторами нормали найдем из их скалярного произведения:

$$\cos \varphi_1 = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|}.$$

Таким образом, угол между плоскостями находится по формуле:

$$\cos \varphi = \pm \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Выбор знака косинуса зависит от того, какой угол между плоскостями следует найти – острый, или смежный с ним тупой.

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

На основе полученной выше формулы для нахождения угла между плоскостями можно найти условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Для того, чтобы плоскости были перпендикулярны необходимо и достаточно,

чтобы косинус угла между плоскостями равнялся нулю. Это условие выполняется, если:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Плоскости параллельны, векторы нормалей коллинеарны: $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$. Это условие выполняется, если: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Угол между прямыми в пространстве.

Пусть в пространстве заданы две прямые. Их параметрические уравнения:

$$l_1: \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{S}_1 t$$

$$l_2: \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{S}_2 t$$

$$\vec{r} = (x, y, z); \quad \vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1); \quad \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2); \quad \vec{S}_1 = (m_1, n_1, p_1); \quad \vec{S}_2 = (m_2, n_2, p_2).$$

Угол между прямыми φ и угол между направляющими векторами φ этих прямых связаны соотношением: $\varphi = \varphi_1$ или $\varphi = 180^\circ - \varphi_1$. Угол между направляющими векторами находится из скалярного произведения. Таким образом:

$$\cos \varphi = \pm \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{|\vec{S}_1| |\vec{S}_2|} = \pm \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве.

Чтобы две прямые были параллельны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были коллинеарны, т.е. их соответствующие координаты были пропорциональны.

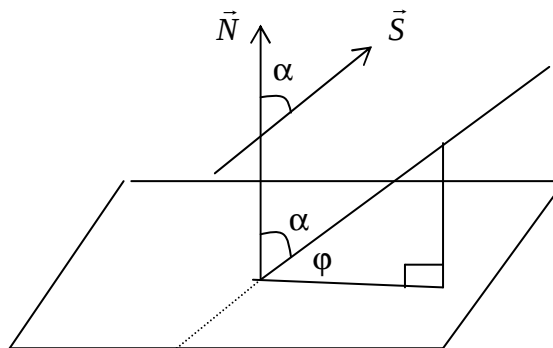
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Чтобы две прямые были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были перпендикулярны, т.е. косинус угла между ними равен нулю.

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

Угол между прямой и плоскостью.

Определение. Углом между прямой и плоскостью называется любой угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.



Пусть плоскость задана уравнением $\vec{N} \cdot \vec{r} + D = 0$, а прямая - $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{S}t$. Из геометрических соображений (см. рис.) видно, что искомый угол $\alpha = 90^\circ - \varphi$, где α - угол между векторами $\vec{N}$ и $\vec{S}$. Этот угол может быть найден по формуле:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{N} \cdot \vec{S}}{|\vec{N}| |\vec{S}|}; \quad \sin \varphi = \pm \cos \alpha = \pm \frac{\vec{N} \cdot \vec{S}}{|\vec{N}| |\vec{S}|}.$$

$$\text{В координатной форме: } \sin \varphi = \pm \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве.

Для того, чтобы прямая и плоскость были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были перпендикулярны. Для этого необходимо, чтобы их скалярное произведение было равно нулю.

$$\vec{N} \perp \vec{S}, \quad \vec{N} \cdot \vec{S} = 0, \quad \sin \varphi = 0, \quad Am + Bn + Cp = 0.$$

Для того, чтобы прямая и плоскость были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были коллинеарны. Это условие выполняется, если векторное произведение этих векторов было равно нулю.

$$\vec{N} \times \vec{S} = 0; \quad \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Лекции 6-7.

Введение в математический анализ.

Числовая последовательность.

Определение. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n , то говорят, что задана **последовательность**

$$x_1, x_2, \dots, x_n = \{x_n\}$$

Общий элемент последовательности является функцией от n .

$$x_n = f(n)$$

Таким образом, последовательность может рассматриваться как функция.

Задать последовательность можно различными способами – главное, чтобы был указан способ получения любого члена последовательности.

$$\begin{aligned} \text{Пример. } \{x_n\} &= \{(-1)^n\} \text{ или } \{x_n\} = -1; 1; -1; 1; \dots \\ \{x_n\} &= \{\sin \pi n / 2\} \text{ или } \{x_n\} = 1; 0; 1; 0; \dots \end{aligned}$$

Для последовательностей можно определить следующие **операции**:

- 1) Умножение последовательности на число m : $m\{x_n\} = \{mx_n\}$, т.е. $mx_1, mx_2, \dots$
- 2) Сложение (вычитание) последовательностей: $\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}$.
- 3) Произведение последовательностей: $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$.
- 4) Частное последовательностей: $\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ при $\{y_n\} \neq 0$.

Ограниченные и неограниченные последовательности.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если существует такое число $M > 0$, что для любого n верно неравенство:

$$|x_n| < M$$

т.е. все члены последовательности принадлежат промежутку $(-M; M)$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху**, если для

любого n существует такое число M , что

$$x_n \leq M.$$

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной снизу**, если для любого n существует такое число M , что

$$x_n \geq M$$

Пример. $\{x_n\} = n$ – ограничена снизу $\{1, 2, 3, \dots\}$.

Определение. Число a называется **пределом** последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что для всех $n > N$ выполняется условие:

$$|a - x_n| < \varepsilon.$$

Это записывается: $\lim x_n = a$.

В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$ **сходится** к a при $n \rightarrow \infty$.

Свойство: Если отбросить какое-либо число членов последовательности, то получаются новые последовательности, при этом если сходится одна из них, то сходится и другая.

Теорема. Последовательность не может иметь более одного предела.

Теорема. Если $x_n \rightarrow a$, то $|x_n| \rightarrow |a|$.

Доказательство. Из $x_n \rightarrow a$ следует, что $|x_n - a| < \varepsilon$. В то же время:

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|, \text{ т.е. } ||x_n| - |a|| < \varepsilon, \text{ т.е. } |x_n| \rightarrow |a|. \text{ Теорема доказана.}$$

Теорема. Если $x_n \rightarrow a$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Следует отметить, что обратное утверждение неверно, т.е. из ограниченности последовательности не следует ее сходимости.

Монотонные последовательности.

Определение.

1) Если $x_{n+1} > x_n$ для всех n , то последовательность возрастающая.

2) Если $x_{n+1} \geq x_n$ для всех n , то последовательность неубывающая.

3) Если $x_{n+1} < x_n$ для всех n , то последовательность убывающая.

4) Если $x_{n+1} \leq x_n$ для всех n , то последовательность невозрастающая

Все эти последовательности называются **монотонными**. Возрастающие и убывающие последовательности называются **строго монотонными**.

Теорема. Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$ (т.е. в самой точке $x = a$ функция может быть и не определена)

Определение. Число A называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что для всех x таких, что

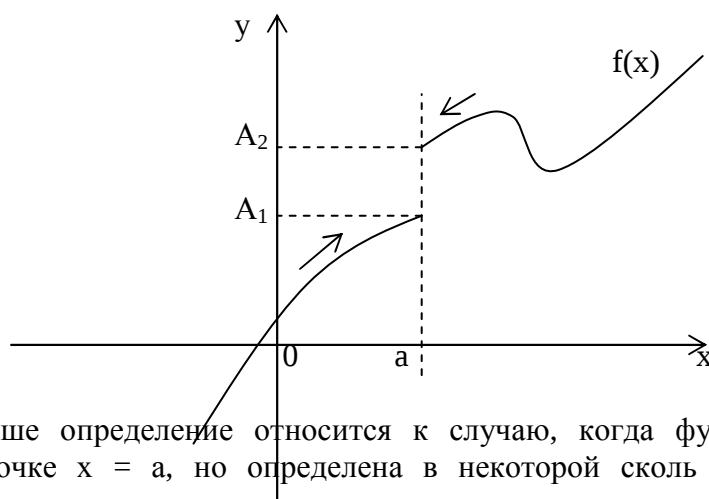
$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \Delta \\ \text{верно неравенство} \quad |f(x) - A| < \varepsilon. \end{aligned}$$

То же определение может быть записано в другом виде:

Если $a - \Delta < x < a + \Delta$, $x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

Определение. Если $f(x) \rightarrow A_1$ при $x \rightarrow a$ только при $x < a$, то $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A_1$ называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x = a$ **слева**, а если $f(x) \rightarrow A_2$ при $x \rightarrow a$ только при $x > a$, то $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x = a$ **справа**.



Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция $f(x)$ не определена в самой точке $x = a$, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции $f(x)$ в точке $x = a$. Также говорят, что A – **конечный предел** функции $f(x)$.

Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.

Определение. Число A называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех x , $|x| > M$ выполняется неравенство

$$|A - f(x)| < \varepsilon$$

При этом предполагается, что функция $f(x)$ определена в окрестности бесконечности.

Записывают: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

Аналогично можно определить пределы $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ для любого $x > M$ и

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ для любого $x < M$.

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. $\lim_{x \rightarrow a} C = C$, где $C = \text{const}$.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \rightarrow a$.

Теорема 2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

Теорема 3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Следствие. $\lim_{x \rightarrow a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Теорема 4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ при $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

Теорема 5. Если $f(x) > 0$ вблизи точки $x = a$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, то $A > 0$.

Аналогично определяется знак предела при $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$.

Теорема 6. Если $g(x) \leq f(x) \leq u(x)$ вблизи точки $x = a$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} u(x) = A$, то и

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Определение. Функция $f(x)$ называется **ограниченной** вблизи точки $x = a$, если существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| < M$ вблизи точки $x = a$.

Теорема 7. Если функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x \rightarrow a$, то она ограничена вблизи точки $x = a$.

Доказательство. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, т.е. $|f(x) - A| < \varepsilon$, тогда

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| \text{ или}$$

$$|f(x)| < \varepsilon + |A|, \text{ т.е.}$$

$$|f(x)| < M, \text{ где } M = \varepsilon + |A|$$

Теорема доказана.

Бесконечно малые функции.

Определение. Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \rightarrow a$, где a может быть числом или одной из величин ∞ , $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Бесконечно малой функция может быть только если указать к какому числу стремится аргумент x . При различных значениях a функция может быть бесконечно малой или нет.

Пример. Функция $f(x) = x^n$ является бесконечно малой при $x \rightarrow 0$ и не является бесконечно малой при $x \rightarrow 1$, т.к. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

Теорема. Для того, чтобы функция $f(x)$ при $x \rightarrow a$ имела предел, равный A , необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки $x = a$ выполнялось условие

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow a$ ($\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$).

Свойства бесконечно малых функций:

- 1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow a$ тоже бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$.
- 2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow a$ тоже бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$.
- 3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки $x = a$ является бесконечно малой функцией при $x \rightarrow a$.
- 4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю, есть величина бесконечно малая.

Бесконечно большие функции и их связь с

бесконечно малыми.

Определение. Предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, где a – число, **равен бесконечности**, если для любого числа $M > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что неравенство

$$|f(x)| > M$$

выполняется при всех x , удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \Delta$$

Записывается $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

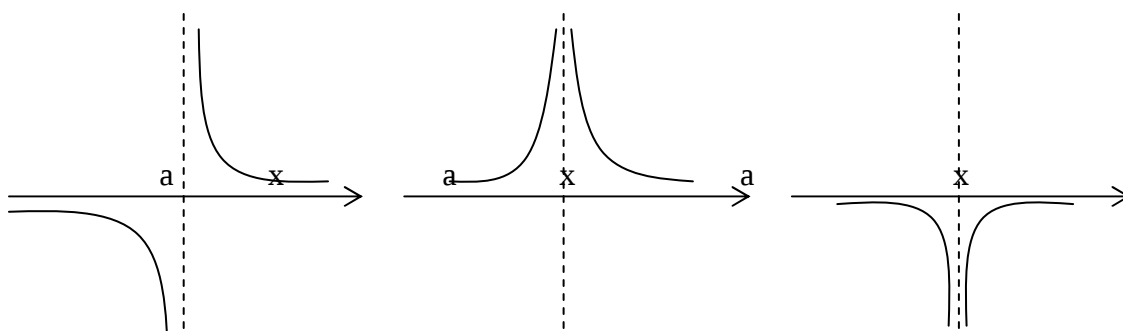
Собственно, если в приведенном выше определении заменить условие $|f(x)| > M$ на $f(x) > M$, то получим:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty,$$

а если заменить на $f(x) < M$, то:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

Графически приведенные выше случаи можно проиллюстрировать следующим образом:



Определение. Функция называется **бесконечно большой** при $x \rightarrow a$, где a – число или одна из величин ∞ , $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, где A – число или одна из величин ∞ , $+\infty$ или $-\infty$.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

Теорема. Если $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$ (если $x \rightarrow \infty$) и не обращается в ноль, то

$$y = \frac{1}{f(x)} \rightarrow \infty$$

Сравнение бесконечно малых функций.

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – бесконечно малые функции при $x \rightarrow a$. Будем обозначать эти функции α , β и γ соответственно. Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по скорости их убывания, т.е. по скорости их стремления к нулю.

Например, функция $f(x) = x^{10}$ стремится к нулю быстрее, чем функция $f(x) = x$.

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то функция α называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция β .

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = A$, $A \neq 0$, $A = \text{const}$, то α и β называются **бесконечно малыми одного порядка**.

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, то функции α и β называются **эквивалентными бесконечно малыми**. Записывают $\alpha \sim \beta$.

Определение. Бесконечно малая функция α называется **бесконечно малой порядка k** относительно бесконечно малой функции β , если предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta^k}$ конечен и отличен от нуля.

Однако следует отметить, что не все бесконечно малые функции можно сравнивать между собой. Например, если отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ не имеет предела, то функции несравнимы.

Свойства эквивалентных бесконечно малых.

$$1) \alpha \sim \alpha, \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\alpha} = 1 \right)$$

$$2) \text{ Если } \alpha \sim \beta \text{ и } \beta \sim \gamma, \text{ то } \alpha \sim \gamma, \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\gamma} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\gamma} \right) = 1 \cdot 1 = 1 \right)$$

$$3) \text{ Если } \alpha \sim \beta, \text{ то } \beta \sim \alpha, \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} = 1 \right)$$

$$4) \text{ Если } \alpha \sim \alpha_1 \text{ и } \beta \sim \beta_1 \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k, \text{ то и } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta_1} = k \text{ или } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Следствие: а) если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta}$

б) если $\beta \sim \beta_1$ и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta_1}$

Свойство 4 особенно важно на практике, т.к. оно фактически означает, что предел отношения бесконечно малых не меняется при замене их на эквивалентные бесконечно малые. Этот факт дает возможность при нахождении пределов заменять бесконечно малые на эквивалентные им функции, что может сильно упростить вычисление пределов.

Некоторые замечательные пределы.

Первый замечательный предел. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Второй замечательный предел. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$

Часто если непосредственное нахождение предела какой – либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

Лекция 8.

Понятие непрерывности функции.

Непрерывность функции в точке.

Определение. Функция $f(x)$, определенная в окрестности некоторой точки x_0 , называется **непрерывной в точке** x_0 , если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Тот же факт можно записать иначе: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$

Определение. Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , но не является непрерывной в самой точке x_0 , то она называется **разрывной** функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что для любых x , удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \Delta$$

верно неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Определение. Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке $x = x_0$, если приращение функции в точке x_0 является бесконечно малой величиной.

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$.

Свойства непрерывных функций.

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0 .

2) Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что $g(x)$ не равна нулю в точке x_0 .

3) Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:

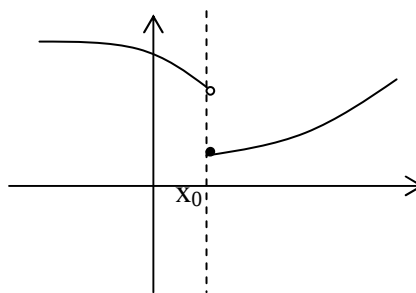
Если $u = f(x)$, $v = g(x)$ – непрерывные функции в точке $x = x_0$, то функция $v = g(f(x))$ – тоже непрерывная функция в этой точке.

Точки разрыва и их классификация.

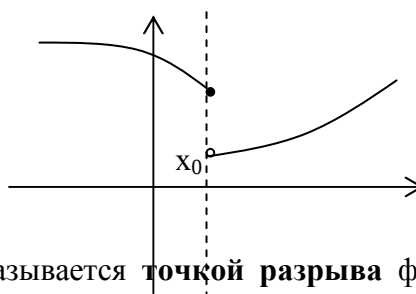
Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$, непрерывную в окрестности точки x_0 , за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что $x = x_0$ является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел (см. выше) $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.



Если односторонний предел (см. выше) $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.



Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если $f(x)$ не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва 1-го рода**, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1 – го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1 – го рода еще иногда называют **устранимой** точкой разрыва, но подробнее об этом поговорим ниже.

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва 2 – го рода**, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

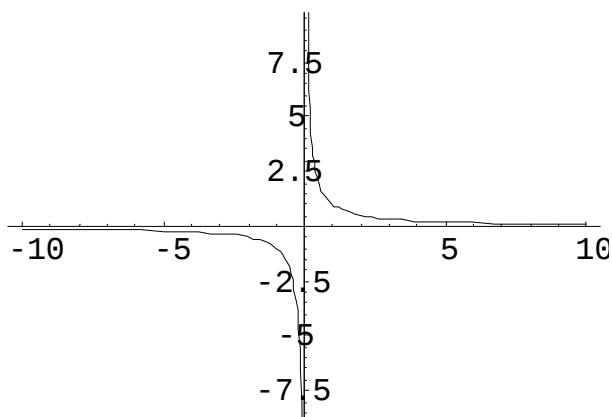
Пример. Функция Дирихле (Дирихле Петер Густав(1805-1859) – немецкий математик, член- корреспондент Петербургской АН 1837г)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рациональное число} \\ 0, & x - \text{иррациональное число} \end{cases}$$

не является непрерывной в любой точке x_0 .

Пример. Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ точку разрыва 2 – го рода, т.к.

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = -\infty.$$



Непрерывность функции на интервале и на отрезке.

Определение. Функция $f(x)$ называется **непрерывной на интервале (отрезке)**, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Свойство 1: (Первая теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-1897)- немецкий математик)). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке $[a, b]$ выполняется условие $-M \leq f(x) \leq M$.

Свойство 2: Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Т.е. существуют такие значения x_1 и x_2 , что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причем

$$m \leq f(x) \leq M$$

Отметим, эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например – $f(x) = \sin x$).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется **колебанием** функции на отрезке.

Свойство 3: (Вторая теорема Больцано – Коши). Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

Свойство 4: Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0 , в которой функция сохраняет знак.

Свойство 5: (Первая теорема Больцано (1781-1848) – Коши). Если функция $f(x)$ -непрерывная на отрезке $[a, b]$ и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где $f(x) = 0$.

Т.е. если $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$, то $\exists x_0: f(x_0) = 0$.

Определение. Функция $f(x)$ называется **равномерно непрерывной** на отрезке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\Delta > 0$ такое, что для любых точек $x_1 \in [a, b]$ и $x_2 \in [a, b]$ таких, что

$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| &< \Delta \\ |f(x_2) - f(x_1)| &< \varepsilon \end{aligned}$$

верно неравенство

Отличие равномерной непрерывности от “обычной” в том, что для любого ε существует свое Δ , не зависящее от x , а при “обычной” непрерывности Δ зависит от ε и x .

Свойство 6: Теорема Кантора (Кантор Георг (1845-1918)- немецкий математик). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.

(Это свойство справедливо только для отрезков, а не для интервалов и полуинтервалов.)

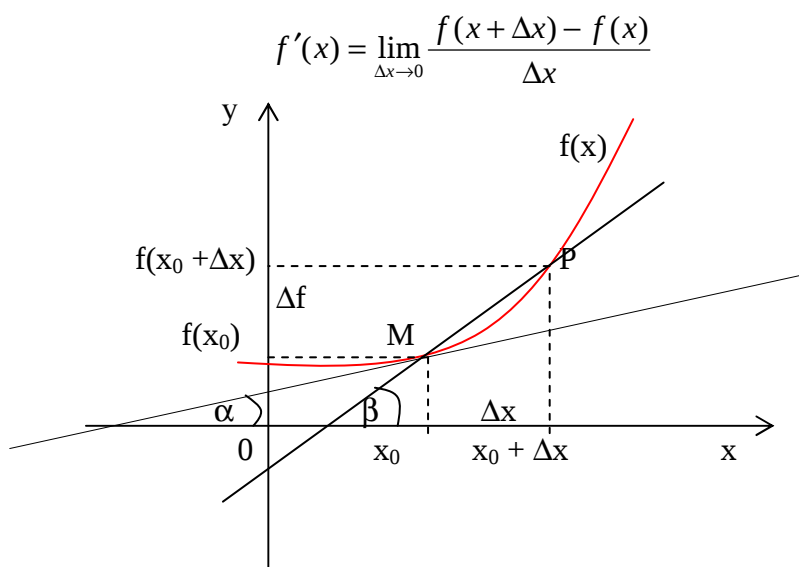
Свойство 7: Если функция $f(x)$ определена, монотонна и непрерывна на некотором промежутке, то и обратная ей функция $x = g(y)$ тоже однозначна, монотонна и непрерывна.

Лекции 9-10.

Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Производная функции, ее геометрический и физический смысл.

Определение. Производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.



Пусть $f(x)$ определена на некотором промежутке (a, b) . Тогда $\text{tg} \beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей MP к графику функции.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α - угол наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой-либо точке.

$$\text{Уравнение касательной к кривой: } y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\text{Уравнение нормали к кривой: } y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Фактически производная функции показывает как бы скорость изменения функции, как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной функции $f(t)$, где t - время, а $f(t)$ - закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

Соответственно, вторая производная функции - скорость изменения скорости, т.е. ускорение.

Основные правила дифференцирования.

Обозначим $f(x) = u$, $g(x) = v$ - функции, дифференцируемые в точке x .

$$1) (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$2) (u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$$

$$3) \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \text{ если } v \neq 0$$

Эти правила могут быть легко доказаны на основе теорем о пределах.

Производные основных элементарных функций.

$$1) C' = 0;$$

$$2) (x^m)' = mx^{m-1};$$

$$3) (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$4) \left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$5) (e^x)' = e^x$$

$$6) (a^x)' = a^x \ln a$$

$$7) (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$8) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$9) (\sin x)' = \cos x$$

$$10) (\cos x)' = -\sin x$$

$$11) (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$12) (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$13) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$15) (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$16) (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Производная сложной функции.

Теорема. Пусть $y = f(x)$; $u = g(x)$, причем область значений функции u входит в область определения функции f .

$$\text{Тогда } y' = f'(u) \cdot u'$$

Доказательство.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(с учетом того, что если $\Delta x \rightarrow 0$, то $\Delta u \rightarrow 0$, т.к. $u = g(x)$ – непрерывная функция)

Тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ Теорема доказана.

Логарифмическое дифференцирование.

Рассмотрим функцию $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{при } x > 0 \\ \ln(-x), & \text{при } x < 0 \end{cases}$.

Тогда $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, т.к. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{x} = \frac{1}{x}$.

Учитывая полученный результат, можно записать $(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Отношение $\frac{f'(x)}{f(x)}$ называется **логарифмической производной** функции $f(x)$.

Способ **логарифмического дифференцирования** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x)$$

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных сложных, особенно показательных функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким.

Производная показательно- степенной функции.

Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием. Если же и основание и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет показательно – степенной.

Пусть $u = f(x)$ и $v = g(x)$ – функции, имеющие производные в точке x , $f(x) > 0$. Найдем производную функции $y = u^v$. Логарифмируя, получим:

$$\ln y = v \ln u$$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}$$

$$y' = u^v \left(v \frac{u'}{u} + v' \ln u \right)$$

$$(u^v)' = v u^{v-1} u' + u^v v' \ln u$$

Производная обратных функций.

Пусть требуется найти производную функции $y = f(x)$ при условии, что обратная ей функция $x = g(y)$ имеет производную, отличную от нуля в соответствующей точке.

Для решения этой задачи дифференцируем функцию $x = g(y)$ по x :

$$1 = g'(y)y'$$

т.к. $g'(y) \neq 0$

$$y' = \frac{1}{g'(y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

т.е. производная обратной функции обратна по величине производной данной функции.

Общие правила нахождения высших производных.

Если функции $u = f(x)$ и $v = g(x)$ дифференцируемы, то

$$1) (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)};$$

$$2) (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)};$$

$$3) (u \cdot v)^{(n)} = vu^{(n)} + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \dots + \frac{n(n-1)\dots[n-(k-1)]}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \dots$$

$\dots + uv^{(n)}$. Это выражение называется **формулой Лейбница**.

Лекция 11.

Дифференциал функции.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Тогда можно записать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \rightarrow 0$, при $\Delta x \rightarrow 0$.

Следовательно: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Величина $\alpha \Delta x$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$ - главная часть приращения Δy .

Определение. Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x называется главная линейная часть приращения функции.

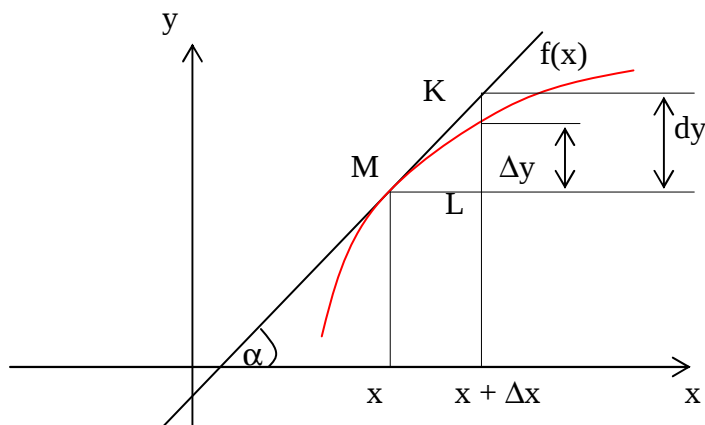
Обозначается dy или $df(x)$.

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или

$$dy = f'(x)dx.$$

Можно также записать: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Геометрический смысл дифференциала.



Из треугольника ΔMKL : $KL = dy = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$

Таким образом, дифференциал функции $f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

Свойства дифференциала.

Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$ - функции, дифференцируемые в точке x , то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)' dx = u' dx \pm v' dx = du \pm dv$

2) $d(uv) = (uv)' dx = (u'v + v'u) dx = vdu + u dv$

3) $d(Cu) = Cdu$

4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$

Дифференциал сложной функции.

Пусть $y = f(x)$, $x = g(t)$, т.е y - сложная функция.

Тогда $dy = f'(x)g'(t)dt = f'(x)dx$.

Видно, что форма записи дифференциала dy не зависит от того, будет ли x независимой переменной или функцией какой- то другой переменной, в связи с чем эта форма записи называется **инвариантной формой записи дифференциала**.

Однако, если x - независимая переменная, то

$$dx = \Delta x, \text{ но}$$

если x зависит от t , то $\Delta x \neq dx$.

Таким образом форма записи $dy = f'(x)\Delta x$ не является инвариантной.

Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

Дифференциал функции $y = f(x)$ зависит от Δx и является главной частью приращения Δx .

Также можно воспользоваться формулой

$$dy = f'(x)dx$$

Тогда абсолютная погрешность: $|\Delta y - dy|$

Относительная погрешность: $\left| \frac{\Delta y - dy}{dy} \right|$.

Производные и дифференциалы высших порядков.

Пусть функция $f(x)$ - дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную функции $f'(x)$, получим **вторую производную** функции $f(x)$.

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \text{ т.е. } y'' = (y')' \text{ или } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right).$$

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n .

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right).$$

Дифференциал n - го порядка может быть найден по формуле

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n.$$

Лекция 12.

Основные теоремы дифференциального исчисления.

Теорема Ролля.

(Ролль (1652-1719)- французский математик)

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны $f(a) = f(b)$, то на интервале (a, b) существует точка ε , $a < \varepsilon < b$, в которой производная функция $f(x)$ равная нулю,

$$f'(\varepsilon) = 0.$$

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что при выполнении условий теоремы на интервале (a, b) существует точка ε такая, что в соответствующей точке кривой $y = f(x)$ касательная параллельна оси Ox . Таких точек на интервале может быть и несколько, но теорема утверждает существование по крайней мере одной такой точки.

Доказательство. По свойству функций, непрерывных на отрезке функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ принимает наибольшее и наименьшее значения. Обозначим эти значения M и m соответственно. Возможны два различных случая $M = m$ и $M \neq m$.

Пусть $M = m$. Тогда функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ сохраняет постоянное значение и в любой точке интервала ее производная равна нулю. В этом случае за ε можно принять любую точку интервала.

Пусть $M \neq m$. Так значения на концах отрезка равны, то хотя бы одно из значений M или m функция принимает внутри отрезка $[a, b]$. Обозначим ε , $a < \varepsilon < b$ точку, в которой $f(\varepsilon) = M$. Так как M - наибольшее значение функции, то для любого Δx (будем считать, что точка $\varepsilon + \Delta x$ находится внутри рассматриваемого интервала) верно неравенство:

$$\Delta f(\varepsilon) = f(\varepsilon + \Delta x) - f(\varepsilon) \leq 0$$

$$\text{При этом } \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = \begin{cases} \leq 0, & \text{если } \Delta x > 0 \\ \geq 0, & \text{если } \Delta x < 0 \end{cases}$$

Но так как по условию производная в точке ε существует, то существует и предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x}$.

Т.к. $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} \leq 0$ и $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} \geq 0$, то можно сделать вывод:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = 0, \text{ т.е. } f'(\varepsilon) = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема Ролля имеет несколько **следствий**:

- 1) Если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет теореме Ролля, причем $f(a) = f(b) = 0$, то существует по крайней мере одна точка ε , $a < \varepsilon < b$, такая, что $f'(\varepsilon) = 0$. Т.е. между двумя нулями функции найдется хотя бы одна точка, в которой производная функции равна нулю.
- 2) Если на рассматриваемом интервале (a, b) функция $f(x)$ имеет производную $(n-1)$ -го порядка и n раз обращается в нуль, то существует по крайней мере одна точка интервала, в котором производная $(n-1)$ -го порядка равна нулю.

Теорема Лагранжа.

(Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) французский математик)

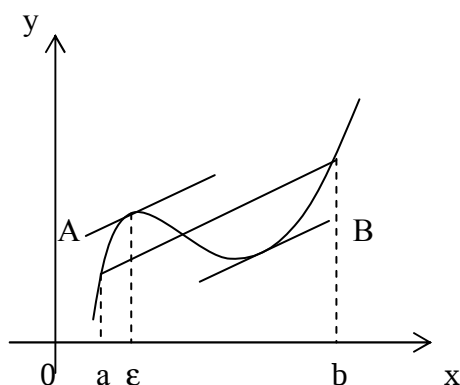
Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка ε

$$a < \varepsilon < b, \text{ такая, что } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\varepsilon).$$

Это означает, что если на некотором промежутке выполняются условия теоремы, то отношение приращения функции к приращению аргумента на этом отрезке равно значению производной в некоторой промежуточной точке.

Рассмотренная выше теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Отношение $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ равно угловому коэффициенту секущей АВ.



Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы, то на интервале (a, b) существует точка ε такая, что в соответствующей точке кривой $y = f(x)$ касательная параллельна секущей, соединяющей точки А и В. Таких точек может быть и несколько, но

одна существует точно.

Доказательство. Рассмотрим некоторую вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - y_{\text{сек } AB}$$

Уравнение секущей АВ можно записать в виде:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет теореме Ролля. Действительно, она непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) . По теореме Ролля существует хотя бы одна точка ε , $a < \varepsilon < b$, такая что $F'(\varepsilon) = 0$.

$$\text{Т.к. } F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ то } F'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0, \text{ следовательно}$$

$$f'(\varepsilon) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Теорема доказана.

Определение. Выражение $f(b) - f(a) = f'(\varepsilon)(b - a)$ называется **формулой**

Лагранжа или формулой конечных приращений.

В дальнейшем эта формула будет очень часто применяться для доказательства самых разных теорем.

Иногда формулу Лагранжа записывают в несколько другом виде:

$$\Delta y = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x,$$

где $0 < \theta < 1$, $\Delta x = b - a$, $\Delta y = f(b) - f(a)$.

Теорема Коши.

(Коши (1789-1857)- французский математик)

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b) , то существует по крайней мере одна точка ε , $a < \varepsilon < b$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.$$

Т.е. отношение приращений функций на данном отрезке равно отношению производных в точке ε .

Для доказательства этой теоремы на первый взгляд очень удобно воспользоваться теоремой Лагранжа. Записать формулу конечных разностей для каждой функции, а затем разделить их друг на друга. Однако, это представление ошибочно, т.к. точка ε для каждой из функций в общем случае различна. Конечно, в некоторых частных случаях эта точка интервала может оказаться одинаковой для обеих функций, но это- очень редкое совпадение, а не правило, поэтому не может быть использовано для доказательства теоремы.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)),$$

которая на интервале $[a, b]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Легко видеть, что при $x = a$ и $x = b$ $F(a) = F(b) = 0$. Тогда по теореме Ролля существует такая точка ε ,

$a < \varepsilon < b$, такая, что $F'(\varepsilon) = 0$. Т.к.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x), \text{ то}$$

$$F'(\varepsilon) = 0 = f'(\varepsilon) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\varepsilon)$$

$$\text{А т.к. } g'(\varepsilon) \neq 0, \text{ то } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Теорема доказана.

Следует отметить, что рассмотренная выше теорема Лагранжа является частным случаем (при $g(x) = x$) теоремы Коши. Доказанная нами теорема Коши очень широко используется для раскрытия так называемых неопределенностей. Применение полученных результатов позволяет существенно упростить процесс вычисления пределов функций, что будет подробно рассмотрено ниже.

Раскрытие неопределенностей.

Правило Лопиталья.

(Лопиталь (1661-1704) – французский математик)

К разряду неопределенностей принято относить следующие соотношения:

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty \cdot 0; \infty^0; 1^\infty; \infty - \infty$$

Теорема (правило Лопиталья). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы вблизи точки a , непрерывны в точке a , $g'(x)$ отлична от нуля вблизи a и $f(a) = g(a) = 0$, то предел отношения функций при $x \rightarrow a$ равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство. Применив формулу Коши, получим:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

где ε - точка, находящаяся между a и x . Учитывая, что $f(a) = g(a) = 0$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

Пусть при $x \rightarrow a$ отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ стремится к некоторому пределу. Т.к. точка ε лежит между точками a и x , то при $x \rightarrow a$ получим $\varepsilon \rightarrow a$, а следовательно и отношение

$\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$ стремится к тому же пределу. Таким образом, можно записать:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема доказана.

Если при решении примера после применения правила Лопиталья попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталья может быть применено второй раз, третий и т.д. пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталья.

Неопределенности вида 0^0 ; 1^∞ ; ∞^0 можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y = [f(x)]^{g(x)}$, $f(x) > 0$ вблизи точки a при $x \rightarrow a$. Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции $\ln y = g(x) \ln f(x)$.

Лекция 13.

Исследование функций с помощью производной.

Возрастание и убывание функций.

Теорема. 1) Если функция $f(x)$ имеет производную на отрезке $[a, b]$ и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е. $f'(x) \geq 0$.

2) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на промежутке (a, b) , причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке $[a, b]$.

Доказательство.

1) Если функция $f(x)$ возрастает, то $f(x + \Delta x) > f(x)$ при $\Delta x > 0$ и $f(x + \Delta x) < f(x)$ при $\Delta x < 0$, тогда: $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$.

2) Пусть $f'(x) > 0$ для любых точек x_1 и x_2 , принадлежащих отрезку $[a, b]$, причем $x_1 < x_2$.

Тогда по теореме Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x_2 - x_1)$, $x_1 < \varepsilon < x_2$

По условию $f'(\varepsilon) > 0$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т.е. функция $f(x)$ возрастает. Теорема доказана.

Аналогично можно сделать вывод о том, что если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$, то $f'(x) \leq 0$ на этом отрезке. Если $f'(x) < 0$ в промежутке (a, b) , то $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$.

Конечно, данное утверждение справедливо, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) .

Точки экстремума.

Определение. Функция $f(x)$ имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1 . Функция $f(x)$ имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может

быть и отрицательным).

Очевидно, что функция, определенная на отрезке может иметь максимум и минимум только в точках, находящихся внутри этого отрезка. Нельзя также путать максимум и минимум функции с ее наибольшим и наименьшим значением на отрезке – это понятия принципиально различные.

Определение. Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума**.

Теорема. (необходимое условие существования экстремума) *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_1$ и точка x_1 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.*

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_1$ максимум.

Тогда при достаточно малых положительных $\Delta x > 0$ верно неравенство:

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1), \text{ т.е.}$$

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0$$

Тогда

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0 \quad \text{при} \quad \Delta x < 0$$

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0 \quad \text{при} \quad \Delta x > 0$$

По определению:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1)$$

Т.е. если $\Delta x \rightarrow 0$, но $\Delta x < 0$, то $f'(x_1) \geq 0$, а если $\Delta x \rightarrow 0$, но $\Delta x > 0$, то $f'(x_1) \leq 0$.

А возможно это только в том случае, если при $\Delta x \rightarrow 0$ $f'(x_1) = 0$.

Для случая, если функция $f(x)$ имеет в точке x_2 минимум теорема доказывается аналогично. Теорема доказана.

Следствие. Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум. Красноречивый пример этого – функция $y = x^3$, производная которой в точке $x = 0$ равна нулю, однако в этой точке функция имеет только перегиб, а не максимум или минимум.

Определение. **Критическими точками** функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Рассмотренная выше теорема дает нам необходимые условия существования экстремума, но этого недостаточно.

Вообще говоря, функция $f(x)$ может иметь экстремум в точках, где производная не существует или равна нулю.

Теорема. (Достаточные условия существования экстремума)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b) , который содержит критическую точку x_1 , и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-“, то в точке $x = x_1$ функция $f(x)$ имеет максимум, а если производная меняет знак с “-“ на “+” - то функция имеет минимум.

Доказательство.

$$\text{Пусть } \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{при } x < x_1 \\ f'(x) < 0 & \text{при } x > x_1 \end{cases}$$

По теореме Лагранжа: $f(x) - f(x_1) = f'(\epsilon)(x - x_1)$, где $x < \epsilon < x_1$.

Тогда: 1) Если $x < x_1$, то $\epsilon < x_1$; $f'(\epsilon) > 0$; $f'(\epsilon)(x - x_1) < 0$, следовательно

$$f(x) - f(x_1) < 0 \text{ или } f(x) < f(x_1).$$

2) Если $x > x_1$, то $\epsilon > x_1$; $f'(\epsilon) < 0$; $f'(\epsilon)(x - x_1) < 0$, следовательно

$$f(x) - f(x_1) < 0 \text{ или } f(x) < f(x_1).$$

Т. к. ответы совпадают, то можно сказать, что $f(x) < f(x_1)$ в любых точках вблизи x_1 , т.е. x_1 – точка максимума.

Доказательство теоремы для точки минимума производится аналогично. Теорема доказана.

На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

- 1) Найти критические точки функции.
- 2) Найти значения функции в критических точках.
- 3) Найти значения функции на концах отрезка.
- 4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

Исследование функции на экстремум с помощью производных высших порядков.

Пусть в точке $x = x_1$ $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1 .

Теорема. Если $f'(x_1) = 0$, то функция $f(x)$ в точке $x = x_1$ имеет максимум, если $f''(x_1) < 0$ и минимум, если $f''(x_1) > 0$.

Доказательство.

Пусть $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1) < 0$. Т.к. функция $f(x)$ непрерывна, то $f''(x_1)$ будет отрицательной и в некоторой малой окрестности точки x_1 .

Т.к. $f''(x) = (f'(x))' < 0$, то $f'(x)$ убывает на отрезке, содержащем точку x_1 , но $f'(x_1) = 0$, т.е. $f'(x) > 0$ при $x < x_1$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_1$. Это и означает, что при переходе через точку $x = x_1$ производная $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-“, т.е. в этой точке функция $f(x)$ имеет максимум.

Для случая минимума функции теорема доказывается аналогично.

Если $f''(x) = 0$, то характер критической точки неизвестен. Для его определения требуется дальнейшее исследование.

Выпуклость и вогнутость кривой.

Точки перегиба.

Определение. Кривая обращена выпуклостью **вверх** на интервале (a, b) , если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется **выпуклой**, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется **вогнутой**.

Теорема 1. Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, то кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вверх (выпукла).

Определение. Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую.

Теорема 2. Пусть кривая определяется уравнением $y = f(x)$. Если вторая производная $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку $x = a$ $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = a$ является точкой перегиба.

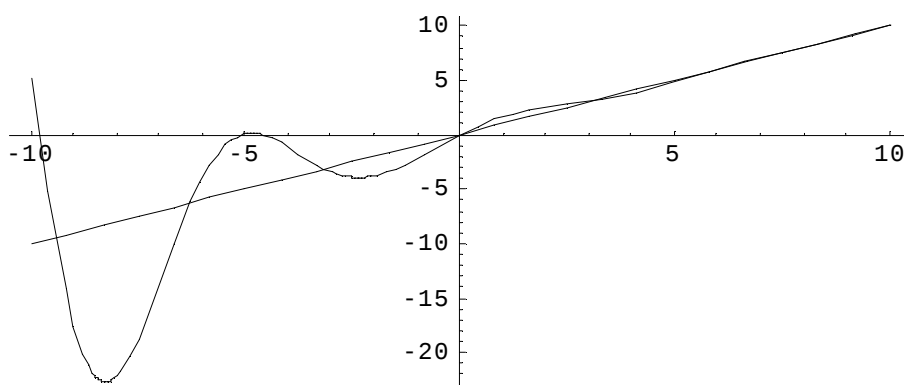
Асимптоты.

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты x точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение. Прямая называется **асимптотой** кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Вообще говоря, кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке, как показано на приведенном ниже графике функции $y = x + e^{-\frac{x}{3}} \sin x$. Ее наклонная асимптота $y = x$.



Рассмотрим подробнее методы нахождения асимптот кривых.

Вертикальные асимптоты.

