Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Амурский государственный университет»

Кафедра общей математики и информатики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ МАТЕМАТИКА

Основной образовательной программы по направлению подготовки
080500.62 – Менеджмент

2012 г.

УМКД разработан старшим преподавателем кафедры ОМиИ
Гришкиной Татьяной Евгеньевной

Рассмотрен на заседании кафедры ОМиИ
Протокол заседания кафедры от «_14_»__сентября__2012 г. № _1_

Заведующий кафедрой __________________ Г. В. Литовка

УТВЕРЖДЕН

Протокол заседания УМС направления подготовки 080500.62 – Менеджмент

от«___»_____________20___ г. № ______

Председатель УМС_________________/_______________________________

СОДЕРЖАНИЕ

I РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цели преподавания учебной дисциплины «Математика»:

– формирование математического мышления и математической культуры студентов;

– обучение построению математических моделей для решения профессиональных задач;

– формирование навыков использования математических методов и основ математического моделирования.

Основной целью курса является повышение качества подготовки специалистов.

Задачи изучения дисциплины:

– воспитать интерес к математике как основному инструментарию и универсальному языку всех специальностей;

– обеспечить уровень математических знаний, умений и навыков, необходимых для решения и анализа прикладных задач;

– привить необходимые навыки работы с научной литературой.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП ВПО

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но так же элементом общей культуры. Изучение студентами экономических специальностей математики формирует у них научное мировоззрение, расширяет кругозор, повышает общую культуру.

Современная экономическая наука немыслима без построения экономико-математических моделей. Данные модели включают комплекс из многих сотен уравнений и тождеств: они могут быть линейными и нелинейными, непрерывными и дискретными, детерминированными и вероятностными. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую в системе фундаментальной подготовки современного экономиста.

Предлагаемая дисциплина относится к базовой части математического и естественнонаучного цикла ООП.

Для успешного освоения данной дисциплины необходимы базовые знания курса «Математика» в объеме средней общеобразовательной школы.

Дисциплина занимает важное место в программе подготовки бакалавра, так как обеспечивает базовую математическую подготовку студентов, необходимую для решения и анализа профессиональных задач.

3. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 544 часа.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)			Формы текущего контроля успеваемости (*по неделям семестра*) Форма промежуточной аттестации (*по семестрам*)
				Лекции	Практические работы	Самостоятельная работа	
1	Введение в анализ с элементами аналитической геометрии	1	1-9	18	18	30	контрольная работа, расчетно-графическая работа, коллоквиум

2	Дифференциальное исчисление	1	10-18	18	18	32	контрольная работа, расчетно-графическая работа
	Подготовка к экзамену					10	итоговый тест
	ИТОГО	1		36	36	72	экзамен
3	Основы алгебры	2	1-5	10	8	20	контрольная работа, расчетно-графическая работа
4	Интегральное исчисление	2	6-10	10	12	22	контрольная работа, расчетно-графическая работа, коллоквиум
5	Экономико-математические методы	2	11-18	16	16	20	контрольная работа, расчетно-графическая работа
	Подготовка к экзамену					10	итоговый тест
	ИТОГО	2		36	36	72	экзамен
6	Теория вероятностей	3	1-10	20	24	32	контрольная работа, расчетно-графическая работа, коллоквиум
7	Математическая статистика	3	11-18	16	12	30	контрольная работа
	Подготовка к экзамену					10	итоговый тест
	ИТОГО	3		36	36	72	экзамен
8	Системы массового обслуживания	5	1-6	6	6	20	контрольная работа
9	Динамическое программирование	5	7-10	4	4	16	контрольная работа
10	Теория игр	5	11-14	4	4	15	контрольная работа, коллоквиум
11	Сетевые модели	5	15-18	4	4	15	контрольная работа
	Подготовка к зачёту					10	итоговый тест
	ИТОГО	5		18	18	76	зачёт

4. СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ И ТЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Государственный стандарт курса учебной дисциплины «Математика»