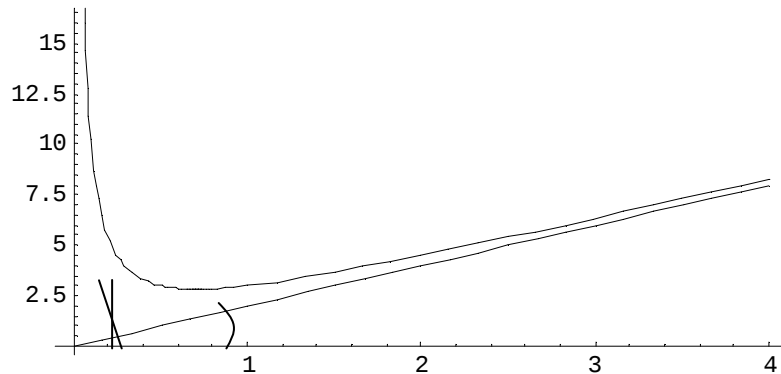
Из определения асимптоты следует, что если $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ – асимптота кривой $y = f(x)$.

Например, для функции $f(x) = \frac{2}{x-5}$ прямая $x = 5$ является вертикальной

асимптотой.

Наклонные асимптоты.

Предположим, что кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$.



Обозначим точку пересечения кривой и перпендикуляра к асимптоте – M , P – точка пересечения этого перпендикуляра с асимптотой. Угол между асимптотой и осью Ox обозначим φ . Перпендикуляр MQ к оси Ox пересекает асимптоту в точке N .

Тогда $MQ = y$ – ордината точки кривой, $NQ = \bar{y}$ – ордината точки N на асимптоте.

По условию: $\lim_{x \rightarrow \infty} |MP| = 0$, $\angle NMP = \varphi$, $|NM| = \frac{|MP|}{\cos \varphi}$.

Угол φ – постоянный и не равный 90° , тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |MP| = \lim_{x \rightarrow \infty} |NM| \cos \varphi = \lim_{x \rightarrow \infty} |NM| = 0$$

$$|NM| = |MQ| - |QN| = |y - \bar{y}| = |f(x) - (kx + b)|$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$.

Итак, прямая $y = kx + b$ – асимптота кривой. Для точного определения этой прямой необходимо найти способ вычисления коэффициентов k и b .

В полученном выражении выносим за скобки x :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$$

Т.к. $x \rightarrow \infty$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$, т.к. $b = \text{const}$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow \infty} k = k$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k - 0 = 0$, следовательно,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Т.к. $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] - \lim_{x \rightarrow \infty} b = 0$, следовательно,

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$$

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при $k=0$.

Схема исследования функций

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

- 1) Область существования функции.
Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.
- 2) Точки разрыва. (Если они имеются).
- 3) Интервалы возрастания и убывания.
- 4) Точки максимума и минимума.
- 5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.
- 6) Области выпуклости и вогнутости.
- 7) Точки перегиба. (Если они имеются).
- 8) Асимптоты. (Если они имеются).
- 9) Построение графика.

Лекция 14.

Приложение производной в экономике.

Экономический смысл производной

Предельные величины характеризуют процесс изменения экономического объекта. Таким образом, производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого исследуемого фактора.

Задача о производительности труда: пусть функция $Q = Q(t)$ выражает количество произведенной продукции Q за время t ; необходимо найти производительность труда в момент времени t_0 . Очевидно, за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$, количество произведенной продукции изменяется от значения

$Q_0 = Q(t_0)$ до значения $Q_0 + \Delta Q = Q(t_0 + \Delta t)$. Тогда средняя производительность труда за период Δt :

$Z_{cp} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$. Следовательно, производительность труда в момент t_0 можно определить

как предельное значение средней производительности за период от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$, т.е. $Z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$

Производительность труда есть производная от объема произведенной продукции по времени $Z = Q'(t)$.

Применение производной в экономике

1. Рассмотрим однофакторную (одноресурсную) производственную функцию $Q = f(x)$, которая означает объем продукции, производимый за единицу времени, в зависимости от объема x затраченного ресурса.

Если $x = L$ - количество труда, выраженного в виде человеко-часов или числа работников, то $Q' = f'(L)$ есть добавочная продукция, производимая новым сотрудником (при увеличении числа работающих на единицу) за единицу времени.

Пусть P – цена единицы продукции, а p_0 – зарплата работника за единицу времени. Тогда, если $P * f'(L) > p_0$, то нужно нанять ещё одного сотрудника, так как он приносит фирме прибыль больше, чем она ему платит. Данное правило имеет универсальный характер и называется **золотым правилом экономики**.

2. Рассмотрим функцию спроса $D = D(p)$ – зависимость спроса D на некоторый товар от его цены p . Производная $D'(p)$ означает приблизительно изменение спроса при изменении цены на одну единицу. Абсолютное значение производной $|D'(p)|$ показывает уменьшение спроса со стороны покупателей при повышении его цены на одну единицу.

3. Функция предложения $S = S(p)$ – зависимость предложения некоторого товара от его цены p . Производная $S'(p)$ означает, приблизительно, увеличение предложения товара со стороны производителей при увеличении цены товара на одну единицу.

4. Функция полезности $U = U(x)$ – субъективная числовая оценка данным индивидом полезности количества x товара X для него. Производная $U'(x)$ означает оценку дополнительной полезности от приобретения еще одной единицы товара.

5. Налоговая ставка – зависимость налога N в процентах от величины годового дохода R . Пусть $p = p(R)$ — само значение налога, тогда производная $p'(R)$ и есть налоговая ставка N .

6. Рассмотрим двухсекторную модель национального дохода $Y = C(y) + S(y)$, где $C = C(y)$ – функция потребления; $S = S(y)$ – функция сбережения.

Для анализа изменения потребления и сбережения при увеличении (уменьшении) национального дохода используют понятие **предельной склонности к потреблению и сбережению**, т.е. производную. Дифференцируя уравнение $Y = C(y) + S(y)$ по переменной y , получим $1 = C'(y) + S'(y)$.

Эта формула позволяет легко вычислить предельную склонность к потреблению, если известна предельная склонность к сбережению, и наоборот.

Эластичность функции

Для исследования экономических процессов и решения других прикладных задач часто используется понятие эластичности функции.

Определение Эластичностью функции $y = f(x)$ называется предел отношения относительного приращения функции $\frac{\Delta y}{y}$ к относительному приращению

независимой переменной $\frac{\Delta x}{x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ и записывается

$$\varepsilon_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{y} \div \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} y'.$$

Эластичность функции показывает приблизительно, на сколько процентов изменится функция $y = f(x)$ при изменении независимой переменной x на 1%. Например, эластичность спроса от цены определяется как отношение: $\varepsilon_p(D) = \frac{p}{D} * D'_p$; эластичность предложения

$$\varepsilon_p(S) = \frac{p}{S} * S'_p.$$

Свойства эластичности

1. Эластичность функции равна произведению независимой переменной x на темп

изменения функции $\varepsilon_x(y) = xT_y$, где $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$.

2. Эластичность произведения (частного) двух функций равна сумме (разности) эластичности этих функций

$$\varepsilon_x(uv) = \varepsilon_x(u) + \varepsilon_x(v),$$

$$\varepsilon_x\left(\frac{u}{v}\right) = \varepsilon_x(u) - \varepsilon_x(v).$$

Если эластичность функции по абсолютной величине $|\varepsilon_y(y)| > 1$, то исследуемая функция считается эластичной, если $|\varepsilon_y(y)| = 1$ — нейтральной, если $|\varepsilon_y(y)| < 1$ — неэластичной относительно независимой переменной.

Оптимизация в экономике

Под оптимизацией будем понимать процесс нахождения экстремумов (максимумов и минимумов) экономических функций, т.е. выбор наилучшего решения из множества возможных.

Пример. Производитель реализует свою продукцию по цене p за единицу, а издержки при этом задаются функцией $C(x) = 6x + 0,1x^3$, где x — объем выпускаемой продукции в условных единицах ($x > 0$). Найти оптимальный для производителя объем выпуска продукции и соответствующую ему прибыль, если $p = 486$ ден. ед.

Решение. Составим функцию прибыли $\Pi = R - C$, где $R(x) = 486x$ — доход от реализуемой продукции, тогда $\Pi(x) = 486x - (6x + 0,1x^3)$.

Найдём критические точки: $\Pi'(x) = 0$, $480 - 0,3x^2 = 0$, $x_{1,2} = \pm 40$,

$x_1 = 40$ — критическая точка (вторая $x_2 = -40$ не рассматривается, т.к. $x > 0$).

Находим $\Pi''(40) = -0,6 \cdot 40 = -24 < 0$. Следовательно, имеем максимум при $x = 40$. Максимальная прибыль равна $P = 486 \cdot 40 - (6 \cdot 40 + 0,1 \cdot 40^3) = 12800$ ден.ед.

Ответ, $x = 40$ ед., $P = 12800$ ден.ед.

Пример. Кривые спроса и предложения имеют вид соответственно $p = -3Q_D + 8Q$, $p = Q_S + 8$, где Q_D — количество товара в усл.ед., относящегося к спросу, Q_S — к предложению; p — цена товара в ден.ед.

Каждая единица товара облагается налогом t ден.ед. Какую величину налога следует установить, чтобы поступление в казну было максимальным?

Решение. Слишком высокий налог разорит фирму, а слишком низкий даст малую прибыль казне. Для учета налога заменим t на $p - t$, т.к. эту сумму получит фирма. Запишем уравнение с учетом налога: $p - t = Q_S + 8$ или $p = Q_S + 8 + t$. Учитывая, что в точке равновесия $Q_S = Q_D = Q$, т.е. спрос товара равен его предложению, получим систему уравнений

$$p = Q + 8 + t$$

$$p = -3Q + 80,$$

поскольку равны левые части уравнений, можно приравнять правые:

$$Q + 8 + t = -3Q + 80, Q = 18 - 0,25t.$$

От продажи количества товара Q получим суммарный налог T

$$T = t \cdot Q = t(18 - 0,25t) = 18t - 0,25t^2.$$

Мы составили функцию, точки максимума которой дают решение поставленной задачи. Находим стационарные точки: $T'_t = 18 - 0,5t = 0$, $t = 36$.

Проверим знак второй производной в этой точке $T''_{tt} = -0,5 < 0$. В точке $t = 36$ имеет место максимум.

Таким образом, оптимальная (с точки зрения казны) величина налога составляет $t = 36$ ден.ед. на единицу товара.

Исследование экономических функций

Рассмотрим некоторые примеры приложения производной в экономической теории. Один из базовых законов теории производства: оптимальный для производства уровень выпуска товара определяется равенством предельных издержек и предельного дохода.

Уровень выпуска продукции x_0 является оптимальным для производителя, если $C'(x_0) = R'(x_0)$, где $C'(x)$ - предельные издержки, а $R(x)$ - предельный доход.

Обозначим функцию прибыли $\Pi(x)$, тогда $\Pi(x) = R(x) - C(x)$. Очевидно, что оптимальным уровнем производства является тот, при котором прибыль максимальна, т.е. такое значение выпуска x_0 , при котором функция $\Pi(x)$ имеет экстремум (максимум). Используем необходимое условие экстремума функции $\Pi'(x) = 0$, и так как $\Pi'(x) = R'(x) - C'(x)$, $R'(x_0) - C'(x_0) = 0$, то

$$R'(x_0) = C'(x_0).$$

Следовательно, прибыль будет максимальной в точке, в которой предельный доход равен предельным издержкам.

Один из важнейших экономических законов - закон убывающей доходности: с увеличением производства производственная продукция, полученная на каждую новую единицу ресурса (трудового, технического и т.д.), с некоторого момента убывает. Если Δx - приращение ресурса увеличивается, а Δy - приращение выпуска продукции уменьшается при увеличении x , $f''(x) < 0$, то следовательно, функция зависимости выпуска продукции от вложенного ресурса $f(x)$ является функцией выпуклой вверх.

Другим базисным понятием экономической теории является функция полезности $U = U(x)$, где x - товар, а $U(x)$ - полезность. Эта величина очень субъективная для каждого отдельного потребителя. Закон убывающей полезности формируется так: с ростом полезности товара дополнительная полезность от каждой новой его единицы с некоторого момента убывает. Следовательно, функция полезности является функцией, выпуклой вверх. В такой постановке закон убывающей полезности математически исследуется для определения спроса и предложения.

Лекции 15-17.

Функции нескольких переменных.

При рассмотрении функций нескольких переменных ограничимся подробным описанием функций двух переменных, т.к. все полученные результаты будут справедливы для функций произвольного числа переменных.

Определение: Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому-либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z , то переменная z называется **функцией двух переменных**.

$$z = f(x, y)$$

Определение: Если паре чисел (x, y) соответствует одно значение z , то функция называется **однозначной**, а если более одного, то – **многозначной**.

Определение: **Областью определения** функции z называется совокупность пар (x, y) , при которых функция z существует.

Определение: Окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ радиуса r называется совокупность всех точек (x, y) , которые удовлетворяют условию $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$.

Определение: Число A называется **пределом** функции $f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r > 0$, что для любой точки $M(x, y)$, для которых верно условие: $MM_0 < r$

также верно и условие $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Записывают: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$

Определение: Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции $f(x, y)$. Тогда функция $z = f(x, y)$ называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad (1)$$

причем точка $M(x, y)$ стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом.

Если в какой – либо точке условие (1) не выполняется, то эта точка называется **точкой разрыва** функции $f(x, y)$. Это может быть в следующих случаях:

- 1) Функция $z = f(x, y)$ не определена в точке $M_0(x_0, y_0)$.
- 2) Не существует предел $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$.
- 3) Этот предел существует, но он не равен $f(x_0, y_0)$.

Свойство. Если функция $f(x, y, \dots)$ определена и непрерывна в замкнутой и ограниченной области D , то в этой области найдется по крайней мере одна точка $N(x_0, y_0, \dots)$, такая, что для остальных точек верно неравенство

$$f(x_0, y_0, \dots) \geq f(x, y, \dots)$$

а также точка $N_1(x_{01}, y_{01}, \dots)$, такая, что для всех остальных точек верно неравенство

$$f(x_{01}, y_{01}, \dots) \leq f(x, y, \dots)$$

тогда $f(x_0, y_0, \dots) = M$ – **наибольшее значение** функции, а $f(x_{01}, y_{01}, \dots) = m$ – **наименьшее значение** функции $f(x, y, \dots)$ в области D .

Непрерывная функция в замкнутой и ограниченной области D достигает, по крайней мере, один раз наибольшего значения и один раз наименьшего.

Свойство. Если функция $f(x, y, \dots)$ определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D , а M и m – соответственно наибольшее и наименьшее значения функции в этой области, то для любой точки $\mu \in [m, M]$ существует точка

$N_0(x_0, y_0, \dots)$ такая, что $f(x_0, y_0, \dots) = \mu$.

Проще говоря, непрерывная функция принимает в области D все промежуточные значения между M и m . Следствием этого свойства может служить заключение, что если числа M и m разных знаков, то в области D функция по крайней мере один раз обращается в ноль.

Свойство. Функция $f(x, y, \dots)$, непрерывная в замкнутой ограниченной области D , **ограничена** в этой области, если существует такое число K , что для всех точек области верно неравенство $|f(x, y, \dots)| < K$.

Свойство. Если функция $f(x, y, \dots)$ определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D , то она **равномерно непрерывна** в этой области, т.е. для любого положительного числа ε существует такое число $\Delta > 0$, что для любых двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) области, находящихся на расстоянии, меньшем Δ , выполнено неравенство

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

Производные и дифференциалы функций нескольких переменных.

Определение. Пусть в некоторой области задана функция $z = f(x, y)$. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ и зададим приращение Δx к переменной x . Тогда величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется **частным приращением функции по x** .

Можно записать

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Тогда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции $z = f(x, y)$ по x .

Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_x ; $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$; $f'_x(x, y)$.

Аналогично определяется частная производная функции по y .

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Геометрическим смыслом частной производной (допустим $\frac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

Полное приращение и полный дифференциал.

Определение. Для функции $f(x, y)$ выражение $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ называется **полным приращением**.

Если функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные, то

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$$

Применим теорему Лагранжа к выражениям, стоящим в квадратных скобках.

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x}$$

здесь $\bar{y} \in (y, y + \Delta y)$; $\bar{x} \in (x, x + \Delta x)$

Тогда получаем

$$\Delta z = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}$$

Т.к. частные производные непрерывны, то можно записать равенства:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

Определение. Выражение $\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$ называется **полным приращением** функции $f(x, y)$ в некоторой точке (x, y) , где α_1 и α_2 – бесконечно малые функции при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$ соответственно.

Определение: Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y) .

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x, y, z, \dots, t) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

Пример. Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2z}$.

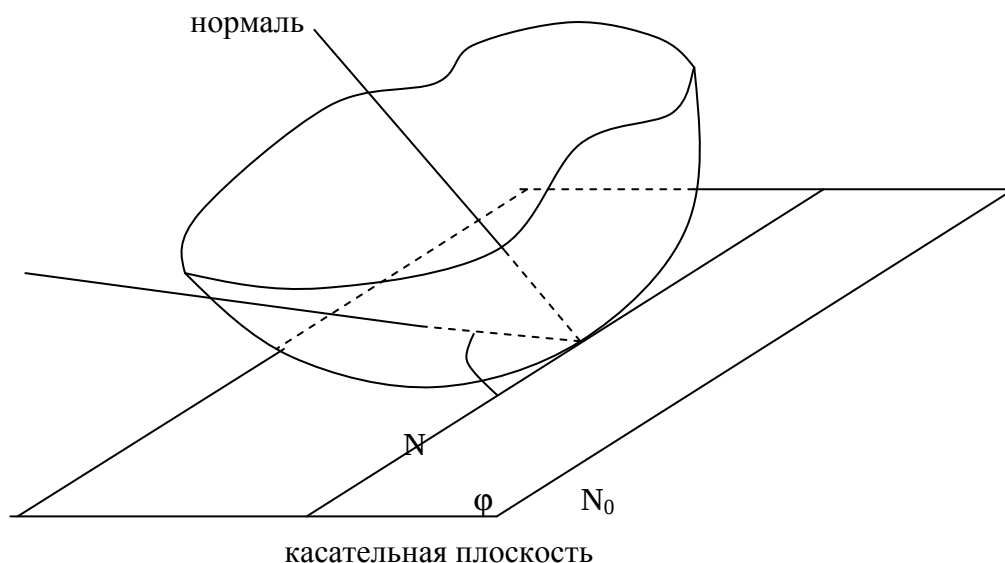
$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \ln x \cdot y^2;$$

$$du = y^2 z x^{y^2 z - 1} dx + 2x^{y^2 z} yz \ln x dy + y^2 x^{y^2 z} \ln x dz$$

Геометрический смысл полного дифференциала.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности.



Пусть N и N_0 – точки данной поверхности. Проведем прямую NN_0 . Плоскость, которая проходит через точку N_0 , называется **касательной плоскостью** к поверхности, если угол между секущей NN_0 и этой плоскостью стремится к нулю, когда стремится к нулю расстояние NN_0 .

Определение. **Нормалью** к поверхности в точке N_0 называется прямая, проходящая через точку N_0 перпендикулярно касательной плоскости к этой поверхности.

В какой – либо точке поверхность имеет, либо только одну касательную плоскость, либо не имеет ее вовсе.

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ – функция, дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$, касательная плоскость в точке $N_0(x_0, y_0, (x_0, y_0))$ существует и имеет уравнение:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Уравнение нормали к поверхности в этой точке:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Геометрическим смыслом полного дифференциала функции двух переменных $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) является приращение аппликаты (координаты z) касательной плоскости к поверхности при переходе от точки (x_0, y_0) к точке $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Как видно, геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных является пространственным аналогом геометрического смысла дифференциала функции одной переменной.

Приближенные вычисления с помощью полного дифференциала.

Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y) . Найдем полное приращение этой функции:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z$$

Если подставить в эту формулу выражение

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

то получим приближенную формулу:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y$$

Частные производные высших порядков.

Если функция $f(x, y)$ определена в некоторой области D , то ее частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ тоже будут определены в той же области или ее части.

Будем называть эти производные **частными производными первого порядка**.

Производные этих функций будут **частными производными второго порядка**.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y);$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

Определение. Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$ и т.д. называются **смешанными производными**.

Теорема. Если функция $f(x, y)$ и ее частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке $M(x, y)$ и ее окрестности, то верно соотношение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Т.е. частные производные высших порядков не зависят от порядка дифференцирования.

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков.

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

$$d^2 z = d[f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy] = f''_{xx}(x, y)(dx)^2 + 2f''_{xy}(x, y)dx dy + f''_{yy}(x, y)(dy)^2$$

$$d^3 z = f'''_{xxx}(x, y)(dx)^3 + 3f'''_{x^2 y}(x, y)(dx)^2 dy + 3f'''_{xy^2}(x, y)dx(dy)^2 + f'''_{yyy}(x, y)(dy)^3$$

.....

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f(x, y)$$

Здесь n – символическая степень производной, на которую заменяется реальная степень после возведения в нее стоящего с скобках выражения.

Экстремум функции нескольких переменных.

Определение. Если для функции $z = f(x, y)$, определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$

то точка M_0 называется **точкой максимума**.

Определение. Если для функции $z = f(x, y)$, определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

то точка M_0 называется **точкой минимума**.

Теорема. (Необходимые условия экстремума).

Если функция $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует.

Эту точку (x_0, y_0) будем называть **критической точкой**.

Теорема. (Достаточные условия экстремума).

Пусть в окрестности критической точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Рассмотрим выражение:

$$D(x, y) = f''_{x^2}(x, y) \cdot f''_{y^2}(x, y) - [f''_{xy}(x, y)]^2$$

1) Если $D(x_0, y_0) > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет экстремум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ - максимум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ - минимум.

2) Если $D(x_0, y_0) < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ не имеет экстремума. В случае, если $D = 0$, вывод о наличии экстремума сделать нельзя.

Условный экстремум.

Условный экстремум находится, когда переменные x и y , входящие в функцию $u = f(x, y)$, не являются независимыми, т.е. существует некоторое соотношение

$\varphi(x, y) = 0$, которое называется **уравнением связи**.

Тогда из переменных x и y только одна будет независимой, т.к. другая может быть выражена через нее из уравнения связи.

Тогда $u = f(x, y(x))$.

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

В точках экстремума:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad (1)$$

Кроме того:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2)$$

Умножим равенство (2) на число λ и сложим с равенством (1).

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) + \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{dy}{dx} = 0$$

Для выполнения этого условия во всех точках найдем неопределенный коэффициент λ так, чтобы выполнялась система трех уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Полученная система уравнений является необходимыми условиями условного экстремума. Однако это условие не является достаточным. Поэтому при нахождении критических точек требуется их дополнительное исследование на экстремум.

Выражение $u = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$ называется **функцией Лагранжа**.

Использование функции Лагранжа для нахождения точек экстремума функции называется также **методом множителей Лагранжа**.

Выше мы рассмотрели функцию двух переменных, однако, все рассуждения относительно условного экстремума могут быть распространены на функции большего числа переменных.

Производная по направлению.

Рассмотрим функцию $u(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$ и точке $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$.

Проведем через точки M и M_1 вектор $\vec{S}$. Углы наклона этого вектора к направлению координатных осей x, y, z обозначим соответственно α, β, γ . Косинусы этих углов называются **направляющими косинусами** вектора $\vec{S}$.

Расстояние между точками M и M_1 на векторе $\vec{S}$ обозначим ΔS .

$$\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

Далее предположим, что функция $u(x, y, z)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные по переменным x, y и z . Тогда правомерно записать следующее выражение:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z,$$

где величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – бесконечно малые при $\Delta S \rightarrow 0$.

Из геометрических соображений очевидно:

$$\frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos \alpha; \quad \frac{\Delta y}{\Delta S} = \cos \beta; \quad \frac{\Delta z}{\Delta S} = \cos \gamma;$$

Таким образом, приведенные выше равенства могут быть представлены следующим образом:

$$\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma + \varepsilon_1 \cos \alpha + \varepsilon_2 \cos \beta + \varepsilon_3 \cos \gamma;$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

Заметим, что величина s является скалярной. Она лишь определяет направление вектора $\vec{S}$.

Из этого уравнения следует следующее определение:

Определение: Предел $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta S}$ называется **производной функции $u(x, y, z)$ по направлению вектора $\vec{S}$** в точке с координатами (x, y, z) .

Поясним значение изложенных выше равенств на примере.

Градиент.

Определение: Если в некоторой области D задана функция $u = u(x, y, z)$ и некоторый вектор, проекции которого на координатные оси равны значениям функции u в соответствующей точке

$$\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z},$$

то этот вектор называется **градиентом** функции u .

$$\text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

При этом говорят, что в области D задано поле градиентов.

Связь градиента с производной по направлению.

Теорема: Пусть задана функция $u = u(x, y, z)$ и поле градиентов

$$\text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}.$$

Тогда производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ по направлению некоторого вектора $\vec{S}$ равняется проекции вектора gradu на вектор $\vec{S}$.

Лекция 18.

Применение частных производных в экономике.

Функция спроса.

Спрос на отдельный товар D при прочих равных условиях зависит от уровня цен всех товаров. Практически наибольший интерес представляет изучение влияния цены одного альтернативного товара p_A . Кроме того, спрос на товар зависит от цены данного товара p и доходов потребителя y , т.е. спрос-это функция трёх переменных

$$D = f(p, p_A, y).$$

Рассмотрим, как меняется спрос при изменении цен и доходов с помощью коэффициентов эластичности.

1. Эластичность спроса от цены (собственной)

$$\varepsilon_p = \frac{p}{D} \cdot D'_p.$$

Знак ε_p всегда отрицательный. При $|\varepsilon_p| > 1$ функция спроса эластичная, при $|\varepsilon_p| < 1$ - неэластичная.

2. Эластичность спроса от цены альтернативного товара (перекрёстная эластичность)

$$\varepsilon_A = \frac{p_A}{D} \cdot D_{p_A}.$$

Знак у коэффициента может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Если $\varepsilon_A > 0$, то рост цены p_A приводит к увеличению спроса D (товар взаимозаменяемый).

Если $\varepsilon_A < 0$, то рост цены p_A приводит к уменьшению спроса D (товар взаимодополняемый).

3. Эластичность спроса от дохода

$$\varepsilon_Y = \frac{Y}{D} \cdot D'_Y.$$

Для качественных товаров $\varepsilon_Y > 0$, т.к. спрос увеличивается с ростом дохода. Для низкосортных товаров $\varepsilon_Y < 0$.

Полезность. Предельная полезность.

Основным понятием теории потребления является функция полезности

$U = f(x, y)$. Эта функция выражает меру полезности набора (x, y) , где x - количество товара X , а y - количество товара Y . Чувствительность набора (x, y) к незначительному изменению x при фиксированном y называется **предельной полезностью x** и определяется как частная производная U'_x . Аналогично, предельная полезность y определяется как U'_y . Изменение полезности приближённо определяется формулой

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \Delta y,$$

когда x и y изменяются одновременно.

Правило. Предельная норма замещения одного товара другим равна отношению их предельных полезностей:

$$MRS_{xy}(A) = \frac{U'_x(A)}{U'_y(A)}.$$

Предельные полезности – убывающие функции по соответствующим переменным. Существует закон убывания предельной полезности, который поясняется так: по мере роста количества приобретённого товара каждая следующая единица товара приносит всё меньше удовлетворения потребителю.

Производственная функция.

Производственная функция есть экономико-математическое уравнение, связывающее ресурсы (факторы производства) и выпуск продукции. К ресурсам относятся: земля, капитал (основные фонды), труд, предпринимательская способность. Ограничимся двумя ресурсами: капиталом K и трудом L , тогда производственная функция примет вид: $Q = f(K, L)$.

Предельным продуктом фактора производства называется добавочный продукт, полученный в результате добавления одной единицы данного фактора (ресурса) при неизменной величине остальных факторов производства. Иными словами, это частная производная от производственной функции по соответствующей переменной (ресурсу).

Функция $Q = f(K, L)$ имеет две частные производные:

предельный продукт капитала Q'_K и предельную производительность труда Q'_L .

Если капитал изменяется на величину ΔK , приложенный труд остаётся неизменным, то $\Delta Q = Q'_K \Delta K$.

Для малых измерений труда при постоянном капитале имеем приближенное равенство: $\Delta Q = Q'_L \Delta L$.

Если капитал K и труд L изменяются одновременно, приращение выпуска продукции ΔQ может быть приближённо найдено по формуле:

$$\Delta Q = Q'_K \Delta K + Q'_L \Delta L.$$

Примером производственной функции является модель Кобба-Дугласа, которая применялась при анализе развития экономики США в 20-30-х годах. Производственная функция в этой модели имеет вид: $Q = AK^a \cdot L^b$, где A , a и b - положительные постоянные.

Дифференцируя по K находим предельный продукт капитала $Q'_K = aAK^{a-1}L^b$. Аналогично вычисляем предельный продукт труда: $Q'_L = bAK^aL^{b-1}$. Приращение выпуска продукции ΔQ запишется:

$$\Delta Q = aAK^{a-1}L^b \Delta K + bAK^aL^{b-1} \Delta L,$$

при условии, что и труд и капитал изменяются одновременно.

Кривые безразличия производства.

Линия, в каждой точке которой различные сочетания факторов производства (капитал L и труд L) дают одно и то же количество выпускаемой продукции Q , называется **изоквантой**, или **кривой безразличия** производства.

Следовательно, изокванта состоит из таких пар точек (K, L) в системе координат $ЛОК$, в которых значения производственной функции одинаковы.

Математически изокванта определяется уравнением $Q(K, L) = Q_0$, где Q_0 - некоторая постоянная величина выпуска продукции. В математике такие кривые называются **линиями уровня**.

Основные свойства кривых безразличия:

1. Они не пересекаются друг с другом.
2. Большему выпуску продукции соответствует более удалённая от начала координат кривая.
3. Кривая безразличия имеет в каждой точке (касательная к ней) отрицательный угловой коэффициент.

Величина углового коэффициента касательной к кривой безразличия, взятая с обратным знаком, определяет **коэффициент заменяемости ресурсов**

$$R = -\frac{dK}{dL}.$$

Производная $\frac{dK}{dL}$ вычисляется по формуле дифференцирования неявной функции:

$$f(K, L) = Q_0, \quad \text{т.е. } R = -\frac{dK}{dL} = -\frac{f'_L}{f'_K} = -\frac{Q'_L}{Q'_K}.$$

Коэффициент заменяемости ресурсов равен предельному продукту труда, делённому на предельный продукт капитала.

II семестр.

Лекция 1.

Элементы линейной алгебры.

Матрицы.

Определение. Таблица составленная из $m \times n$ чисел называется матрицей размерности $m \times n$,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A_{m \times n} = //a_{ij}//, \text{ где}$$

m – число строк, n – число столбцов. Числа a_{ij} называются элементами матрицы, i – номер строки, j – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент.

Разновидности матриц.

1. Матрица называется прямоугольной, если $m \neq n$.
2. Матрица называется квадратной, если $m = n$.
3. Матрица называется матрицей - строкой, если $m = 1$.
4. Матрица называется матрицей - столбцом, если $n = 1$.

Например,

1) $A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ - прямоугольная матрица размерности 2×3 (два на три)

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ - квадратная матрица.

3) $(1 \ 0 \ 3 \ 5, -1)$ - матрица строка.

4) $\begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ - матрица столбец.

Квадратная матрица называется треугольной, если все элементы матриц, расположенные выше или ниже главной диагонали равны нулю.

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Квадратная матрица называется диагональной, если все ее элементы, кроме

элементов главной диагонали, равны нулю.

Квадратная матрица называется единичной, если элементы диагональной матрицы, стоящие на главной диагонали равны единице.

Алгебра матриц.

1. Равенство матриц. Две матрицы $A_{m \times n}$ и $B_{m \times n}$ одинаковой размерности равны, если равны соответствующие элементы этих матриц.

$$A_{m \times n} = B_{m \times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$$

$\Leftrightarrow$ этот знак (квантор эквивалентности) заменяет слова «тогда и только тогда»,

обозначение $(i = \overline{1, m})$ применяется, если хотят сказать, что i пробегает все значения от 1 до m .

2. Сумма матриц. Суммой двух матриц $A_{m \times n} = //a_{ij}//$ и $B_{m \times n} = //b_{ij}//$ называется матрица $C_{m \times n}$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. $C_{m \times n} = A_{m \times n} + B_{m \times n}$. Складывать можно матрицы одинаковой соразмерности.

3. Умножение матрицы на число. Для того чтобы умножить матрицу на число надо каждый элемент матрицы умножить на это число.

$$\alpha A = //\alpha a_{ij}//.$$

4. Умножение матриц. Произведением матрицы $A_{m \times e}$ на матрицу $B_{e \times n}$ называется матрица $C_{m \times n}$ ($A_{m \times e} * B_{e \times n} = C_{m \times n}$), элементы которой получаются по правилу «Строка на столбец»:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ie}b_{ej}$$

$(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$, т.е. для вычисления c_{ij} следует элементы i – строки левой матрицы $A_{m \times e}$ умножить на соответствующие элементы j –го столбца правой матрицы $B_{e \times n}$ и полученные произведения сложить.

Замечание 1. Из этого определения следует, что произведение матриц имеет смысл тогда, когда число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго сомножителя.

Замечание 2. Если имеют смысл AB и BA , то, как правило, $AB \neq BA$.

Замечание. При умножении матрицы строки на матрицу столбец получается матрица из одного элемента – число.

5. Транспонирование матрицы. Если в матрице A строки заменить столбцами, то новая матрица называется транспонированной по отношению к матрице A и обозначается символом A^T . Замечание $(A^T)^T = A$.

Матрица, все элементы которой равны нулю называется **нулевой** матрицей и обозначается символом $\emptyset$. $A + \emptyset = A$.

Основные свойства операций над матрицами:

$$A+B = B+A; \quad A+(B+C) = A+B+C; \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A; \quad \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B; \\ (A+B)*C = AC+BC; \quad C(A+B) = CA+CB; \quad (\alpha A)B = \alpha(AB); \quad (AB)*C = A(BC); \quad (AB)^T = B^T A^T.$$

Понятие матрицы, алгебра матриц имеют чрезвычайно важные значения в приложениях математики к экономике и другим наукам, т.к. позволяют записывать

значительную часть математических моделей в достаточно простой, а главное компактной форме.

Лекция 2.

Определители.

Определение 1. Определителем произвольной матрицы второго порядка

$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ называется число, которое обозначается $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$ и равно произведению

двух чисел, стоящих на главной диагонали минус произведение двух чисел, стоящих на другой диагонали: $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$.

Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 8 = -23.$$

Определение 2. Определителем произвольной квадратной матрицы третьего

порядка $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ называется сумма шести слагаемых, каждое из которых

представляет собой произведение трех элементов матрицы, выбираемых по следующему правилу: три произведения элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах двух

треугольников: , берутся со знаком "+", а три произведения элементов, стоящих на

второй диагонали и в вершинах двух других треугольников: , берутся со знаком "-".

Определитель третьего порядка обозначается так:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 9 + 3 \cdot 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot (-2) \cdot 5 - (-1) \cdot 3 \cdot 9 - 4 \cdot 3 \cdot 2 =$$

$$= -36 + 18 - 20 + 20 + 27 - 24 = -15$$

Свойства определителя.

1. Если поменять местами две строки определителя (два столбца), то получим новый определитель, равный исходному, умноженному на -1 .

2. Определитель, имеющий две равных строки (два равных столбца), равен нулю.

3. Если одну из строк определителя умножить на какое-либо число, то получится определитель, равный исходному, умноженному на это число.

4. Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.

5. Если в определителе вместо любой строки записать сумму этой строки и любой другой строки, умноженной на некоторое число, то полученный новый определитель будет равен исходному.

До сих пор было показано, как вычислять определитель второго и третьего порядков. Чтобы вычислить определитель более высоких порядков, пользуются формулой Лапласа разложения определителя по строке или столбцу:

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + \dots + a_{in}(-1)^{i+n}M_{in} = \\ &= a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j} + a_{2j}(-1)^{2+j}M_{2j} + \dots + a_{nj}(-1)^{n+j}M_{nj}\end{aligned}$$

Здесь i и j — любые числа от 1 до n . Последняя формула представляет собой разложение определителя по i -й строке или j -му столбцу. M_{ij} называется **минором** и равняется определителю порядка $n - 1$, который получается из определителя $\det \mathbf{A}$, если вычеркнуть i -ю строку и j -й столбец. Произведение $(-1)^{i+j}M_{ij}$ обозначается A_{ij} и называется **алгебраическим дополнением элемента a_{ij}** .

Пусть Δ — определитель четвертого порядка: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. Представим

его разложение по второй строке:

$$\Delta = 2(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} + 0,$$

и по второму столбцу:

$$\begin{aligned}\Delta &= 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} + \\ &+ (-2)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} + 8(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Аналогичным образом можно вычислить Δ , разлагая его по первой, третьей, четвертой строке или по первому, второму или четвертому столбцу.

Вычисление определителя четвертого порядка сводится в худшем случае (если среди элементов нет нулей) к вычислению четырех определителей третьего порядка.

Аналогичным образом вычисление определителя 5-го порядка сводится к вычислению 5-ти определителей 4-го порядка и т.д.

Вычисление определителя упрощается, если воспользоваться свойством 5. Пусть Δ — определитель четвертого порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Этот определитель разложим по третьей строке, так как там есть нуль и, что особенно важно, -1 . Задача заключается в таком преобразовании определителя Δ , чтобы получить нули на месте a_{31} и a_{33} . К первому столбцу прибавим второй столбец, умноженный на -2 , а к третьему столбцу прибавим второй столбец, умноженный на -3 . Второй столбец, с помощью которого проводились преобразования, остается без изменений.

Таким образом вычисление определителя 4-го порядка сведено к вычислению только одного определителя 3-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 11 & 7 \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -4 & 5 & 5 \\ -1 & 7 & 6 \\ -2 & 11 & 7 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, пользуясь свойствами определителя и методом Лапласа, можно вычисление определителя n -го порядка свести к вычислению лишь одного определителя порядка $n - 1$.

Обратная матрица.

Пусть $\mathbf{A}$ – квадратная матрица.

Определение. Обратной матрицей к матрице $\mathbf{A}$ называется такая матрица $\mathbf{A}^{-1}$, для которой справедливы равенства:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

Очевидно, что $\mathbf{A}^{-1}$ – квадратная матрица того же размера, что и матрица $\mathbf{A}$. Сразу заметим, что **не всякая квадратная матрица имеет обратную матрицу**.

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – квадратная матрица с определителем, не равным нулю. Тогда существует обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$, которая вычисляется по формуле

$$\mathbf{A}^{-1} = (c_{ij}) = \left(\frac{A_{ji}}{\det \mathbf{A}} \right).$$

Последняя формула означает, что в i -й строке и j -м столбце обратной матрицы располагается алгебраическое дополнение элемента, стоящего в j -й строке и в i -м столбце исходной матрицы, деленное на определитель исходной матрицы.

Напомним здесь, что $A_{pq} = (-1)^{p+q}M_{pq}$, где M_{pq} называется минором и представляет собой определитель, получающийся из определителя $\det \mathbf{A}$ вычеркиванием p -й строки и q -го столбца.

Еще раз подчеркнем, что обратная матрица существует только для квадратной матрицы с определителем, отличным от нуля.

Системы линейных уравнений.

Систему m линейных уравнений с n неизвестными будем записывать в следующем виде:

[illegible]

Здесь $x_1, x_2, \dots, x_n$ – неизвестные величины, a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) – числа, называемые коэффициентами системы (первый индекс фиксирует номер уравнения, второй — номер неизвестной), $b_1, b_2, \dots, b_m$ – числа, называемые свободными членами.

Решением системы будем называть упорядоченный набор чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, обращающий каждое уравнение системы в верное равенство.

Решить систему — значит найти все ее решения или доказать, что ни одного решения нет.

Система, имеющая решение, называется **совместной**.

Если система имеет только одно решение, то она называется **определенной**. Система, имеющая более чем одно решение, называется **неопределенной** (совместной и неопределенной).

Если система не имеет решений, то она называется **несовместной**.

Система, у которой все свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$), называется **однородной**. Однородная система всегда совместна, так как набор из n нулей удовлетворяет любому уравнению такой системы.

Если число уравнений системы совпадает с числом неизвестных ($m=n$), то система называется **квадратной**.

Две системы, множества решений которых совпадают, называются **эквивалентными** или **равносильными** (совпадение множеств решений означает, что каждое решение первой системы является решением второй системы, и каждое решение второй системы является решением первой).

Две несовместные системы считаются эквивалентными.

Преобразование, применение которого превращает систему в новую систему, эквивалентную исходной, называется **эквивалентным** или **равносильным преобразованием**. Примерами эквивалентных преобразований могут служить следующие преобразования: перестановка местами двух уравнений системы, перестановка местами двух неизвестных вместе с коэффициентами у всех уравнений, умножение обеих частей какого-либо уравнения системы на отличное от нуля число.

Элементарные преобразования систем.

К элементарным преобразованиям относятся:

- 1) Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.
- 2) Перестановка уравнений местами.
- 3) Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех x .

Теорема Кронекера – Капелли.

(условие совместности системы)

(Леопольд Кронекер (1823-1891) немецкий математик)

Теорема: Система совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.

$$\text{Rg}A = \text{Rg} \bar{A}.$$

Очевидно, что система (1) может быть записана в виде:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Доказательство.

1) Если решение существует, то столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов матрицы A , а значит добавление этого столбца в матрицу, т.е. переход $A \rightarrow \bar{A}$ не изменяют ранга.

2) Если $\text{Rg}A = \text{Rg} \bar{A}$, то это означает, что они имеют один и тот же базисный минор. Столбец свободных членов – линейная комбинация столбцов базисного минора, те верна запись, приведенная выше.

Системы линейных уравнений общего вида

Если система оказалась совместной, т. е. матрицы A и $\bar{A}$ имеют один и тот же ранг, то могут представиться две возможности - а) $r = n$;
б) $r < n$:

а) если $r = n$, то имеем n независимых уравнений с n неизвестными, причем определитель Δ этой системы отличен от нуля. Такая система имеет единственное решение, получаемое по формулам Крамера;

б) если $r < n$, то число независимых уравнений меньше числа неизвестных.

Перенесем лишние неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$, которые принято называть свободными, в правые части; наша система линейных уравнений примет вид:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r &= b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r &= b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r &= b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n. \end{aligned}$$

Ее можно решить относительно $x_1, x_2, \dots, x_r$, так как определитель этой системы (r -го порядка) отличен от нуля. Придавая свободным неизвестным произвольные числовые значения, получим по формулам Крамера соответствующие числовые значения для $x_1, x_2, \dots, x_r$. Таким образом, при $r < n$ имеем бесчисленное множество решений.

Система (1) называется однородной, если все $b_i = 0$, т. е. она имеет вид:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Из теоремы Кронекера-Капелли следует, что она всегда совместна, так как добавление столбца из нулей не может повысить ранга матрицы. Это, впрочем, видно и непосредственно - система (2) заведомо обладает нулевым, или тривиальным, решением $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Пусть матрица A системы (2) имеет ранг r .

Если $r = n$, то нулевое решение будет единственным решением системы при $r < n$ система обладает решениями, отличными от нулевого, и для их разыскания применяют тот же прием, как и в случае произвольной системы уравнений.

Методы решения систем линейных уравнений

1. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Рассмотрим квадратную систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \quad (3)$$

У этой системы коэффициент a_{11} отличен от нуля. Если бы это условие не выполнялось, то чтобы его получить, нужно было бы переставить местами уравнения, поставив первым то уравнение, у которого коэффициент при x_1 не равен нулю.

Проведем следующие преобразования системы:

- 1) поскольку $a_{11} \neq 0$, первое уравнение оставим без изменений;
- 2) вместо второго уравнения запишем уравнение, получающееся, если из второго уравнения вычесть первое, умноженное на 4;
- 3) вместо третьего уравнения запишем разность третьего и первого, умноженного на 3;
- 4) вместо четвертого уравнения запишем разность четвертого и первого, умноженного на 5.

Полученная новая система эквивалентна исходной и имеет во всех уравнениях, кроме первого, нулевые коэффициенты при x_1 (это и являлось целью преобразований 1 – 4):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 10x_2 - 13x_3 - 8x_4 = -45 \\ 5x_2 - 7x_3 - 7x_4 = -30 \\ 4x_2 - 13x_3 - 9x_4 = -53 \end{cases} \quad (4)$$

Можно доказать, что замена любого уравнения системы новым, получающимся прибавлением к данному уравнению любого другого уравнения системы, умноженного на любое число, является эквивалентным преобразованием системы.

Для приведенного преобразования и для всех дальнейших преобразований не следует целиком переписывать всю систему, как это только что сделано. Исходную систему можно представить в виде таблицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 4 & 6 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Прямоугольную таблицу, состоящую из p строк и q столбцов, будем называть **матрицей** размера $p \times q$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} называются элементами матрицы. Первый индекс фиксирует номер строки, а второй – номер столбца, в которых стоит данный элемент. Если $p = q$, то есть число столбцов матрицы равно числу строк, то матрица называется **квадратной**. Элементы a_{ii} образуют **главную диагональ** матрицы.

Матрица (5) называется **расширенной матрицей** для исходной системы уравнений. Если из расширенной матрицы удалить столбец свободных членов, то получится **матрица коэффициентов системы**, которую иногда называют просто **матрицей системы**.

Очевидно, что матрица коэффициентов квадратной системы является квадратной матрицей.

Каждую систему m линейных уравнений с n неизвестными можно представить в виде расширенной матрицы, содержащей m строк и $n+1$ столбцов. Каждую матрицу можно считать расширенной матрицей или матрицей коэффициентов некоторой системы линейных уравнений. Системе (2) соответствует расширенная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 5 & -7 & -7 & -30 \\ 0 & 4 & -13 & -9 & -53 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем эту матрицу следующим образом:

- 1) первые две строки оставим без изменения, поскольку элемент a_{22} не равен нулю;
- 2) вместо третьей строки запишем разность между второй строкой и удвоенной третьей;
- 3) четвертую строку заменим разностью между удвоенной второй строкой и умноженной на 5 четвертой.

В результате получится матрица, соответствующая системе, у которой неизвестная x_1 исключена из всех уравнений, кроме первого, а неизвестная x_2 — из всех уравнений кроме первого и второго:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 39 & 29 & 175 \end{pmatrix}.$$

Теперь исключим неизвестную x_3 из четвертого уравнения. Для этого последнюю матрицу преобразуем так:

- 1) первые три строки оставим без изменения, так как $a_{33} \neq 0$;

2) четвертую строку заменим разностью между третьей, умноженной на 39, и четвертой:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 205 & 410 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 10x_2 - 13x_3 - 8x_4 = -45 \\ x_3 + 6x_4 = 15 \\ 205x_4 = 410 \end{cases} \quad (6)$$

Из последнего уравнения этой системы получаем $x_4 = 2$. Подставив это значение в третье уравнение, получим $x_3 = 3$. Теперь из второго уравнения следует, что $x_2 = 1$, а из первого — $x_1 = -1$. Очевидно, что полученное решение единственно (так как единственным образом определяется значение x_4 , затем x_3 и т. д.).

Назовем элементарными преобразованиями матрицы следующие преобразования:

- 1) перемена местами двух строк;
- 2) умножение строки на число, отличное от нуля;
- 3) замена строки матрицы суммой этой строки с любой другой строкой, умноженной на некоторое число.

Если матрица **A** является расширенной матрицей некоторой системы, и путем ряда элементарных преобразований матрица **A** переводится в матрицу **B**, являющуюся расширенной матрицей некоторой другой системы, то эти системы эквивалентны.

Назовем квадратную матрицу, у которой на главной диагонали стоят числа, отличные от нуля, а под главной диагональю — нули, **треугольной матрицей**. Матрица коэффициентов системы (5) — треугольная матрица.

Если с помощью элементарных преобразований матрицу коэффициентов квадратной системы можно привести к треугольной матрице, то система совместна и определена.

Сформулируем теперь кратко суть метода Гаусса. Полагая, что в системе коэффициент a_{11} отличен от нуля (если это не так, то следует на первое место поставить уравнение с отличным от нуля коэффициентом при x_1 и переобозначить коэффициенты), преобразуем систему следующим образом: первое уравнение оставляем без изменения, а из всех остальных уравнений исключаем неизвестную x_1 с помощью эквивалентных преобразований описанным выше способом.

В полученной системе

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^*x_2 + a_{23}^*x_3 + \dots + a_{2n}^*x_n = b_2^* \\ a_{32}^*x_2 + a_{33}^*x_3 + \dots + a_{3n}^*x_n = b_3^* \\ \dots\dots\dots \\ a_{m2}^*x_2 + a_{m3}^*x_3 + \dots + a_{mn}^*x_n = b_m^* \end{array} \right. ,$$

считая, что $a_{22}^* \neq 0$ (что всегда можно получить, переставив уравнения или слагаемые внутри уравнений и переобозначив коэффициенты системы), оставляем без изменений первые два уравнения системы, а из остальных уравнений, используя второе уравнения, с помощью элементарных преобразований исключаем неизвестную x_2 . Во вновь полученной системе

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^*x_2 + a_{23}^*x_3 + \dots + a_{2n}^*x_n = b_2^* \\ a_{33}^{**}x_3 + \dots + a_{3n}^{**}x_n = b_3^{**} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m3}^{**}x_3 + \dots + a_{mn}^{**}x_n = b_m^{**} \end{array} \right.$$

при условии $a_{33}^{**} \neq 0$ оставляем без изменений первые три уравнения, а из всех остальных с помощью третьего уравнения элементарными преобразованиями исключаем неизвестную x_3 .

Этот процесс продолжается до тех пор, пока не реализуется один из трех возможных случаев:

- 1) если в результате приходим к системе, одно из уравнений которой имеет нулевые коэффициенты при всех неизвестных и отличный от нуля свободный член, то исходная система несовместна;
- 2) если в результате преобразований получаем систему с матрицей коэффициентов треугольного вида, то система совместна и является определенной;
- 3) если получается система с трапециевидальной матрицей коэффициентов (и при этом не выполняется условие пункта 1), то система совместна и неопределенна.

2.Правило Крамера решения квадратных систем линейных уравнений.

Пусть мы имеем квадратную систему линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right. .$$

Ее можно записать в матричной форме:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B},$$

где

$$\mathbf{A} = (a_{ij}), i, j = 1, 2, \dots, n; \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Если определитель матрицы $\mathbf{A}$ не равен нулю, то система имеет единственное решение, определяемое формулами:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, & x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, & x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \end{cases}$$

Здесь Δ_i – определитель n -го порядка, получающийся из определителя Δ матрицы $\mathbf{A}$ коэффициентов системы заменой i -го столбца столбцом свободных членов.

Например,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3; \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -17; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -8;$$

$$x_1 = \frac{16}{17}; \quad x_2 = -\frac{3}{17}; \quad x_3 = \frac{8}{17}.$$

Отметим, что если определитель матрицы $\mathbf{A}$ коэффициентов квадратной системы линейных уравнений равен нулю, то возможен один из двух случаев: либо система несовместна, либо она совместна и неопределенна.

3. Метод обратной матрицы

Пусть имеется матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$ размерности $n \times n$, n -мерный вектор-столбец $\mathbf{X}$ и n -мерный вектор-столбец $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тогда матричное равенство

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B},$$

если расписать его поэлементно, примет вид:

[illegible]

Найдём решение данной системы уравнений в случае $\Delta \neq 0$. Умножив обе части уравнения $A^*X=B$ слева на матрицу A^{-1} , получим $A^{-1} * A^*X = A^{-1} * B$, поскольку $A^{-1} * A = E$ и $E^*X=X$, то

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} * \mathbf{B}.$$

Отыскание решения системы по формуле называют **матричным способом решения системы**.

Собственные значения и собственные векторы матрицы

Определение. Всякий ненулевой вектор - столбец $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ называется *собственным вектором линейного преобразования (квадратной матрицы A)*, если найдется такое число λ , что будет выполняться равенство

$$AX = \lambda X.$$

Число λ называется *собственным значением линейного преобразования (матрицы A)*, соответствующим вектору X. Матрица A имеет порядок n.

В математической экономике большую роль играют так называемые *продуктивные матрицы*. Доказано, что матрица A является продуктивной тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A по модулю меньше единицы.

Для нахождения собственных значений матрицы A перепишем равенство $AX = \lambda X$ в виде $(A - \lambda E)X = 0$, где E - единичная матрица n -го порядка или в координатной форме:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Получили систему линейных однородных уравнений, которая имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю, т.е.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Получили уравнение n -ой степени относительно неизвестной λ , которое называется *характеристическим уравнением матрицы A* , многочлен $|A - \lambda E|$ называется *характеристическим многочленом матрицы A* , а его корни - *характеристическими числами, или собственными значениями, матрицы A* .

Для нахождения собственных векторов матрицы A в векторное уравнение $(A - \lambda E)X = 0$ или в соответствующую систему однородных уравнений (8) нужно подставить найденные значения λ и решать обычным образом.

Лекция 4.

Векторное пространство и линейные преобразования.

Определение. Упорядоченную совокупность $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n вещественных чисел называют n -мерным вектором, а числа x_i ($i = \overline{1, n}$) - компонентами, или координатами, вектора.

Если, например, некоторый автомобильный завод должен выпустить в смену 50 легковых автомобилей, 100 грузовых, 10 автобусов, 50 комплектов запчастей для легковых автомобилей и 150 комплектов для грузовых автомобилей и автобусов, то производственную программу этого завода можно записать в виде вектора $(50, 100, 10, 50, 150)$, имеющего пять компонент. Векторы обозначают жирными строчными буквами или буквами с чертой или стрелкой наверху, например, $\mathbf{a}$ или $\vec{a}$. Два вектора называются равными, если они имеют одинаковое число компонент и их соответствующие компоненты равны.

Компоненты вектора нельзя менять местами, например, $(3, 2, 5, 0, 1) \neq (2, 3, 5, 0, 1)$.

Произведением вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ на действительное число λ называется вектор $\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$.

Суммой векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ называется вектор $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$.

n -мерное векторное пространство $\mathbf{R}^n$ определяется как множество всех n -мерных векторов, для которых определены операции умножения на действительные числа и сложение.

Экономическая иллюстрация n -мерного векторного пространства: *пространство благ (товаров)*. Под *товаром* мы будем понимать некоторое благо или услугу, поступившие в продажу в определенное время в определенном месте. Предположим, что существует конечное число наличных товаров n ; количества каждого из них, приобретенные потребителем, характеризуются набором товаров

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где через x_i обозначается количество i -го блага, приобретенного потребителем. Будем считать, что все товары обладают свойством произвольной делимости, так что может быть куплено любое неотрицательное количество каждого из них. Тогда все возможные наборы товаров являются векторами пространства товаров $S = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \geq 0, i = \overline{1, n} \}$.

Линейно зависимые системы векторов и их свойства.

Система $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m$ n -мерных векторов называется *линейно зависимой*, если найдутся такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что выполняется равенство $\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{e}_m = 0$; в противном случае данная система векторов называется *линейно независимой*, то есть указанное равенство возможно лишь в случае, когда все $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$. Геометрический смысл линейной зависимости векторов в $\mathbf{R}^3$, интерпретируемых как направленные отрезки, поясняют следующие теоремы.

Теорема 1. Система, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

Теорема 2. Для того, чтобы два вектора были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были коллинеарны.

Теорема 3. Для того, чтобы три вектора были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были компланарны.

Тройка некомпланарных векторов **a**, **b**, **c** называется *правой*, если наблюдателю из их общего начала обход концов векторов **a**, **b**, **c** в указанном порядке кажется совершающимся по часовой стрелке. В противном случае **a**, **b**, **c** - *левая тройка*. Все правые (или левые) тройки векторов называются *одинаково ориентированными*.

Базис линейного пространства.

Тройка **e**₁, **e**₂, **e**₃ некомпланарных векторов в **R**³ называется *базисом*, а сами векторы **e**₁, **e**₂, **e**₃ - *базисными*. Любой вектор **a** может быть единственным образом разложен по базисным векторам, то есть представлен в виде

$$\mathbf{a} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3,$$

числа x_1, x_2, x_3 в разложении называются *координатами* вектора **a** в базисе **e**₁, **e**₂, **e**₃ и обозначаются **a**(x_1, x_2, x_3). Если векторы **e**₁, **e**₂, **e**₃ попарно перпендикулярны и длина каждого из них равна единице, то базис называется *ортонормированным*, а координаты x_1, x_2, x_3 - *прямоугольными*. Базисные векторы ортонормированного базиса будем обозначать **i**, **j**, **k**.

Будем предполагать, что в пространстве **R**³ выбрана правая система декартовых прямоугольных координат {0, **i**, **j**, **k**}.

Векторным произведением вектора **a** на вектор **b** называется вектор **c**, который определяется следующими тремя условиями:

1. Длина вектора **c** численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**, т. е. $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$.
2. Вектор **c** перпендикулярен к каждому из векторов **a** и **b**.
3. Векторы **a**, **b** и **c**, взятые в указанном порядке, образуют правую тройку.

Для векторного произведения **c** вводится обозначение $\mathbf{c} = [\mathbf{a}\mathbf{b}]$ или $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Если векторы **a** и **b** коллинеарны, то $\sin(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 0$ и $[\mathbf{a}\mathbf{b}] = 0$, в частности, $[\mathbf{a}\mathbf{a}] = 0$. Векторные произведения ортов: $[\mathbf{i}\mathbf{j}] = \mathbf{k}$, $[\mathbf{j}\mathbf{k}] = \mathbf{i}$, $[\mathbf{k}\mathbf{i}] = \mathbf{j}$.

Если векторы **a** и **b** заданы в базисе **i**, **j**, **k** координатами **a**(a_1, a_2, a_3), **b**(b_1, b_2, b_3), то

$$[\mathbf{a}\mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \bar{\mathbf{i}}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \bar{\mathbf{j}}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \bar{\mathbf{k}}(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Если векторное произведение двух векторов **a** и **b** скалярно умножается на третий вектор **c**, то такое произведение трех векторов называется *смешанным произведением* и обозначается символом **a b c**.

Если векторы **a**, **b** и **c** в базисе **i**, **j**, **k** заданы своими координатами **a**(a_1, a_2, a_3), **b**(b_1, b_2, b_3), **c**(c_1, c_2, c_3), то

$$\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение имеет простое геометрическое толкование - это скаляр, по абсолютной величине равный объему параллелепипеда, построенного на трех данных векторах.

Если векторы образуют правую тройку, то их смешанное произведение есть число положительное, равное указанному объему; если же тройка **a**, **b**, **c** - левая, то $\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} < 0$ и $V = -\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}$, следовательно $V = |\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}|$.

Координаты векторов, встречающиеся в задачах первой главы, предполагаются заданными относительно правого ортонормированного базиса. Единичный вектор, сонаправленный вектору $\mathbf{a}$, обозначается символом $\mathbf{a}^0$. Символом $\mathbf{r}=\mathbf{OM}$ обозначается радиус-вектор точки М, символами a , AB или $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{AB}|$ обозначаются модули векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{AB}$.

Лекция 5.

Применение элементов линейной алгебры в экономике.

Балансовый анализ.

Эффективное ведение хозяйства предполагает баланс между отраслями. Каждая отрасль выступает при этом двояко: с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой – как потребитель продуктов, вырабатываемых другими отраслями.

Будем предполагать что рассматривается *потраслей* хозяйства, каждая из которых производит свою продукцию.

Введём обозначения:

x_i – валовой выпуск i -ой отрасли;

x_{ij} – объём продукции i -ой отрасли, потребляемый j -ой отраслью;

y_i – объём продукции i -ой отрасли, предназначенный для реализации в непроизводственной сфере (продукт конечного потребления).

Модель межотраслевого баланса, разработанная профессором В. Леонтьевым (Гарвардский университет, США), имеет вид:

$$\boxed{\phantom{a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}}}, a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j},$$

или, в матричной форме,

$$AX + Y = X,$$

где $A = (a_{ij})$ - матрица коэффициентов прямых затрат, X - вектор валовых выпусков, Y - вектор конечного продукта.

Перепишем систему в виде

$$(E - A) X = Y,$$

где E - единичная матрица n -го порядка, тогда решение полученной системы относительно неизвестных значений объёмов производства продукции при заданном векторе конечного продукта находится по формуле

$$X = (E - A)^{-1} Y.$$

Здесь $(E - A)^{-1}$ - матрица коэффициентов полных затрат. Элемент b_{ij} матрицы $(E - A)^{-1}$ характеризует потребность в валовом выпуске отрасли i , который необходим для получения в процессе материального производства единицы конечного продукта отрасли j . Благодаря этому имеется возможность рассматривать валовые выпуски x_i в виде функций планируемых значений y_j конечных продуктов отраслей:

$$x_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j.$$

Модель равновесных цен.

Пусть $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$ - матрица прямых затрат;

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{вектор валового выпуска};$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix} - \text{вектор цен.}$$

От реализации продукции i -я отрасль получит доход $x_i p_i$, который идёт на закупку сырья $x_i(a_{1i} p_1 + a_{2i} p_2 + \dots + a_{ni} p_n)$, а некоторая его часть составляет добавленную стоимость v_i (стоимость условно чистой продукции).

Имеем равенства $x_i(a_{1i} p_1 + a_{2i} p_2 + \dots + a_{ni} p_n) + v_i$, $i = \overline{1, n}$.

Разделив обе части уравнения на x_i получим:

$$p_i = a_{1i} p_1 + a_{2i} p_2 + \dots + a_{ni} p_n + V_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где $V_i = \frac{v_i}{x_i}$ - норма добавленной стоимости (величина добавленной стоимости на единицу выпускаемой продукции i -ой отрасли).

Если ввести в рассмотрение вектор норм добавленной стоимости $\vec{V} = (V_1, V_2, \dots, V_n)$, то система в матричной форме примет вид:

$$\vec{p} = A^T \vec{p} + \vec{V}.$$

Данная система называется моделью равновесных цен.

Линейная модель торговли.

Пусть бюджеты n стран, которые обозначим: $x_1, x_2, \dots, x_n$, расходуются на покупку товаров. Обозначим: a_{ij} - доля бюджета x_j , которую j -я страна тратит на закупку товаров у i -ой страны.

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда, если весь бюджет идёт на закупки внутри страны и вне её справедливо свойство: сумма элементов любого столбца матрицы равна единице. Матрица A с данным свойством называется **структурной матрицей торговли**. Общая выручка от внутренней и внешней торговли для i -ой страны выражается равенством:

$$p_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n.$$

Условие бездефицитной торговли формируется следующим образом: для каждой страны её бюджет должен быть равен выручке от торговли, т.е. $p_i = x_i$ $i = \overline{1, n}$. Таким образом, получим систему уравнений:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = x_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Введём вектор бюджетов: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. Тогда полученная система запишется в виде

$A\vec{x} = \vec{x}$. Данное уравнение означает, что вектор $\vec{x}$ является собственным вектором матрицы A соответствующий собственному значению $\lambda = 1$, то есть вектор бюджетов стран бездефицитной международной торговли есть собственный вектор структурной матрицы торговли, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$.

Лекция 6.

Элементы линейного программирования

Линейные неравенства и область решений системы линейных неравенств.

Пусть задано линейное неравенство с двумя переменными x_1 и x_2 :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + b \geq 0. \quad (1)$$

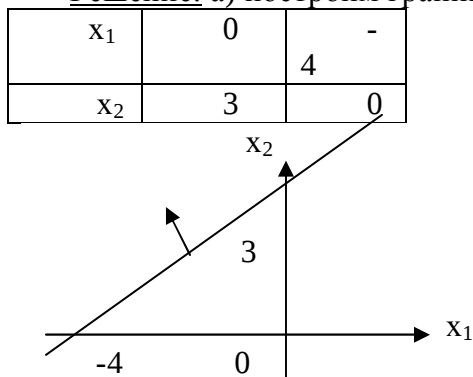
Если величины x_1 и x_2 рассматривать как координаты точки плоскости, то совокупность точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству (1), называется областью решений данного неравенства. Областью решений неравенства (1) является полуплоскость.

Для того чтобы установить, какая из двух полуплоскостей соответствует неравенству (1), достаточно привести это неравенство к виду или к виду $x_2 \leq kx_1 + l$. В первом случае искомая полуплоскость лежит выше прямой $a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0$, во втором—ниже ее. Если же $a_2 = 0$, то неравенство приводится к одному из видов $x \geq h$ или $x \leq h$, т. е. полуплоскость лежит справа или слева от прямой $x_1 = h$.

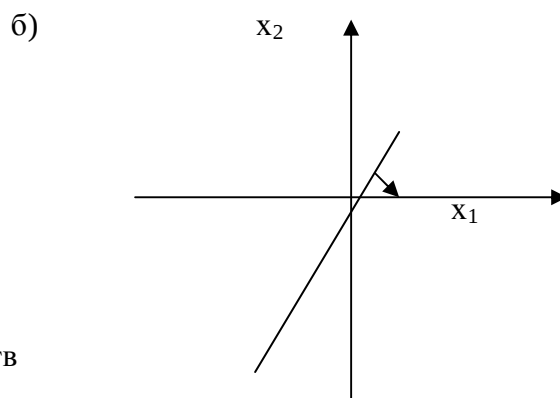
Пример. Построить множество решений неравенства

а) $3x_1 + 4x_2 + 12 \leq 0$; б) $3x_1 - 2x_2 \geq 0$.

Решение. а) построим границу полуплоскости - прямую $3x_1 + 4x_2 + 12 = 0$;



В случае же, когда задана система неравенств



(2)

Область решений обладает важным свойством - она является выпуклой, т. е. вместе с любыми своими двумя точками содержит и весь соединяющий их отрезок. Прямая, которая имеет с областью, по крайней мере, одну общую точку, притом так, что вся область лежит по одну сторону от этой прямой, называется опорной по отношению к этой области.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 \geq 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 \geq 0, \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + b_m \geq 0, \end{cases} \quad (3)$$

Основная задача линейного программирования

Функция,- наибольшее или наименьшее значения которой отыскиваются, называется целевой функцией, а совокупность значений переменных, при которых достигается наибольшее или наименьшее значение, определяет так называемый оптимальный план. Всякая же другая совокупность значений, удовлетворяющая ограничениям, определяет допустимый план (решение).

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_n \geq b_2, \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n \geq b_m, \end{array} \right.$$
 Среди неотрицательных решений этой

Геометрическая интерпретация ЗЛП и графический метод решения (при двух неизвестных)

98

многоугольную область как пересечение полуплоскостей - геометрических образов неравенств системы. Целевая функция $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$ геометрически изображает семейство параллельных прямых, перпендикулярных вектору $\vec{n} (c_1, c_2)$.

Теорема. При перемещении прямой целевой функции в направлении вектора $\vec{n}$ значения целевой функции возрастают, в противоположном направлении - убывают.

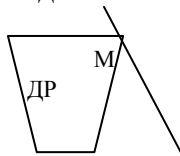
На этих утверждениях основан графический метод решения ЗЛП.

Алгоритм графического метода решения ЗЛП.

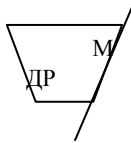
- 1) В системе координат построить прямые по уравнениям, соответствующим каждому неравенству системы ограничений;
- 2) найти полуплоскости решения каждого неравенства системы (обозначить стрелками);
- 3) найти многоугольник (многоугольную область) решений системы ограничений как пересечение полуплоскостей;
- 4) построить вектор $\vec{n} (c_1, c_2)$, выходящий из начала координат по коэффициентам целевой функции $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$;
- 5) в семействе параллельных прямых целевой функции выделить одну, например, через начало координат;
- 6) перемещать прямую целевой функции параллельно самой себе по области решения, достигая $\max L$ при движении по направлению вектора $\vec{n}$ и $\min L$ при движении в противоположном направлении.
- 7) найти координаты точек $\max$ и $\min$ по чертежу и вычислить значения функции в этих точках (ответы).

При решении задач линейного программирования графически могут возникнуть следующие ситуации:

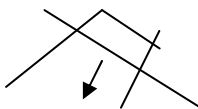
- 1) Оптимальная прямая целевой функции проходит через вершину многоугольника, значит задача имеет единственное решение.



- 2) Оптимальная прямая целевой функции и МДР пересекаются по одной из сторон многоугольника – задача имеет бесчисленное множество решений.



- 3) При перемещении прямой в сторону убывания (возрастания) целевой функции, целевая функция и МДР всегда имеют общие точки. Оптимального решения нет, допустимые есть.



- 4) На плоскости не существует ни одной точки, удовлетворяющей всем ограничениям задачи. Решений нет.

Линейная производственная задача.

Линейная производственная задача – это задача о рациональном использовании имеющихся ресурсов, для решения которой применяют методы линейного программирования. В общем виде задача может быть сформулирована следующим

образом:

Предположим, предприятие или цех может выпускать n видов продукции, используя m видов ресурсов. При этом известно количество каждого вида ресурса, расход каждого вида ресурса на выпуск каждого вида продукции, прибыль, получаемая с единицы выпущенной продукции. Требуется составить такой план производства продукции, при котором прибыль, получаемая предприятием, была бы наибольшей.

Примем следующие обозначения:

i	Номер ресурса ($i=1,2,\dots,m$)
j	Номер продукции ($j=1,2,\dots,n$)
a_{ij}	Расход i -го ресурса на единицу j -ой продукции
b_i	Имеющееся количество i -го ресурса
c_j	Прибыль на единицу j -ой продукции
x_j	Планируемое количество единиц j -ой продукции
$x_1, x_2, \dots, x_n$	Искомый план производства

Таким образом, математическая модель задачи состоит в том, чтобы найти производственную программу $\bar{x} (x_1, x_2, \dots, x_n)$ максимизирующую прибыль: $z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$

При этом, какова бы ни была производственная программа $\bar{x}$, ее компоненты должны удовлетворять условию, что суммарное использование данного вида ресурса, при производстве всех видов продукции не должно превышать имеющееся количество данного вида ресурса, т.е.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \text{ где } i = \overline{1, m}$$

А так как компоненты программы – количество изделий, то они не могут быть выражены отрицательными числами, следовательно, добавляется еще одно условие:

$$x_j \geq 0, \text{ где } j = \overline{1, n}.$$

Целочисленное программирование.

Некоторые задачи линейного программирования требуют целочисленного решения. К ним относятся задачи по производству и распределению неделимой продукции (выпуск станков, телевизоров, автомобилей...). В общем виде математическая модель задачи целочисленного программирования имеет вид:

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min)$$

при ограничениях: $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, x_j \geq 0$ - целое, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Графический метод решения задачи.

При наличии в задаче линейного программирования двух переменных, а в системе ограничений – неравенств, она может быть решена графическим методом.

В системе координат $X_1 O X_2$ находят область допустимых решений, строят вектор $\vec{n}$ и прямые целевой функции. Перемещая прямую целевой функции параллельно самой себе

по области решения, достигают $\max L$ при движении по направлению вектора $\vec{n}$ и $\min L$ при движении в противоположном направлении.

В том случае, когда координаты точки максимума (минимума) нецелочисленные, в области допустимых решений строят целочисленную решётку и находят на ней такие целые числа, которые удовлетворяют системе ограничений и при которых значение целевой функции наиболее близко к экстремальному нецелочисленному решению. Координаты такой вершины и являются целочисленным решением.

Лекции 7-8.

Интегральное исчисление.

Неопределённый интеграл.

Определение: Функция $F(x)$ называется **первообразной функцией** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Определение: Неопределённым интегралом функции $f(x)$ называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Условием существования неопределённого интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x .
5. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx;$

Пример: $\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2dx - 2\int \sin xdx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$

Для удобства значения неопределённых интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объёмными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределённых интегралов различных функций.

	Значение	Интеграл	Значение
--	----------	----------	----------

Интеграл					
1	$\int \operatorname{tg} x dx$	$-\ln \cos x + C$	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int \operatorname{ctg} x dx$	$\ln \sin x + C$	10	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$
4	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\operatorname{tg} x + C$
5	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-\operatorname{ctg} x + C$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + C$
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln x + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$

Методы интегрирования.

Рассмотрим три основных метода интегрирования.

Непосредственное интегрирование.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где C – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены $x = \varphi(t)$ и $dx = \varphi'(t)dt$ получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство: Продифференцируем предлагаемое равенство:

$$d \int f(x)dx = d \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \right)$$

По рассмотренному выше свойству №2 неопределенного интеграла:

$$f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением. Теорема доказана.

Пример. $\int x(x^2 + 1)^{3/2} dx.$

Замена $t = x^2 + 1$; $dt = 2xdx$; $dx = \frac{dt}{2x}$; Получаем:

$$\int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^{5/2}}{5} + C;$$

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

где u и v – некоторые функции от x .

В дифференциальной форме: $d(uv) = u dv + v du$

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int u dv + \int v du$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int u dv + \int v du \quad \text{или} \quad \int u dv = uv - \int v du ;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $\int x^2 \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2; \quad dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; \quad v = -\cos x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = x; \quad dv = \cos x dx; \\ du = dx; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x dx \right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Интегрирование элементарных дробей.

Определение: Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

$$\text{I. } \frac{1}{ax+b}; \quad \text{III. } \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c};$$

$$\text{II. } \frac{1}{(ax+b)^m}; \quad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$$

m, n – натуральные числа ($m \geq 2, n \geq 2$) и $b^2 - 4ac < 0$.

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличным подстановкой $t = ax + b$.

$$\text{I. } \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a} \ln|t| + C = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C.$$

$$\text{II. } \int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C;$$

Рассмотрим метод интегрирования элементарных дробей вида III.

Интеграл дроби вида III может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \\ &= \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \\ &\cdot \arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \end{aligned}$$

Здесь в общем виде показано приведение интеграла дроби вида III к двум табличным интегралам.

Вообще говоря, если у трехчлена $ax^2 + bx + c$ выражение $b^2 - 4ac > 0$, то дробь по определению не является элементарной, однако, тем не менее ее можно интегрировать указанным выше способом.

Рассмотрим теперь методы интегрирования простейших дробей IV типа.

Сначала рассмотрим частный случай при $M = 0, N = 1$.

Тогда интеграл вида $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ можно путем выделения в знаменателе полного

квадрата представить в виде $\int \frac{du}{(u^2 + s)^n}$. Сделаем следующее преобразование:

$$\int \frac{du}{(u^2 + s)^n} = \frac{1}{s} \int \frac{s + u^2 - u^2}{(u^2 + s)^n} du = \frac{1}{s} \int \frac{du}{(u^2 + s)^{n-1}} - \frac{1}{s} \int \frac{u^2 du}{(u^2 + s)^n}.$$

Второй интеграл, входящий в это равенство, будем брать по частям.

$$\text{Обозначим: } \left\{ \begin{aligned} dv_1 &= \frac{u du}{(u^2 + s)^n}; & u_1 &= u; & du_1 &= du; \\ v_1 &= \int \frac{u du}{(u^2 + s)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(u^2 + s)^{n-1}}; \end{aligned} \right\}$$

$$\int \frac{u^2 du}{(u^2 + s)^n} = -\frac{u}{(2n-2)(u^2 + s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2} \int \frac{du}{(u^2 + s)^{n-1}};$$

Для исходного интеграла получаем:

$$\int \frac{du}{(u^2 + s)^n} = \frac{1}{s} \int \frac{du}{(u^2 + s)^{n-1}} + \frac{u}{s(2n-2)(u^2 + s)^{n-1}} - \frac{1}{s(2n-2)} \int \frac{du}{(u^2 + s)^{n-1}}$$

$$\int \frac{du}{(u^2 + s)^n} = \frac{u}{s(2n-2)(u^2 + s)^{n-1}} + \frac{2n-3}{s(2n-2)} \int \frac{du}{(u^2 + s)^{n-1}}.$$

Полученная формула называется **рекуррентной**. Если применить ее $n-1$ раз, то получится табличный интеграл $\int \frac{du}{u^2 + s}$.

Вернемся теперь к интегралу от элементарной дроби вида IV в общем случае.

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^n} dx &= (4a)^n \int \frac{Mx + N}{[(2ax + b)^2 + (4ac - b^2)]^n} dx = \left\{ \begin{aligned} u &= 2ax + b; & du &= 2adx; \\ x &= \frac{u-b}{2a}; & s &= 4ac - b^2; \end{aligned} \right\} = \\ &= \frac{(4a)^n}{2a} \int \frac{\frac{M(u-b)}{2a} + N}{(u^2 + s)^n} du = \frac{(4a)^n}{2a} \left[\frac{M}{2a} \int \frac{udu}{(u^2 + s)^n} + \frac{2aN - Mb}{2a} \int \frac{du}{(u^2 + s)^n} \right] \end{aligned}$$

В полученном равенстве первый интеграл с помощью подстановки $t = u^2 + s$ приводится к табличному $\int \frac{dt}{t^n}$, а ко второму интегралу применяется рассмотренная выше рекуррентная формула.

Интегрирование рациональных функций.

Интегрирование рациональных дробей.

Для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь необходимо разложить ее

на элементарные дроби.

Теорема: Если $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель $P(x)$

которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (отметим, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в таком виде: $P(x) = (x - a)^\alpha \dots (x - b)^\beta (x^2 + px + q)^\lambda \dots (x^2 + rx + s)^\mu$), то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \dots + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \dots + \frac{M_\lambda x + N_\lambda}{(x^2 + px + q)^\lambda} + \dots + \frac{R_1x + S_1}{x^2 + rx + s} + \frac{R_2x + S_2}{(x^2 + rx + s)^2} + \dots + \frac{R_\mu x + S_\mu}{(x^2 + rx + s)^\mu}$$

где $A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i$ – некоторые постоянные величины.

При интегрировании рациональных дробей прибегают к разложению исходной дроби на элементарные. Для нахождения величин $A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i$ применяют так называемый **метод неопределенных коэффициентов**, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях x .

Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

Интегралов от тригонометрических функций может быть бесконечно много. Большинство из этих интегралов вообще нельзя вычислить аналитически, поэтому рассмотрим некоторые главнейшие типы функций, которые могут быть проинтегрированы всегда.

$$\text{Интеграл вида } \int R(\sin x, \cos x) dx.$$

Здесь R – обозначение некоторой рациональной функции от переменных $\sin x$ и $\cos x$.

Интегралы этого вида вычисляются с помощью подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную.

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$\text{Тогда } x = 2 \arctg t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2};$$

$$\text{Таким образом: } \int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt = \int r(t) dt.$$

Описанное выше преобразование называется **универсальной тригонометрической подстановкой**.

Пример.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \frac{2t}{1+t^2} + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2 \int \frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = 2 \int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} = \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} + C.\end{aligned}$$

Несомненным достоинством этой подстановки является то, что с ее помощью всегда можно преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную и вычислить соответствующий интеграл. К недостаткам можно отнести то, что при преобразовании может получиться достаточно сложная рациональная функция, интегрирование которой займет много времени и сил.

Однако при невозможности применить более рациональную замену переменной этот метод является единственно результативным.

Пример.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{9 + 8 \cos x + \sin x} &= \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left[9 + \frac{8(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} \right]} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 17} = 2 \int \frac{dt}{(t+1)^2 + 16} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t+1}{4} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{4} + C.\end{aligned}$$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ если

функция R является нечетной относительно $\cos x$.

Несмотря на возможность вычисления такого интеграла с помощью универсальной тригонометрической подстановки, рациональнее применить подстановку $t = \sin x$.

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x} \cos x dx$$

Функция $\frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$ может содержать $\cos x$ только в четных степенях, а следовательно, может быть преобразована в рациональную функцию относительно $\sin x$.

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int r(\sin x) \cos x dx = \int r(t) dt.$$

Пример.

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^7 x dx}{\sin^4 x} &= \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{array} \right\} = \int \frac{(1-t^2)^3}{t^4} dt = \int \frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^4} dt = \int \frac{dt}{t^4} - 3 \int \frac{dt}{t^2} + \\ &+ 3 \int dt - \int t^2 dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{3}{t} + 3t - \frac{1}{3} t^3 = -\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{3}{\sin x} + 3 \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.\end{aligned}$$

Вообще говоря, для применения этого метода необходима только нечетность функции относительно косинуса, а степень синуса, входящего в функцию может быть

любой, как целой, так и дробной.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ если

функция R является нечетной относительно $\sin x$.

По аналогии с рассмотренным выше случаем делается подстановка $t = \cos x$.

$$\text{Тогда } \int R(\sin x, \cos x) dx = \int r(\cos x) \sin x dx = -\int r(t) dt.$$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$

функция R четная относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Для преобразования функции R в рациональную используется подстановка $t = \operatorname{tg} x$.

$$\text{Тогда } \int R(\sin x, \cos x) dx = \int r(t) dt$$

*Интеграл произведения синусов и косинусов
различных аргументов.*

В зависимости от типа произведения применяются одна из трех формул:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \right]$$

$$\int \sin mx \sin nx dx = \int \frac{1}{2} [-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]$$

Интегрирование некоторых иррациональных функций.

Далеко не каждая иррациональная функция может иметь интеграл, выраженный элементарными функциями. Для нахождения интеграла от иррациональной функции следует применить подстановку, которая позволит преобразовать функцию в рациональную, интеграл от которой может быть найден как известно всегда.

Рассмотрим некоторые приемы для интегрирования различных типов иррациональных функций.

Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ где n - натуральное число.

С помощью подстановки $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ функция рационализируется.

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n; \quad x = \frac{t^n - b}{a - ct^n}; \quad dx = \left(\frac{t^n - b}{a - ct^n} \right)' dt;$$

Тогда $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(\frac{t^n-b}{a-ct^n}, t\right) \left(\frac{t^n-b}{a-ct^n}\right)' dt = \int r(t) dt.$

Несколько примеров интегралов, не выражающихся через элементарные функции.

К таким интегралам относится интеграл вида $\int R(x, \sqrt{P(x)}) dx$, где $P(x)$ - многочлен степени выше второй. Эти интегралы называются **эллиптическими**.

Если степень многочлена $P(x)$ выше четвертой, то интеграл называется **ультраэллиптическим**.

Если все – таки интеграл такого вида выражается через элементарные функции, то он называется **псевдоэллиптическим**.

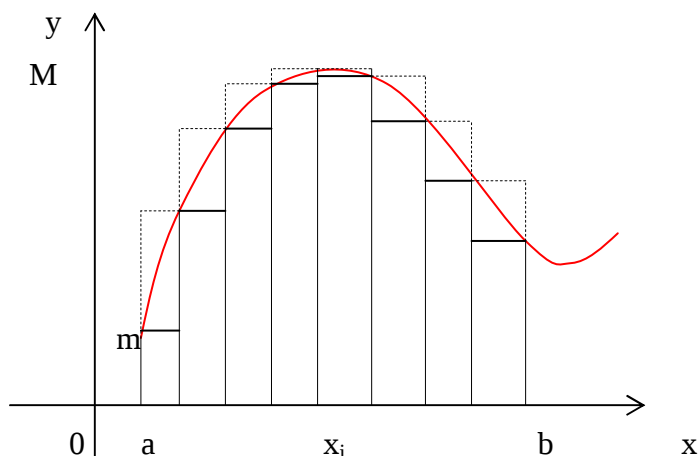
Не могут быть выражены через элементарные функции следующие интегралы:

- 1) $\int e^{-x^2} dx$ - интеграл Пуассона (Симеон Дени Пуассон – французский математик (1781-1840))
- 2) $\int \sin x^2 dx$; $\int \cos x^2 dx$ - интегралы Френеля (Жан Огюстен Френель – французский ученый (1788-1827) - теория волновой оптики и др.)
- 3) $\int \frac{dx}{\ln x}$ - интегральный логарифм
- 4) $\int \frac{e^x}{x} dx$ - приводится к интегральному логарифму
- 5) $\int \frac{\sin x}{x} dx$ - интегральный синус
- 6) $\int \frac{\cos x}{x} dx$ - интегральный косинус

Лекция 9.

Определенный интеграл.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$.



Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[a, b]$
Разобьем отрезок $[a, b]$ на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1, x_2 - x_1 = \Delta x_2, \dots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \rightarrow m_1, M_1; [x_1, x_2] \rightarrow m_2, M_2; \dots [x_{n-1}, x_n] \rightarrow m_n, M_n$.

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

$$\bar{S}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\bar{S}$ – **верхней интегральной суммой**.

Т.к. $m_i \leq M_i$, то $\underline{S}_n \leq \bar{S}_n$, а $m(b-a) \leq \underline{S}_n \leq \bar{S}_n \leq M(b-a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ϵ .

$$x_0 < \epsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \epsilon_2 < x_2, \quad \dots, \quad x_{n-1} < \epsilon_n < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

$$S_n = f(\epsilon_1) \Delta x_1 + f(\epsilon_2) \Delta x_2 + \dots + f(\epsilon_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\epsilon_i) \Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i \Delta x_i \leq f(\epsilon_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$

$$\text{Следовательно, } \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\epsilon_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

$$\underline{S}_n \leq S_n \leq \bar{S}_n$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции $f(x)$ ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $\max \Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $\min \Delta x_i$ – наименьший. Если $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, то число отрезков разбиения отрезка $[a, b]$ стремится к бесконечности.

$$\text{Если } S_n = \sum_{i=1}^n f(\epsilon_i) \Delta x_i, \text{ то } \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\epsilon_i) \Delta x_i = S.$$

Определение. Если при любых разбиениях отрезка $[a, b]$ таких, что $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ и

произвольном выборе точек ϵ_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^n f(\epsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S , который называется определенным интегралом от $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Обозначение : $\int_a^b f(x)dx$.