Математический анализ. Понятие множества. Операции над множествами. Понятие окрестности точки. Функциональная зависимость. Графики основных элементарных функций. Предел числовой последовательности. Предел функции. Непрерывность функции в точке. Свойства числовых множеств и последовательностей. Глобальные свойства непрерывных функций. Производная и дифференциал. Основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения. Выпуклость функции. Неопределенный интеграл. Несобственные интегралы. Точечные множества в N – мерном пространстве. Функции нескольких переменных, их непрерывность. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных. Классические методы оптимизации. Функции спроса и предложения. Функция полезности. Кривые безразличия.

Линейная алгебра. Системы линейных уравнений. Элементы аналитической геометрии на прямой, плоскости и в трехмерном пространстве. Определители. Системы векторов, ранг матрицы. N – мерное линейное векторное пространство. Линейные операторы и матрицы. Комплексные числа и многочлены. Собственные векторы линейных операторов. Евклидово пространство. Квадратичные формы. Системы линейных неравенств. Линейные задачи оптимизации. Основные определения и задачи линейного программирования. Симплексный метод. Теория двойственности. Дискретное программирование. Динамическое программирование. Нелинейное программирование.

Теория вероятностей и математическая статистика Сущность и условия применимости теории вероятностей. Основные понятия теории вероятностей. Вероятностное пространство. Случайные величины и способы их описания. Модели законов распределения вероятностей, наиболее употребляемые в социально-экономических приложениях. Закон распределения вероятностей для функций от известных случайных величин. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел и его следствие. Особая роль нормального распределения: центральная предельная теорема. Цепи Маркова и их использование в моделировании социально-экономических процессов. Статистическое оценивание и проверка гипотез, статистические методы обработки экспериментальных данных.

4.1. Лекции

Темы дисциплины и их содержание

Раздел 1. Введение в математический анализ с элементами аналитической геометрии.

Тема 1. Числа. Переменные. Множества. Отображения. Действительные и комплексные числа. Переменные и постоянные величины. Конечные и бесконечные множества.

Тема 2. Функциональная зависимость.

Понятие функции. Область определения функции. Способы её задания. Классификация функций, их графики. Понятие обратной функции. Основные элементарные функции, их графики. Сложная функция. Понятие обратной функции. Основные элементарные функции и их графики. Преобразование графиков функции.

Тема 3. Элементы аналитической геометрии.

Уравнение линии на плоскости и в пространстве. Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Угол между прямыми. Уравнение плоскости. Кривые и поверхности второго порядка.

Тема 4. Пределы и их свойства.

Понятия о числовых последовательностях. Предел последовательности. Предел функции. Бесконечно малые и бесконечно большие величины и их основные свойства. Основные теоремы о пределах. Признаки существования предела. Два замечательных предела. Раскрытие неопределённости различного вида.

Тема 5. Непрерывность функции.

Непрерывные функции. Переход к пределу под знаком непрерывной функции. Теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций. Непрерывность сложной функции. Непрерывность элементарных функций. Свойства функции, непрерывных на отрезке.

Раздел 2. Дифференциальное исчисление.

Тема 1. Производная функции.

Понятие производной. Дифференцируемость функции в точке и на множестве. Механический и геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции. Непрерывность дифференцируемых функций.

Тема 2. Правила дифференцирования.

Основные правила и формулы дифференцирования функций. Производные высших порядков.

Тема 3. Дифференциал функции.

Дифференциал функции, его свойства. Связь дифференциала и производной.

Тема 4. Основные теоремы дифференциального исчисления.

Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя.

Тема 5. Приложения производной к исследованию функций.

Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции. Выпуклость и вогнутость. Точки перегиба. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке. Схема исследования поведения функции с помощью первой и второй производных. Применение производной к приближённому решению уравнений. Интерполирование функций. Логарифмическая производная, связь с банковским процентом. Эластичность функции, экономические приложения.