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, $[a, b]$ – отрезок интегрирования.

Определение. Если для функции $f(x)$ существует предел

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\epsilon_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx, \text{ то функция называется } \textbf{интегрируемой} \text{ на отрезке } [a, b].$$

Также верны утверждения: $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Теорема: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла.

$$1) \int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx;$$

$$2) \int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

$$3) \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$4) \text{ Если } f(x) \leq \varphi(x) \text{ на отрезке } [a, b] \text{ } a < b, \text{ то } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$$

5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

6) **Теорема о среднем.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует точка ϵ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\epsilon)$$

Доказательство: В соответствии со свойством 5:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

т.к. функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на этом отрезке все значения от m до M . Другими словами, существует такое число $\epsilon \in [a, b]$, что если

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \mu \quad \text{и} \quad \mu = f(\epsilon), \quad a \leq \epsilon \leq b, \quad \text{тогда} \quad \int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\epsilon).$$

Теорема доказана.

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

$$8) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Обобщенная теорема о среднем. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, и функция $\varphi(x)$ знакопостоянна на нем, то на этом отрезке существует точка ϵ , такая, что

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(\epsilon) \int_a^b \varphi(x) dx$$

Вычисление определенного интеграла.

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x) dx$ нижний предел $a = \text{const}$, а верхний предел b

изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим $\int_a^x f(t) dt = \Phi(x)$. Найдем производную функции $\Phi(x)$ по переменному верхнему пределу x .

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

Теорема: Для всякой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция $F(x)$ – какая-либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Доказательство: Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. Тогда в соответствии с

приведенной выше теоремой, функция $\int_a^x f(t)dt$ - первообразная функция от $f(x)$. Но т.к. функция может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое – то постоянное число C , то

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

при соответствующем выборе C это равенство справедливо для любого x , т.е. при $x = a$:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

$$\text{Тогда } \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

$$\text{А при } x = b: \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Заменив переменную t на переменную x , получаем формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Теорема доказана.

$$\text{Иногда применяют обозначение } F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подинтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Замена переменных.

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a, b]$.

Введем новую переменную в соответствии с формулой $x = \varphi(t)$.

Тогда если

- 1) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$
- 2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$
- 3) $f(\varphi(t))$ определена на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

$$\text{Тогда } \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] \Big|_{\alpha}^{\beta} = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция $\sin$) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Интегрирование по частям.

Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.

Несобственные интегралы.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $[a, \infty)$. Тогда она непрерывна на любом отрезке $[a, b]$.

Определение: Если существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$, то этот предел

называется **несобственным интегралом** от функции $f(x)$ на интервале $[a, \infty)$.

$$\text{Обозначение: } \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx$$

Если этот предел **существует** и **конечен**, то говорят, что несобственный интеграл **сходится**.

Если предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл **расходится**.

Аналогичные рассуждения можно привести для несобственных интегралов вида:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$$

Конечно, эти утверждения справедливы, если входящие в них интегралы существуют.

Теорема: Если для всех x ($x \geq a$) выполняется условие $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ и интеграл $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ сходится, то $\int_a^\infty f(x)dx$ тоже сходится и $\int_a^\infty \varphi(x)dx \geq \int_a^\infty f(x)dx$.

Теорема: Если для всех x ($x \geq a$) выполняется условие $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ и интеграл $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ расходится, то $\int_a^\infty f(x)dx$ тоже расходится.

Теорема: Если $\int_a^\infty |f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$.

В этом случае интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ называется **абсолютно сходящимся**.

Интеграл от разрывной функции.

Если в точке $x = c$ функция либо неопределена, либо разрывна, то

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b \rightarrow c-0} \int_a^b f(x)dx$$

Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует, то интеграл $\int_a^c f(x)dx$ - сходится, если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ не существует, то $\int_a^c f(x)dx$ - расходится.

Если в точке $x = a$ функция терпит разрыв, то $\int_a^c f(x)dx = \lim_{b \rightarrow a+0} \int_b^c f(x)dx$.

Если функция $f(x)$ имеет разрыв в точке b на промежутке $[a, c]$, то

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Таких точек внутри отрезка может быть несколько.

Если сходятся все интегралы, входящие в сумму, то сходится и суммарный интеграл.

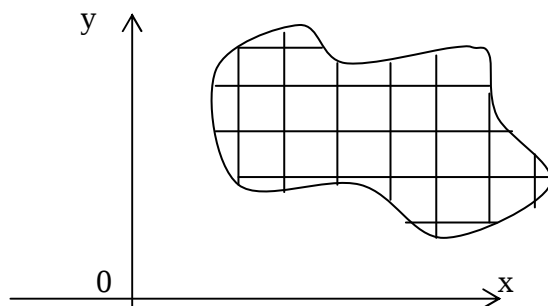
Лекция 10.

Кратные интегралы.

Как известно, интегрирование является процессом суммирования. Однако суммирование может производиться неоднократно, что приводит нас к понятию кратных интегралов. Рассмотрение этого вопроса начнем с рассмотрения двойных интегралов.

Двойные интегралы.

Рассмотрим на плоскости некоторую замкнутую кривую, уравнение которой $f(x, y) = 0$.



Совокупность всех точек, лежащих внутри кривой и на самой кривой назовем замкнутой областью Δ . Если выбрать точки области без учета точек, лежащих на кривой, область будет называться незамкнутой областью Δ .

С геометрической точки зрения Δ - площадь фигуры, ограниченной контуром.

Разобьем область Δ на n частичных областей сеткой прямых, отстоящих друг от друга по оси x на расстояние Δx_i , а по оси y – на Δy_i . Вообще говоря, такой порядок разбиения необязателен, возможно разбиение области на частичные участки произвольной формы и размера.

Получаем, что площадь S делится на элементарные прямоугольники, площади которых равны $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$.

В каждой частичной области возьмем произвольную точку $P(x_i, y_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i;$$

где f – функция непрерывная и однозначная для всех точек области Δ .

Если бесконечно увеличивать количество частичных областей Δ_i , тогда, очевидно, площадь каждого частичного участка S_i стремится к нулю.

Определение: Если при стремлении к нулю шага разбиения области Δ интегральные суммы $\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i$ имеют конечный предел, то этот предел называется **двойным интегралом** от функции $f(x, y)$ по области Δ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) S_i = \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy$$

С учетом того, что $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ получаем:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) S_i = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \Delta y_i \Delta x_i$$

В приведенной выше записи имеются два знака Σ , т.к. суммирование производится по двум переменным x и y .

Т.к. деление области интегрирования произвольно, также произволен и выбор точек P_i , то, считая все площади S_i одинаковыми, получаем формулу:

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dy dx = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum_{\Delta} \sum_{\Delta} f(x, y) \Delta y \Delta x$$

Условия существования двойного интеграла.

Сформулируем достаточные условия существования двойного интеграла.

Теорема. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области Δ , то двойной интеграл $\iint_{\Delta} f(x, y) d\Delta$ существует.

Теорема. Если функция $f(x, y)$ ограничена в замкнутой области Δ и непрерывна в ней всюду, кроме конечного числа кусочно – гладких линий, то двойной интеграл $\iint_{\Delta} f(x, y) d\Delta$ существует.

Свойства двойного интеграла.

$$1) \iint_{\Delta} [f_1(x, y) + f_2(x, y) - f_3(x, y)] dy dx = \iint_{\Delta} f_1(x, y) dy dx + \iint_{\Delta} f_2(x, y) dy dx - \iint_{\Delta} f_3(x, y) dy dx$$

$$2) \iint_{\Delta} k f(x, y) dy dx = k \iint_{\Delta} f(x, y) dy dx$$

3) Если $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, то

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dy dx = \iint_{\Delta_1} f(x, y) dy dx + \iint_{\Delta_2} f(x, y) dy dx$$

4) Теорема о среднем. Двойной интеграл от функции $f(x, y)$ равен произведению значения этой функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования.

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dy dx = f(x_0, y_0) \cdot S$$

5) Если $f(x, y) \geq 0$ в области Δ , то $\iint_{\Delta} f(x, y) dy dx \geq 0$.

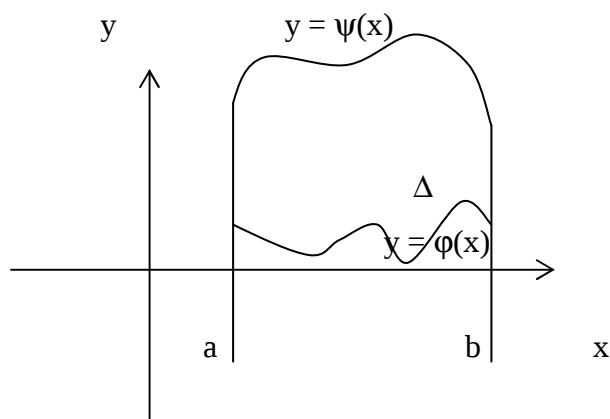
6) Если $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$, то $\iint_{\Delta} f_1(x, y) dy dx \leq \iint_{\Delta} f_2(x, y) dy dx$.

$$7) \left| \iint_{\Delta} f(x, y) dy dx \right| \leq \iint_{\Delta} |f(x, y)| dy dx.$$

Вычисление двойного интеграла.

Теорема. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области Δ , ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, ($a < b$), $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, где φ и ψ - непрерывные функции и $\varphi \leq \psi$, тогда

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$



Теорема. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области Δ , ограниченной линиями $y = c, y = d$ ($c < d$), $x = \Phi(y), x = \Psi(y)$ ($\Phi(y) \leq \Psi(y)$), то

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x, y) dx$$

Тройной интеграл.

При рассмотрении тройного интеграла не будем подробно останавливаться на всех теоретических выкладках, которые были детально разобраны применительно к двойному интегралу, т.к. существенных различий между ними нет.

Единственное отличие заключается в том, что при нахождении тройного интеграла интегрирование ведется не по двум, а по трем переменным, а областью интегрирования является не часть плоскости, а некоторая область в трехмерном пространстве.

$$\iiint_r f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \sum \sum \sum_v f(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Суммирование производится по области v , которая ограничена некоторой поверхностью $\Phi(x, y, z) = 0$.

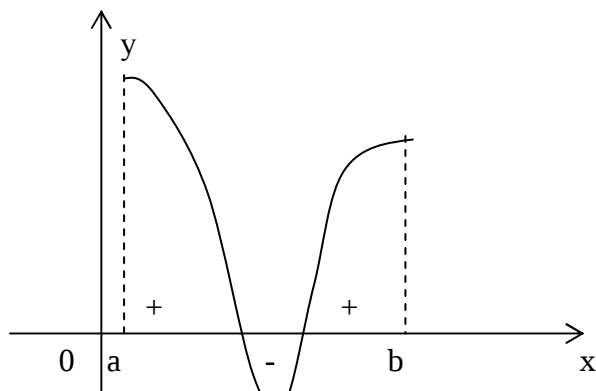
$$\iiint_r f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z) dz dy dx$$

Здесь x_1 и x_2 – постоянные величины, y_1 и y_2 – могут быть некоторыми функциями от x или постоянными величинами, z_1 и z_2 – могут быть функциями от x и y или постоянными величинами.

Лекция 11.

Геометрические приложения определенного интеграла.

Вычисление площадей плоских фигур.

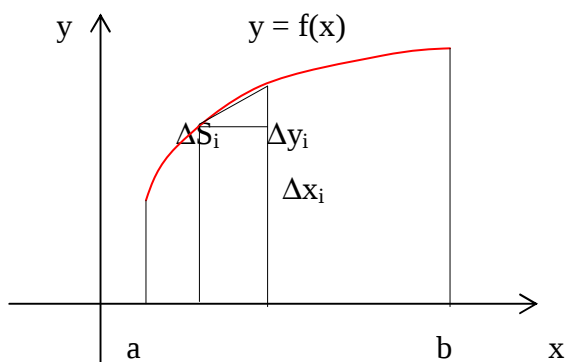


Известно, что определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$. Если график расположен ниже оси Ox , т.е. $f(x) < 0$, то площадь имеет знак “-“, если график расположен выше оси Ox , т.е. $f(x) > 0$, то площадь имеет знак “+”.

Для нахождения суммарной площади используется формула $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$.

Площадь фигуры, ограниченной некоторыми линиями может быть найдена с помощью определенных интегралов, если известны уравнения этих линий.

Вычисление длины дуги кривой.



Длина ломаной линии, которая соответствует дуге, может быть найдена как $S_n = \sum_{i=1}^n \Delta S_i$.

Тогда длина дуги равна $S = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta S_i$.

Из геометрических соображений: $\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2} \cdot \Delta x_i$

В то же время $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$

Тогда можно показать, что $S = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$

$$\text{Т.е. } S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Если уравнение кривой задано параметрически, то с учетом правил вычисления производной параметрически заданной функции

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt,$$

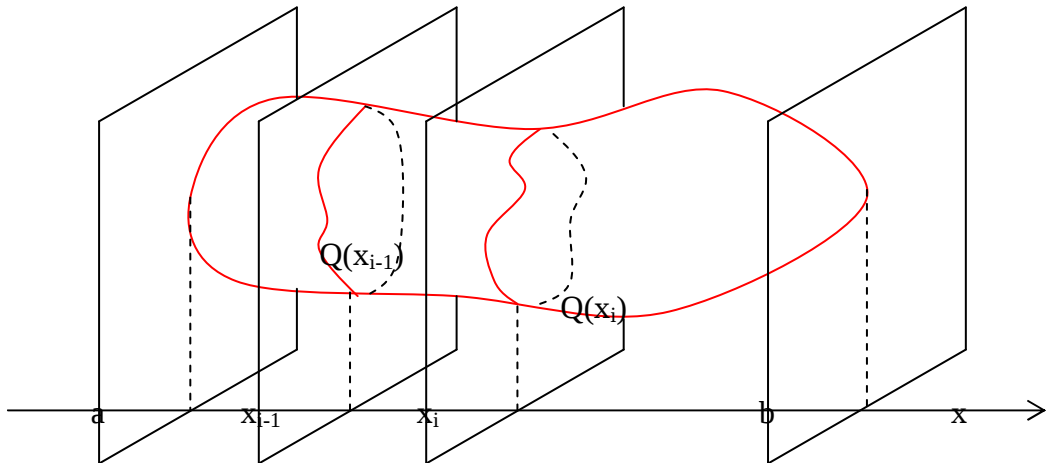
где $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$.

Если задана **пространственная кривая**, и $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и $z = Z(t)$, то

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [Z'(t)]^2} dt$$

Вычисление объемов тел.

Вычисление объема тела по известным площадям его параллельных сечений.



Пусть имеется тело объема V . Площадь любого поперечного сечения тела Q , известна как непрерывная функция $Q = Q(x)$. Разобьем тело на “слои” поперечными сечениями, проходящими через точки x_i разбиения отрезка $[a, b]$. Т.к. на каком-либо промежуточном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ функция $Q(x)$ непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно M_i и m_i .

Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси x , то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i \Delta x_i$ и $m_i \Delta x_i$ здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, получим цилиндры, объемы которых равны соответственно $\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$.

При стремлении к нулю шага разбиения λ , эти суммы имеют общий предел:

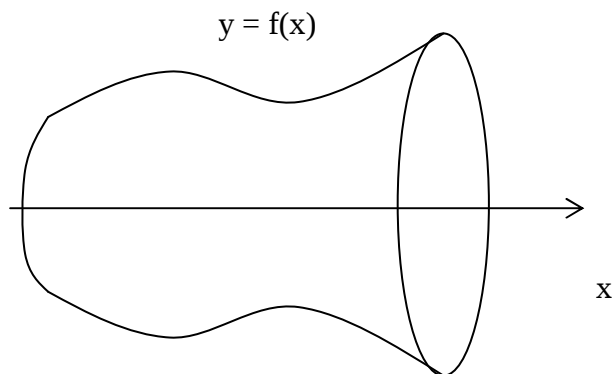
$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \int_a^b Q(x) dx$$

Таким образом, объем тела может быть найден по формуле: $V = \int_a^b Q(x) dx$

Недостатком этой формулы является то, что для нахождения объема необходимо знать функцию $Q(x)$, что весьма проблематично для сложных тел.

Объем тел вращения.

Рассмотрим кривую, заданную уравнением $y = f(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ox , то получим так называемое **тело вращения**.

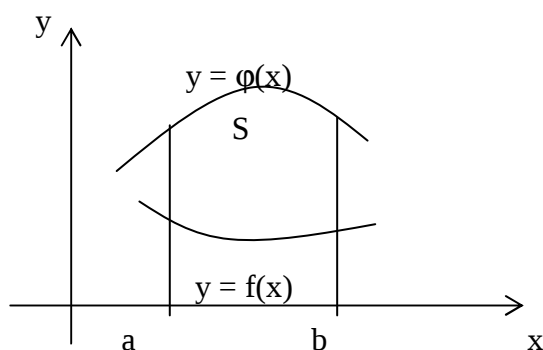


Т.к. каждое сечение тела плоскостью $x = \text{const}$ представляет собой круг радиуса $R = |f(x)|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше

формуле:
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Геометрические и физические приложения кратных интегралов.

1) Вычисление площадей в декартовых координатах.



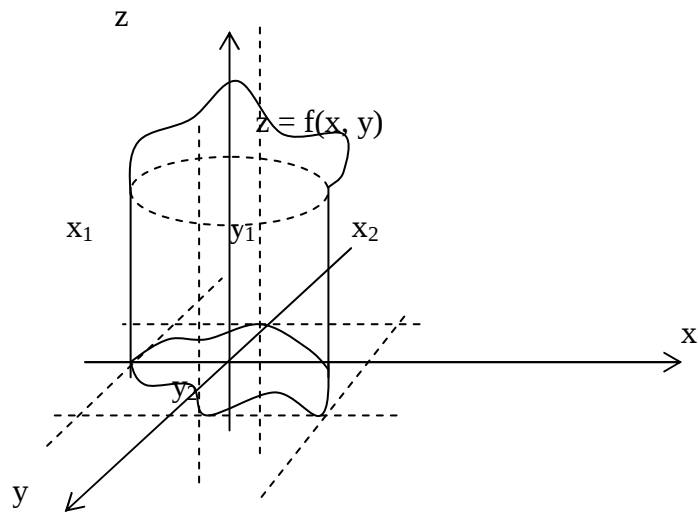
Площадь S , показанная на рисунке может быть вычислена с помощью двойного интеграла по формуле:

$$S = \int_a^b \int_{f(x)}^{\phi(x)} dy dx$$

2) Вычисление объемов тел.

Пусть тело ограничено снизу плоскостью xy , а сверху – поверхностью $z = f(x, y)$, а с боков – цилиндрической поверхностью.

Такое тело называется **цилиндроид**.



$$V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{\Delta} \sum_{\Delta} z \Delta y \Delta x = \iint_{\Delta} z dy dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} z dy dx$$

3) Вычисление моментов инерции площадей плоских фигур.

Пусть площадь плоской фигуры (область Δ) ограничена линией, уравнение которой $f(x, y) = 0$. Тогда моменты инерции этой фигуры находятся по формулам:

- относительно оси Ox : $I_x = \iint_{\Delta} y^2 dy dx$

- относительно оси Oy : $I_y = \iint_{\Delta} x^2 dy dx$

- относительно начала координат: $I_0 = I_x + I_y = \iint_{\Delta} (x^2 + y^2) dy dx$ - этот момент инерции называют еще **полярным моментом инерции**.

4) Вычисление центров тяжести площадей плоских фигур.

Координаты центра тяжести находятся по формулам:

$$x_C = \frac{\iint_{\Delta} w x dy dx}{\iint_{\Delta} w dy dx}; \quad y_C = \frac{\iint_{\Delta} w y dy dx}{\iint_{\Delta} w dy dx};$$

здесь w – поверхностная плотность ($dm = w dy dx$ – масса элемента площади).

5) Вычисление объемов тел с помощью тройного интеграла.

Если поверхность тела описывается уравнением $f(x, y, z) = 0$, то объем тела может быть найден по формуле:

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} dz dy dx$$

при этом z_1 и z_2 – функции от x и y или постоянные, y_1 и y_2 – функции от x или постоянные, x_1 и x_2 – постоянные.

6) Координаты центра тяжести тела.

$$x_C = \frac{\iiint_r w x dv}{\iiint_r w dv}; \quad y_C = \frac{\iiint_r w y dv}{\iiint_r w dv}; \quad z_C = \frac{\iiint_r w z dv}{\iiint_r w dv};$$

В приведенной выше формуле r – область вычисления интеграла по объему, w – плотность тела в точке (x, y, z) , dv – элемент объема

7) Вычисление массы неоднородного тела.

$$M = \iiint_r w dv;$$

Теперь плотность w – величина переменная.

Лекции 12-13.

Дифференциальные уравнения

Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Решение различных геометрических, физических и инженерных задач часто приводят к уравнениям, которые связывают независимые переменные, характеризующие ту или иную задачу, с какой – либо функцией этих переменных и производными этой функции различных порядков.

В качестве примера можно рассмотреть простейший случай равноускоренного движения материальной точки.

Известно, что перемещение материальной точки при равноускоренном движении является функцией времени и выражается по формуле:

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

В свою очередь ускорение a является производной по времени t от скорости V , которая также является производной по времени t от перемещения S . Т.е.

$$V = \frac{dS}{dt}; \quad a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2};$$

Тогда получаем: $S = f(t) = V_0 t + \frac{f''(t) \cdot t^2}{2}$ - уравнение связывает функцию $f(t)$ с независимой переменной t и производной второго порядка функции $f(t)$.

Определение. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Определение. Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных**.

Определение. Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения**.

Определение. **Общим решением** дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C)$, которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Свойства общего решения.

1) Т.к. постоянная C – произвольная величина, то вообще говоря дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких-либо начальных условиях $x = x_0, y(x_0) = y_0$ существует такое значение $C = C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция $y = \varphi(x, C_0)$.

Определение. Решение вида $y = \varphi(x, C_0)$ называется **частным решением** дифференциального уравнения.

Определение. **Задачей Коши** (Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик) называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

Теорема Коши. (теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка)

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D в плоскости XOY и имеет в этой области непрерывную частную производную $y' = f(x, y)$, то какова бы не была точка (x_0, y_0) в области D , существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, определенное в некотором интервале, содержащем точку x_0 , принимающее при $x = x_0$ значение $\varphi(x_0) = y_0$, т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.

Определение. **Интегралом** дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

Определение. **Интегральной кривой** называется график $y = \varphi(x)$ решения дифференциального уравнения на плоскости XOY .

Определение. **Особым решением** дифференциального уравнения называется такое решение, во всех точках которого условие единственности Коши не выполняется, т.е. в окрестности некоторой точки (x, y) существует не менее двух интегральных кривых.

Особые решения не зависят от постоянной C .

Особые решения нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянной C . Если построить семейство интегральных кривых дифференциального уравнения, то особое решение будет изображаться линией, которая в каждой своей точке касается по крайней мере одной интегральной кривой.

Отметим, что не каждое дифференциальное уравнение имеет особые решения.

Далее рассмотрим подробнее приемы и методы, которые используются при решении дифференциальных уравнений различных типов.

Дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение. Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

Если такое соотношение преобразовать к виду $y' = f(x, y)$ то это дифференциальное уравнение первого порядка будет называться уравнением, разрешенным относительно производной.

Преобразуем такое выражение далее:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad dy = f(x, y)dx; \quad f(x, y)dx - dy = 0;$$

Функцию $f(x, y)$ представим в виде: $f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, $Q(x, y) \neq 0$; тогда при подстановке в полученное выше уравнение имеем:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

- это так называемая **дифференциальная форма** уравнения первого порядка.

Далее рассмотрим подробнее типы уравнений первого порядка и методы их решения.

Уравнения вида $y' = f(x)$.

Пусть функция $f(x)$ – определена и непрерывна на некотором интервале $a < x < b$. В таком случае все решения данного дифференциального уравнения находятся как $y = \int f(x)dx + C$. Если заданы начальные условия x_0 и y_0 , то можно определить постоянную C .

Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

$$y' = \alpha(x)\beta(y).$$

Такое уравнение можно представить также в виде:

$$y' - \alpha(x)\beta(y) = 0; \quad dy - \alpha(x)\beta(y)dx = 0; \quad \frac{dy}{\beta(y)} - \alpha(x)dx = 0 \text{ при } \beta(y) \neq 0;$$

Перейдем к новым обозначениям $\alpha(x) = -X(x)$; $\frac{1}{\beta(y)} = Y(y)$;

Получаем:

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0;$$

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C$$

После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Если заданы начальные условия, то при их подстановке в общее решение находится постоянная величина C , а, соответственно, и частное решение.

Однородные уравнения.

Определение. Функция $f(x, y)$ называется **однородной n – го измерения** относительно своих аргументов x и y , если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Пример. Является ли однородной функция $f(x, y) = x^3 + 3x^2y$?

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2ty = t^3x^3 + 3t^3x^2y = t^3(x^3 + 3x^2y) = t^3 f(x, y)$$

Таким образом, функция $f(x, y)$ является однородной 3- го порядка.

Определение. Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$ называется **однородным**, если его правая часть $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ является однородным, если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одинакового измерения.

Решение любого однородного уравнения основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.

Рассмотрим однородное уравнение $y' = f(x, y)$.

Т.к. функция $f(x, y)$ – однородная нулевого измерения, то можно записать:

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Т.к. параметр t вообще говоря произвольный, предположим, что $t = \frac{1}{x}$. Получаем:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Правая часть полученного равенства зависит фактически только от одного аргумента $u = \frac{y}{x}$, т.е.

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi(u);$$

Исходное дифференциальное уравнение таким образом можно записать в виде:

$$y' = \varphi(u)$$

Далее заменяем $y = ux$, $y' = u'x + ux'$.

$$u'x + ux' = \varphi(u); \quad u'x + u = \varphi(u); \quad u' = \frac{\varphi(u) - u}{x};$$

таким образом, получили уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции u .

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C;$$

Далее, заменив вспомогательную функцию u на ее выражение через x и y и найдя интегралы, получим общее решение однородного дифференциального уравнения.

Уравнения, приводящиеся к однородным.

Кроме уравнений, описанных выше, существует класс уравнений, которые с помощью определенных подстановок могут приведены к однородным.

Это уравнения вида $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$.

Если определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$, то переменные могут быть разделены подстановкой

$$x = u + \alpha; \quad y = v + \beta;$$

где α и β - решения системы уравнений
$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$$

Линейные уравнения.

Определение. Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

при этом, если правая часть $Q(x)$ равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть $Q(x)$ не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

$P(x)$ и $Q(x)$ - функции непрерывные на некотором промежутке $a < x < b$.

Линейные однородные дифференциальные уравнения.

Рассмотрим методы нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка вида

$$y' + P(x)y = 0.$$

Для этого типа дифференциальных уравнений разделение переменных не представляет сложностей.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= -P(x)dx \\ \ln|y| &= -\int P(x)dx + \ln|C|; \\ \ln\left|\frac{y}{C}\right| &= -\int P(x)dx; \end{aligned}$$

Общее решение:
$$y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений ($Q(x) \neq 0$) применяются в основном два метода: метод Бернулли и метод Лагранжа.

Метод Бернулли.

(Якоб Бернулли (1654-1705) – швейцарский математик.)

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y = uv$.

При этом очевидно, что $y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$$

$$u \frac{dv}{dx} + v \left(\frac{du}{dx} + P(x)u \right) = Q(x)$$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Например, функция $y = 2x^2$ может быть представлена как $y = 1 \cdot 2x^2$; $y = 2 \cdot x^2$; $y = 2x \cdot x$; и т.п.

Таким образом, можно одну из составляющих произведения функций выбрать так, что выражение $\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$.

Таким образом, возможно получить функцию u , проинтегрировав, полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx; \quad \int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx; \quad \ln|u| = -\int P(x)dx;$$

$$\ln|C_1| + \ln|u| = -\int P(x)dx; \quad u = Ce^{-\int P(x)dx}; \quad C = 1/C_1;$$

Для нахождения второй неизвестной функции v подставим полученное выражение для функции u в исходное уравнение $u \frac{dv}{dx} + v \left(\frac{du}{dx} + P(x)u \right) = Q(x)$ с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx} \frac{dv}{dx} = Q(x); \quad Cdv = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx;$$

Интегрируя, можем найти функцию v :

$$Cv = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_1; \quad v = \frac{1}{C} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_2;$$

Т.е. была получена вторая составляющая произведения $y = uv$, которое и определяет искомую функцию.

Подставляя полученные значения, получаем:

$$y = uv = Ce^{-\int P(x)dx} \cdot \frac{1}{C} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_2 \right)$$

Окончательно получаем формулу:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_2 \right), \quad C_2 - \text{произвольный коэффициент.}$$

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного дифференциального уравнения в общем виде по способу Бернулли.

Уравнение Бернулли.

Определение. Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + Py = Q \cdot y^n,$$

где P и Q – функции от x или постоянные числа, а n – постоянное число, не равное 1.

Для решения уравнения Бернулли применяют подстановку $z = \frac{1}{y^{n-1}}$, с помощью которой, уравнение Бернулли приводится к линейному.

Для этого разделим исходное уравнение на y^n .

$$\frac{y'}{y^n} + P \frac{1}{y^{n-1}} = Q;$$

Применим подстановку, учтя, что $z' = -\frac{(n-1)y^{n-2}}{y^{2n-2}} \cdot y' = -\frac{(n-1)y'}{y^n}$.

$$-\frac{z'}{n-1} + Pz = Q$$

$$z' - (n-1)Pz = -(n-1)Q$$

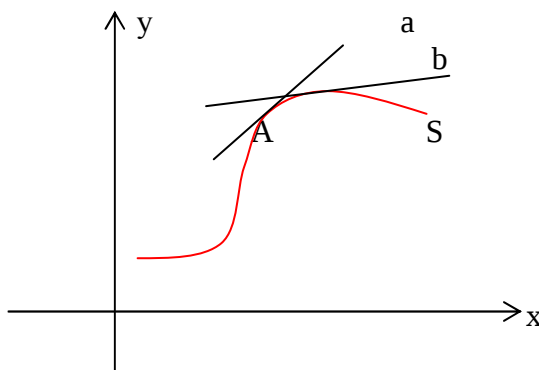
Т.е. получилось линейное уравнение относительно неизвестной функции z .

Решение этого уравнения будем искать в виде:

$$z = e^{-\int P dx} \left(\int Q_1 e^{\int P_1 dx} dx + C \right)$$

$$Q_1 = -(n-1)Q; \quad P_1 = -(n-1)P.$$

Геометрическая интерпретация решений дифференциальных уравнений первого порядка.



Линия S , которая задается функцией, являющейся каким-либо решением дифференциального уравнения, называется интегральной кривой уравнения $y' = f(x, y)$.

Производная y' является угловым коэффициентом касательной к интегральной кривой.

Лекции 14-15.

Дифференциальные уравнения высших порядков.

Определение. Дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Так же как и уравнение первого порядка, уравнения высших порядков имеют бесконечное количество решений.

Определение. Решение $y = \varphi(x)$ удовлетворяет начальным условиям $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, если $\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Определение. Нахождение решения уравнения $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, называется **решением задачи Коши**.

Теорема Коши. (Теорема о необходимых и достаточных условиях существования решения задачи Коши).

Если функция $(n-1)$ -й переменных вида $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ в некоторой области D $(n-1)$ - мерного пространства непрерывна и имеет непрерывные частные производные по $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, то какова бы не была точка $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ в этой области, существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, определенного в некотором интервале, содержащем точку x_0 , удовлетворяющее начальным условиям $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$.

Дифференциальные уравнения высших порядков, решение которых может быть найдено аналитически, можно разделить на несколько основных типов.

Рассмотрим подробнее методы нахождения решений этих уравнений.

Уравнения, допускающие понижение порядка.

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка.

Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Если $f(x)$ – функция непрерывная на некотором промежутке $a < x < b$, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} &= \int f(x) dx + C_1; \\ y^{(n-2)} &= \int \left(\int f(x) dx + C_1 \right) dx + C_2 = \int dx \int f(x) dx + C_1 x + C_2; \\ &\dots \end{aligned}$$

$$y = \int dx \int dx \dots \int f(x) dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n;$$

Уравнения, не содержащие явно независимой переменной.

Это уравнения вида $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y' = p$.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy} p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy} p\right)}{dy} p = \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p; \text{ и т.д.}$$

Подставляя эти значения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

Если это уравнение проинтегрировать, и $\Phi(y, p, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0$ - совокупность его решений, то для решения данного дифференциального уравнения остается решить уравнение первого порядка:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0.$$

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

Определение. Линейным дифференциальным уравнением n – го порядка называется любое уравнение первой степени относительно функции y и ее производных $y', y'', \dots, y^{(n)}$ вида:

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x);$$

где $p_0, p_1, \dots, p_n$ – функции от x или постоянные величины, причем $p_0 \neq 0$.

Левую часть этого уравнения обозначим $L(y)$.

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = L(y);$$

Определение. Если $f(x) = 0$, то уравнение $L(y) = 0$ называется **линейным однородным** уравнением, если $f(x) \neq 0$, то уравнение $L(y) = f(x)$ называется **линейным неоднородным** уравнением, если все коэффициенты $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ – постоянные числа, то уравнение $L(y) = f(x)$ называется **линейным дифференциальным уравнением высшего порядка с постоянными коэффициентами**.

Рассмотрим способы интегрирования некоторых типов линейных дифференциальных уравнений высших порядков.

Линейные однородные дифференциальные уравнения с произвольными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение вида $p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$

Определение. Выражение $p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = L(y)$ называется **линейным дифференциальным оператором**.

Линейный дифференциальный оператор обладает следующими свойствами:

- 1) $L(Cy) = CL(y)$;
- 2) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$;

Решения линейного однородного уравнения обладают следующими свойствами:

1) Если функция y_1 является решением уравнения, то функция Cy_1 , где C – постоянное число, также является его решением.

2) Если функции y_1 и y_2 являются решениями уравнения, то $y_1 + y_2$ также является его решением.

Структура общего решения.

Определение. Фундаментальной системой решений линейного однородного дифференциального уравнения n –го порядка на интервале (a, b) называется всякая система n линейно независимых на этом интервале решений уравнения.

Определение. Если из функций y_i составить определитель n – го порядка

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

то этот определитель называется **определителем Вронского**.

(Юзеф Вроньский (1776 – 1853) – польский математик и философ - мистик)

Теорема. Если функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно зависимы, то составленный для них определитель Вронского равен нулю.

Теорема. Если функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно независимы, то составленный для них определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке рассматриваемого интервала.

Теорема. Для того, чтобы система решений линейного однородного дифференциального уравнения $y_1, y_2, \dots, y_n$ была фундаментальной необходимо и достаточно, чтобы составленный для них определитель Вронского был не равен нулю.

Теорема. Если $y_1, y_2, \dots, y_n$ - фундаментальная система решений на интервале (a, b) , то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения является линейной комбинацией этих решений.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

где C_i – постоянные коэффициенты.

Применение приведенных выше свойств и теорем рассмотрим на примере линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

Из вышеизложенного видно, что отыскание общего решения линейного однородного дифференциального уравнения сводится к нахождению его фундаментальной системы решений.

Однако, даже для уравнения второго порядка, если коэффициенты p зависят от x , эта задача не может быть решена в общем виде.

Тем не менее, если известно одно ненулевое частное решение, то задача может быть решена.

Теорема. Если задано уравнение вида $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ и известно одно ненулевое решение $y = y_1$, то общее решение может быть найдено по формуле:

$$y = C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x) dx} dx + C_1 y_1.$$

Таким образом, для получения общего решения надо подобрать какое – либо частное решение дифференциального уравнения, хотя это бывает часто довольно сложно.

Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Решение дифференциального уравнения вида $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$ или, короче, $L(y) = 0$ будем искать в виде $y = e^{kx}$, где $k = \text{const}$.

Т.к. $y' = k e^{kx}$; $y'' = k^2 e^{kx}$; ... $y^{(n)} = k^n e^{kx}$, то

$$L(e^{kx}) = e^{kx} (k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n).$$

При этом многочлен $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n$ называется **характеристическим многочленом** дифференциального уравнения.

Для того, чтобы функция $y = e^{kx}$ являлась решением исходного дифференциального уравнения, необходимо и достаточно, чтобы

$$L(e^{kx}) = 0; \text{ т.е. } e^{kx} F(k) = 0.$$

Т.к. $e^{kx} \neq 0$, то $F(k) = 0$ - это уравнение называется **характеристическим уравнением**.

Как и любое алгебраическое уравнение степени n , характеристическое уравнение $k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n = 0$ имеет n корней. Каждому корню характеристического уравнения k_i соответствует решение дифференциального уравнения.

В зависимости от коэффициентов k характеристическое уравнение может иметь либо n различных действительных корней, либо среди действительных корней могут быть кратные корни, могут быть комплексно – сопряженные корни, как различные, так и кратные.

Не будем подробно рассматривать каждый случай, а сформулируем общее правило нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

- 1) Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.
- 2) Находим частные решения дифференциального уравнения, причем:
 - а) каждому действительному корню соответствует решение e^{kx} ;
 - б) каждому действительному корню кратности m ставится в соответствие m решений:

$$e^{kx}; \quad x e^{kx}; \quad \dots \quad x^{m-1} e^{kx}.$$
 - в) каждой паре комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения ставится в соответствие два решения:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x \text{ и } e^{\alpha x} \sin \beta x.$$
 - г) каждой паре m – кратных комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения ставится в соответствие $2m$ решений:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad \dots \quad x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad x e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad \dots x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

3) Составляем линейную комбинацию найденных решений.

Эта линейная комбинация и будет являться общим решением исходного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с произвольными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение вида $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x)$.

С учетом обозначения $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = L(x)$ можно записать:

$$L(x) = f(x).$$

При этом будем полагать, что коэффициенты и правая часть этого уравнения непрерывны на некотором интервале (конечном или бесконечном).

Теорема. *Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x)$ в некоторой области есть сумма **любого** его решения и общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.*

Доказательство. Пусть Y – некоторое решение неоднородного уравнения. Тогда при подстановке этого решения в исходное уравнение получаем тождество:

$$L(Y) \equiv f(x).$$

Пусть $y_1, y_2, \dots, y_n$ – фундаментальная система решений линейного однородного уравнения $L(y) = 0$. Тогда общее решение однородного уравнения можно записать в виде:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n; \quad C_i = \text{const.}$$

Далее покажем, что сумма $Y + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ является общим решением неоднородного уравнения.

$$L(Y + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n) = L(Y) + L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + \dots + L(C_n y_n) = L(Y) = f(x)$$

Вообще говоря, решение Y может быть получено из общего решения, т.к. является частным решением.

Таким образом, в соответствии с доказанной теоремой, для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения необходимо найти общее решение соответствующего однородного уравнения и каким-то образом отыскать одно частное решение неоднородного уравнения. Обычно оно находится подбором.

На практике удобно применять метод **вариации произвольных постоянных**.

Для этого сначала находят общее решение соответствующего однородного уравнения в виде:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = \sum_{i=1}^n C_i y_i;$$

Затем, полагая коэффициенты C_i функциями от x , ищется решение неоднородного уравнения:

$$y = \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i;$$

Можно доказать, что для нахождения функций $C_i(x)$ надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n C_i'(x) y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n C_i'(x) y_i' = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^n C_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Уравнения с правой частью специального вида.

Представляется возможным представить вид частного решения в зависимости от вида правой части неоднородного уравнения.

Различают следующие случаи:

- **I.** Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x},$$

где $P(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m$ - многочлен степени m .

Тогда частное решение ищется в виде:

$$y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$$

Здесь $Q(x)$ - многочлен той же степени, что и $P(x)$, но с неопределенными коэффициентами, а r – число, показывающее сколько раз число α является корнем характеристического уравнения для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

- **II.** Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x]$$

Здесь $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены степени m_1 и m_2 соответственно.

Тогда частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y = x^r e^{\alpha x} [Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x]$$

где число r показывает сколько раз число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения для соответствующего однородного уравнения, а $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ – многочлены степени не выше m , где m - большая из степеней m_1 и m_2 .

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Определение. Совокупность соотношений вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y'_1, y'_2, ..., y'_n) = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y'_1, y'_2, ..., y'_n) = 0 \\ \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y'_1, y'_2, ..., y'_n) = 0 \end{array} \right.$$

где x - независимая переменная, $y_1, y_2, \dots, y_n$ – искомые функции, называется **системой дифференциальных уравнений первого порядка**.

Определение. Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных от неизвестных функций называется **нормальной системой дифференциальных уравнений**.

Такая система имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{array} \right. \quad (1)$$

Для примера можно сказать, что график решения системы двух дифференциальных уравнений представляет собой интегральную кривую в трехмерном пространстве.

Теорема. (Теорема Коши). Если в некоторой области $(n-1)$ -мерного пространства функции $f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\dots$ $f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные по $y_1, y_2, \dots, y_n$, то для любой точки $(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$ этой области существует единственное решение

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad \dots \quad y_n = \varphi_n(x)$$

системы дифференциальных уравнений вида (1), определенное в некоторой окрестности точки x_0 и удовлетворяющее начальным условиям $x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$.

Определение. Общим решением системы дифференциальных уравнений вида (1) будет совокупность функций $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, ... $y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, которые при подстановке в систему (1) обращают ее в тождество.

Нормальные системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

При рассмотрении систем дифференциальных уравнений ограничимся случаем системы трех уравнений ($n = 3$). Все нижесказанное справедливо для систем произвольного порядка.

Определение. Нормальная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется **линейной однородной**, если ее можно записать в виде:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z + a_{13}u \\ \frac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z + a_{23}u \\ \frac{du}{dx} = a_{31}y + a_{32}z + a_{33}u \end{cases} \quad (2)$$

Решения системы (2) обладают следующими свойствами:

- 1) Если y, z, u – решения системы, то Cy, Cz, Cu , где $C = const$ – тоже являются решениями этой системы.
- 2) Если y_1, z_1, u_1 и y_2, z_2, u_2 – решения системы, то $y_1 + y_2, z_1 + z_2, u_1 + u_2$ – тоже являются решениями системы.

Решения системы ищутся в виде: $y = \alpha e^{kx}$; $z = \beta e^{kx}$; $u = \gamma e^{kx}$, $\alpha, \beta, \gamma, k = const$

Подставляя эти значения в систему (2) и перенеся все члены в одну сторону и сократив на e^{kx} , получаем:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0 \end{cases}$$

Для того, чтобы полученная система имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

В результате вычисления определителя получаем уравнение третьей степени относительно k . Это уравнение называется **характеристическим уравнением** и имеет три корня k_1, k_2, k_3 . Каждому из этих корней соответствует ненулевое решение системы (2):

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 e^{k_1 x}, & z_1 &= \beta_1 e^{k_1 x}, & u_1 &= \gamma_1 e^{k_1 x}, \\ y_2 &= \alpha_2 e^{k_2 x}, & z_2 &= \beta_2 e^{k_2 x}, & u_2 &= \gamma_2 e^{k_2 x}, \\ y_3 &= \alpha_3 e^{k_3 x}, & z_3 &= \beta_3 e^{k_3 x}, & u_3 &= \gamma_3 e^{k_3 x}. \end{aligned}$$

Линейная комбинация этих решений с произвольными коэффициентами будет решением системы (2):

$$\begin{aligned} y &= C_1 \alpha_1 e^{k_1 x} + C_2 \alpha_2 e^{k_2 x} + C_3 \alpha_3 e^{k_3 x}; \\ z &= C_1 \beta_1 e^{k_1 x} + C_2 \beta_2 e^{k_2 x} + C_3 \beta_3 e^{k_3 x}; \\ u &= C_1 \gamma_1 e^{k_1 x} + C_2 \gamma_2 e^{k_2 x} + C_3 \gamma_3 e^{k_3 x}. \end{aligned}$$

Лекция 17.

Ряды

Числовые ряды

Определение. Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ называется **числовым рядом**.

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

При этом числа $u_1, u_2, \dots$ будем называть членами ряда, а u_n – общим членом ряда.

Определение. Суммы $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k$, $n = 1, 2, \dots$ называются

частными (частичными) суммами ряда.

Таким образом, возможно рассматривать последовательности частных сумм ряда $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$

Определение. Ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim S_n = S, \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Определение. Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся**, и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

Свойства рядов.

1) Сходимость или расходимость ряда не нарушится если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.

2) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum C u_n$, где C – постоянное число.

Теорема. Если ряд $\sum u_n$ сходится и его сумма равна S , то ряд $\sum C u_n$ тоже сходится, и его сумма равна CS . ($C \neq 0$)

3) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$. **Суммой** или **разностью** этих рядов будет называться ряд $\sum (u_n \pm v_n)$, где элементы получены в результате сложения (вычитания) исходных элементов с одинаковыми номерами.

Теорема. Если ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся и их суммы равны соответственно S и σ , то ряд $\sum (u_n \pm v_n)$ тоже сходится и его сумма равна $S \pm \sigma$.

$$\sum (u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n = S + \sigma$$

Разность двух сходящихся рядов также будет сходящимся рядом.

Сумма сходящегося и расходящегося рядов будет расходящимся рядом.

О сумме двух расходящихся рядов общего утверждения сделать нельзя.

При изучении рядов решают в основном две задачи: исследование на сходимость и нахождение суммы ряда.

Критерий Коши.

(необходимые и достаточные условия сходимости ряда)

Для того, чтобы последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N , что при $n > N$ и любом $p > 0$, где p – целое число, выполнялось бы неравенство:

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

Сформулируем критерий Коши для ряда.

Для того, чтобы ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ был сходящимся необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер N такой, что при $n > N$ и любом

$p > 0$ выполнялось бы неравенство

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Однако, на практике использовать непосредственно критерий Коши не очень удобно. Поэтому как правило используются более простые признаки сходимости:

1) Если ряд $\sum u_n$ сходится, то необходимо, чтобы общий член u_n стремился к нулю. Однако, это условие не является достаточным. Можно говорить только о том, что если общий член не стремится к нулю, то ряд точно расходится. Например, так называемый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является расходящимся, хотя его общий член и стремится к нулю.

2) Если ряд сходится, то последовательность его частных сумм ограничена. Однако, этот признак также не является достаточным.

Ряды с неотрицательными членами.

При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с неотрицательными членами, т.к. при простом умножении на -1 из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами.

Теорема. Для сходимости ряда $\sum u_n$ с неотрицательными членами необходимо и достаточно, чтобы частные суммы ряда были ограничены.

Признак сравнения рядов с неотрицательными членами.

Пусть даны два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$ при $u_n, v_n \geq 0$.

Теорема. Если $u_n \leq v_n$ при любом n , то из сходимости ряда $\sum v_n$ следует сходимость ряда $\sum u_n$, а из расходимости ряда $\sum u_n$ следует расходимость ряда $\sum v_n$.

Доказательство. Обозначим через S_n и σ_n частные суммы рядов $\sum u_n$ и $\sum v_n$. Т.к. по условию теоремы ряд $\sum v_n$ сходится, то его частные суммы ограничены, т.е. при всех n $\sigma_n < M$, где M – некоторое число. Но т.к. $u_n \leq v_n$, то $S_n \leq \sigma_n$ то частные суммы ряда $\sum u_n$ тоже ограничены, а этого достаточно для сходимости.

Также используется следующий признак сходимости:

Теорема. Если $u_n > 0$, $v_n > 0$ и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = h$, где h – число, отличное от нуля, то ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ ведут одинаково в смысле сходимости.

Признак Даламбера.

(Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик)

Если для ряда $\sum u_n$ с положительными членами существует такое число $q < 1$, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q,$$

то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется

условие

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,$$

то ряд $\sum u_n$ расходится.

Предельный признак Даламбера.

Предельный признак Даламбера является следствием из приведенного выше признака Даламбера.

Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд сходится, а при $\rho > 1$ – расходится. Если $\rho = 1$, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.

Признак Коши. (радикальный признак)

Если для ряда $\sum u_n$ с неотрицательными членами существует такое число $q < 1$, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{u_n} \leq q,$$

то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1,$$

то ряд $\sum u_n$ расходится.

Следствие. Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд сходится, а при $\rho > 1$ ряд расходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5} \right)^n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{5}{n^2}} = \frac{2}{3} < 1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1.$$

Т.е. признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим выполнение необходимых условий сходимости. Как было сказано выше, если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \neq 0,$$

таким образом, необходимое условие сходимости не выполняется, значит, ряд расходится.

Интегральный признак Коши.

Если $\varphi(x)$ – непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке $[1; \infty)$, то ряд $\varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$ и несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \varphi(x) dx$ одинаковы в смысле сходимости.

Следствие. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – непрерывные функции на интервале $(a, b]$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = h, \quad h \neq 0$, то интегралы $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^b \varphi(x) dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости.

Знакопеременные ряды.

Знакопеременные ряды.

Знакопеременный ряд можно записать в виде:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots$$

где $u_n > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Признак Лейбница.

Если у знакопеременного ряда $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots$ абсолютные величины u_i убывают $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$ и общий член стремится к нулю $u_n \rightarrow 0$, то ряд сходится.

Абсолютная и условная сходимость рядов.

Рассмотрим некоторый знакопеременный ряд (с членами произвольных знаков).

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1)$$

и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \quad (2)$$

Теорема. Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

Доказательство. Ряд (2) является рядом с неотрицательными членами. Если ряд (2) сходится, то по критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ существует число N , такое, что при $n > N$ и любом целом $p > 0$ верно неравенство:

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \varepsilon$$

По свойству абсолютных величин:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \varepsilon$$

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

То есть по критерию Коши из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum |u_n|$.

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд $\sum |u_n|$ расходится.

Признаки Даламбера и Коши для знакпеременных рядов.

Пусть $\sum u_n$ - знакпеременный ряд.

Признак Даламбера. Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho > 1$ ряд будет расходящимся. При $\rho = 1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Признак Коши. Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при $\rho > 1$ ряд будет расходящимся. При $\rho = 1$ признак не дает ответа о сходимости ряда.

Свойства абсолютно сходящихся рядов.

1) **Теорема.** Для абсолютной сходимости ряда $\sum u_n$ необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами.

Следствие. Условно сходящийся ряд является разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.

2) В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость и величину ряда.

3) Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

4) **Теорема.** При любой группировке членов абсолютно сходящегося ряда (при этом число групп может быть как конечным, так и бесконечным и число членов в группе может быть как конечным, так и бесконечным) получается сходящийся ряд, сумма которого равна сумме исходного ряда.

5) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно S и σ , то ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_k$, $i, k = 1, 2, \dots$ взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S \cdot \sigma$ - произведению сумм перемножаемых рядов.

Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.

Лекция 18.

Функциональные ряды.

Определение. Частными (частичными) суммами функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называются функции $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$, $n = 1, 2, \dots$

Определение. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **сходящимся** в точке $(x=x_0)$, если в этой точке сходится последовательность его частных сумм. Предел последовательности $\{S_n(x_0)\}$ называется **суммой** ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в точке x_0 .

Определение. Совокупность всех значений x , для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **областью сходимости** ряда.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **равномерно сходящимся** на отрезке $[a, b]$, если равномерно сходится на этом отрезке последовательность частных сумм этого ряда.

Степенные ряды.

Определение. Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Для исследования на сходимость степенных рядов удобно использовать признак Даламбера.

Теоремы Абеля.

(Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829) – норвежский математик)

Теорема. Если степенной ряд $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ сходится при $x = x_1$, то он сходится и притом абсолютно для всех $|x| < |x_1|$.

Следствие. Если при $x = x_1$ ряд расходится, то он расходится для всех $|x| > |x_1|$.

Таким образом, для каждого степенного ряда существует такое положительное число R , что при всех x таких, что $|x| < R$ ряд абсолютно сходится, а при всех $|x| > R$ ряд расходится. При этом число R называется **радиусом сходимости**. Интервал $(-R, R)$ называется **интервалом сходимости**.

Отметим, что этот интервал может быть как замкнутым с одной или двух сторон, так и не замкнутым.

Радиус сходимости может быть найден по формуле:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|$$

Теорема. Если степенной ряд $\sum a_nx^n$ сходится для положительного значения $x=x_1$

, то он сходится равномерно в любом промежутке внутри $(-|x_1|; |x_1|)$.

Действия со степенными рядами.

1) Интегрирование степенных рядов.

Если некоторая функция $f(x)$ определяется степенным рядом: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то интеграл от этой функции можно записать в виде ряда:

$$\int f(x)dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$$

2) Дифференцирование степенных рядов.

Производная функции, которая определяется степенным рядом, находится по формуле:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

3) Сложение, вычитание, умножение и деление степенных рядов.

Сложение и вычитание степенных рядов сводится к соответствующим операциям с их членами:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

Произведение двух степенных рядов выражается формулой:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Коэффициенты c_i находятся по формуле:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

Деление двух степенных рядов выражается формулой:

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

Для определения коэффициентов q_n рассматриваем произведение $\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, полученное из записанного выше равенства и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_0 = q_0 b_0 \\ a_1 = q_0 b_1 + q_1 b_0 \\ a_2 = q_0 b_2 + q_1 b_1 + q_2 b_0 \\ \dots\dots\dots \\ a_n = q_0 b_n + q_1 b_{n-1} + \dots + q_n b_0 \end{cases}$$

Разложение функций в степенные ряды.

Разложение функций в степенной ряд имеет большое значение для решения различных задач исследования функций, дифференцирования, интегрирования, решения дифференциальных уравнений, вычисления пределов, вычисления приближенных значений функции.

Возможны различные способы разложения функции в степенной ряд.

Формула Тейлора.

Тейлор (1685-1731) – английский математик

Теорема Тейлора. 1) Пусть функция $f(x)$ имеет в точке $x = a$ и некоторой ее окрестности производные порядка до $(n+1)$ включительно. { Т.е. и все предыдущие до порядка n функции и их производные непрерывны и дифференцируемы в этой окрестности }.

2) Пусть x - любое значение из этой окрестности, но $x \neq a$.

Тогда между точками x и a найдется такая точка ε , что справедлива формула:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

- это выражение называется **формулой Тейлора**, а выражение:

$$\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = R_{n+1}(x)$$

называется **остаточным членом в форме Лагранжа**.

Формула Маклорена.

Колин Маклорен (1698-1746) шотландский математик.

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}; \quad 0 < \theta < 1$$

Мы получили так называемую формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа.

Следует отметить, что при разложении функции в ряд применение формулы Маклорена предпочтительнее, чем применение непосредственно формулы Тейлора, т.к. вычисление значений производных в нуле проще, чем в какой-либо другой точке, естественно, при условии, что эти производные существуют.

Однако, выбор числа a очень важен для практического использования. Дело в том, что при вычислении значения функции в точке, расположенной относительно близко к

точке a , значение, полученное по формуле Тейлора, даже при ограничении тремя – четырьмя первыми слагаемыми, совпадает с точным значением функции практически абсолютно. При удалении же рассматриваемой точки от точки a для получения точного значения надо брать все большее количество слагаемых формулы Тейлора, что неудобно.

Т.е. чем больше по модулю значение разности $(x - a)$ тем более точное значение функции отличается от найденного по формуле Тейлора.

Кроме того, можно показать, что остаточный член $R_{n+1}(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \rightarrow a$, причем более высокого порядка, чем $(x - a)^m$, т.е.

$$R_{n+1}(x) = o([x - a]^n).$$

Таким образом, ряд Маклорена можно считать частным случаем ряда Тейлора.

Представление некоторых элементарных функций по формуле Тейлора.

Применение формулы Тейлора для разложения функций в степенной ряд широко используется и имеет огромное значение при проведении различных математических расчетов. Непосредственное вычисление интегралов некоторых функций может быть сопряжено со значительными трудностями, а замена функции степенным рядом позволяет значительно упростить задачу. Нахождение значений тригонометрических, обратных тригонометрических, логарифмических функций также может быть сведено к нахождению значений соответствующих многочленов.

Функция $f(x) = e^x$.

Находим:

$$f(x) = e^x, \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x, \quad f'(0) = 1$$

.....

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n)}(0) = 1$$

Тогда:
$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1$$

Пример: Найдем значение числа e .

В полученной выше формуле положим $x = 1$.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta}$$

Для 8 членов разложения: $e = 2,71827876984127003$

Для 10 членов разложения: $e = 2,71828180114638451$

Для 100 членов разложения: $e = 2,71828182845904553$

Функция $f(x) = \sin x$.

Получаем $f(x) = \sin x$; $f(0) = 0$

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2); \quad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2\pi/2); \quad f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3\pi/2); \quad f'''(0) = -1;$$

.....

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + \pi n/2); \quad f^{(n)}(0) = \sin(\pi n/2);$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin(x + (n+1)\pi/2); \quad f^{(n+1)}(\varepsilon) = \sin(\varepsilon + (n+1)\pi/2);$$

Итого:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x)$$

$$R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\varepsilon)}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \pm \frac{\cos \varepsilon}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Функция $f(x) = \cos x$.

Для функции $\cos x$, применив аналогичные преобразования, получим:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x)$$

$$R_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\varepsilon)}{(2n+2)!} x^{2n+2} = \pm \frac{\cos \varepsilon}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

Функция $f(x) = (1+x)^\alpha$.

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + x^n$$

Получилась формула, известная как **бином Ньютона**.

Функция $f(x) = \ln(1+x)$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!} \left(\frac{x}{1+\varepsilon} \right)^{n+1};$$

Полученная формула позволяет находить значения любых логарифмов (не только натуральных) с любой степенью точности. Ниже представлен пример вычисления натурального логарифма $\ln 1,5$. Сначала получено точное значение, затем – расчет по полученной выше формуле, ограничившись пятью членами разложения. Точность достигает 0,0003.

$$\ln 1,5 = 0,405465108108164381$$

$$\ln 1,5 = \ln(1+0,5) \approx 0,5 - \frac{0,5^2}{2} + \frac{0,5^3}{3} - \frac{0,5^4}{4} + \frac{0,5^5}{5} - \frac{0,5^6}{6} + \frac{0,5^7}{7} = 0,4058035$$

Вычисление значения определенного интеграла с помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд.

Принцип этого метода состоит в том, чтобы заменить подинтегральную функцию по формуле Тейлора и почленно проинтегрировать полученную сумму.

Пример. С точностью до 0,001 вычислить интеграл

$$\int_0^{0,5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$$

Т.к. интегрирование производится в окрестности точки $x=0$, то можно воспользоваться для разложения подинтегральной функции формулой Маклорена.

Разложение функции $\cos x$ имеет вид:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Зная разложение функции $\cos x$ легко найти функцию $1 - \cos x$:

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

В этой формуле суммирование производится по n от 1 до бесконечности, а в предыдущей – от 0 до бесконечности. Это – не ошибка, так получается в результате преобразования.

Теперь представим в виде ряда подинтегральное выражение.

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!}$$

Теперь представим наш интеграл в виде:

$$\int_0^{0,5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \int_0^{0,5} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} dx$$

В следующем действии будет применена теорема о почленном интегрировании ряда.

Итак:

$$\begin{aligned} \int_0^{0,5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx &= \int_0^{0,5} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} \int_0^{0,5} x^{2n-2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \Big|_0^{0,5} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 0,5^{2n-1}}{(2n)!(2n-1)} \end{aligned}$$

Итого, получаем:

$$\int_0^{0,5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!(2n-1)2^{2n-1}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 2^3 \cdot 4!} + \frac{1}{5 \cdot 2^5 \cdot 6!} - \dots =$$

$$= 0,25 - 0,00174 + 0,0000086 - \dots \approx 0,248$$

Как видно, абсолютная величина членов ряда очень быстро уменьшается, и требуемая точность достигается уже при третьем члене разложения.

Для справки: Точное (вернее – более точное) значение этого интеграла: 0,2482725418...

Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

С помощью степенных рядов возможно интегрировать дифференциальные уравнения.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = f(x)$$

Существует метод решения дифференциальных уравнений с помощью рядов. Он носит название **метод последовательного дифференцирования**.

Рассмотрим тот же пример. Решение дифференциального уравнения будем искать в виде разложения неизвестной функции в ряд Маклорена.

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Если заданные начальные условия $y(0)=1$, $y'(0)=0$ подставить в исходное дифференциальное уравнение, получим, что $y''(0)=0$.

Далее запишем дифференциальное уравнение в виде $y'' = xy$ и будем последовательно дифференцировать его по x .

$$y''' = y + xy'; \quad y'''(0) = y(0) = 1;$$

$$y^{IV} = y' + y' + xy''; \quad y^{IV}(0) = 0;$$

$$y^V = 2y'' + y'' + xy'''; \quad y^V(0) = 0;$$

$$y^{VI} = 3y''' + y''' + xy^{IV}; \quad y^{VI}(0) = 4;$$

.....

После подстановки полученных значений получаем:

$$y = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \dots$$

III семестр.

Лекции 1-2.

Случайные события.

Определение. Событием называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.

При этом тот или иной результат опыта может быть получен с различной степенью возможности. Т.е. в некоторых случаях можно сказать, что одно событие произойдет практически наверняка, другое практически никогда.

В отношении друг друга события также имеют особенности, т.е. в одном случае событие А может произойти совместно с событием В, в другом – нет.

Определение. События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других.

Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте).

Определение. Полной группой событий называется совокупность всех возможных результатов опыта.

Определение. Достоверным событием называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется **невозможным**, если оно никогда не произойдет в результате опыта.

Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного и появление зеленого шаров образуют полную группу событий.

Определение. События называются **равновозможными**, если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью.

Определение. Вероятностью события A называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события A равна отношению числа, благоприятствующих событию A исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Исход опыта является благоприятствующим событию A , если появление в результате опыта этого исхода влечет за собой появление события A .

Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – равна нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Определение. Относительной частотой события A называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие A к общему числу опытов.

Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта.

Так в рассмотренном выше примере, если из коробки наугад извлечено 5 шаров и 2 из них оказались красными, то относительная частота появления красного шара равна:

$$W(A) = \frac{2}{5}$$

Как видно, эта величина не совпадает с найденной вероятностью.

При достаточно большом числе произведенных опытов относительная частота изменяется мало, колеблясь около одного числа. Это число может быть принято за вероятность события.

Это обусловлено тем, что на практике сложно представить результат опыта в виде совокупности элементарных событий, доказать, что события равновероятные.

Классическое определение вероятности неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов. Чтобы преодолеть этот недостаток вводится понятие **геометрической вероятности**, т.е. вероятности попадания точки в какой – либо отрезок или часть плоскости (пространства).

Так если на отрезке длиной L выделен отрезок длины l , то вероятность попадания наугад взятой точки в отрезок l равна отношению l/L .

Комбинаторные формулы

Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Обозначим его U_n . **Перестановкой** из n элементов называется заданный порядок во множестве U_n .

Примеры перестановок:

- 1)распределение n различных должностей среди n человек;
- 2)расположение n различных предметов в одном ряду.

Сколько различных перестановок можно образовать во множестве U_n ? Число перестановок обозначается P_n (читается P из n).

Чтобы вывести формулу числа перестановок, представим себе n ячеек, пронумерованных числами $1, 2, \dots, n$. Все перестановки будем образовывать, располагая элементы U_n в этих ячейках. В первую ячейку можно занести любой из n элементов (иначе: первую ячейку можно заполнить n различными способами). Заполнив первую ячейку, можно $n-1$ способом заполнить вторую ячейку (иначе: при каждом способе заполнения первой ячейки находится $n-1$ способов заполнения второй ячейки). Таким образом существует $n(n-1)$ способов заполнения двух первых ячеек. При заполнении первых двух ячеек можно найти $n-2$ способов заполнения третьей ячейки, откуда получается, что три ячейки можно заполнить $n(n-1)(n-2)$ способами. Продолжая этот процесс, получим, что число способов заполнения n ячеек равно $n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Отсюда

$$P_n = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Число $n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$, то есть произведение всех натуральных чисел от 1 до n , называется " n -факториал" и обозначается $n!$. Отсюда $P_n = n!$

Пример. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

По определению считается: $1! = 1$; $0! = 1$.

Размещениями из n элементов по k элементов будем называть упорядоченные подмножества, состоящие из k элементов, множества U_n - (множества, состоящего из n элементов). Число размещений из n элементов по k элементов обозначается A_n^k (читается " A из n по k ").

В задачах о размещениях полагается $k < n$. В случае, если $k = n$, то легко получить $A_n^k = P_n = n!$

Для подсчета A_n^k используем тот же метод, что использовался для подсчета P_n , только здесь возьмем лишь k ячеек. Первую ячейку можно заполнить n способами, вторую, при заполненной первой, можно заполнить $n-1$ способами. Можно продолжать этот процесс до заполнения последней k -й ячейки. Эту ячейку при заполненных первых $k-1$ ячейках можно заполнить $n-(k-1)$ способами (или $n-k+1$). Таким образом все k ячеек заполняются числом способов, равным

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Отсюда получаем: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Сочетаниями из n элементов по k элементов называются подмножества, состоящие из k элементов множества U_n (множества, состоящего из n элементов).

Одно сочетание от другого отличается только составом выбранных элементов (но не порядком их расположения, как у размещений).

Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначается C_n^k (читается " C из n по k ").

Выведем формулу для подсчета числа сочетаний. Пусть имеется множество U_n и нужно образовать упорядоченное подмножество множества U_n , содержащее k элементов (то есть образовать размещение). Делаем это так:

1) выделим какие-либо k элементов из n элементов множества U_n . Это, согласно сказанному выше, можно сделать C_n^k способами;

2) упорядочим выделенные k элементов, что можно сделать $P_k = k!$ способами. Всего можно получить $C_n^k \cdot P_k$ вариантов (упорядоченных подмножеств), откуда следует: $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$, то есть

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Операции над событиями.

Определение. События A и B называются **равными**, если осуществление события A влечет за собой осуществление события B и наоборот.

Определение. Объединением или **суммой** событий A_k называется событие A , которое означает появление **хотя бы одного** из событий A_k .

$$A = \bigcup_k A_k$$

Определение. Пересечением или **произведением** событий A_k называется событие A , которое заключается в осуществлении **всех** событий A_k .

$$A = \bigcap_k A_k$$

Определение. Разностью событий A и B называется событие C , которое означает, что происходит событие A , но не происходит событие B .

$$C = A \setminus B$$

Определение. Дополнительным к событию A называется событие $\bar{A}$, означающее, что событие A **не происходит**.

Определение. Элементарными исходами опыта называются такие результаты опыта, которые взаимно исключают друг друга и в результате опыта происходит одно из этих событий, также каково бы ни было событие A , по наступившему элементарному исходу можно судить о том, происходит или не происходит это событие.

Совокупность всех элементарных исходов опыта называется **пространством элементарных событий**.

Теорема (сложения вероятностей). Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Следствие 1: Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$$

Определение. Противоположными называются два несовместных события, образующие полную группу.

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Следствие 2: Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Определение. Событие A называется **независимым** от события B , если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет. Событие A называется **зависимым** от события B , если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Определение. Вероятность события B , вычисленная при условии, что имело место

событие A , называется **условной вероятностью** события B .

$$P_A(B) = P(B/A) = P(AB)/P(A)$$

Теорема. (Умножения вероятностей) Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило.

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(A)P_A(B)$$

Также можно записать: $P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B) = P(B)P_B(A)$

Если события независимые, то $P(B/A) = P(B)$, и теорема умножения вероятностей принимает вид:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

В случае произведения нескольких зависимых событий вероятность равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных при условии, что вероятность каждого последующего вычисляется в предположении, что все остальные события уже совершились.

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 A_2) \dots P(A_n/A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

Из теоремы произведения вероятностей можно сделать вывод о вероятности появления хотя бы одного события.

Если в результате испытания может появиться n событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n$$

Здесь событие A обозначает наступление хотя бы одного из событий A_i , а q_i – вероятность противоположных событий $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$.

Лекция 3.

Формула полной вероятности.

Пусть некоторое событие A может произойти вместе с одним из несовместных событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, составляющих полную группу событий. Пусть известны вероятности этих событий $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$ и условные вероятности наступления события A при наступлении события H_i $P(A/H_1), P(A/H_2), \dots, P(A/H_n)$.

Теорема. Вероятность события A , которое может произойти вместе с одним из событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события A .

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)$$

Доказательство.

Т.к. события $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуют полную группу событий, то событие A можно представить в виде следующей суммы:

$$A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n = \sum_{i=1}^n AH_i$$

Т.к. события $H_1, H_2, \dots, H_n$ несовместны, то и события AH_i тоже несовместны. Тогда можно применить теорему о сложении вероятностей несовместных событий:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(AH_i)$$

При этом $P(AH_i) = P(H_i)P(A/H_i)$

Окончательно получаем: $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)$.

Формула Байеса (формула гипотез).

Пусть имеется полная группа несовместных гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$ с известными вероятностями их наступления $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$. Пусть в результате опыта наступило событие A , условные вероятности которого по каждой из гипотез известны, т.е. известны вероятности $P(A/H_1), P(A/H_2), \dots, P(A/H_n)$.

Требуется определить какие вероятности имеют гипотезы $H_1, H_2, \dots, H_n$ относительно события A , т.е. условные вероятности $P(H_i/A)$.

Теорема. Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события.

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}$$

Эта формула называется **формулой Байеса**.

Доказательство.

По Теореме умножения вероятностей получаем:

$$P(A)P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i)$$

Тогда если $P(A) \neq 0$, $P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}$.

Для нахождения вероятности $P(A)$ используем формулу полной вероятности.

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}$$

Повторение испытаний.

Формула Бернулли.

Если производится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие A , и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются **независимыми относительно события A** .

Допустим, что событие A наступает в каждом испытании с вероятностью $P(A)=p$. Определим вероятность $P_{m,n}$ того, что в результате n испытаний событие A наступило ровно m раз.

Пусть в результате n независимых испытаний, проведенных в одинаковых условиях, событие A наступает с вероятностью $P(A) = p$, а противоположное ему событие $\bar{A}$ с вероятностью $P(\bar{A}) = 1 - p$.

Обозначим A_i – наступление события A в испытании с номером i . Т.к. условия проведения опытов одинаковые, то эти вероятности равны.

Если в результате n опытов событие A наступает ровно m раз, то остальные $n-m$ раз это событие не наступает. Событие A может появиться m раз в n испытаниях в различных

комбинациях, число которых равно количеству сочетаний из n элементов по m . Это количество сочетаний находится по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Вероятность каждой комбинации равна произведению вероятностей:

$$p^m (1-p)^{n-m}$$

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем **формулу Бернулли**:

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

Формула Бернулли важна тем, что справедлива для любого количества независимых испытаний, т.е. того самого случая, в котором наиболее четко проявляются законы теории вероятностей.

Лекция 4.

Случайные величины.

Выше рассматривались случайные события, являющиеся качественной характеристикой случайного результата опыта. Для получения количественной характеристики вводится понятие случайной величины.

Определение. Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее известно какое именно.

Случайные величины можно разделить на две категории.

Определение. Дискретной случайной величиной называется такая величина, которая в результате опыта может принимать определенные значения с определенной вероятностью, образующие счетное множество (множество, элементы которого могут быть занумерованы).

Это множество может быть как конечным, так и бесконечным.

Например, количество выстрелов до первого попадания в цель является дискретной случайной величиной, т.к. эта величина может принимать и бесконечное, хотя и счетное количество значений.

Определение. Непрерывной случайной величиной называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Для задания случайной величины недостаточно просто указать ее значение, необходимо также указать вероятность этого значения.

Закон распределения дискретной случайной величины.

Определение. Соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется **законом распределения дискретной** случайной величины.

Закон распределения может быть задан аналитически, в виде таблицы или графически.

Таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей называется **рядом распределения**.

Графическое представление этой таблицы называется **многоугольником распределения**. При этом сумма все ординат многоугольника распределения представляет собой вероятность всех возможных значений случайной величины, а, следовательно, равна единице.



При построении многоугольника распределения надо помнить, что соединение полученных точек носит условный характер. В промежутках между значениями случайной величины вероятность не принимает никакого значения. Точки соединены только для наглядности.

Числовые характеристики дискретных случайных величин.

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако, когда невозможно найти закон распределения, или этого не требуется, можно ограничиться нахождением значений, называемых числовыми характеристиками случайной величины. Эти величины определяют некоторое среднее значение, вокруг которого группируются значения случайной величины, и степень их разбросанности вокруг этого среднего значения.

Определение. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности.

$$m_x = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Математическое ожидание существует, если ряд, стоящий в правой части равенства, сходится абсолютно.

С точки зрения вероятности можно сказать, что математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Свойства математического ожидания.

- 1) Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной.

$$M(C) = C$$

- 2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

$$M(Cx) = CM(x)$$

- 3) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

$$M(XY) = M(X)M(Y)$$

Это свойство справедливо для произвольного числа случайных величин.

4) Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y)$$

Это свойство также справедливо для произвольного числа случайных величин.

Пусть производится n независимых испытаний, вероятность появления события A в которых равна p .

Теорема. Математическое ожидание $M(X)$ числа появления события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании.

$$M(X) = np$$

Однако, математическое ожидание не может полностью характеризовать случайный процесс. Кроме математического ожидания надо ввести величину, которая характеризует отклонение значений случайной величины от математического ожидания.

Это отклонение равно разности между случайной величиной и ее математическим ожиданием. При этом математическое ожидание отклонения равно нулю. Это объясняется тем, что одни возможные отклонения положительны, другие отрицательны, и в результате их взаимного погашения получается ноль.

Определение. Дисперсией (рассеиванием) дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

Однако, на практике подобный способ вычисления дисперсии неудобен, т.к. приводит при большом количестве значений случайной величины к громоздким вычислениям.

Поэтому применяется другой способ.

Вычисление дисперсии.

Теорема. Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Доказательство. С учетом того, что математическое ожидание $M(X)$ и квадрат математического ожидания $M^2(X)$ – величины постоянные, можно записать:

$$\begin{aligned} D(X) &= M[X - M(X)]^2 = M[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)] = \\ &= M(X^2) - 2M(X)M(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X). \end{aligned}$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Свойства дисперсии.

1) Дисперсия постоянной величины равна нулю.

$$D(C) = 0$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат.

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y)$$

Справедливость этого равенства вытекает из свойства 2.

Теорема. Дисперсия числа появления события A в n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и не появления события в каждом испытании.

$$D(X) = npq$$

Среднее квадратическое отклонение.

Определение. Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Теорема. Среднее квадратическое отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин.

$$\sigma(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n)}$$

Функция распределения.

Во всех рассмотренных выше случаях случайная величина определялась путем задания значений самой величины и вероятностей этих значений.

Однако, такой метод применим далеко не всегда. Например, в случае непрерывной случайной величины, ее значения могут заполнять некоторый произвольный интервал. Очевидно, что в этом случае задать все значения случайной величины просто нереально.

Даже в случае, когда это сделать можно, зачастую задача решается чрезвычайно сложно. Рассмотренный только что пример даже при относительно простом условии (приборов только четыре) приводит к достаточно неудобным вычислениям, а если в задаче будет несколько сотен приборов?

Поэтому встает задача по возможности отказаться от индивидуального подхода к каждой задаче и найти по возможности наиболее общий способ задания любых типов случайных величин.

Пусть x – действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение, меньшее x , т.е. $X < x$, обозначим через $F(x)$.

Определение. Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x .

$$F(x) = P(X < x)$$

Функцию распределения также называют **интегральной функцией**.

Функция распределения существует как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин. Она полностью характеризует случайную величину и является одной из форм закона распределения.

Для дискретной случайной величины функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

Знак неравенства под знаком суммы показывает, что суммирование распространяется на те возможные значения случайной величины, которые меньше аргумента x .

Функция распределения дискретной случайной величины X разрывна и возрастает скачками при переходе через каждое значение x_i .

Свойства функции распределения..

1) значения функции распределения принадлежат отрезку $[0, 1]$.

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

2) $F(x)$ – неубывающая функция.

$$F(x_2) \geq F(x_1) \text{ при } x_2 \geq x_1$$

3) Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a, b) , равна приращению функции распределения на этом интервале.

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$

4) На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности функция распределения равна единице.

5) Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.

Таким образом, не имеет смысла говорить о каком – либо конкретном значении случайной величины. Интерес представляет только вероятность попадания случайной величины в какой – либо интервал, что соответствует большинству практических задач.

Плотность распределения.

Функция распределения полностью характеризует случайную величину, однако, имеет один недостаток. По функции распределения трудно судить о характере распределения случайной величины в небольшой окрестности той или иной точки числовой оси.

Определение. Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется функция $f(x)$ – первая производная от функции распределения $F(x)$.

$$f(x) = F'(x).$$

Плотность распределения также называют **дифференциальной функцией**. Для описания дискретной случайной величины плотность распределения неприемлема.

Смысл плотности распределения состоит в том, что она показывает как часто появляется случайная величина X в некоторой окрестности точки x при повторении опытов.

После введения функций распределения и плотности распределения можно дать следующее определение непрерывной случайной величины.

Определение. Случайная величина X называется **непрерывной**, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна на всей оси OX , а плотность распределения $f(x)$ существует везде, за исключением (может быть, конечного числа точек).

Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что некоторая случайная величина X примет значение, принадлежащее заданному интервалу.

Теорема. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b) , равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b .

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство этой теоремы основано на определении плотности распределения и третьем свойстве функции распределения, записанном выше.

Геометрически это означает, что вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a, b) , равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью OX , кривой распределения $f(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$.

Функция распределения может быть легко найдена, если известна плотность распределения, по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

Свойства плотности распределения.

- 1) Плотность распределения – неотрицательная функция.

$$f(x) \geq 0$$

- 2) Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до ∞ равен единице.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

Пусть непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $f(x)$. Допустим, что все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[a, b]$.

Определение. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X , возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, называется определенный интеграл

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx$$

Если возможные значения случайной величины рассматриваются на всей числовой оси, то математическое ожидание находится по формуле:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

При этом, конечно, предполагается, что несобственный интеграл сходится.

Определение. Дисперсией непрерывной случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$$

По аналогии с дисперсией дискретной случайной величины, для практического вычисления дисперсии используется формула:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2$$

Определение. Средним квадратичным отклонением называется квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Определение. Модой M_0 дискретной случайной величины называется ее наиболее вероятное значение. Для непрерывной случайной величины мода – такое значение случайной величины, при которой плотность распределения имеет максимум.

$$f(M_0) = \max.$$

Если многоугольник распределения для дискретной случайной величины или кривая распределения для непрерывной случайной величины имеет два или несколько максимумов, то такое распределение называется **двухмодальным** или **многомодальным**.

Если распределение имеет минимум, но не имеет максимума, то оно называется **антимодальным**.

Определение. Медианой M_D случайной величины X называется такое ее значение, относительно которого равновероятно получение большего или меньшего значения случайной величины.

$$P(X < M_D) = P(X > M_D)$$

Геометрически медиана – абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения делится пополам.

Отметим, что если распределение одномодальное, то мода и медиана совпадают с математическим ожиданием.

Определение. Начальным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k .

$$\alpha_k = M[X^k].$$

$$\text{Для дискретной случайной величины: } \alpha_k = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i.$$

$$\text{Для непрерывной случайной величины: } \alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx.$$

Начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию.

Определение. Центральным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X - m_x)^k$.

$$\mu_k = M[(X - m_x)^k]$$

$$\text{Для дискретной случайной величины: } \mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^k p_i.$$

$$\text{Для непрерывной случайной величины: } \mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x) dx.$$

Центральный момент первого порядка всегда равен нулю, а центральный момент второго порядка равен дисперсии. Центральный момент третьего порядка характеризует асимметрию распределения.

Определение. Отношение центрального момента третьего порядка к среднему квадратическому отклонению в третьей степени называется **коэффициентом асимметрии**.

$$a_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$$

Определение. Для характеристики островершинности и плосковершинности распределения используется величина, называемая **эксцессом**.

$$C_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$$

Кроме рассмотренных величин используются также так называемые абсолютные моменты:

Абсолютный начальный момент: $\beta_k = M[|X|^k]$.

Абсолютный центральный момент: $\nu_k = M[|X - m_x|^k]$.

Абсолютный центральный момент первого порядка называется **средним арифметическим отклонением**.

При решении практических задач зачастую точно найти закон распределения случайной величины довольно сложно. Однако, все происходящие процессы, связанные со случайными величинами, можно разделить на несколько типов, каждому из которых можно поставить в соответствие какой – либо закон распределения.

Выше были рассмотрены некоторые типы распределений дискретной случайной величины такие как биномиальное распределение и распределение Пуассона.

Рассмотрим теперь некоторые типы законов распределения для непрерывной случайной величины.

Лекция 5.

Законы распределения случайных величин.

Биноминальное распределение.

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А может появиться с одинаковой вероятностью p в каждом из испытаний, то вероятность того, что событие не появится, равна $q = 1 - p$.

Примем число появлений события в каждом из испытаний за некоторую случайную величину X .

Чтобы найти закон распределения этой случайной величины, необходимо определить значения этой величины и их вероятности.

Значения найти достаточно просто. Очевидно, что в результате n испытаний событие может не появиться вовсе, появиться один раз, два раза, три и т.д. до n раз.

Вероятность каждого значения этой случайной величины можно найти по формуле Бернулли.

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Эта формула аналитически выражает искомый закон распределения. Этот закон распределения называется **биномиальным**.

Распределение Пуассона.

(Симеон Дени Пуассон (1781 – 1840) – французский математик)

Пусть производится n независимых испытаний, в которых появление события А имеет вероятность p . Если число испытаний n достаточно велико, а вероятность появления события А в каждом испытании мало ($p \leq 0,1$), то для нахождения вероятности появления события А k раз находится следующим образом.

Сделаем важное допущение – произведение np сохраняет постоянное значение:
 $np = \lambda$

Практически это допущение означает, что среднее число появления события в различных сериях испытаний (при разном n) остается неизменным.

По формуле Бернулли получаем:

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Найдем предел этой вероятности при $n \rightarrow \infty$.

$$P_n(k) \cong \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \right] = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Получаем формулу **распределения Пуассона**:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

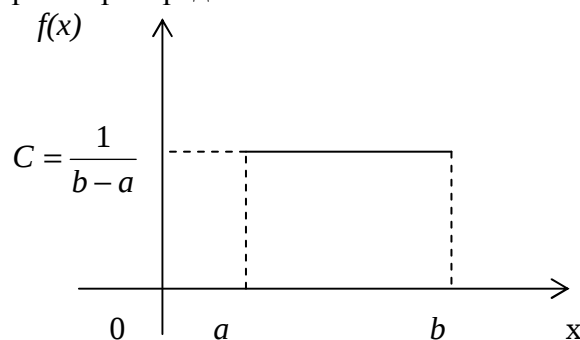
Если известны числа λ и k , то значения вероятности можно найти по соответствующим таблицам распределения Пуассона.

Равномерное распределение.

Определение. Непрерывная случайная величина имеет **равномерное** распределение на отрезке $[a, b]$, если на этом отрезке плотность распределения случайной величины постоянна, а вне его равна нулю.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ C, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Постоянная величина C может быть определена из условия равенства единице площади, ограниченной кривой распределения.

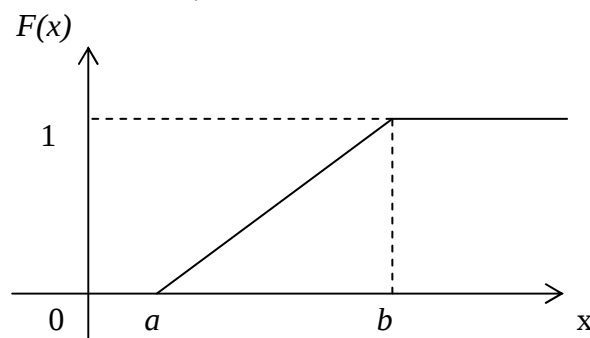


Получаем $C = \frac{1}{b-a}$.

Найдем функцию распределения $F(x)$ на отрезке $[a, b]$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x}{b-a} \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{при } a \leq x \leq b \\ 1, & \text{при } x > b \end{cases}$$



Для того, чтобы случайная величина подчинялась закону равномерного распределения необходимо, чтобы ее значения лежали внутри некоторого определенного интервала, и внутри этого интервала значения этой случайной величины были бы равновероятны.

Определим математическое ожидание и дисперсию случайной величины, подчиненной равномерному закону распределения.

$$m_x = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

$$m_{x^2} = \int_a^b x^2 f(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{x^3}{3(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}.$$

$$D_x = m_{x^2} - m_x^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{b-a} = \frac{\beta - \alpha}{b-a}.$$

Показательное распределение.