Тема 6. Понятие о метрическом пространстве. Окрестность точки. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Понятие о функции многих переменных. Поверхности второго порядка. Предел и непрерывность функции многих переменных. Частные производные и полный дифференциал функции многих переменных. Производная сложной функции. Производная высших порядков. Перестановочность частных производных по разным переменным. Понятие условного экстремума. Метод неопределённых множителей Лагранжа.

Тема 7. Экономико-математические модели.

Функции полезности. Кривые безразличия. Функция спроса, потребление.

"Уравнение Слуцкого". Кривые "доход-потребление". Кривые "цены-потребление". Функции выпуска продукции. Производственные функции затрат ресурсов. Модели поведения фирмы в условиях совершенной и несовершенной конкуренции. Модели общего экономического равновесия. Модель Эрроу-Гурвица.

Раздел 3. Основы алгебры.

Тема 1. Матрицы.

Матрицы и операции над ними. Основные свойства операции над матрицами.

Тема 2. Определители.

Определители квадратных матриц: определения и основные свойства. Вычисление определителя.

Тема 3. Системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений: определение, примеры. Свойства систем уравнений: совместимость, несовместимость, определённость. Частные и общие решения. Эквивалентность систем; элементарные преобразования, сохраняющие эквивалентность систем. Однородные неоднородные системы линейных уравнений. Свойства множеств решений однородных и неоднородных систем. Структура общего решения неоднородной системы.

Тема 4. Методы решения систем линейных уравнений.

Решение систем методом Гаусса, по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы.

Тема 5. Векторное пространство и линейные преобразования.

Векторное пространство: определение и примеры. Линейно зависимые системы векторов и их свойства. Базис линейного пространства. Теорема о ранге и её следствия. Размерность линейного пространства. Подпространства. Евклидово пространство. Квадратичные формы. Теорема Кронекера-Капелли. Теорема о структуре общего решения однородной системы линейных уравнений. Формула для общего решения неоднородной системы линейных уравнений. Собственные векторы и собственные значения матрицы.

Тема 6. Применение элементов линейной алгебры в экономике.

Использование алгебры матриц. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики. Линейная модель торговли.

Раздел 4. Интегральное исчисление.

Тема 1. Первообразная функция и неопределённый интеграл. Первообразная: определения, примеры. Теорема об общем виде всех первообразной данной функции. Неопределённый интеграл и его свойства. Таблица неопределённых интегралов. Методы интегрирования по частям и заменой переменных. Методы интегрирования некоторых классов элементарных функций. Примеры интегралов, не выражающихся через элементарные функции.

Тема 2. Определённый интеграл.

Понятие об определённом интеграле. Свойства определённого интеграла. Теорема о существовании определённого интеграла. Формула Ньютона – Лейбница. Замена переменной. Интегрирование по частям. Несобственный интеграл. Приближённое вычисление определённых интегралов.

Раздел 5. **Экономико-математические методы.**

Тема 1 Методы математического программирования**.**

Задача математического программирования в общем виде. Виды ограничений и множеств допустимых значений. Целевая функция задачи математического программирования. Классификация задач математического программирования. Функция Лагранжа. Седловая точка функции Лагранжа.

Тема 2 Применение линейного программирования для построения и анализа моделей производства.

Задача оптимизации плана выпуска готовой продукции. Постановка и различные формы записи задач линейного программирования. Стандартная и каноническая формы представления задач линейного программирования. Геометрическая интерпретация Симплекс – метод. Симплексные таблицы. Экономическая интерпретация элементов симплексной таблицы. Двойственные задачи и методы. Экономическая интерпретация и свойства двойственных оценок в производственных задачах.

Тема 3 Транспортная задача**.**

Экономическая и математическая формулировки транспортной задачи. Потенциалы, их экономический смысл. Метод потенциалов. Основные способы построения начального опорного решения. Транспортные задачи с нарушенным балансом производства и потребления.

Тема 4 Целочисленное программирование**.**

Примеры целочисленных моделей. Методы решения задач целочисленного программирования. Метод Гомори. Метод ветвей и границ.