Определение. Показательным (экспоненциальным) называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины X , которое описывается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

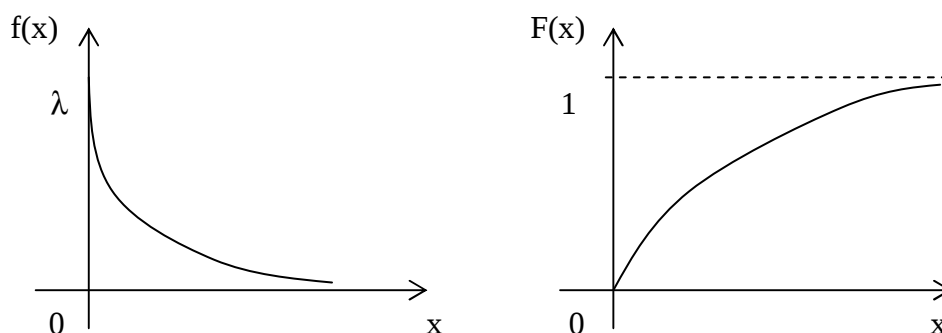
где λ - положительное число.

Найдем закон распределения.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \lambda \int_0^x e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

Графики функции распределения и плотности распределения:



Найдем математическое ожидание случайной величины, подчиненной показательному распределению.

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x; \quad e^{-\lambda x} dx = dv; \\ du = dx; \quad -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} = v; \end{array} \right\} = \lambda \left(-\frac{x e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} dx \right) =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Результат получен с использованием того факта, что

$$x e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} - 0 = \left\{ \begin{array}{l} \text{По правилу} \\ \text{Лопиталя} \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda x}} = 0.$$

Для нахождения дисперсии найдем величину $M(X^2)$.

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx$$

Дважды интегрируя по частям, аналогично рассмотренному случаю, получим:

$$M(X^2) = \frac{2}{\lambda^2};$$

$$\text{Тогда } D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$\text{Итого: } M(X) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma_x = \frac{1}{\lambda}.$$

Видно, что в случае показательного распределения математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение равны.

Также легко определить и вероятность попадания случайной величины, подчиненной показательному закону распределения, в заданный интервал.

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Показательное распределение широко используется в теории надежности.

Допустим, некоторое устройство начинает работать в момент времени $t_0=0$, а через какое-то время t происходит отказ устройства.

Обозначим T непрерывную случайную величину – длительность безотказной работы устройства.

Таким образом, функция распределения $F(t) = P(T < t)$ определяет вероятность отказа за время длительностью t .

Вероятность противоположного события (безотказная работа в течение времени t) равна $R(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$.

Определение. Функцией надежности $R(t)$ называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы устройства в течение времени t .

Часто на практике длительность безотказной работы подчиняется показательному закону распределению.

Вообще говоря, если рассматривать новое устройство, то вероятность отказа в начале его функционирования будет больше, затем количество отказов снизится и будет некоторое время иметь практически одно и то же значение. Затем (когда устройство выработает свой ресурс) количество отказов будет возрастать.

Другими словами, можно сказать, что функционирование устройства на протяжении всего существования (в смысле количества отказов) можно описать комбинацией двух показательных законов (в начале и конце функционирования) и равномерного закона распределения.

Функция надежности для какого-либо устройства при показательном законе распределения равна:

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}.$$

Данное соотношение называют **показательным законом надежности**.

Важным свойством, позволяющим значительно упростить решение задач теории надежности, является то, что вероятность безотказной работы устройства на интервале времени t не зависит от времени предшествующей работы до начала рассматриваемого интервала, а зависит только от длительности времени t .

Таким образом, безотказная работа устройства зависит только от интенсивности отказов λ и не зависит от безотказной работы устройства в прошлом.

Так как подобным свойством обладает только показательный закон распределения, то этот факт позволяет определить, является ли закон распределения случайной величины показательным или нет.

Нормальный закон распределения.

Определение. Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}};$$

Нормальный закон распределения также называется **законом Гаусса**.

Нормальный закон распределения занимает центральное место в теории вероятностей. Это обусловлено тем, что этот закон проявляется во всех случаях, когда случайная величина является результатом действия большого числа различных факторов. К нормальному закону приближаются все остальные законы распределения.

Можно легко показать, что параметры m_x и σ_x , входящие в плотность распределения являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением случайной величины X .

Найдем функцию распределения $F(x)$.

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx$$

График плотности нормального распределения называется **нормальной кривой** или **кривой Гаусса**.

Нормальная кривая обладает следующими свойствами:

- 1) Функция определена на всей числовой оси.
- 2) При всех x функция распределения принимает только положительные значения.
- 3) Ось OX является горизонтальной асимптотой графика плотности вероятности, т.к. при неограниченном возрастании по абсолютной величине аргумента x , значение функции стремится к нулю.

4) Найдем экстремум функции.

$$y' = -\frac{x-m}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = 0; \quad x = m;$$

Т.к. при $y' > 0$ при $x < m$ и $y' < 0$ при $x > m$, то в точке $x = m$ функция имеет максимум, равный $\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$.

5) Функция является симметричной относительно прямой $x = a$, т.к. разность $(x - a)$ входит в функцию плотности распределения в квадрате.

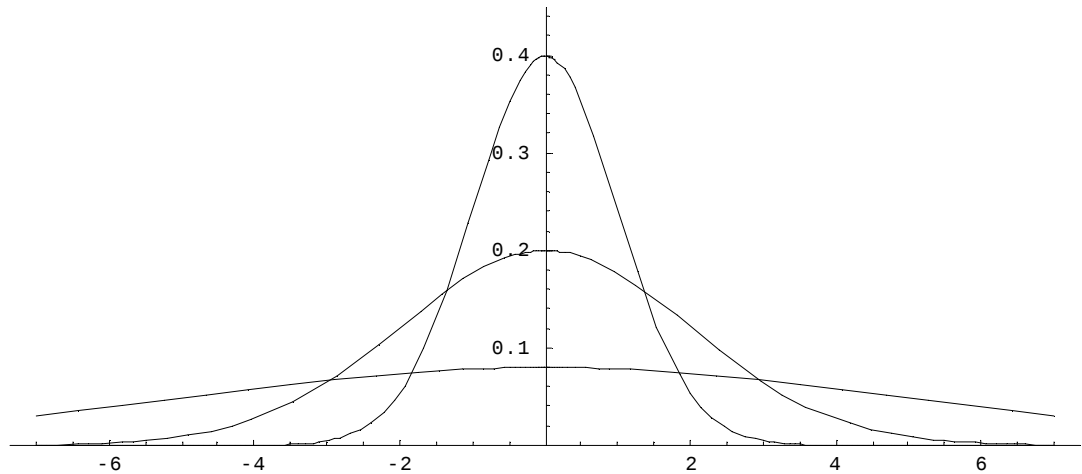
6) Для нахождения точек перегиба графика найдем вторую производную функции плотности.

$$y'' = -\frac{1}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \left[1 - \frac{(x-m)^2}{\sigma^2} \right]$$

При $x = m + \sigma$ и $x = m - \sigma$ вторая производная равна нулю, а при переходе через эти точки меняет знак, т.е. в этих точках функция имеет перегиб.

В этих точках значение функции равно $\frac{1}{\sigma e\sqrt{2\pi}}$.

Построим график функции плотности распределения.



Построены графики при $m=0$ и трех возможных значениях среднего квадратического отклонения $\sigma = 1$, $\sigma = 2$ и $\sigma = 7$. Как видно, при увеличении значения среднего квадратического отклонения график становится более пологим, а максимальное значение уменьшается..

Если $a > 0$, то график сместится в положительном направлении, если $a < 0$ – в отрицательном.

При $a = 0$ и $\sigma = 1$ кривая называется **нормированной**. Уравнение нормированной кривой:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Функция Лапласа.

Найдем вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону, в заданный интервал.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\text{Обозначим } \frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t; \quad \frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}} = \alpha; \quad \frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}} = \beta;$$

$$\text{Тогда } P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2} \sigma\sqrt{2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} [\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)]$$

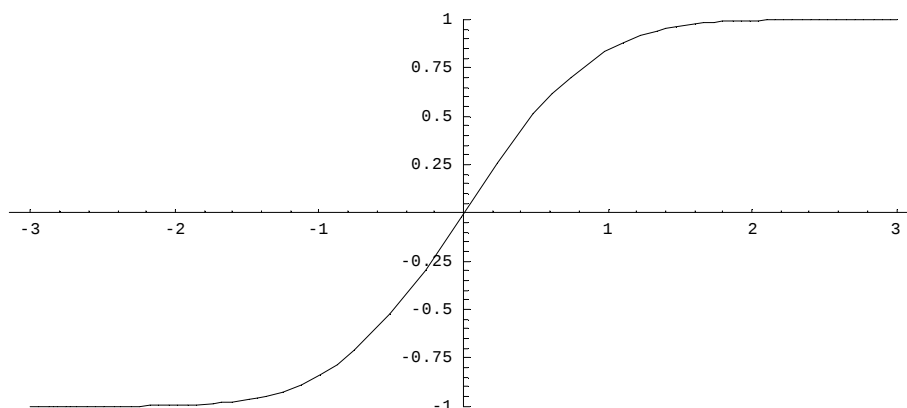
Т.к. интеграл $\int e^{-t^2} dt$ не выражается через элементарные функции, то вводится в рассмотрение функция

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

которая называется **функцией Лапласа** или **интегралом вероятностей**.

Значения этой функции при различных значениях x посчитаны и приводятся в специальных таблицах.

Ниже показан график функции Лапласа.



Функция Лапласа обладает следующими свойствами:

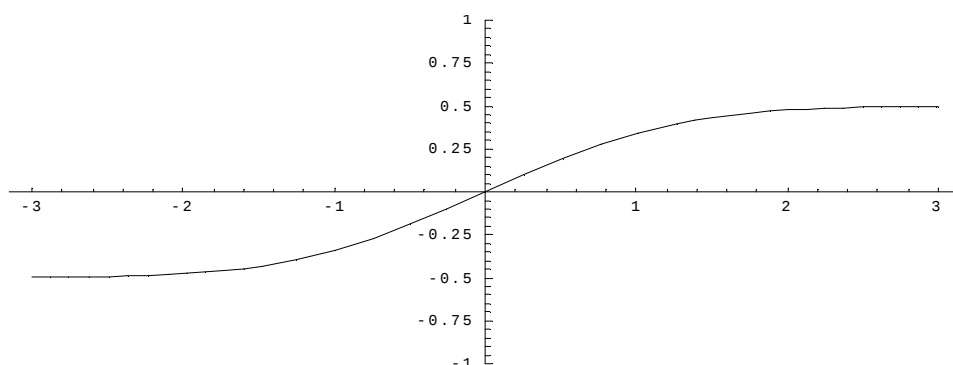
- 1) $\Phi(0) = 0$;
- 2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
- 3) $\Phi(\infty) = 1$.

Функцию Лапласа также называют **функцией ошибок** и обозначают $\text{erf } x$.

Еще используется **нормированная** функция Лапласа, которая связана с функцией Лапласа соотношением:

$$\bar{\Phi}(x) = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt;$$

Ниже показан график нормированной функции Лапласа.



При рассмотрении нормального закона распределения выделяется важный частный случай, известный как **правило трех сигм**.

Запишем вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины от математического ожидания меньше заданной величины Δ :

$$P(|X - m| < \Delta) = \bar{\Phi}\left[\frac{m + \Delta - m}{\sigma}\right] - \bar{\Phi}\left[\frac{m - \Delta - m}{\sigma}\right] = \bar{\Phi}\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right] - \bar{\Phi}\left[-\frac{\Delta}{\sigma}\right] = 2\bar{\Phi}\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right]$$

Если принять $\Delta = 3\sigma$, то получаем с использованием таблиц значений функции Лапласа:

$$P(|X - m| < 3\sigma) = 2\bar{\Phi}(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973$$

Т.е. вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидания на величину, большую чем утроенное среднее квадратичное отклонение, практически равна нулю.

Это правило называется **правилом трех сигм**.

На практике считается, что если для какой – либо случайной величины выполняется правило трех сигм, то эта случайная величина имеет нормальное распределение.

Центральная предельная теорема Ляпунова.

Теорема. Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.

На практике для большинства случайных величин выполняются условия теоремы Ляпунова.

Лекция 6.

Закон больших чисел.

Неравенство Чебышева.

(Чебышев Пафнутий Львович (1821 – 1824) – русский математик)

На практике сложно сказать какое конкретное значение примет случайная величина, однако, при воздействии большого числа различных факторов поведение большого числа случайных величин практически утрачивает случайный характер и становится закономерным.

Этот факт очень важен на практике, т.к. позволяет предвидеть результат опыта при воздействии большого числа случайных факторов.

Однако, это возможно только при выполнении некоторых условий, которые определяются законом больших чисел. К законам больших чисел относятся теоремы Чебышева (наиболее общий случай) и теорема Бернулли (простейший случай), которые будут рассмотрены далее.

Рассмотрим дискретную случайную величину X (хотя все сказанное ниже будет справедливо и для непрерывных случайных величин), заданную таблицей распределения:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Требуется определить вероятность того, что отклонение значения случайной величины от ее математического ожидания будет не больше, чем заданное число ε .

Теорема. (Неравенство Чебышева) Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε , не меньше чем $1 - D(X)/\varepsilon^2$.

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - D(X)/\varepsilon^2.$$

Теорема Чебышева.

Теорема. Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ - попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышая постоянного числа C), то, как бы мало не было положительное число ε , вероятность неравенства

$$\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} \right] < \varepsilon$$

будет столь угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Т.е. можно записать:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon\right) = 1$$

Часто бывает, что случайные величины имеют одно и то же математическое ожидание. В этом случае теорема Чебышева несколько упрощается:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - m \right| < \varepsilon\right) = 1$$

Дробь, входящая в записанное выше выражение есть не что иное как среднее арифметическое возможных значений случайной величины.

Теорема утверждает, что хотя каждое отдельное значение случайной величины может достаточно сильно отличаться от своего математического ожидания, но среднее арифметическое этих значений будет неограниченно приближаться к среднему арифметическому математических ожиданий.

Отклоняясь от математического ожидания как в положительную так и в отрицательную сторону, от своего математического ожидания, в среднем арифметическом отклонения взаимно сокращаются.

Таким образом, величина среднего арифметического значений случайной величины уже теряет характер случайности.

Теорема Бернулли.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равно p .

Возможно определить примерно относительную частоту появления события A .

Теорема. Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянно, то сколь угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний n достаточно велико.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|m/n - p| < \varepsilon) = 1$$

Здесь m – число появлений события A . Из всего сказанного выше не следует, что с увеличением число испытаний относительная частота неуклонно стремится к вероятности

p , т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = p$. В теореме имеется в виду только вероятность приближения

относительной частоты к вероятности появления события A в каждом испытании.

В случае, если вероятности появления события A в каждом опыте различны, то справедлива следующая теорема, известная как **теорема Пуассона**.

Теорема. Если производится n независимых опытов и вероятность появления события A в каждом опыте равна p_i , то при увеличении n частота события A сходится по вероятности к среднему арифметическому вероятностей p_i .

Предельные теоремы.

Как уже говорилось, при достаточно большом количестве испытаний, поставленных в одинаковых условиях, характеристики случайных событий и случайных величин становятся почти неслучайными. Это позволяет использовать результаты наблюдений случайных событий для предсказания исхода того или иного опыта.

Предельные теоремы теории вероятностей устанавливают соответствие между теоретическими и экспериментальными характеристиками случайных величин при большом количестве испытаний.

В рассмотренном выше законе больших чисел нечего не говорилось о законе распределения случайных величин.

Поставим задачу нахождения предельного закона распределения суммы

$$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

когда число слагаемых n неограниченно возрастает. Эту задачу решает Центральная предельная теорема Ляпунова, которая была сформулирована выше.

В зависимости от условий распределения случайных величин X_i , образующих сумму, возможны различные формулировки центральной предельной теоремы.

Допустим, что случайные величины X_i взаимно независимы и одинаково распределены.

Теорема. Если случайные величины X_i взаимно независимы и имеют один и тот же закон распределения с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2 , причем существует третий абсолютный момент ν_3 , то при неограниченном увеличении числа испытаний n закон распределения суммы $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ неограниченно приближается к нормальному.

с вероятностью p , то для любого интервала (α, β) справедливо соотношение:

$$P\left(\alpha < \frac{Y - np}{\sqrt{npq}} < \beta\right) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) \right] = \bar{\Phi}(\beta) - \bar{\Phi}(\alpha)$$

где Y – число появлений события A в n опытах, $q = 1 - p$, $\Phi(x)$ – функция Лапласа, $\bar{\Phi}(x)$ – нормированная функция Лапласа.

Теорема Муавра – Лапласа описывает поведение биномиального распределения при больших значениях n .

Данная теорема позволяет существенно упростить вычисление по формуле биномиального распределения.

Расчет вероятности попадания значения случайной величины в заданный интервал $P(\alpha < Y < \beta) = \sum_{\alpha < k < \beta} C_n^k p^k q^{n-k}$ при больших значениях n крайне затруднителен. Гораздо проще воспользоваться формулой:

$$P(\alpha < Y < \beta) = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{2npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{2npq}}\right) \right]$$

Теорема Муавра – Лапласа очень широко применяется при решении практических задач.

$$P(570 \leq X \leq 630) = \frac{1}{2} \left(\Phi \left(\frac{630 - 600}{\sqrt{1152}} \right) - \Phi \left(\frac{570 - 600}{\sqrt{1152}} \right) \right) = \frac{1}{2} (\Phi(0,88) - \Phi(-0,88)) = \\ = \Phi(0,88) = 2\bar{\Phi}(1,25) = 2 \cdot 0,3944 = 0,7888$$

Лекция 7.

Система случайных величин.

Рассмотренные выше случайные величины были одномерными, т.е. определялись одним числом, однако, существуют также случайные величины, которые определяются двумя, тремя и т.д. числами. Такие случайные величины называются двумерными, трехмерными и т.д.

В зависимости от типа, входящих в систему случайных величин, системы могут быть дискретными, непрерывными или смешанными, если в систему входят различные типы случайных величин.

Более подробно рассмотрим системы двух случайных величин.

Определение. Законом распределения системы случайных величин называется соотношение, устанавливающее связь между областями возможных значений системы случайных величин и вероятностями появления системы в этих областях.

Определение. Функцией распределения системы двух случайных величин называется функция двух аргументов $F(x, y)$, равная вероятности совместного выполнения двух неравенств $X < x, Y < y$.

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

Отметим следующие свойства функции распределения системы двух случайных величин:

1) Если один из аргументов стремится к плюс бесконечности, то функция распределения системы стремится к функции распределения одной случайной величины, соответствующей другому аргументу.

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) = F_1(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y) = F_2(y);$$

2) Если оба аргумента стремятся к бесконечности, то функция распределения системы стремится к единице.

$$F(\infty, \infty) = 1;$$

3) При стремлении одного или обоих аргументов к минус бесконечности функция распределения стремится к нулю.

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0;$$

4) Функция распределения является неубывающей функцией по каждому аргументу.

5) Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в произвольный прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, вычисляется по формуле:

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

Плотность распределения системы двух случайных величин.

Определение. Плотностью совместного распределения вероятностей двумерной случайной величины (X, Y) называется вторая смешанная частная производная от функции распределения.

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Если известна плотность распределения, то функция распределения может быть

легко найдена по формуле:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy$$

Двумерная плотность распределения неотрицательна и двойной интеграл с бесконечными пределами от двумерной плотности равен единице.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

По известной плотности совместного распределения можно найти плотности распределения каждой из составляющих двумерной случайной величины.

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy; \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

$$F_1(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy; \quad F_2(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy;$$

Условные законы распределения.

Как было показано выше, зная совместный закон распределения можно легко найти законы распределения каждой случайной величины, входящей в систему.

Однако, на практике чаще стоит обратная задача – по известным законам распределения случайных величин найти их совместный закон распределения.

В общем случае эта задача является неразрешимой, т.к. закон распределения случайной величины ничего не говорит о связи этой величины с другими случайными величинами.

Кроме того, если случайные величины зависимы между собой, то закон распределения не может быть выражен через законы распределения составляющих, т.к. должен устанавливать связь между составляющими.

Все это приводит к необходимости рассмотрения условных законов распределения.

Определение. Распределение одной случайной величины, входящей в систему, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение, называется **условным законом распределения**.

Условный закон распределения можно задавать как функцией распределения так и плотностью распределения.

Условная плотность распределения вычисляется по формулам:

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx}$$

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy}$$

Условная плотность распределения обладает всеми свойствами плотности распределения одной случайной величины.

Условное математическое ожидание.

Определение. Условным математическим ожиданием дискретной случайной величины Y при $X = x$ (x – определенное возможное значение X) называется произведение всех возможных значений Y на их условные вероятности.

$$M(Y / X = x) = \sum_{i=1}^m y_i p(y_i / x)$$

Для непрерывных случайных величин:

$$M(Y / X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y / x) dy,$$

где $f(y/x)$ – условная плотность случайной величины Y при $X=x$.

Условное математическое ожидание $M(Y/x)=f(x)$ является функцией от x и называется **функцией регрессии X на Y** .

$$p(x_1) = 0,15 + 0,30 = 0,45$$

$$p(y_1 / x_1) = p(x_1, y_1) / p(x_1) = 0,15 / 0,45 = 1/3;$$

$$p(y_2 / x_1) = p(x_1, y_2) / p(x_1) = 0,30 / 0,45 = 2/3;$$

$$M(Y / X = x_1) = \sum_{j=1}^2 y_j p(y_j / x_1) = y_1 p(y_1 / x_1) + y_2 p(y_2 / x_1) = 3/3 + 12/3 = 5.$$

Аналогично определяются условная дисперсия и условные моменты системы случайных величин.

Зависимые и независимые случайные величины.

Случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того какое значение принимает другая случайная величина.

Понятие зависимости случайных величин является очень важным в теории вероятностей.

Условные распределения независимых случайных величин равны их безусловным распределениям.

Определим необходимые и достаточные условия независимости случайных величин.

Теорема. Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы (X, Y) была равна произведению функций распределения составляющих.

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$$

Аналогичную теорему можно сформулировать и для плотности распределения:

Теорема. Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы плотность совместного распределения системы (X, Y) была равна произведению плотностей распределения составляющих.

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

Определение. Корреляционным моментом μ_{xy} случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин.

$$\mu_{xy} = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}$$

Практически используются формулы:

$$\text{Для дискретных случайных величин: } \mu_{xy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [x_i - M(X)][y_j - M(Y)]p(x_i, y_j)$$

$$\text{Для непрерывных случайных величин: } \mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)][y - M(Y)]f(x, y)dx dy$$

Корреляционный момент служит для того, чтобы охарактеризовать связь между случайными величинами. Если случайные величины независимы, то их корреляционный момент равен нулю.

Корреляционный момент имеет размерность, равную произведению размерностей случайных величин X и Y . Этот факт является недостатком этой числовой

характеристики, т.к. при различных единицах измерения получаются различные корреляционные моменты, что затрудняет сравнение корреляционных моментов различных случайных величин.

Для того, чтобы устранить этот недостаток применяется другая характеристика – коэффициент корреляции.

Определение. Коэффициентом корреляции r_{xy} случайных величин X и Y называется отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин.

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Коэффициент корреляции является безразмерной величиной. Коэффициент корреляции независимых случайных величин равен нулю.

Свойство: Абсолютная величина корреляционного момента двух случайных величин X и Y не превышает среднего геометрического их дисперсий.

$$|\mu_{xy}| \leq \sqrt{D_x D_y}$$

Свойство: Абсолютная величина коэффициента корреляции не превышает единицы.

$$|r_{xy}| \leq 1$$

Случайные величины называются **коррелированными**, если их корреляционный момент отличен от нуля, и **некоррелированными**, если их корреляционный момент равен нулю.

Если случайные величины независимы, то они и некоррелированы, но из некоррелированности нельзя сделать вывод о их независимости.

Если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

Часто по заданной плотности распределения системы случайных величин можно определить зависимость или независимость этих величин.

Наряду с коэффициентом корреляции степень зависимости случайных величин можно охарактеризовать и другой величиной, которая называется **коэффициентом ковариации**. Коэффициент ковариации определяется формулой:

$$k(X, Y) = M(XY) - M(X) \cdot M(Y)$$

Лекция 8.

Теория массового обслуживания.

Случайные процессы.

Система массового обслуживания состоит из некоторого числа обслуживающих единиц или **каналов**, работа которых состоит в выполнении поступающих по этим каналам **заявок**.

Примеры систем массового обслуживания весьма распространены на практике. Это различные телефонные станции, ремонтные мастерские и проч. Вид и количество поступающих на эти системы заявок различны и, вообще говоря, случайны.

Теория массового обслуживания описывает закономерности функционирования таких систем.

Определение. Процесс функционирования системы массового обслуживания называется **случайным процессом**.

Чтобы оптимизировать процесс функционирования системы массового обслуживания его надо изучить и описать математически.

Теория массового обслуживания является очень быстро развивающимся разделом теории вероятностей, т.к. ее применение на практике чрезвычайно широко.

Случайный процесс, протекающий в системе массового обслуживания состоит

в том, что система в случайные моменты времени переходит из одного состояния в другое. Меняется число заявок, число занятых каналов, число заявок в очереди и проч.

Определение. Если переход системы из одного состояния в другое происходит скачком, а количество состояний системы (конечное или бесконечное) можно пронумеровать, то такая система называется **системой дискретного типа**.

Если количество возможных состояний счетно, то сумма вероятностей нахождения системы в одном из состояний равна 1.

$$\sum_k p_k(t) = 1$$

Совокупность вероятностей $p_k(t)$ для каждого момента времени характеризует данное **сечение** случайного процесса.

Случайные процессы со счетным множеством состояний бывают двух типов: **с дискретным** или **непрерывным временем**.

Если переходы системы из одного состояния в другое могут происходить только в строго определенные моменты времени, то случайный процесс будет процессом с дискретным временем, а если переход возможен в любой момент времени, то процесс будет процессом с непрерывным временем.

Поскольку в реальности заявки на систему массового обслуживания могут поступать в любой момент времени, то большинство реальных систем массового обслуживания будут системами с процессом с непрерывным временем.

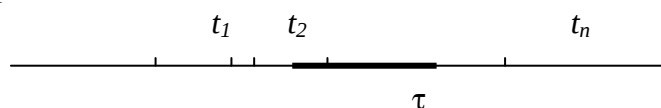
Для того, чтобы описать случайный процесс в системе с непрерывным временем необходимо прежде всего проанализировать причины, вызывающие изменение состояния системы. Эти причины определяются потоком заявок, поступающих на систему.

Поток событий.

Определение. **Потоком событий** называется последовательность событий, происходящих один за другим в какие-то моменты времени.

Характер событий, образующих поток может быть различным, а если события отличаются друг от друга только моментом времени, в который они происходят, то такой поток событий называется **однородным**.

Однородный поток можно изобразить последовательностью точек на оси, соответствующей времени:



Определение. Поток событий называется **регулярным**, если события следуют одно за другим через строго определенные промежутки времени.

Определение. Поток событий называется **стационарным**, если вероятность попадания того ли иного числа событий на участок времени τ зависит только от длины участка и не зависит от того, где именно на оси расположен этот участок.

Стационарность потока событий означает, что плотность потока постоянна, отсутствуют промежутки времени, в течение которых событий больше чем обычно. Классический пример – “час пик” на транспорте.

Определение. Поток событий называется **потоком без последствий**, если для любых неперекрывающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие.

Отсутствие последствий означает, что заявки в систему поступают независимо друг от друга. Поток выходных событий систем массового обслуживания обычно имеет последствие, даже если входной поток его не имеет. Пример – вход пассажиров на станцию метро – поток без последствий, т.к. причины прихода отдельного пассажира не

связаны с причинами прихода всех остальных, а выход пассажиров со станции – поток с последствием, т.к. он обусловлен прибытием поезда.

Последствие, свойственное выходному потоку следует учитывать, если этот поток в свою очередь является входным для какой-либо другой системы.

Определение. Поток событий называется **ординарным**, если вероятность попадания на элементарный участок Δt двух или более событий достаточно мало по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Условие ординарности означает, что заявки на систему приходят по одному, а не парами, тройками и т.д. Однако, если заявки поступают **только** парами, **только** тройками и т.д., то такой поток легко свести к ординарному.

Определение. Если поток событий стационарен, ординарен и без последствий, то такой поток называется **простейшим (пуассоновским)** потоком.

Это название связано с тем, что в этом случае число событий, попадающих на любой фиксированный интервал времени, распределено по распределению Пуассона.

В соответствии с этим законом распределения математическое ожидание числа точек, попавших на участок времени τ , имеет вид:

$$a = \lambda \tau$$

λ - плотность потока – среднее число событий в единицу времени.

Вероятность того, что за время τ произойдет ровно m событий, равна

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda \tau)^m}{m!} e^{-\lambda \tau}$$

Вероятность того, что в течение данного времени не произойдет ни одного события, равна:

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda \tau}$$

Пусть T – промежуток времени между двумя произвольными соседними событиями в простейшем потоке. Найдем функцию распределения

$$F(t) = P(T < t)$$

В соответствии с законом распределения Пуассона, получаем:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t};$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны:

$$m_t = \frac{1}{\lambda}; \quad D_t = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma_t = \frac{1}{\lambda};$$

Таким образом, для величины T получили показательный закон распределения.

Определение. **Мгновенной плотностью** потока событий называется предел отношения среднего числа событий, приходящегося на элементарный отрезок времени $(t, t + \Delta t)$, к длине этого участка, которая стремится к нулю.

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t}$$

Как видно из приведенного определения, с учетом того, что среднее число событий на участке времени равно математическому ожиданию, то можно сказать, что *мгновенная плотность потока равна производной по времени от математического ожидания числа*

событий на участке $(0, t)$.

Определение. **Нестационарным пуассоновским потоком** называется ординарный поток однородных событий без последствий с переменной плотностью $\lambda(t)$.

Для такого потока число событий, попадающих на участок длины τ , начинающийся в точке t_0 , подчиняется закону Пуассона:

$$P_m(\tau, t_0) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь a – математическое ожидание числа событий на участке от t_0 до $t_0 + \tau$. Оно вычисляется по формуле:

$$a = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \lambda(t) dt$$

Величина a не только от длины участка τ , но и от его положения во времени. Закон распределения промежутка T между двумя соседними событиями также будет зависеть от того, где на временной оси расположено первое из событий, а также от функции $\lambda(t)$.

Вероятность того, что на участке времени от t_0 до $t_0 + t$ не появится ни одного события, равна

$$P(T \geq t) = e^{-a} = e^{-\int_{t_0}^{t_0 + t} \lambda(t) dt}$$

Тогда, соответственно, вероятность появления хотя бы одного события на этом интервале времени будет равна:

$$F_{t_0}(t) = 1 - P(T \geq t) = 1 - e^{-\int_{t_0}^{t_0 + t} \lambda(t) dt}$$

Плотность распределения можно найти дифференцированием:

$$f_{t_0}(t) = \lambda(t_0 + t) e^{-\int_{t_0}^{t_0 + t} \lambda(t) dt}$$

Эта плотность распределения уже не будет показательной. Она зависит от параметра t_0 и вида функции $\lambda(t)$. Однако, условие отсутствия последствие в этом виде потока сохраняется.

Поток Пальма.

Поток Пальма еще называют **поток с ограниченным последствием**.

Определение. **Потоком Пальма** называется ординарный поток однородных событий, если промежутки между событиями $T_1, T_2, \dots$ представляют собой независимые случайные величины.

Если промежутки времени $T_1, T_2, \dots$ распределены по показательному закону, то поток Пальма становится простейшим потоком.

Примером потока Пальма может служить движение колонны автомобилей. Пусть движется колонна автомобилей, каждый из которых, двигаясь с одинаковой скоростью, стремится держаться на некотором заданном расстоянии от впереди идущего автомобиля. Однако, вследствие воздействия множества случайных факторов, это расстояние выдерживается не точно. Тогда времена пересечения каждым автомобилем определенного

рубежа $T_1, T_2, \dots$ будут независимыми случайными величинами и образуют по ток Пальма.

Отметим, что если автомобили будут стремиться выдерживать заданное расстояние не от соседней машины, а от головной, то моменты пересечения этого рубежа уже не будут образовывать поток Пальма.

Поток Пальма часто получается в качестве выходного потока систем массового обслуживания.

Теорема. (Теорема Пальма) Пусть на систему массового обслуживания поступает поток заявок типа Пальма, причем заявка, заставшая все каналы занятыми, получает отказ (не обслуживается). Если при этом время обслуживания имеет показательный закон распределения, то поток не обслуженных заявок является также потоком типа Пальма.

Этот факт важен, так как на практике получившие отказ заявки обычно перенаправляются на другую систему массового обслуживания, т.е. образуют для этой системы входной поток.

Так, если на систему массового обслуживания поступает простейший входной поток, то поток заявок, получивших отказ, уже не будет простейшим, однако, будет потоком с ограниченным последствием.

Потоки Эрланга.

Потоки Эрланга также являются потоками с ограниченным последствием. Они образуются просеиванием простейшего потока.

Суть этого просеивания состоит в следующем. Если изобразить на временной оси простейший поток, поставив в соответствие каждому событию некоторую точку, и выбросить из потока каждую вторую точку, то получим **поток Эрланга первого порядка**. Оставив каждую третью точку и выбросив две промежуточные, получаем **поток Эрланга второго порядка** и т.д.

Определение. **Потоком Эрланга k – порядка** называется поток, получаемый из простейшего, если сохранить в простейшем потоке каждую $(k + 1)$ – ю точку, а остальные выбросить.

Очевидно, что простейший поток может рассматриваться как поток Эрланга нулевого порядка.

Пусть имеется простейший поток с интервалами $T_1, T_2, \dots$ между событиями. Величина T – промежуток времени между двумя соседними событиями в потоке Эрланга k – го порядка.

Очевидно, что $T = \sum_{i=1}^{k+1} T_i$. Так как первоначальный поток – простейший, то случайные величины $T_1, T_2, \dots$ распределены по показательному закону:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t};$$

Обозначим $f_k(t)$ плотность распределения величины T для потока Эрланга k – го порядка. Если умножить эту плотность на элементарный отрезок времени dt , мы получим вероятность того, что величина T примет значение в некоторой сколь угодно малой окрестности точки t – $(t, t + dt)$. На этот участок должна попасть конечная точка промежутка, а предыдущие k точек простейшего потока – на промежуток $(0, t)$.

Вероятность первого события равна λdt , а второго - $P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$. Эти события должны осуществиться совместно, значит, их вероятности надо перемножить.

$$f_k(t)dt = \frac{\lambda(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dt$$

$$f_k(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Полученный закон распределения называется **законом распределением Эрланга k -го порядка**.

При $k = 0$ получаем показательный закон распределения.

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение для распределения Эрланга находятся по формулам:

$$m_k = \frac{k+1}{\lambda}; \quad D_k = \frac{k+1}{\lambda^2}; \quad \sigma_k = \frac{\sqrt{k+1}}{\lambda};$$

Плотность потока Эрланга равна

$$\Lambda_k = \frac{\lambda}{k+1};$$

Для промежутка времени между двумя соседними событиями в потоке T рассмотрим нормированную величину $\tilde{T} = \frac{T}{k+1}$. Такой поток будет называться **нормированным потоком Эрланга**.

Закон распределения для такого потока будет иметь вид:

$$\tilde{f}_k(t) = \frac{\Lambda_k (\Lambda_k t)^k}{k!} e^{-\Lambda_k t}, \quad \Lambda_k = \lambda(k+1);$$

Математическое ожидание и дисперсия будут равны:

$$\tilde{m}_k = m_0 = \frac{1}{\lambda}; \quad \tilde{D}_k = \frac{D_k}{(k+1)^2} = \frac{1}{\lambda^2(k+1)};$$

Получается, что неограниченном увеличении k нормированный поток Эрланга приближается к регулярному потоку с постоянными интервалами, равными $\frac{1}{\lambda}$.

Изменение порядка нормированного потока Эрланга позволяет получить различную степень последствия. Последствие возрастает с увеличением k .

На практике это удобно для приближенного представления реального потока с каким – либо последствием потоком Эрланга. При этом порядок этого потока определяется из того соображения, чтобы характеристики потока Эрланга (математическое ожидание и дисперсия) совпадали с характеристиками исходного потока.

Цепи Маркова.

(Андрей Андреевич Марков (1856-1922) – русский математик, академик)

Определение. Процесс, протекающий в физической системе, называется **марковским**, если в любой момент времени вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от состояния системы в текущий момент и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние.

Определение. **Цепью Маркова** называется последовательность испытаний, в каждом из которых появляется только одно из k несовместных событий A_i из полной группы. При этом условная вероятность $p_{ij}(s)$ того, что в s -ом испытании наступит событие A_j при условии, что в $(s-1)$ -ом испытании наступило событие A_i , не зависит от

результатов предшествующих испытаний.

Независимые испытания являются частным случаем цепи Маркова. События называются **состояниями системы**, а испытания – **изменениями состояний системы**.

По характеру изменений состояний цепи Маркова можно разделить на две группы.

Определение. Цепью Маркова с дискретным временем называется цепь, изменение состояний которой происходит в определенные фиксированные моменты времени. Цепью Маркова с непрерывным временем называется цепь, изменение состояний которой возможно в любые случайные моменты времени.

Определение. Однородной называется цепь Маркова, если условная вероятность p_{ij} перехода системы из состояния i в состояние j не зависит от номера испытания. Вероятность p_{ij} называется **переходной вероятностью**.

Допустим, число состояний конечно и равно k .

Тогда матрица, составленная из условных вероятностей перехода будет иметь вид:

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kk} \end{pmatrix}$$

Эта матрица называется **матрицей перехода системы**.

Т.к. в каждой строке содержатся вероятности событий, которые образуют полную группу, то, очевидно, что сумма элементов каждой строки матрицы равна единице.

Пусть $P_{ij}(n)$ – вероятность того, что в результате n испытаний система перейдет из состояния i в состояние j , r – некоторое промежуточное состояние между состояниями i и j . Вероятности перехода из одного состояния в другое $p_{ij}(1) = p_{ij}$.

Тогда вероятность $P_{ij}(n)$ может быть найдена по формуле, называемой **равенством Маркова**:

$$P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^k P_{ir}(m) P_{rj}(n-m)$$

Здесь m – число шагов (испытаний), за которое система перешла из состояния i в состояние r .

В принципе, равенство Маркова есть ни что иное как несколько видоизменная формула полной вероятности.

Лекция 9.

Статистические оценки параметров распределения.

Математическая статистика.

Основной задачей математической статистики является разработка методов получения научно обоснованных выводов о массовых явлениях и процессах из данных наблюдений и экспериментов. Эти выводы и заключения относятся не к отдельным испытаниям, из повторения которых складывается данное массовое явление, а представляют собой утверждения об общих вероятностных характеристиках данного процесса, то есть о вероятностях, законах распределения, математических ожиданиях, дисперсиях и т. д. Такое использование фактических данных как раз и является отличительной чертой статистического метода.

Выборки.

Генеральной совокупностью называется совокупность объектов, из которых производится выборка. **Выборочной совокупностью** (выборкой) называется совокупность случайно отобранных объектов из генеральной совокупности. Число объектов в совокупности называется её объёмом.

Выборку можно осуществлять двумя способами. Если после исследования объект из выборки возвращается в генеральную совокупность, то такая выборка называется **повторной**; если не возвращается – **бесповторной**.

Выборка называется репрезентативной (представительной), если по её данным можно достаточно уверенно судить об интересующем признаке генеральной совокупности.

Вариационные ряды.

Пусть в генеральной совокупности исследуется некоторый количественный признак. Из неё случайным образом извлекается выборка объёма n , т.е. число элементов выборки равно n .

Каждое наблюдаемое в выборке значение x_i , $i = \overline{1, k}$, называется **вариантой**.

Частота n_i - это число наблюдений значения x_i в выборке. **Относительная частота** W_i - это отношение частоты n_i к объёму выборки:

$$W_i = \frac{n_i}{n}.$$

Таблица следующего вида называется **вариационным рядом** (варианты расположены в порядке возрастания):

x_1	x_2	...	x_k
n_1	n_2	...	n_k

Это так называемый **дискретный вариационный ряд**.

Для наглядности строят различные графики статистического распределения.

Эмпирическая функция $F_s(x) = \frac{n_x}{n}$, где n_x – число вариантов, меньших x .

Соединив соседние точки $(x_i, F_s(x_i))$ отрезками прямых получим **кумуляту**.

В том случае, когда значения изучаемого признака сколь угодно мало отличаются друг от друга, строят **интервальные вариационные ряды**:

Интервал	$x_0 - x_1$	$x_1 - x_2$	...	$x_{k-1} - x_k$
Частота	n_1	n_2	...	n_k

Здесь частота – это число вариантов, попавших в соответствующий интервал. При построении кумуляты и полигона в качестве 1-ой координаты берётся середина соответствующего интервала. Если все интервалы имеют одинаковую длину, то это **равновеликие интервалы**. Иначе **неравновеликие интервалы**. Часто первый и последний интервалы не имеют соответственно нижней и верхней границ, тогда считают длину 1-го интервала равной длине 2-го интервала, а длину последнего интервала равной длине предпоследнего.

Интервальные вариационные ряды графически можно представить с помощью гистограммы. **Гистограмма** – это ступенчатая фигура образованная прямоугольниками, основаниями которых служат интервалы

(x_{i-1}, x_i) , а высоты равны $\frac{W_i}{\Delta_i}$, где $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$. Площадь i -го прямоугольника равна W_i , а всей гистограммы – 1. Соединив середины верхних сторон прямоугольников, получим **полигон**.

Точечные оценки параметров генеральной совокупности.

Во многих случаях мы располагаем информацией о виде закона распределения случайной величины (нормальный, бернуллиевский, равномерный и т. п.), но не знаем

параметров этого распределения, таких как $M\xi$, $D\xi$. Для определения этих параметров применяется выборочный метод.

Пусть выборка объема n представлена в виде вариационного ряда. Назовем **выборочной средней** величину

$$\bar{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_k m_k}{n} = x_1 \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \dots + \frac{m_k}{n}$$

Величина $\omega_i = \frac{m_i}{n}$ называется **относительной частотой** значения признака x_i . Если значения признака, полученные из выборки не группировать и не представлять в виде вариационного ряда, то для вычисления выборочной средней нужно пользоваться формулой

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Естественно считать величину $\bar{X}$ выборочной оценкой параметра $M\xi$. Выборочная оценка параметра, представляющая собой число, называется **точечной оценкой**.

Выборочную дисперсию

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{X})^2 \omega_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$$

можно считать точечной оценкой дисперсии $D\xi$ генеральной совокупности.

Пусть выборочный параметр δ рассматривается как выборочная оценка параметра Δ генеральной совокупности и при этом выполняется равенство

$$M\delta = \Delta.$$

Такая выборочная оценка называется **несмещенной**.