Тема 5 Нелинейное программирование.

Общая постановка задачи. Графический метод. Дробно-линейное программирование.

Раздел 6. **Теория вероятностей.**

Тема 1. Предмет теории вероятностей. Основные понятия.

Предмет теории вероятностей, первоначальные понятия и определения, основные формулы комбинаторики, классическое определение вероятностей.

Тема 2. Сложение и умножение вероятностей.

Теорема сложения вероятностей, условные вероятности, теорема умножения вероятностей, независимые события и их свойства. Вероятность появления хотя бы одного события.

Тема 3. Формулы полной вероятности и Байеса. Схема Бернулли.

Формула полной вероятности, формула Байеса, схема повторных испытаний Бернулли, формула Бернулли. Локальная и интегральная теорема Муавра – Лапласа, формула Пуассона.

Тема 4. Случайные величины.

Случайная величина. Примеры случайных величин. Виды случайных величин (конечные, дискретные, непрерывные). Закон и таблица распределения конечных и дискретных случайных величин. Функция распределения случайной величины и её свойства. Плотность распределения непрерывной случайной величины и её свойства. Эффект нулевой вероятности. Математическое ожидание как среднее значение случайной величины. Определение математического ожидания для различных видов случайных величин. Определение суммы и произведения случайных величин. Свойства математического ожидания. Дисперсия случайной величины и её свойства. Среднее квадратичное отклонение.

Тема 5. Основные распределения случайных величин.

Биноминальное распределение и его характеристики. Распределение Пуассона и его характеристики. Теорема Пуассона. Нормальное распределение и его характеристики.

Локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа. Показательное распределение и его характеристики. Равномерное распределение и его характеристики.

Тема 6. Система случайных величин.

Случайные векторные величины. Функция и плотность распределения случайной двумерной величины. Корреляционный момент связи двух случайных величин. Коэффициент корреляции.

Раздел 7. Математическая статистика.

Тема 1. Статистические оценки параметров распределения.

Основные задачи статистики и математической статистики. Выборки. Статистическая обработка результатов наблюдений. Оценки и связанные сними понятия. Точечные оценки вероятности, математического ожидания, дисперсии и их свойства. Метод максимума правдоподобия и его применения для нахождения точечных оценок параметров основных распределений. Понятие доверительных оценок. Построение доверительных интервалов для параметров нормального распределения: случаи, когда один из параметров известен и когда неизвестны оба параметры.

Тема 2. Проверка статистических гипотез.

Постановка задачи проверки гипотез. Критерий оценки и его мощность. Критическая область и область принятия гипотезы. Проверка гипотез о значениях параметров нормального распределения. Проверка гипотез в виде распределения. Критерий Пирсона.

Тема 3. Корреляционный и регрессионный анализ.

Функциональные и корреляционные зависимости случайных величин. Линейная и нелинейная регрессия. Составление уравнений прямых регрессий, метод наименьших квадратов. Статистическая оценка коэффициента корреляции и её свойства. Построение доверительных интервалов для параметров линейной регрессии. Проверка статистической значимости регрессии и адекватности модели регрессии результатам наблюдений.

Раздел 8. Системы массового обслуживания.

Тема 1. Элементы теории массового обслуживания. Случайный процесс и его характеристики.

Понятие о случайном процессе со счётным множеством состояний. Поток событий. Простейший поток и его свойства. Нестационарный пуассоновский поток. Поток Пальма. Марковский случайный процесс. Система массового обслуживания и их классификация. Установившийся режим обслуживания. Формулы Эрланга.

Тема 2. Показатели эффективности систем массового обслуживания.

Система дифференциальных уравнений для потока и её решение. Системы массового обслуживания с Марковскими потоками состояний. Простейшие системы массового обслуживания и их характеристики.

Раздел 9. Динамическое программирование.

Тема 1. Динамическое программирование.

Понятие динамического программирования. Принцип поэтапного построения оптимального управления. Простейшие экономические задачи, решаемые методом динамического программирования.