Для доказательства несмещенности некоторых точечных оценок будем рассматривать выборку объема n как систему n независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, каждая из которых имеет тот же закон распределения с теми же параметрами, что и случайная величина ξ , представляющая генеральную совокупность. При таком подходе становятся очевидными равенства: $Mx_i = M\xi_i = M\xi$; $Dx_i = D\xi_i = D\xi$ для всех $k = 1, 2, \dots, n$.

Теперь можно показать, что выборочная средняя $\bar{X}$ есть несмещенная оценка средней генеральной совокупности или, что то же самое, математического ожидания интересующей нас случайной величины ξ :

$$M\bar{X} = M \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} (M\xi_1 + M\xi_2 + \dots + M\xi_n) = \frac{1}{n} n M\xi = M\xi.$$

Выведем формулу для дисперсии выборочной средней:

$$D\bar{X} = D \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n^2} (D\xi_1 + D\xi_2 + \dots + D\xi_n) = \frac{1}{n^2} n D\xi = \frac{D\xi}{n}.$$

Найдем теперь, чему равно математическое ожидание выборочной дисперсии σ^2 . Сначала преобразуем σ^2 следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - M\xi + M\xi - \bar{x})^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((x_i - M\xi)^2 - 2(x_i - M\xi)(\bar{x} - M\xi) + (\bar{x} - M\xi)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - M\xi)^2 - (\bar{x} - M\xi)^2\end{aligned}$$

Здесь использовано преобразование:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n 2(x_i - M\xi)(\bar{x} - M\xi) &= 2(\bar{x} - M\xi) \sum_{i=1}^n (x_i - M\xi) = \\ &= 2(\bar{x} - M\xi) \left(\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n M\xi \right) = 2(\bar{x} - M\xi)(n\bar{x} - nM\xi) = 2n(\bar{x} - M\xi)^2\end{aligned}$$

Теперь, используя полученное выше выражение для величины σ^2 , найдем ее математическое ожидание.

$$\begin{aligned}M\sigma^2 &= M \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - M\xi)^2 - (\bar{x} - M\xi)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(x_i - M\xi)^2 - M(\bar{x} - M\xi)^2 = \frac{1}{n} n D\xi - D\bar{x} = \\ &= D\xi - \frac{D\xi}{n} = \frac{n-1}{n} D\xi.\end{aligned}$$

Так как $M\sigma^2 \neq D\xi$, **выборочная дисперсия не является несмещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности.**

Чтобы получить несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности, нужно умножить выборочную дисперсию на $\frac{n}{n-1}$. Тогда получится величина

$s^2 = \frac{n}{n-1} \sigma^2$, называемая **исправленной выборочной дисперсией**.

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Пусть имеется ряд несмещенных точечных оценок одного и того же параметра генеральной совокупности. Та оценка, которая имеет наименьшую дисперсию называется **эффективной**.

Полученная из выборки объема n точечная оценка δ_n параметра Δ генеральной совокупности называется **состоятельной**, если она сходится по вероятности к Δ . Это означает, что для любых положительных чисел ε и γ найдется такое число $n_{\varepsilon\gamma}$, что для всех чисел n , удовлетворяющих неравенству $n > n_{\varepsilon\gamma}$ выполняется условие $P(|\delta_n - \Delta| < \varepsilon) > 1 - \gamma$.

$\bar{X}$ и S^2 являются несмещёнными, состоятельными и эффективными оценками величин $M\xi$ и $D\xi$.

Интервальные оценки.

Точечные оценки параметров генеральной совокупности могут быть приняты в качестве ориентировочных, первоначальных результатов обработки выборочных данных. Их недостаток заключается в том, что неизвестно, с какой точностью оценивается параметр. Если для выборок большого объема точность обычно бывает достаточной (при условии несмещенности, эффективности и состоятельности оценок), то для выборок небольшого объема вопрос точности оценок становится очень важным.

Введем понятие интервальной оценки неизвестного параметра генеральной совокупности (или случайной величины ξ , определенной на множестве объектов этой генеральной совокупности). Обозначим этот параметр через Δ . По сделанной выборке по определенным правилам найдем числа Δ_1 и Δ_2 , так чтобы выполнялось условие:

$$P(\Delta_1 < \Delta < \Delta_2) = P(\Delta \in (\Delta_1; \Delta_2)) = \gamma$$

Числа Δ_1 и Δ_2 называются **доверительными границами**, интервал (Δ_1, Δ_2) — **доверительным интервалом** для параметра Δ . Число γ называется **доверительной вероятностью** или **надежностью** сделанной оценки.

Сначала задается надежность. Обычно ее выбирают равной 0.95, 0.99 или 0.999. Тогда вероятность того, что интересующий нас параметр попал в интервал (Δ_1, Δ_2) достаточно высока. Число $(\Delta_1 + \Delta_2) / 2$ — середина доверительного интервала — будет давать значение параметра Δ с **точностью** $(\Delta_2 - \Delta_1) / 2$, которая представляет собой половину длины доверительного интервала.

Границы Δ_1 и Δ_2 определяются из выборочных данных и являются функциями от случайных величин $x_1, x_2, \dots, x_n$, а следовательно — сами случайные величины. Отсюда — доверительный интервал (Δ_1, Δ_2) тоже случаен. Он может покрывать параметр Δ или нет. Именно в таком смысле нужно понимать случайное событие, заключающееся в том, что доверительный интервал покрывает число Δ .

Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии.

Пусть случайная величина ξ (можно говорить о генеральной совокупности) распределена по нормальному закону, для которого известна дисперсия $D\xi = \sigma^2$ ($\sigma > 0$). Из генеральной совокупности (на множестве объектов которой определена случайная величина) делается выборка объема n . Выборка $x_1, x_2, \dots, x_n$ рассматривается как совокупность n независимых случайных величин, распределенных так же как ξ (подход, которому дано объяснение выше по тексту).

Ранее также обсуждались и доказаны следующие равенства:

$$Mx_1 = Mx_2 = \dots = Mx_n = M\xi;$$

$$Dx_1 = Dx_2 = \dots = Dx_n = D\xi;$$

$$M\bar{X} = M\xi;$$

$$D\bar{X} = D\xi/n;$$

Достаточно просто доказать (мы доказательство опускаем), что случайная величина $\bar{X}$ в данном случае также распределена по нормальному закону.

Обозначим неизвестную величину $M\xi$ через a и подберем по заданной надежности γ число $d > 0$ так, чтобы выполнялось условие:

$$P(|\bar{X} - a| < d) = \gamma \quad (1)$$

Так как случайная величина $\bar{X}$ распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $M\bar{X} = M\xi = a$ и дисперсией $D\bar{X} = D\xi/n = \sigma^2/n$, получаем:

$$\begin{aligned} P(|\bar{X} - a| < d) &= P(a - d < \bar{X} < a + d) = \\ &= \Phi\left(\frac{a + d - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{a - d - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 2\Phi\left(\frac{d\sqrt{n}}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Осталось подобрать d таким, чтобы выполнялось равенство $2\Phi\left(\frac{d\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \gamma$ или

$$\Phi\left(\frac{d\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \frac{\gamma}{2}.$$

Для любого $\gamma \in [0;1]$ можно по таблице найти такое число t , что $\Phi(t) = \gamma/2$. Это число t иногда называют **квантилем**.

Теперь из равенства

$$\frac{d\sqrt{n}}{\sigma} = t$$

определим значение d : $d = \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}$.

Окончательный результат получим, представив формулу (1) в виде:

$$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma t}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}\right) = \gamma.$$

Смысл последней формулы состоит в следующем: с надежностью γ доверительный интервал

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}\right)$$

покрывает неизвестный параметр $a = M\xi$ генеральной совокупности. Можно сказать иначе: точечная оценка $\bar{X}$ определяет значение параметра $M\xi$ с точностью $d = \sigma t / \sqrt{n}$ и надежностью γ .

Задача. Пусть имеется генеральная совокупность с некоторой характеристикой, распределенной по нормальному закону с дисперсией, равной 6,25. Произведена выборка объема $n = 27$ и получено средневыворочное значение характеристики $\bar{X} = 12$. Найти доверительный интервал, покрывающий неизвестное математическое ожидание исследуемой характеристики генеральной совокупности с надежностью $\gamma = 0,99$.

Решение. Сначала по таблице для функции Лапласа найдем значение t из равенства $\Phi(t) = \gamma / 2 = 0,495$. По полученному значению $t = 2,58$ определим точность оценки (или половину длины доверительного интервала) d : $d = 2,5 \times 2,58 / \sqrt{27} \approx 1,24$. Отсюда получаем искомый доверительный интервал: (10,76; 13,24).

Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии.

Пусть ξ – случайная величина, распределенная по нормальному закону с неизвестным математическим ожиданием $M\xi$, которое обозначим буквой a . Произведем выборку объема n . Определим среднюю выборочную $\bar{X}$ и исправленную выборочную дисперсию s^2 по известным формулам.

Случайная величина

$$t = \frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{s}$$

распределена по закону Стьюдента с $n - 1$ степенями свободы.

Задача заключается в том, чтобы по заданной надежности γ и по числу степеней свободы $n - 1$ найти такое число t_γ , чтобы выполнялось равенство

$$P\left(\left|\frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{s}\right| < t_\gamma\right) = \gamma \quad (2)$$

или эквивалентное равенство

$$P\left(\bar{X} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \gamma. \quad (3)$$

Здесь в скобках написано условие того, что значение неизвестного параметра a принадлежит некоторому промежутку, который и является доверительным интервалом. Его границы зависят от надежности γ , а также от параметров выборки $\bar{X}$ и s .

Чтобы определить значение t_γ по величине γ , равенство (2) преобразуем к виду:

$$P\left(\left|\frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{s}\right| \geq t_\gamma\right) = 1 - \gamma$$

Теперь по таблице для случайной величины t , распределенной по закону Стьюдента, по вероятности $1 - \gamma$ и числу степеней свободы $n - 1$ находим t_γ . Формула (3) дает ответ поставленной задачи.

Задача. На контрольных испытаниях 20-ти электроламп средняя продолжительность их работы оказалась равной 2000 часов при среднем квадратическом отклонении (рассчитанном как корень квадратный из исправленной выборочной дисперсии), равном 11-ти часам. Известно, что продолжительность работы лампы является нормально распределенной случайной величиной. Определить с надежностью 0,95 доверительный интервал для математического ожидания этой случайной величины.

Решение. Величина $1 - \gamma$ в данном случае равна 0,05. По таблице распределения Стьюдента, при числе степеней свободы, равном 19, находим: $t_\gamma = 2,093$. Вычислим теперь точность оценки: $2,093 \times 121 / \sqrt{20} = 56,6$. Отсюда получаем искомый доверительный интервал: (1943,4; 2056,6).

Доверительный интервал для дисперсии нормального распределения.

Пусть случайная величина ξ распределена по нормальному закону, для которого дисперсия $D\xi$ неизвестна. Делается выборка объема n . Из нее определяется исправленная выборочная дисперсия s^2 . Случайная величина

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{D\xi}$$

распределена по закону χ^2 с $n - 1$ степенями свободы. По заданной надежности γ можно найти сколько угодно границ χ_1^2 и χ_2^2 интервалов, таких, что

$$P(\chi_1^2 < \chi^2 < \chi_2^2) = \gamma \quad (*)$$

Найдем χ_1^2 и χ_2^2 из следующих условий:

$$P(\chi^2 \leq \chi_1^2) = (1 - \gamma) / 2 \quad (**)$$

$$P(\chi^2 \geq \chi_2^2) = (1 - \gamma) / 2 \quad (***)$$

Очевидно, что при выполнении двух последних условий справедливо равенство (*).

В таблицах для случайной величины χ^2 обычно дается решение уравнения $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = q$. Из такой таблицы по заданной величине q и по числу степеней свободы $n - 1$ можно определить значение χ_q^2 . Таким образом, сразу находится значение χ_2^2 в формуле (***).

Для определения χ_1^2 преобразуем (**):

$$P(\chi^2 \geq \chi_1^2) = 1 - (1 - \gamma) / 2 = (1 + \gamma) / 2$$

Полученное равенство позволяет определить по таблице значение χ_1^2 .

Теперь, когда найдены значения χ_1^2 и χ_2^2 , представим равенство (*) в виде

$$P\left(\chi_1^2 < \frac{(n-1)s^2}{D\xi} < \chi_2^2\right) = \gamma.$$

Последнее равенство перепишем в такой форме, чтобы были определены границы доверительного интервала для неизвестной величины $D\xi$:

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_2^2} < D\xi < \frac{(n-1)s^2}{\chi_1^2}\right) = \gamma.$$

Отсюда легко получить формулу, по которой находится доверительный интервал для стандартного отклонения:

$$P\left(\frac{\sqrt{(n-1)}s}{\sqrt{\chi_2^2}} < \sqrt{D\xi} < \frac{\sqrt{(n-1)}s}{\sqrt{\chi_1^2}}\right) = \gamma \quad (****)$$

Задача. Будем считать, что шум в кабинах вертолетов одного и того же типа при работающих в определенном режиме двигателях — случайная величина, распределенная по нормальному закону. Было случайным образом выбрано 20 вертолетов, и произведены замеры уровня шума (в децибелах) в каждом из них. Исправленная выборочная дисперсия измерений оказалась равной 22,5. Найти доверительный интервал, накрывающий неизвестное стандартное отклонение величины шума в кабинах вертолетов данного типа с надежностью 98%.

Решение. По числу степеней свободы, равному 19, и по вероятности $(1 - 0,98)/2 = 0,01$ находим из таблицы распределения χ^2 величину $\chi_2^2 = 36,2$. Аналогичным образом при вероятности $(1 + 0,98)/2 = 0,99$ получаем $\chi_1^2 = 7,63$. Используя формулу (****), получаем искомый доверительный интервал: (3,44; 7,49).

IV. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

По курсу «Математика» предусмотрены 3-4 контрольных работы за семестр. Целью рубежного контроля успеваемости является выявление уровня знаний студентов отдельной темы.

При подготовке к контрольной работе студенту необходимо изучить и систематизировать теоретический материал по теме. Решить достаточное количество задач и упражнений, во время аудиторной и самостоятельной домашней работы.

К главной задаче рубежного контроля относится повышение мотивации студентов к регулярной учебной работе, самостоятельной работе, углублению знаний, дифференциации итоговой оценки знаний.

V. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

Внеаудиторная работа по математике включает в себя: совершенствование и закрепление теоретических знаний, полученных на лекционных и практических занятиях; формирование навыков практической работы - доведение умений до автоматизма путем решения упражнений - заданий, требующее повторного выполнения действий с целью его усвоения. Самостоятельный поиск методов решения задач развивает способность активного мышления.

При выполнении домашней работы студенты могут использовать различные источники приобретения информации: конспекты лекций, учебно-методические материалы курса.

Самостоятельная работа над домашним заданием активизирует умственные усилия обучаемых, прививает им необходимые навыки работы с научной литературой, стимулирует развитие самостоятельности мышления, повышает качество знаний.

VI. КОМПЛЕКТ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ, ДОМАШНИХ РАБОТ

РГР 1. Введение в математический анализ с элементами аналитической геометрии. Дифференциальное исчисление.

Вариант 0.

1. Издержки по изготовлению партии деталей определяется по формуле

$$\begin{cases} y = 0,5x + 30 & x_1 = 150 \\ y = 0,6x + 10 & x_2 = 250 \end{cases}, \text{ где } x - \text{объем партии.}$$

Требуется:

- 1) построить графики функций;
 - 2) провести экономический анализ;
 - 3) определить какой из технологических процессов выгоднее в зависимости от объема партии;
 - 4) найти себестоимость продукции при x_1 и x_2 для обоих вариантов.
2. Рентабельность производства y связана с себестоимостью

продукции x следующей зависимостью: $y = \frac{50}{x} - 1$, где p — цена единицы продукции.

Требуется:

- 1) построить график зависимости;
 - 2) пояснить его экономический смысл;
 - 3) вычислить рентабельность при $x_1 = 30$ и $x_2 = 75$.
3. Заданы функции полного дохода $R = -2q^2 + 10q$ и полных издержек $C = 2q + 6$, где q — количество проданного товара (предполагается, что продан весь произведенный товар). Определить границы прибыльности производства q_1 и q_2 , и точку q_0 , в которой прибыль достигает максимального значения.

4. Зависимость уровня потребления y (усл.ед.) некоторого вида товара от уровня дохода семьи x (усл.ден.ед.) выражается формулой $y = 3,4 - \frac{144}{x + 10}$. Построить график этой зависимости, провести экономический анализ, вычислить уровень потребления при $x = 130$.

5. Вычислить пределы числовой последовательности и функции.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^3}{(n+1)^2 - (n+1)^3}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 3x^2 + 4}$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \cdot \operatorname{tg} 2x}$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{7}{x}}$$

6. Определить непрерывность функций на области их определения. Исследовать точки разрыва. Построить графики.

$$a) y = \frac{x-3}{x+5}$$

$$б) y = \begin{cases} -x+1, & \text{при } x < 0 \\ 1+x^2, & \text{при } x \geq 0 \end{cases}.$$

7. Опытным путем установлены функции спроса $q = (p + 8)/(p + 2)$ и предложения $s = p + 0,5$, где q и s — количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p — цена товара. Найти: а) равновесную цену, т.е. цену, при

которой спрос и предложение уравниваются; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода при увеличении цены на 5% от равновесной.

8. Вычислить пределы по правилу Лопиталя

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2}{\sin x}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot e^{-x}.$$

9. Исследовать функции с помощью производных и построить их графики

$$a) y = 2x^3 + 3x^2 - 5 \quad б) y = \frac{e^{x+1}}{x+1}.$$

10. Объем продукции Q , произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением $Q = (-5/6)t^3 + (15/2)t^2 + 100t + 50$ (ед.), $t \in [1; 8]$, где t - рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения через час после начала работы и за час до ее окончания.

РГР 2. Функции нескольких переменных.

Вариант 0.

1. Задана функция $z = x^2y + y^3 + \ln x$. Вычислить все производные первого и второго порядка в точке $A(0,1)$.

2. Функция спроса имеет вид $D = f(p, p_A, y) = 15 - 4p + 3p_A + 0,02y$, где D - спрос на товар Q , p - цена товара Q , p_A - цена альтернативного товара, y - доход потребителей. Вычислить коэффициенты эластичности $\varepsilon_p, \varepsilon_A, \varepsilon_y$ и пояснить их экономический смысл при $p = 12, p_A = 18, y = 1000$.

3. Задана функция полезности $U = 4x^{1/4}y^{3/4}$, где x - количество товара X и y - количество товара Y . Требуется оценить изменение полезности, когда x уменьшается от 100 до 99, а y увеличивается от 200 до 201.

4. Найти предельные полезности и предельную норму замещения товара x на товар y для функции полезности $U = \ln x + \ln y + \ln(x+y)$ в точке $A(2;10)$.

5. Производственная функция задана формулой $Q = 100\sqrt{L} \cdot \sqrt{K} - 20L$. Вычислить предельную производительность труда и предельный продукт труда при $L = 100, 400, 2500, K = 100$ у. е.

6. Задана производственная функция $Q = KL^2 + 9$, где Q - количество произведённых товаров или услуг, K и L - ресурсы. Построить кривую безразличия при $Q_0 = 10$, вычислить коэффициент заменяемости ресурсов R_A , пояснить экономический смысл решения, если $A(1,1)$.

7. Фирма производит продукцию на двух заводах; x и y - соответственно объёмы этой продукции за месяц. Сколько продукции ежемесячно следует выпускать на каждом заводе при наименьших суммарных затратах, если функции издержек заводов имеют вид: $C(x, y) = x^2 + y^2 - 10x - 20y + 1250$.

8. Для некоторой фирмы производственная функция имеет вид $Q = f(K, L) = 9LK + L^2$. Затраты на единицу капитала и труда составляют 3 и 2 соответственно. Общая сумма затрат равна 150. Требуется определить уровень затрат на капитал и труд, когда выпуск продукции максимальный. Решить задачу двумя способами: методом подстановки и методом множителей Лагранжа.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2y(2-x-y)$ в области $D: x = 0, y = 0, x + y = 6$.

РГР 3. Элементы линейной алгебры.**Вариант 0.**

1. Задана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Требуется найти:

- 1) транспонированную матрицу A^T ;
- 2) ранг матрицы A ;
- 3) произведение матриц $A^T \cdot A$ и $A \cdot A^T$;
- 4) обратную матрицу A^{-1} .

2. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

- 1) методом обратной матрицы;
- 2) по формулам Крамера;
- 3) методом Гаусса.

4. Исследовать и решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

5. Предприятие производит продукцию трёх видов и использует сырьё двух типов. Нормы расхода сырья на единицу продукции каждого вида заданы матрицей вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ усл.ед.}$$

Стоимость единицы сырья каждого типа задано матрицей $B(15 \ 20)$ усл. ед.

Каковы общие затраты предприятия на производство 150 ед. каждой продукции 1,2,3 типа?

6. Отрасль состоит из 3-х предприятий; матрица внутренних затрат (коэффициенты прямых затрат) имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Требуется: 1) рассчитать вектор конечного продукта непродуцируемого потребления $\vec{Y}$, если известен вектор валового выпуска продукции $\vec{X} = (120, 80, 100)$ (у.е.); 2) найти вектор $\vec{X}$ валового выпуска продукции, если известен вектор конечного потребления $\vec{Y} = (150, 100, 120)$ у.е. для некоторого периода времени T .

7. В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период, усл.ден.ед.

Отрасль		Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
		A	B	C		
Произ-водство	A	6	11	3	80	100
	B	17	12	11	110	150
	C	7	6	7	80	100

- 1) составить матрицу прямых затрат и проверить её продуктивность с помощью критерия продуктивности;
 - 2) вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление отрасли А увеличить в $k=1,5$ раз, а отрасли В на $p=15\%$, отрасли С оставить без изменения.
8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Структурная матрица торговли четырёх стран имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что сумма бюджетов задана

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6270 \text{ (усл.ден.ед.)}.$$

10. Задана матрица коэффициентов прямых затрат

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$$

экономической системы, состоящей из трёх отраслей, и вектор норм добавленной стоимости $\gamma_1 = (5, 2, 7)$.

Определить:

- 1) равновесные цены;
- 2) равновесные цены в случае увеличения нормы добавленной стоимости в первой отрасли на 1,2 ед.;
- 3) подорожание продукции в % всех отраслей;
- 4) инфляцию, вызванную повышением цен, при условии, что выпуск продукции отраслей $X = (150; 300; 200)$ усл.ед.

РГР 4. Интегральное исчисление.

Вариант 0.

1. Вычислить интегралы

$$\int (5x^3 - \sin x + \sqrt[3]{x}) dx,$$

$$\int x \ln x dx,$$

$$\int \frac{dx}{5 + 3 \cos x},$$

$$\int \frac{e^x}{e^x + 4} dx ,$$

$$\int x \sin 3x dx ,$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx ,$$

$$\int \frac{\sqrt[4]{\arctg x}}{1+x^2} dx ,$$

$$\int \frac{dx}{x^3 + x} ,$$

$$\int \lg^3 x dx .$$

2. Найти среднее значение издержек $k(x) = x^2 + 5x + 4$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции x меняется $[0, 3]$ ед. Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

3. Определить запас товаров на складе, образуемых за $t=5$ дней, если поставка товаров характеризуется функцией $f(t) = t^2 + 4t$.

4. Вычислить несобственные интегралы

$$1) \int_0^1 \frac{dx}{x} ,$$

$$2) \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx ,$$

$$3) \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} .$$

5. Вычислить объем тела полученного от вращения фигуры ограниченной линиями $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

РГР 5. Теория вероятностей: случайные события.

Вариант 0.

1. На шести одинаковых карточках написаны буквы “а”, “а”, “а”, “з”, “д”, “ч”. Вынимают наудачу по одной карточке и прикладывают друг к другу. Какова вероятность того, что получится слово “задача”?

2. Из 75 лотерейных билетов, среди которых 5 выигрышных, наудачу берётся 5 билетов. Какова вероятность того, что все они выигрышные?

3. Три одинаковые монеты радиуса 3см. расположены внутри круга радиуса 10см, в котором наудачу бросается точка. Определить вероятность того, что эта точка упадет на одну из монет, если монеты не пересекаются.

4. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определённого продукта по каждому из 3 центральных телевизионных каналов, равна 0,05. Предполагается, что эти события независимы в совокупности. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит рекламу: 1) по всем 3 каналам; 2) хотя бы по одному из этих каналов?

5. Стандарт заполнения счетов, установленный фирмой, предполагает, что не более 5% счетов будут заполняться с ошибками. Время от времени компания проводит случайную выборку счетов для проверки правильности их заполнения. Исходя из того что допустимый уровень ошибок - 5%, и 10 счетов отобраны в случайном порядке, чему равна вероятность того, что среди них окажется один с ошибкой.

6. Агент по недвижимости пытается продать участок земли под застройку. Он полагает, что участок будет продан в течение ближайших 6 месяцев с вероятностью 0,9, если экономическая ситуация в регионе не ухудшится. Если же экономическая ситуация будет ухудшаться, то вероятность продать участок составит 0,5. Экономист,

консультирующий агента, полагает, что с вероятностью равной 0,7 экономическая ситуация в регионе в течение следующих 6 месяцев будет ухудшаться. Чему равна вероятность того, что участок будет продан?

7. На склад магазина поступают изделия, из которых 80% оказываются высшего сорта. Найти вероятность того, что из 100 взятых наудачу изделий не менее 85 окажутся высшего сорта?

8. При штамповке 80% деталей выходят первым сортом. Случайно отобрано 400 деталей. С какой вероятностью доля первосортных деталей отличается от соответствующей вероятности не более чем на 0,05?

9. В первом ящике 15 белых, 20 чёрных и 10 красных. Во втором ящике 12 белых, 16 чёрных и 12 красных шаров. Не глядя, вынимаем по одному шару из каждого ящика. Какова вероятность того, что будет вынуто два шара одинакового цвета.

10. Четыре кандидата участвуют в выборах на четыре различные должности в разных городах. Шансы, оказаться избранными, для каждого из них равны 1:2:3:2 соответственно. Какова вероятность того, что будет избран, по крайней мере, один из них?

РГР 6. Теория вероятностей: случайные величины.

Вариант 0.

1. В городе 4 коммерческих банка. У каждого риск банкротства в течение года составляет 10%. Составьте ряд распределения числа банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года; постройте его график. Найдите числовые характеристики этого распределения. Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте её график. Чему равна вероятность того, что в течение года обанкротятся не более 2 банков?

2. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x)$, причём

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ a(3x - x^2) & \text{при } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

Требуется:

- 1) Найти коэффициент a ;
- 2) построить график распределения плотности $y=f(x)$;
- 3) найти вероятность попадания X в промежуток $(1,2)$.

3. Время t расформирования состава через горку – случайная величина, подчинённая показательному закону. Пусть $\lambda=5$ – среднее число поездов, которые горка может расформировать за 1 час. Определить вероятность того, что время расформирования состава: 1) меньше 30 минут; 2) больше 6 минут, но меньше 24 минут.

4. Средняя дальность полёта снаряда равна 1200 м. Предполагая, что дальность полёта H распределена по нормальному закону со средним квадратическим отклонением 40 м, найти, какой процент выпускаемых снарядов даст перелёт от 60 до 80 м.

5. НСВ X задана дифференциальной функцией $f(x) = \frac{2}{3} \sin 3x$ в интервале $(0, \frac{\pi}{3})$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найдите вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$.

6. Среднее число ошибок, которые делает оператор в течение часа работы, равно 2. Найдите вероятность того, что за 3 часа работы оператор сделает одну ошибку.

7. Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого имеет показательное распределение $F_1(t) = 1 - e^{-0,02t}$, второго

$F_2(t) = 1 - e^{-0,05t}$. Найдите вероятность того, что за время $t=6$ ч. ни один элемент не откажет; откажет только один элемент.

8. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 10 минут. Найти вероятность того, что пассажир будет ожидать автобус менее 2 минут, более 5 минут.

9. Оценить вероятность того, что абсолютная величина отклонения среднего роста 1000 мужчин от математического ожидания случайной величины, выражающей рост каждого мужчины, не превзойдет 0,5 см, полагая, что среднее квадратичное отклонение каждой из этих случайных величин не превышает 2,5 см.

10. Испытание готовых часов выявляет в среднем 2% неотрегулированных. Оценить вероятность того, что отклонение частоты появления точных часов от вероятности не превысит 0,01; если предоставлено для проверки 400 часов.

Задания для домашней работы (по некоторым темам).

Комплексные числа.

- Перевести в тригонометрическую и показательную формы комплексные числа:
а) $z = 8i$; б) $z = 3 - 3i$; в) $z = 3 + \sqrt{3}i$.
- Выполнить действия: $\frac{2+5i}{-1-i} - (4-i)(8+3i)$.
- Возвести в степень: $(1+i)^{10}$.
- Найти корни: $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}$.
- Решить уравнения:
а) $x^3 + 64 = 0$; б) $x^2 + 2x + 2 = 0$.

Элементы аналитической геометрии.

- Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, -3)$ и начало координат.
- Показать, что прямые $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 3 = 0$ перпендикулярны.
- Даны вершины треугольника $A(0; 1)$, $B(6; 5)$, $C(12; -1)$. Найти уравнение медианы, проведенной из вершины C .
- Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.
- Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox , с вершиной в начале координат, если длина некоторой хорды этой параболы, перпендикулярной оси Ox равна 16, а расстояние этой хорды от вершины равно 6.
- Дана гипербола $x^2 - y^2 = 8$. Найти софокусный эллипс, проходящий через точку $M(4, 6)$

Пределы.

Вычислить пределы.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 2x^2 + 5x - 6}{x^3 + 2x^2 + 7x - 1}$;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^3 + 4x + 5)(x^2 + x + 1)}{(x + 2)(x^4 + 2x^3 + 7x^2 + x - 1)}$;
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12}$;

$$4. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1};$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x}-1}{x^2};$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1};$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{x+1};$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln x);$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x);$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x.$$

Производная функции.

Вычислить производные функции:

$$1) y = \frac{3}{4} \sqrt{x} \cdot x^2 + \operatorname{tg} 4x - \sqrt[5]{\ln \frac{x}{5}};$$

$$2) y = e^{-x} \cdot \cos 3x;$$

$$3) y = \left(\frac{x-2}{x^3}\right)^2;$$

$$4) y = \arcsin \sqrt{1-6x^2};$$

$$5) y = \ln \frac{x^5}{x^5+2};$$

$$6) y = 2^{\cos^3 x - 3 \sin x};$$

$$7) y = x^x;$$

$$8) y = -\frac{10}{x+3}, \quad y'' - ?$$

$$9) y = 7^x + 7^{-x}, \quad y^{(n)} - ?$$

$$10) \text{ Показать, что функция } y = e^x + 2e^{2x} \text{ удовлетворяет уравнению } y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

11) Исследовать и построить графики функции:

$$y = \frac{9x}{9-x^2}; \quad y = x + e^{-x}; \quad y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x+2}.$$

Приложение производной в экономике.

1. Заданы функции полного дохода $R = -2x^2 + 12x$ и полных издержек $C = 2x + 8$, где x - объем выпускаемой продукции (количество продукции). Определить границы прибыльности производства q_1 и q_2 и точку q_0 , в которой прибыль достигает максимального значения.

2. Объем добычи щебня $Q(\text{т/ч})$ зависит от количества вложенного труда x (чел/час) так: $y = 5\sqrt{x}$. Цена щебня 80 у.е./т, зарплата рабочего 40 у.е./ч. Кроме зарплат, другие издержки не учитываются. Найти оптимальное количество вложенного труда (рабочих).
3. В краткосрочном плане производственная функция Q (у.е.) зависит от вложенных дополнительных инвестиций K (тыс. у.е.) и имеет вид $Q = 2K(520-K)$. Требуется определить оптимальное количество вложенных инвестиций, при которых Q выпуск продукции достигнет максимального значения.
4. Функция потребления $C(y)$ зависит от национального дохода y (в усл.ед.) и имеет вид $C = 0,003y^2 + 0,2y + 50$. Найти предельные склонности населения к потреблению и сбережению, когда национальный доход равен 100 у.е. Провести экономический анализ результата.
5. Фирма осваивает новый рынок. Функции спроса и издержек для данного рынка соответственно равны $P_d = 375 - 3Q$, $C = 10000 + 15Q$, Q - количество товара. Какую ценовую политику должна проводить фирма, чтобы прибыль была максимальной?
6. Издержки производства составляют $C = 3x^2 + 18x$ (руб./час), объем выпускаемой продукции $Q = 2 + 6x$ (у.е./час), где x (руб./час) количество вложенных в производство инвестиций. Цена единицы продукции $p = 10$ руб. Найти оптимальное количество вложения инвестиций в производство.
7. В краткосрочном плане производственная функция фирмы имеет вид $Q = -2L^3 + 20L + 80L$, где L - численность персонала. Определить, при каком значении L средняя производительность труда становится максимальной.
8. Как связаны предельные и средние полные затраты предприятия, если эластичность полных затрат равна 1.
9. Опытным путём установлены функции спроса $D = \frac{p+8}{p+2}$ и предложения $S = p + 0,5$, где D и S - количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в ед. времени, p - цена товара. Найти : а) равновесную цену; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода при увеличении цены на 5% от равновесной.
10. Издержки перевозки двумя видами транспорта выражаются функциями $y_1 = 220 + 15x$, $y_2 = 100 + 20x$, где x - расстояние в километрах, y - транспортные расходы в у.е. Требуется:
 - 1) построить графики функций; 2) произвести экономический анализ; 3) рассчитать транспортные расходы при $x = 20$ км, $x = 50$ км.
 При $x = 20$ км перевозки вторым видом транспорта осуществлять выгоднее, а при $x = 50$ км выгоднее осуществлять первым видом транспорта, их стоимость меньше и равна $y = 970$ у.е.

Функции нескольких переменных.

1. Найти частные производные I порядка:

а) $z = x^2 + y^2 - xy + 5x - 6y + 2$;

б) $z = \cos \frac{xy}{x-y}$;

в) $z = e^{xy^2}$;

г) $z = \arctg \frac{y}{1+x^2}$;

д) $u = \ln(x + 7y - 6z)$;

2. Найти du : $u = x^z y$;
3. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, если $z = \cos(4x + e^y)$.

Векторная алгебра.

1. Даны точки: $A(-3; 2; 1)$, $B(1; -3; 0)$, $C(-4; 5; 7)$.
Найти:
- 1) координаты векторов $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$;
 - 2) $\left| \vec{AB} \right|, \left| \vec{AC} \right|, \left| \vec{BC} \right|$;
 - 3) скалярное произведение векторов $\vec{AB}$, $\vec{AC}$.
 - 4) векторное произведение векторов $\vec{AB}$, $\vec{AC}$;
2. При каком значении m векторы $\vec{a} = (m, 1, 0)$ и $\vec{b} = (3, -3, 4)$ перпендикулярны?

Элементы линейного и целочисленного программирования.

4. Предприятие располагает тремя производственными ресурсами (А, В, С) и может организовать производство продукции двумя различными способами (I, II). Расход ресурсов за один месяц и общий ресурс при каждом способе производства даны в таблице:

Ресурсы	Расход ресурсов за 1 мес. при работе		Общий ресурс
	способом I	Способом II	
А	1	2	4
В	1	1	3
С	2	1	8

При I способе производства предприятие выпускает за один месяц 3 тыс. изделий, при II – 4 тыс. Сколько месяцев должно работать предприятие каждым из этих способов, чтобы при наличных ресурсах обеспечить максимальный выпуск продукции?

5. Решить задачи линейного программирования:

$$f = 4x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$f = 2x_1 - 6x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$f = 2x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ -x_1 - 2x_2 \geq -10 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$f = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

6. Решить задачи целочисленного программирования:

$$L(x) = 16x_1 + 9x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_{1,2} \geq 0 - \text{целые.} \end{cases}$$

$$L(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 9 \\ 3x_1 + -4x_2 \geq 3 \\ x_{1,2} \geq 0 - \text{целые.} \end{cases}$$

Кратные интегралы.

1. Вычислить интеграл $\iint_{\Delta} (3x^2 - 2xy + y) dx dy$, если область интегрирования Δ ограничена линиями: $x = 0, x = y^2, y = 2$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_{\Delta} y \ln x dx dy$, если область интегрирования ограничена линиями: $xy=1, y = \sqrt{x}, x = 2$.

3. Изменить порядок интегрирования:

$$\text{а) } \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy;$$

$$\text{б) } \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy.$$

4. Вычислить $\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, если область T - прямоугольный параллелепипед, определённый неравенствами $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$.

Дифференциальные уравнения.

1. Решить уравнения

$$1) y' = \frac{x}{y}$$

$$2) dy = ytgxdx$$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $(1 + x^2)dy + ydx = 0$, при начальном условии $y(1) = 1$.

3. Найти общие решения уравнений

$$1) y - xy' = y \ln \frac{x}{y}$$

$$2) y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}$$

$$3) y'' = 2 \sin 2x$$

$$4) (1 - x^2)y'' - xy' = 0$$

$$5) 2(y')^2 = (y - 1)y''$$

$$6) y''' - 6y'' + 13y' = 0$$

$$7) y'' - 5y' + 6y = 4 \sin 2x$$

$$8) y'' - 4y' + 13y = x^2$$

$$9) y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

Ряды.

1. Исследовать сходимость числовых рядов:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{3n+2};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1} \right)^n;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n!};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+n^2}.$$

2. Исследовать сходимость степенных рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n!(x+4).$$

3. Разложить e^{-x^2} в ряд по степеням x .

4. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.

Математическая статистика.

1. Темпы роста у производительности труда по годам в промышленности республики приведены в таблице.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	100	156	170	184	194	295	220	229

Предполагая, что зависимость y от x линейная: $y = ax + b$, найти a и b .

2. Получены данные о почасовой оплате труда работников одного предприятия.

Зарплата, руб./час	До 5	5-10	10-15	15-20	20-25	Св. 25
Число работников	10	22	35	17	11	5

Построить эмпирическую функцию распределения, кумуляту, гистограмму, полигон. Найти выборочные точечные характеристики.

3. Автомат, работающий со стандартным отклонением $\sigma = 5$ г, фасует чай в пакки. Проведена случайная выборка объёмом $n = 30$ пачек. Средний вес пачки чая в выборке $\bar{X} = 101$ г. Найти доверительный интервал для среднего веса пачки чая в генеральной совокупности с доверительной вероятностью 95%.
4. Станок, работающий со стандартным отклонением $\sigma = 0,5$ мм, производит детали средней длины $a = 20$ мм. В случайной выборке объёма $n = 16$ деталей средняя

длина $\bar{X} = 19,8$ мм. Правильно ли настроен станок? Доверительная вероятность 99%.

5. Пользуясь критерием Пирсона, при уровне значимости 0,05 установить согласуется ли гипотеза о нормально распределении генеральной совокупности с данными выборки объёма $n = 200$:

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

6. Дана таблица

X	0,25	0,37	0,44	0,55	0,6	0,62	0,68	0,7	0,73
Y	2,57	2,31	2,12	1,92	1,75	1,71	1,6	1,51	1,5

Определить коэффициент корреляции r_{xy} и уравнения линий регрессии.

VII. КОМПЛЕКТ ЗАДАНИЙ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Введение в математический анализ с элементами аналитической геометрии.

Вариант 1.

- Даны вершины треугольника: A(2, 3), B(6, 1), C(2, -2). Найти:
 - Длину стороны AB.
 - Уравнения сторон AB, BC, AC.
 - Уравнение высоты из вершины A.
 - Уравнение медианы из вершины B.
 - Расстояние от точки C до прямой AB.
- Построить кривые:
 - $y = \sqrt{4 - x^2}$.
 - $2x^2 + 3y = 9$.
- Построить плоскость $4x + 2y + 3z = 12$.

Вариант 2.

- Даны вершины треугольника: A(-1, 2), B(6, 1), C(3, -5). Найти:
 - Длину стороны AB.
 - Уравнения сторон AB, BC, AC.
 - Уравнение высоты из вершины A.
 - Уравнение медианы из вершины B.
 - Расстояние от точки C до прямой AB.
- Построить кривые:
 - $x = \sqrt{1 - y^2}$.
 - $y^2 + 5x = 10$.
- Построить плоскость $-x - y + 2z = 4$.

Вариант 3.

- Даны вершины треугольника: A(2, 3), B(8, 0), C(3, -3). Найти:
 - Длину стороны AB.
 - Уравнения сторон AB, BC, AC.
 - Уравнение высоты из вершины A.
 - Уравнение медианы из вершины B.

5. Расстояние от точки С до прямой АВ.

2. Построить кривые:

1. $y = -\sqrt{9 + x^2}$.

2. $12y = x^2 - 6$.

3. Построить плоскость $6x + y - z = 12$.

Вариант 4.

1. Даны вершины треугольника А(2, 3), В(6, 1), С(1, -4). Найти:

1. Длину стороны АВ.

2. Уравнения сторон АВ, ВС, АС.

3. Уравнение высоты из вершины А.

4. Уравнение медианы из вершины В.

5. Расстояние от точки С до прямой АВ.

2. Построить кривые:

1. $x = \sqrt{36 + y^2}$.

2. $y^2 + 4 = 8x$.

3. Построить плоскость $x - 3y + 2z = 6$.

Вариант 1.

1. Вычислите y'

$$y = \frac{2 - \arcsin 2x}{\cos(1 - 3x)}$$

2. Вычислите y''

$$y = \sqrt{1 - x^2} + 4x$$

3. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}$$

4. Исследовать функцию на непрерывность

$$y = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 0 \\ 3 + 4x, & x > 0 \end{cases}$$

5. Решить задачу.

Производитель реализует свою продукцию по цене p за единицу, а издержки при этом задаются функцией $C(x) = 9x + 0,2x^2$, где x - объем выпускаемой продукции в условных единицах ($x > 0$) Найти оптимальный для производителя объем выпуска продукции и соответствующую ему прибыль, если $p = 49$ ден. ед.

Вариант 2.

1. Вычислите y'

$$y = \frac{3^{3x} + 8x}{\sin 4x}$$

2. Вычислите y''

$$y = e^{\sqrt{x}} + (x^2 + 1)$$

3. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right)$$

4. Исследовать функцию на непрерывность

$$y = \begin{cases} 3x - 1, & x \leq 2 \\ 2x + 1, & x > 2 \end{cases}$$

5. Решить задачу.

Функция потребления $C(y)$ зависит от национального дохода y (в усл.ед.) и имеет вид $C = 0,002y^2 + 0,3y + 70$. Найти предельные склонности населения к потреблению и сбережению, когда национальный доход равен 150 у.е. Провести экономический анализ результата

Вариант 3.