Раздел 10. Теория игр.

Тема 1. Предмет теории игр. Основные понятия. Классификация игр.

Предмет теории игр, первоначальные понятия и определения. Игра. Цель игры. Стратегия. Исход. Функция выигрыша. Классификация игр по числу игроков. Конечные и бесконечные игры. Игра с нулевой суммой. Игры с постоянной разностью. Игры с ненулевой суммой. Кооперативные и некооперативные игры.

Тема 2. Антагонистические игры

Чистые стратегии. Игры двух участников. Матричные игры. Чистые стратегии. Доминирование стратегий. Минимаксные и максиминные стратегии. Верхняя и нижняя цена игры. Цена игры. Смешанные стратегии. Смешанные стратегии и теорема о минимаксе для матричных антагонистических игр.

Тема 3. Методы решения задач теории игр.

Решение игры “2*2”, графический метод решения игры “2*2”.Графоаналитический метод решение игр “2*n”, “m*2”. Способы редуцирования игр “m*n”. Сведение конечной матричной игры к задаче линейного программирования.

Тема 4. Статические игры.

Игры с природой. Отличия антагонистической матричной игры от статической. Матрица рисков. Критерии Байеса, Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица выбора оптимальной чистой стратегии. Решение статической игры в смешанных стратегиях. Примеры решения экономических задач.

Раздел 11. Сетевые модели.

Тема 1. Элементы теории графов.

Основные понятия и определения. Задание графов. Плоские графы; эйлеровы графы; гамильтоновы графы.

Тема 2. Сетевые модели.

Основные понятия: работы, события, сетевой график. Правила построения сетевых графиков, нумерация событий. Основные показатели сетевых графиков: критический путь и его продолжительность, времени событий и работ.

Темы лекций	Кол-во часов
1 семестр	
Множества, основные понятия, приложение функций в экономике	4
Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве	6
Введение в анализ	8
Производная и ее приложение	12
Функции нескольких переменных	6
всего	**36**
2 семестр	
Элементы линейной и векторной алгебры	10
Интегральное исчисление, первообразная	10
Экономико-математические методы	16
всего	**36**
3 семестр	
Основные понятия ТВ, случайные события	10
Случайные величины	10
Основные задачи математической статистики	16
всего	**36**
5 семестр	
Системы массового обслуживания	6
Динамическое программирование	4
Теория игр	4
Сетевые модели	4
всего	**18**

4.2. Практические занятия

Темы практических занятий	Кол-во часов
1 семестр	
Комплексные числа	4
Аналитическая геометрия	6

Введение в анализ	8
Приложение производной	10
Функции нескольких переменных	8
всего	**36**
2 семестр	
Линейная алгебра (матрицы, определители, СЛУ)	8
Неопределенный интеграл (методы вычисления)	8
Определенный интеграл (приложение)	4
Экономико-математические методы	16
всего	**36**
3 семестр	
Элементы комбинаторики. Случайные события	12
Случайные величины	12
Математическая статистика	12
всего	**36**
5 семестр	
Системы массового обслуживания	6
Динамическое программирование	4
Теория игр	4
Сетевые модели	4
всего	**18**

5. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

№ п/п	№ раздела (темы) дисциплины	Форма (вид) самостоятельной работы	Трудоемкость в часах
1	1	Выполнение индивидуальной расчётно-графической работы №1. Выполнение домашних заданий.	30
2	2	Выполнение индивидуальных расчётно-графических работ №2,3. Выполнение домашних заданий.	32
3	1,2	Подготовка к экзамену	10
4	3	Выполнение индивидуальной расчётно-графической работы №4. Выполнение домашних заданий.	20
5	4	Выполнение индивидуальной расчётно-графической работы №5. Выполнение домашних заданий.	22
6	5	Выполнение индивидуальной расчётно-графической работы №6. Выполнение домашних заданий.	20
7	3,4,5	Подготовка к экзамену	10
8	6	Выполнение индивидуальных расчётно-графических работ № 7,8. Выполнение домашних заданий.	32
9	7	Выполнение домашних заданий.	30