1. Вычислите y'

$$y = \frac{1 + \ln^2 \frac{x}{3}}{e^{3x}}$$

2. Вычислите y''

$$y = \arctg 2x$$

3. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{5x}\right)^{2x}$$

4. Исследовать функцию на непрерывность

$$y = \begin{cases} 7x - 5, & x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$$

5. Решить задачу.

Опытным путём установлены функции спроса $D = \frac{p+7}{p+3}$ и предложения $S = p+1$, где D и

S – количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в ед. времени, p - цена товара. Найти :а) равновесную цену; б) эластичность спроса при данной цене.

Вариант 4.

1. Вычислите y'

$$y = \frac{\lg^2(8x-2)}{e^{x^2}}$$

2. Вычислите y''

$$y = \ln(x^2 + 1)$$

3. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 1} - 3x)$$

4. Исследовать функцию на непрерывность

$$y = \begin{cases} 1 + 5x, & x \leq -1 \\ 2x + 1, & x > -1 \end{cases}$$

5. Решить задачу.

Заданы функции полного дохода

$R = -5x^2 + 30x$ и полных издержек $C = 5x + 20$, где x - объем выпускаемой продукции (количество продукции). Определить значение x при котором прибыль достигает максимального значения.

Функции нескольких переменных.

Вариант 1.

1. Найти все частные производные второго порядка

$$z = yx^2 - e^{xy}.$$

2. Фирма производит продукцию на двух заводах; x и y – соответственно объёмы этой продукции за месяц. Сколько продукции ежемесячно следует выпускать на каждом заводе при наименьших суммарных затратах, если функция издержек заводов имеет вид:

$$C = x^2 + y^2 - 10x - 40y + 5500.$$

3. Задана производственная функция:

$Q = 10\sqrt{L}\sqrt{K} + 15\sqrt{K}$. Вычислить предельный продукт труда и предельный продукт капитала при $L=100$, $K=2500$.

Вариант 2.

1. Найти все частные производные второго порядка

$$z = \sin(x^2 + y^2).$$

2. Пусть z -количество продукции выпущенной некоторой фирмой; x , y - затраты ресурсов двух видов; $z = 100x^2y - x^3y - x^2y^2$. Найти максимальный выпуск продукции при соответствующих затратах.

3. Функция спроса имеет вид $D = f(p, p_A, y) = 400 - 3p + 2p_A + 0,005y$, где D -спрос на товар Q , p -цена товара Q , p_A -цена альтернативного товара, y -доход потребителей. Вычислить коэффициенты эластичности $\varepsilon_p, \varepsilon_{p_A}, \varepsilon_y$ и пояснить их экономический смысл при $p = 15, p_A = 18, y = 1000$.

Вариант 3.

1. Найти все частные производные второго порядка

$$z = 7x^2 + 2y^2 - e^{x+y}.$$

2. Для некоторой фирмы производственная функция имеет вид $Q = f(K, L) = 10LK + 3L^2$. Затраты на единицу капитала и труда составляют 5 и 4 соответственно. Общая сумма затрат равна 350. Требуется определить уровень затрат на капитал и труд, когда выпуск продукции максимальный. Решить задачу методом подстановки.

3. Найти предельные полезности и предельную норму замещения товара X на товар Y для функции полезности $U = 3\sqrt[3]{xy}$ в точке $A(8, 27)$.

Вариант 4.

1. Найти все частные производные второго порядка

$$z = 7x^2 + 2y^2 - e^{x+y}.$$

2. Для некоторой фирмы производственная функция имеет вид

$Q = f(K, L) = 10LK + 3L^2$. Затраты на единицу капитала и труда составляют 5 и 4 соответственно. Общая сумма затрат равна 350. Требуется определить уровень затрат на капитал и труд, когда выпуск продукции максимальный. Решить задачу методом подстановки.

3. Найти предельные полезности и предельную норму замещения товара X на товар Y для функции полезности $U = 3\sqrt[3]{xy}$ в точке A(8, 27).

Элементы линейной алгебры.

Вариант 1.

1. Задана матрица $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Требуется найти:

1. транспонированную матрицу A^T ;
2. ранг матрицы A ;
3. произведение матриц $A^T \cdot A$ и $A \cdot A^T$;
4. обратную матрицу A^{-1} .

2. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

- 1)методом обратной матрицы;
- 2)по формулам Крамера;
- 3)методом Гаусса.

Вариант 2.

2. Задана матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 6 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Требуется найти:

1. транспонированную матрицу A^T ;
2. ранг матрицы A ;
3. $A^2 - 4E$;
4. обратную матрицу A^{-1} .

2. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

- 1)методом обратной матрицы;
- 2)по формулам Крамера;
- 3)методом Гаусса.

Вариант 1.

1. Отрасль состоит из 3-х предприятий; матрица внутренних затрат (коэффициенты прямых затрат) имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Требуется: 1) рассчитать вектор конечного продукта непроеизводственного потребления $\vec{Y}$, если известен вектор валового выпуска продукции $\vec{X} = (100, 200, 100)$ (у.е.); 2) найти вектор $\vec{X}$ валового выпуска продукции, если известен вектор конечного потребления $\vec{Y} = (50, 100, 120)$ у.е. для некоторого периода времени Т.

2. В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период, усл.ден.ед.

Отрасль		Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
		А	В	С		
Производство	А	12	15	3	70	100
	В	17	12	11	60	100
	С	7	6	7	80	100

- 1) составить матрицу прямых затрат и проверить её продуктивность с помощью критерия продуктивности;
- 3) вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление отрасли А увеличить в $k=2$ раза, а отрасли В на $p=10\%$, отрасли С оставить без изменения.
3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Структурная матрица торговли четырёх стран имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,7 & 0,3 & 0,5 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что сумма бюджетов задана

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000 \text{ (усл.ден.ед.)}.$$

5. Задана матрица коэффициентов прямых затрат

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$$

экономической системы, состоящей из трёх отраслей, и вектор норм добавленной стоимости $\gamma_1 = (4, 3, 5)$.

Определить:

4) равновесные цены;

2) равновесные цены в случае увеличения нормы добавленной стоимости в первой отрасли на 2 ед.

Вариант 2.

1. Отрасль состоит из 3-х предприятий; матрица внутренних затрат (коэффициенты прямых затрат) имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Требуется: 1) рассчитать вектор конечного продукта непроеизводственного потребления $\vec{Y}$, если известен вектор валового выпуска продукции $\vec{X} = (50, 100, 150)$ (у.е.); 2) найти вектор $\vec{X}$ валового выпуска продукции, если известен вектор конечного потребления $\vec{Y} = (100, 100, 120)$ у.е. для некоторого периода времени Т.

2. В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период, усл.ден.ед.

Отрасль		Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
		A	B	C		
Производство	A	12	15	3	170	200
	B	10	20	10	60	100
	C	7	6	7	80	100

1) составить матрицу прямых затрат и проверить её продуктивность с помощью критерия продуктивности;

- 4) вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление отрасли А увеличить в $k=3$ раза, а отрасли В на $p=20\%$, отрасли С оставить без изменения.

3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Структурная матрица торговли четырёх стран имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,5 & 0,3 & 0,5 & 0,4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что сумма бюджетов задана

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2000 \text{ (усл.ден.ед.)}.$$

5. Задана матрица коэффициентов прямых затрат

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$$

экономической системы, состоящей из трёх отраслей, и вектор норм добавленной стоимости $\gamma_1 = (10, 8, 6)$.

Определить:

- 1) равновесные цены;
- 2) равновесные цены в случае увеличения нормы добавленной стоимости в первой отрасли на 5 ед.

Интегральное исчисление.

Вариант 1.

9. $\int \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x} dx;$
10. $\int \sqrt[5]{3x-2} dx;$
11. $\int \frac{x dx}{1+x^2};$
12. $\int x \cos 3x dx;$
13. $\int \frac{dx}{x^2+3x+5};$
6. $\int \arcsin 2x dx;$
7. $\int \frac{x dx}{x+6};$
8. $\int \cos 3x \sin 7x dx;$
9. $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+4)};$
10. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$

Вариант 2.

1. $\int \frac{dx}{3-2x};$
2. $\int e^{2x^2+5} x dx;$
3. $\int x^2 \sin x dx;$
4. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x + 4} dx}{x};$
5. $\int \sin 7x \cos 4x dx;$
6. $\int \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} - 2} dx;$
7. $\int \frac{x+4}{x-1} dx;$
8. $\int \arctg 2x dx;$
9. $\int \frac{x+2}{x^2-6x+10} dx;$
10. $\int (5-3x)^6 dx.$

Вариант 3.

1. $\int \frac{x^3 - x^2 + 8x - 1}{x^2} dx;$
2. $\int (5-4x)^{11} dx;$
3. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx;$
6. $\int x \cos 3x dx;$
7. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x+3}};$
8. $\int \frac{x-1}{x^2+5x+7} dx;$

$$4. \int \ln(5-2x)dx;$$

$$5. \int \cos 2x \sin 5x dx;$$

$$9. \int \frac{dx}{1+3\cos x};$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}.$$

Вариант 4.

$$1. \int \frac{2^x - 4^x}{6^x} dx;$$

$$2. \int \sin^3 x \cos x dx;$$

$$3. \int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$4. \int x^2 \ln 5x dx;$$

$$5. \int x^2 e^x dx;$$

$$6. \int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})};$$

$$7. \int \frac{x-1}{x^2-4x+5} dx;$$

$$8. \int \operatorname{tg}^3 x dx;$$

$$9. \int \frac{dx}{5-\sin x};$$

$$10. \int \cos(\ln x) dx.$$

Дифференциальные уравнения.

Вариант 1.

Решить дифференциальные уравнения:

$$6. \frac{y'}{e^{2x-1}} = \operatorname{tgy} \quad y(0) = 0;$$

$$7. y' \sqrt{1-x} = \frac{1}{\sqrt{1-y}};$$

$$8. y' - \frac{y}{x-2} = x+2;$$

$$9. y''' + 2y'' + 5y' = 0;$$

$$10. y'' + y' - 2y = 3e^x.$$

Вариант 2.

Решить дифференциальные уравнения:

$$1. y' \sin x = y \ln y \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$$

$$2. (1+y^2)dx - (1+x^2)dy = 0;$$

$$3. (y')^2 + 1 = 2yy'';$$

$$4. \quad y''' - 13y'' + 12y' = 0;$$

$$5. \quad y'' + 2y' + y = e^{-x} \cos x.$$

Вариант 3.

Решить дифференциальные уравнения:

$$1. \quad y' = (2y + 1) \operatorname{ctg} x \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2};$$

$$2. \quad x^2 y' = y^2 + xy;$$

$$3. \quad y''' = e^{3x} - 2;$$

$$4. \quad y^{(4)} - y = 0;$$

$$5. \quad y'' - y = 2(1 - x).$$

Вариант 4.

Решить дифференциальные уравнения:

$$1. \quad y' = 2\sqrt{y} \ln x \quad y(e) = 1;$$

$$2. \quad y' + y = e^{-x} \sin x;$$

$$3. \quad y'' y^3 + 1 = 0;$$

$$4. \quad y^{(4)} - 3y''' + 2y'' = 0;$$

$$5. \quad y'' - 4y' + 4y = 25 \sin x.$$

Ряды.

Вариант 1.

- Исследовать на сходимость ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+6}{20n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$.
- Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3 + 3}$ и, если он сходится, то вычислить его сумму с точностью до 0,001.
- Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} x^n$.

Вариант 2.

- Исследовать на сходимость ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$

2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1}$ и, если он сходится, то вычислить его сумму с точностью до 0,001.

3. Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{7n}$.

Вариант 3.

1. Исследовать на сходимость ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n+2}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+5}}$ и, если он сходится, то вычислить его сумму с точностью до 0,001.

3. Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n+2}$.

Вариант 4 .

1. Исследовать на сходимость ряды : а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-3}{n+4} \right)^{n^2}$.

2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3+10}$ и, если он сходится, то вычислить его сумму с точностью до 0,001.

3. Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n5^n}$.

Теория вероятностей: случайные события.

Вариант 1.

1. Студент знает 45 из 60 вопросов программы. Каждый Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Найти вероятность того, что: а) студент знает все три вопроса, содержащиеся в билете; б) студент знает только два вопроса; в) студент знает только один вопрос своего экзаменационного билета.

2. В ящике имеется 15 деталей, из которых 10 стандартных. Сборщик наугад берёт 3 детали. Найти вероятность того, что все взятые детали будут стандартными.

3. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,3. Производится 5 выстрелов. Чему равна вероятность того, что цель будет поражена?

4. Вероятность того, что клиент банка не вернёт заём в период экономического роста, равна 0,04, а в период экономического кризиса – 0,13. Предположим, что вероятность того, что начнётся период экономического роста, равна 0,65. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернёт полученный кредит?

5. Вероятность того что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 4 абонента?

6. В партии деталей двух сходных форматов число крупных деталей вдвое больше числа мелких. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу 10 деталей окажется 6 крупных?

7. Вероятность допущения дефекта при производстве механизмов равна 0,4. Случайным образом отбирается 500 механизмов. Установить величину наибольшего отклонения частоты изготовленных механизмов с дефектами от вероятности 0,4, которую можно гарантировать с вероятностью 0,9973.

Вариант 2.

1. С помощью шести карточек, на которых написано по одной букве, составлено слово «каре́та». Карточки перемешиваются, а затем наугад извлекаются по одной. Какова вероятность того, что в порядке поступления букв образуется слово «каре́та».

2. Три кандидата участвуют в выборах на три различные должности в разных городах. Шансы, оказаться избранными, для каждого из них равны 1:3. Какова вероятность того, что будет избран, по крайней мере, один из них?

3. В каждой из двух урн содержится по 2 черных, 8 белых шаров. Из первой урны наудачу извлечён шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны извлечён шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный из второй урны, окажется белым.

4. Из трамвайного парка в случайном порядке выходят 4 трамвая маршрута №1 и 8 трамваев маршрута №2. Найти вероятность того, что второй по порядку вышедший на линию трамвай будет иметь №1.

5. Аппаратура содержит 2000 одинаково надёжных элементов, вероятность отказа каждого из которых равна 0,0005. Какова вероятность отказа аппаратуры, если она наступает при отказе хотя бы одного элемента?

6. Вероятность попадания по движущейся мишени принимается равной 0,17. Какова вероятность того, что из 20 выстрелов 15 окажутся удачными?

7. Вероятность выпуска нестандартной электролампы равна 0,1. Чему равна вероятность того, что в партии из 2000 ламп число стандартных будет не менее 1790?

Вариант 3.

1. Имеется 10 ящиков, из которых в девяти имеется по две бракованных и по две доброкачественных детали, а в одном 5 доброкачественных и 1 бракованная. Из ящика взятого наудачу извлечена доброкачественная деталь. Какова вероятность того, что деталь

извлечена из ящика содержащего пять доброкачественных деталей?

2. Определить вероятность того, что выбранное наудачу изделие окажется первосортным, если известно, что 4% всей продукции является браком, а 75% не бракованных изделий удовлетворяют требованиям первого сорта.

3. Три стрелка стреляют в одну мишень. Известно, что вероятность попадания в цель у первого стрелка равна 0,8; у второго 0,7; у третьего 0,6. Найти вероятность появления в мишени одной пробоины в результате одновременного выстрела всех трёх стрелков.

4. Абонент забыл первую цифру телефонного номера. Найти вероятность того, что при наборе номера наудачу, он наберёт его верно не более чем с трёх попыток.

5. Вероятность выпуска нестандартной электролампы равна 0,1. Чему равна вероятность того, что в партии из 2000 ламп число стандартных будет не менее 1790 штук?

6. Станок – автомат производит $\frac{2}{3}$ числа изделий первого сорта и $\frac{1}{3}$ – второго. Что вероятнее – получить 2 первосортных изделия среди 5 наудачу отобранных или 5 первосортных среди 10 наудачу отобранных?

7. При массовом производстве продукции и установившемся процессе производства 4% изделий выходят бракованными. Сколько изделий следует отобрать, чтобы с вероятностью 0,93 можно утверждать, что среди них доля бракованных по абсолютной величине отличается от 4% не более чем на 0,01.

Вариант 4.

1. Имеется 5 урн, из которых в четырёх находится по 2 чёрных и 2 белых шара, а в одной – 5 белых и 1 чёрный шар. Из урны, взятой наудачу, извлечён белый шар. Какова вероятность того, что шар извлечён из урны, содержащей 5 белых шаров?

2. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырёх выстрелах равна 0,9984.

Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

3. В урне находится 10 шаров, 7 из которых белые. Найти вероятность того, что из 6 взятых наугад шаров будет 4 белых.

4. Вероятность того, что станок в течение часа потребует внимания рабочего, равна 0,1. Какова вероятность того, что ни один из пяти станков не потребует внимания рабочего в течение часа?

5. Пять работниц окрашивают одинаковые по форме и по размерам игрушки. Две из них производят окраску в красный цвет и три – в зелёный. Производительность труда работниц одинакова. Окрашенные игрушки оказались перемешанными. Определить вероятность того, что среди 600 игрушек, отобранных наугад, красных окажется от 228 до 264 штук.

6. В хлопке имеется 10% коротких волокон. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном пучке из 5 волокон окажется не более двух коротких?

7. При штамповке 80% деталей выходят первым сортом. Случайно отобрано 400 деталей. С какой вероятностью доля первосортных деталей отличается от соответствующей вероятности не более чем на 0,05?

Теория вероятностей: случайные величины.

Вариант 1.

8. Производится 4 выстрела по некоторой цели. Вероятность попадания в цель от выстрела к выстрелу не меняется и остаётся равной 0,4. Требуется для S , B , X – числа попаданий составить ряд распределения и построить многоугольник распределения.

9. Детали, выпускаемые цехом по размеру диаметра распределяются по нормальному закону с параметрами: $a=5$ см, и $\sigma=0,9$. найдите границы в которых следует ожидать размер диаметра детали, чтобы вероятность невыхода за эти границы была равна 0,95

10. СВ X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найдите плотность вероятности, $M(X)$, $D(X)$.

11. Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого имеет показательное распределение $F_1(t) = 1 - e^{-0,02t}$, второго $F_2(t) = 1 - e^{-0,05t}$. Найдите вероятность того, что за время $t=6$ ч хотя бы один элемент откажет.
12. Найти числовые характеристики СВ X , распределённой равномерно в промежутке $[6, 10]$.
13. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,05. Оценить вероятность того что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом отказов за время T окажется меньше 2.
14. Вероятность вынуть из урны белый шар $1/3$. Вынули (с возвращением) 300 шаров. Оценить вероятность того, что отклонение частоты появления белых шаров от вероятности будет менее $1/15$.

Вариант 2.

1. В партии из 6 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Составить закон распределения ДСВ X - числа стандартных деталей среди отобранных. Найти $M(X)$.
2. НСВ X задана дифференциальной функцией $f(x) = \frac{2}{3} \sin 3x$ в интервале $(0, \frac{\pi}{3})$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найдите вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$.
3. Швейная фабрика выпускает мужские брюки для области, где средний рост взрослых мужчин равен 172,1см, $\sigma = 6,75$ см. Каков процент обеспеченности брюками, если ограничится выпуском брюк, соответствующих ростам от 165 до 184см?
4. Вероятность того, что элемент будет работать в течение 2 суток равна 0,0183. Определите функцию надёжности для данного элемента.
5. Аппаратура содержит 2000 одинаково надёжных элементов, вероятности отказа каждого из которых равна 0,0005. Какова вероятность отказа аппаратуры, если он наступит при отказе хотя бы одного из элементов?
6. В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет включена, равна 0,8. Оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом включённых ламп за время T окажется меньше 3.
7. Игральный кубик подбрасывают 10000 раз. Оценить вероятность отклонения частоты появления шести очков от вероятности появления того же числа очков меньше чем на 0,01.

Вариант 3.

1. В магазин поступила обувь с двух фабрик в соотношении 2:3. Куплено 4 пары обуви. Найдите закон распределения числа купленных пар обуви, изготовленной первой фабрикой.
2. Средний рост взрослых женщин некоторого национального округа равна 167,3 см, $\sigma = 5.8$ см. Каков общий процент женщин ростом не превышающим 170 см.?
3. СВ X в интервале (1,3) задана дифференциальной функцией $f(x) = -x^2 + 4x - 3$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найдите моду, $M(X)$.
4. Среднее число ошибок, которые делает оператор в течение часа работы, равно 2. Найдите вероятность того, что за 3 часа работы оператор сделает хотя бы одну ошибку.
5. Случайная составляющая дохода равна $2X$, а случайная составляющая затрат равна $50Y$. Найти дисперсию прибыли при условиях: величина X распределена по биномиальному закону с параметрами $n=100$, $p=0.5$; величина Y распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = 2$; СВ X и Y являются независимыми.
6. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,05. Оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом отказов за время T окажется не меньше 3.
7. В целях контроля из партии в 100 ящиков взяли по одной детали из каждого ящика и измерили их длину. Оцените вероятность того, что вычисленная по данным выборки средняя длина детали отличается от средней длины детали во всей партии не более чем на 0,3 мм, если известно, что среднее квадратическое отклонение не превышает 0,8 мм

Вариант 4.

1. В урне имеются четыре шара с номерами от 1 до 4. Вынули два шара. С.В. X – сумма номеров шаров. Построить ряд распределения С. В. X . Найти моду.
2. Дифференциальная функция НСВ X , заданной на всей оси OX , равна

$$f(x) = \frac{3C}{1+x^2}.$$
 Найдите постоянный параметр C .
3. Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого имеет показательное распределение $F_1(t) = 1 - e^{-0,02t}$, второго $F_2(t) = 1 - e^{-0,05t}$. Найдите вероятность того, что за время $t=6$ ч. один элемент откажет.
4. Масса вагона – СВ распределённая по нормальному закону с математическим ожиданием 65 т. и средним квадратичным отклонением 0,9 т. Найти вероятность того, что очередной вагон имеет массу не более 70 т. и не менее 60 т.
5. Вероятность всхожести некоторой культуры равна 0,75. Оценить вероятность того, что из посеянных 1000 семян число взошедших окажется от 700 до 800 включительно.
6. Монету подбрасывают 1000 раз. Оценить вероятность того, что отклонение частоты появления герба от вероятности его появления будет меньше 0,1.
7. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 10 минут. Найти вероятность того что пассажир будет ожидать автобус не менее 2 минут.

Математическая статистика.

Вариант 1.

2. Предположим, что на некотором предприятии собраны данные о числе дней, пропущенных работником по болезни:

Число дней пропущенных в текущем месяце	0	1	2	3	4
Число работников	10	17	25	28	24

Постройте полигон распределения частот. Найдите среднее число пропущенных дней, стандартное отклонение, коэффициент вариации. Объясните полученные результаты.

3. Аудиторская фирма хочет проконтролировать состояние счетов одного из коммерческих банков. Для этого случайно отбираются 50 счетов. По 20 счетам из 50 отобранных имело место движение денежных средств в течение месяца. Постройте 99%-й доверительный интервал, оценивающий долю счетов в генеральной совокупности, по которым имело место движение денежных средств в течение месяца.
4. Компания занимающаяся консультированием в области инвестиций заявляет, что среднегодовой процент по акциям определённой отрасли промышленности составляет 11,5% . Инвестор, желая проверить истинность этого утверждения на основе случайной выборки 50 акций выявил, что среднегодовой процент по ним составил 10,8% с исправленным средним квадратическим отклонением $s=3,4\%$. На основе имеющейся информации определите, имеет ли инвестор достаточно оснований, чтобы опровергнуть заявление компании? Принять уровень значимости $\alpha = 0,05$.

Вариант 2.

1. Имеются выборочные данные о числе сделок заключённых брокерскими фирмами и конторами города в течение месяца:

Число заключённых сделок	10-30	30-50	50-70	70-90
Число брокерских фирм и контор	20	18	12	5

Постройте гистограмму распределения частот. Найдите среднее число заключённых сделок, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Объясните полученные результаты.

2. Коммерческий банк, изучая возможности предоставления долгосрочных кредитов населению, опрашивает своих клиентов для определения среднего размера такого кредита. Из 9706 клиентов банка опрошено 1000 человек. Среднее значение необходимого кредита составило 6750 у.е. со стандартным отклонением 1460 у.е. Найдите границы 95%-го доверительного интервала, для оценки неизвестного среднего значения кредита в генеральной совокупности.
3. Производители нового типа аспирина утверждают, что он снимает головную боль за 30 минут. Случайная выборка 100 человек, страдающих головными болями, показала, что новый тип аспирина снимает головную боль за 28,6 мин. При среднем квадратическом отклонении 4,2 мин. Проверьте при уровне значимости

$\alpha = 0,05$ справедливость утверждения производителей аспирина о том, что это лекарство излечивает головную боль за 30 мин.

Экономико-математические методы.

Транспортная задача.

1. Решить транспортную задачу, заданную распределительной таблицей

b_i		40	20	40
a_i				
1	30	C_{11}	C_{12}	C_{13}
2	25	C_{21}	C_{22}	C_{23}
3	15	C_{31}	C_{32}	C_{33}
4	30	C_{41}	C_{42}	C_{43}

Значения коэффициентов распределительной таблицы

№ вар.	1	2	3	4
Значения				
C_{11}	3	6	2	5
C_{12}	5	2	6	4
C_{13}	4	4	4	3
C_{21}	4	2	4	2
C_{22}	2	1	3	3
C_{23}	1	5	5	3
C_{31}	1	5	3	3
C_{32}	3	6	1	1
C_{33}	2	3	5	2
C_{41}	5	1	5	1
C_{42}	3	3	2	2
C_{43}	5	2	5	5

2. Решить транспортную задачу, заданную распределительной таблицей

$\begin{matrix} & b_j \\ a_i & \end{matrix}$		1	2
		30	25
1	15	C_{11}	C_{12}
2	35	C_{21}	C_{22}
3	20	C_{31}	C_{32}

Значения коэффициентов распределительной таблицы

$\begin{matrix} & \text{№ вар.} \\ \text{Значения} & \end{matrix}$	1	2	3	4
C_{11}	4	4	2	3
C_{12}	3	1	4	5
C_{21}	1	3	1	2
C_{22}	2	4	3	3
C_{31}	3	2	1	1
C_{32}	5	2	5	1

Динамическое программирование.

- В трех районах города предприниматель планирует строительство пользующихся спросом одинаковых по площади магазинов. Известны места, в которых их можно построить. Посчитаны затраты на их строительство и эксплуатацию. Необходимо так разместить магазины, чтобы затраты на их строительство и эксплуатацию были минимальные.

x	1	2	3	4
$g_1(x)$	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
$g_2(x)$	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
$g_3(x)$	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}

Значения коэффициентов условия задачи

$\begin{matrix} & \text{№ вар} \\ \text{Значения} & \end{matrix}$	1	2	3	4
a_{11}	10	5	22	15

a_{12}	21	9	35	25
a_{13}	32	16	47	41
a_{14}	45	21	61	53
a_{21}	8	6	20	13
a_{22}	22	11	37	26
a_{23}	30	17	46	40
a_{24}	46	20	58	55
a_{31}	9	4	23	17
a_{32}	20	8	36	24
a_{33}	31	15	50	39
a_{34}	44	19	59	52

2. Требуется проложить трубопровод на дачном массиве между двумя пунктами А и В таким образом, чтобы затраты на проведение работ (в тыс. руб.) были минимальные.

			В		
a_{11}	a_{12}		a_{13}		
b_{11}	b_{12}		b_{13}		
a_{21}	a_{22}		a_{23}		
b_{21}	b_{22}		b_{23}		
a_{31}	a_{32}		a_{33}		
b_{31}	b_{32}		b_{33}		

А

Значения коэффициентов условия задачи

Значения № вар.	1	2	3	4
	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{11}	22	5	13	24
a_{12}	21	4	14	25

a ₁₃	20	3	15	23
a ₂₁	22	4	14	25
a ₂₂	19	5	15	23
a ₂₃	22	3	13	24
a ₃₁	21	3	15	23
a ₃₂	20	4	13	24
a ₃₃	22	5	14	15
b ₁₁	21	3	15	23
b ₁₂	20	4	13	24
b ₁₃	19	5	14	25
b ₁₄	21	4	13	24
b ₂₁	20	5	13	24
b ₂₂	22	3	14	25
b ₂₃	21	4	15	23
b ₂₄	22	4	15	23

Теория игр.

1. Найти оптимальные стратегии и цену игры, заданной платёжной матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

Значения коэффициентов платёжных матриц

№ вар Значения	1	2	3	4
a ₁₁	3	4	2	5
a ₁₂	4	3	5	4
a ₁₃	5	2	3	3
a ₁₄	2	3	4	7
a ₂₁	7	5	3	4

a_{22}	6	2	2	2
a_{23}	4	6	5	5
a_{24}	8	1	3	4

2. С помощью графического метода найти оптимальные стратегии и цену игры, заданной платёжной матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}$$

Значения коэффициентов платёжных матриц

№ вар Значения	1	2	3	4
a_{11}	4	3	4	3
a_{12}	7	2	1	4
a_{21}	9	4	2	2
a_{22}	3	1	3	3
a_{31}	5	5	1	5
a_{32}	9	3	2	3
a_{41}	6	2	3	4
a_{42}	9	4	5	2

Сетевые модели.

Составить сетевой график выполнения работ и рассчитать временные параметры по данным, представленным в таблице.

Содержание работы	Обозначение	Предыдущая работа	Продолж. дн.
Исходные данные на изделие	a_1		t_1
Заказ комплектующих деталей	a_2	a_1	t_2
Выпуск документации	a_3	a_1	t_3

Изготовление деталей	a_4	a_3	t_4
Поставка комплектующих деталей	a_5	a_2	t_5
Сборка изделия	a_6	a_4, a_5	t_6
Выпуск документации на испытание	a_7	a_3	t_7
Испытание и приёмка изделия	a_8	a_6, a_7	t_8

Значения коэффициентов условия задачи

№ вар Значения	1	2	3	4
t_1	30	33	36	35
t_2	7	9	8	6
t_3	15	17	18	14
t_4	35	33	32	34
t_5	25	24	21	20
t_6	13	15	10	12
t_7	12	16	9	11
t_8	14	17	13	13

VIII. КОМПЛЕКТ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

1 семестр

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«__» _____ 200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ОМиИ
Факультет ЭкФ
Курс 1
Дисциплина Математика

Экзаменационный билет N 1

Теоретическая часть

1. Понятие множества.
2. Парабола. Вывод канонического уравнения параболы.
3. Градиент функции.

Практическая часть

1. Заданы функции полного дохода $R = -2x^2 + 12x$ и полных издержек $C = -6x + 9$, где x – объём выпускаемой продукции. Определить x_1 и x_2 - границы прибыльности производства и точку x_0 , в которой прибыль достигает

максимального значения.

2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$.

3. Найти y'_x , если $x = t^3 + 3t + 1$, $y = 3t^5 + 5t^3 + 1$.

4. Объём продукции y , произведённой бригадой рабочих, может быть записан

уравнением $y = -\frac{6}{7}t^3 + \frac{17}{2}t^2 + 120t + 70$, $0 \leq t \leq 8$, где t - рабочее время в часах.

Найти производительность труда через час после начала работы и за два часа до её окончания. Сделать анализ результатов.

5. Дана функция: $z = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right)$. Найти z''_{xy} .

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры

«__» _____ 200 г.

Заведующий кафедрой

Утверждаю: _____

Кафедра ОМиИ

Факультет ЭкФ

Курс 1

Дисциплина Математика

Экзаменационный билет N 2

Теоретическая часть

1. Эквивалентные бесконечно малые функции и их применение.
2. Теорема Ролля.
3. Эластичность функции.

Практическая часть

1. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки

$$M\left(\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{6}}{4}\right), \quad N\left(-2; \frac{\sqrt{15}}{5}\right).$$

2. Определить асимптоты кривой $y = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$.
3. Производственная функция $Q(x) = 24x^2 - 0,8x^3$, x - число работающих. Найти численность работающих, при которой выпуск Q достигает максимального значения.
4. Фирма производит продукцию на двух заводах; x и y – соответственно объёмы этой продукции за месяц. Сколько продукции ежемесячно следует выпускать на каждом заводе при наименьших суммарных затратах, если функция издержек заводов имеет вид $C(x, y) = x^2 + y^2 - 10x - 20y + 1250$.
5. Дана функция: $z = \sin 2x \cdot \sin 3x$. Найти $d^2 z$.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры

«__» _____ 200 г.

Заведующий кафедрой

Утверждаю: _____

Кафедра ОМиИ

Факультет ЭкФ

Курс 1

Дисциплина Математика

Экзаменационный билет N 3

Теоретическая часть

1. Понятие элементарной функции. Классификация функций.

2. Уравнение касательной и нормали к кривой.
3. Необходимые и достаточные условия экстремума функции двух переменных.

Практическая часть

1. Составить уравнение прямой проходящей через точку $M(-2; -5)$, параллельно прямой $3x + 4y + 2 = 0$.
2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$.
3. Найти точки экстремума функции $y = \frac{e^x}{(x+3)^2}$.
4. Зависимость между издержками производства C и объёмом выпускаемой продукции q выражается функцией $C = 50q - 0,03q^3$ (ден. ед.). Определить средние и предельные издержки при объёме продукции $q = 10$ ед. Провести анализ решения.
5. Задана производственная функция: $Q = 100(K + L) - 2K^2 - L^2 + KL$. Найти оптимальные значения K и L , при которых выпуск продукции максимален.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«__» _____ 200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ОМиИ
Факультет ЭкФ
Курс 1
Дисциплина Математика

Экзаменационный билет N 4

Теоретическая часть

1. Уравнение прямой проходящей через две точки.
2. Определение производной, её геометрический и физический смысл.
3. Применение полного дифференциала функций нескольких переменных к приближённым вычислениям.

Практическая часть

1. Построить кривую $y = -\sqrt{9 - x^2}$.
2. Найти точки разрыва функции $y = \begin{cases} 2 - x, & x \leq 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$.
3. Дана функция: $z = \arctg \frac{x+y}{x-y}$. Найти dz .
4. Спрос на товар определяется функцией $D = \frac{4(x-2)}{x+6}$, где x - доход потребителя. Вычислить $E_x(D)$, при $x = 10$. Провести экономический анализ.
5. Методом множителей Лагранжа определить максимальный выпуск продукции $Q = L^2 + 10LK$, при условии $5K + 4L = 140$.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«__» _____ 200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ОМиИ
Факультет ЭкФ
Курс 1
Дисциплина Математика

Экзаменационный билет N 5

Теоретическая часть

1. Комплексные числа. Алгебраическая, тригонометрическая, показательная формы комплексного числа.
2. Уравнение плоскости в отрезках.
3. Применение производной в экономике.

Практическая часть

1. Даны вершины треугольника: $A(0;1)$, $B(6;5)$, $C(12;-1)$. Составить уравнение высоты треугольника, проведённой из вершины C .
2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3 + x^2 - 1}$.
3. Производственная функция Q (у.е.) зависит от вложенных дополнительных инвестиций K и имеет вид $Q = 2K(520 - K)$. Найти оптимальное количество вложенных инвестиций, при которых Q достигает максимального значения.
4. Исследовать функцию на непрерывность $y = \frac{3x - 7}{4 + x}$.
5. Задана функция полезности: $U = \ln x + \ln y$. Требуется оценить изменения полезности, когда x изменяется от 100 до 103, а y от 150 до 147. Пояснить экономический смысл решения.

2 семестр

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры

«__» _____ 200 г.

Заведующий кафедрой

Утверждаю: _____

Кафедра ОМиИ

Факультет ЭкФ

Курс 1

Дисциплина Математика

Экзаменационный билет N 1

Теоретическая часть

1. Матрицы. Основные понятия. Разновидности матриц.
2. Интегрирование тригонометрических функций
3. Знакопеременные ряды. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов.

Практическая часть

1. Отрасль состоит из 4 предприятий, матрица прямых затрат имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}. \text{ Требуется рассчитать вектор конечного продукта}$$

непроизводственного потребления $\vec{V}$, если известен вектор валового выпуска продукции $\vec{X} = (170, 180, 150, 120)$.

2. Решить задачу линейного программирования:

$$L(\vec{x}) = x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 7, \\ 1 \leq x_2 \leq 4, \\ x_1 \leq 4. \end{cases}$$

3. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{\arctg^3 x}{x^2 + 1} dx, \quad \text{б) } \int_0^1 x \cdot e^x dx.$$

4. Решить дифференциальные уравнения:

$$\text{а) } (1 + y^2)dx + x y dy = 0, \quad \text{б) } 2y'' + 5y' + 2y = 0.$$

5. Исследовать сходимость рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n}.$$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры

«__» _____ 200 г.

Заведующий кафедрой

Утверждаю: _____

Кафедра ОМиИ

Факультет ЭкФ

Курс 1

Дисциплина Математика

Экзаменационный билет N 2

Теоретическая часть

1. Решение систем линейных уравнений с помощью формул Крамера.
2. Основные свойства определённого интеграла.
3. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница.

Практическая часть

1. Рассматривается экономическая система, состоящая из двух отраслей:

промышленности и сельского хозяйства. Пусть A - матрица прямых затрат, $\vec{V}$ - вектор норм добавленной стоимости.

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}, \quad \vec{V} = (9; 11). \text{ Определить равновесные цены.}$$

2. Решить задачу линейного программирования:

$$L = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

3. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{e^x}{5 + 3e^x} dx, \quad \text{б) } \int \frac{1 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} dx.$$

4. Решить дифференциальные уравнения:

$$\text{а) } \sin x \cdot \cos y dx + \cos x \cdot \sin y dy = 0, \quad \text{б) } y'' - y' = x + 2.$$

5. Исследовать сходимость рядов:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n-3}.$$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«__» _____ 200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ОМиИ
Факультет ЭкФ
Курс 1
Дисциплина Математика

Экзаменационный билет N 3

Теоретическая часть

1. Теорема Кронекера-Капелли.
2. Основная задача линейного программирования.
3. Ряды Тейлора и Маклорена.

Практическая часть

1. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x - y + z = 6, \\ x + 5y = -3. \end{cases}$$
2. Решить задачу линейного программирования:

$$L = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$
3. Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от $x_1 = 100$, до $x_2 = 121$ изделий, полагая функцию изменения затрат времени на изготовление изделий $t = 600x^{-\frac{1}{2}}$.
4. Решить дифференциальное уравнение: $y'' + 3y' = 9x$.
5. Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-5)^n$.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«__» _____ 200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ОМиИ
Факультет ЭкФ
Курс 1
Дисциплина Математика

Экзаменационный билет N 4

Теоретическая часть

1. Модель равновесных цен.
2. Интегрирование рациональных функции.
3. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов.

Практическая часть

1. Дана матрица: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Найти её собственные значения и собственные векторы.
2. Решить задачу линейного программирования:

$$L = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 0, \\ x_1 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$
3. Дана функция $f(t) = 3t^2 - 5t$, описывающая производительность труда, $0 \leq t \leq 8$.
Найти объём произведённой продукции $Q(t)$.
4. Решить дифференциальные уравнения:
а) $2y'\sqrt{x} = y$, $y(4) = 1$, б) $y'' - 3y' + 2y = 0$.
5. Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (x-2)^n$.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«__» _____ 200 г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _____

Кафедра ОМиИ
Факультет ЭкФ
Курс 1
Дисциплина Математика

Экзаменационный билет N 5

Теоретическая часть

1. Базис и размерность линейного пространства.
2. Несобственные интегралы.
3. Интервал и радиус сходимости степенных рядов.

Практическая часть

1. Задана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Требуется найти:

- 1) транспонированную матрицу;
- 2) ранг матрицы A ;
- 3) произведение матриц $A^T \cdot A$.

2. Решить задачу линейного программирования:

$$L = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -6, \\ 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 \leq 3 \end{cases}.$$

3. Вычислить объём тела полученного от вращения фигуры ограниченной линиями:

$y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$, вокруг оси Ox .

4. Решить дифференциальное уравнение:

$$y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}.$$

5. Исследовать сходимость рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 2n + 1}{5n^2 + 2n + 1} \right)^n, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n - 3}.$$

3 семестр

Практические задания к зачёту

7. С помощью шести карточек, на которых написано по одной букве, составлено слово «каре́та». Карточки перемешиваются, а затем наугад извлекаются по одной. Какова вероятность того, что в порядке поступления букв образуется слово «каре́та».
8. В каждой из двух урн содержится по 2 черных, 8 белых шаров. Из первой урны наудачу извлечён шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны извлечён шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный из второй урны, окажется белым.
9. Вероятность попадания по движущейся мишени принимается равной 0,17. Какова вероятность того, что из 20 выстрелов 15 окажутся удачными?
10. В партии из 6 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Составить закон распределения ДСВ X - числа стандартных деталей среди отобранных. Найти $M(X)$.
11. Швейная фабрика выпускает мужские брюки для области, где средний рост, взрослых мужчин равен 172,1см, $\sigma = 6,75$ см. Каков процент обеспеченности брюками, если ограничиться выпуском брюк, соответствующих ростам от 165 до 184см?
12. Игральный кубик подбрасывают 10000 раз. Оценить вероятность отклонения частоты появления шести очков от вероятности появления того же числа очков меньше чем на 0,01.
13. Предположим, у вас есть следующая информация об акциях A и B :

Экономическое состояние в следующем году	Вероятность того, что произойдет	Возврат по акции B в следующем году, %	Возврат по акции A в следующем году, %
Снижение деловой активности	0,3	9,8	10
Умеренный рост	0,4	11,2	11
Подъем деловой активности	0,3	13	12

Рассчитайте среднюю арифметическую, дисперсию и коэффициент вариации для акций A и B . Если вы решили купить одну акцию, какую из двух вы выберете?

Почему?

14. Найти оптимальные стратегии и цену игры с матрицей:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \text{ б) } \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 & 9 \\ 10 & 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

15. В трёх пунктах производства имеется одинаковая продукция в объёме 60, 130, 90 т. Эта продукция должна быть доставлена потребителям в количестве 30, 80, 60, 110 т. Стоимости перевозок единицы продукции от каждого поставщика к каждому потребителю заданы матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 15 & 4 \\ 9 & 15 & 2 & 3 \\ 6 & 12 & 7 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Составить оптимальный план перевозок, при котором}$$

суммарные затраты на них минимальные.

16. Предположим, что при составлении некоторого проекта выделено 6 событий: 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 9 связывающих их работы (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 6). Требуется: составить сетевой график выполнения работ; построить линейную диаграмму сети, рассчитать параметры сетевого графика.