10	6,7	Подготовка к экзамену	10
11	8	Выполнение домашних заданий.	20
12	9	Выполнение домашних заданий.	16
13	10	Выполнение домашних заданий.	15
14	11	Выполнение домашних заданий.	15
15	8,9,10,11	Подготовка к зачёту	10
Итого			292

6. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ФОРМЫ

Интегральную модель образовательного процесса по дисциплине формируют технологии методологического уровня: модульно-рейтинговое обучение, технология поэтапного формирования умственных действий, технология развивающего обучения, элементы технологии развития критического мышления.

Образовательный процесс по дисциплине строится на основе комбинации следующих методов обучения:

1. Неимитационные методы обучения

Проблемная лекция начинается с вопросов, с постановки проблемы, которую в ходе изложения материала необходимо решить. Лекция строится таким образом, что деятельность студента по ее усвоению приближается к поисковой, исследовательской. Обязателен диалог преподавателя и студентов.

Лекция-визуализация учит студента преобразовывать устную и письменную информацию в визуальной форме; используются схемы, рисунки, чертежи и т.п., к подготовке которых привлекаются обучающиеся. Хорошо использовать на этапе введения в новый раздел, тему, дисциплину.

Лекция с заранее запланированными ошибками. Ошибки должны обнаружить студенты и занести их в конспект. Список ошибок передается студентам лишь в конце лекции и проводится их обсуждение.

2. Неигровые имитационные методы обучения

Контекстное обучение направлено на формирование целостной модели будущей профессиональной деятельности студента. Знания, умения, навыки даются не как предмет для запоминания, а в качестве средства решения профессиональных задач.

Тренинг – специальная систематическая тренировка, обучение по заранее отработанной методике, сконцентрированной на формировании и совершенствовании ограниченного набора конкретных компетенций.

3. Игровые имитационные методы

Мозговой штурм – наиболее свободная форма дискуссии, позволяющей быстро включить в работу всех членов учебной группы. Используется там, где требуется генерация разнообразных идей, их отбор и критическая оценка. Этапы продуцирования идей и их анализа намеренно разделены: во время выдвижения идей запрещается их критика. Внешне одобряются и принимаются все высказанные идеи. Больше ценится количество выдвинутых идей, чем их качество. Идеи могут высказываться без обоснования.

7. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Результативность работы обеспечивается системой контроля, которая включает опрос студентов на практических занятиях, проверку выполнения текущих заданий, контрольные работы, тесты, выполнение и защита типовых расчётов (РГР), проведение коллоквиумов, экзаменов. Рубежный контроль осуществляется контрольными работами и тестами. Контроль за выполнением индивидуального задания осуществляется в два этапа: проверка письменных отчётов; защита задания в устной или письменной форме.

Для самостоятельной работы используется учебно-методическое обеспечение на бумажных и электронных носителях. Тематика самостоятельной работы соответствует содержанию разделов дисциплины и теме домашнего задания.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля выбираются из содержания разделов дисциплины. Выполнение домашнего задания обеспечивает непрерывный контроль за процессом освоения учебного материала каждого обучающегося, своевременное выявление и устранение отставаний и ошибок.

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины: экзамен (1, 2, 3 сем.), зачёт (5 сем).

Вопросы к экзамену (1 семестр)

Раздел 1. Введение в анализ с элементами аналитической геометрии.

1. Комплексные числа.
2. Действия с комплексными числами.
3. Понятие множества.
4. Операции над множествами.
5. Числовые множества.
6. Постоянные и переменные величины.
7. Функция как одно из понятий математики.
8. Область определения и множество значений функции.
9. Способы задания функции.
10. Классификация функций.
11. Понятие об обратной функции.
12. Основные элементарные функции и их графики.
13. Понятие об уравнении линии.
14. Уравнение прямой на плоскости.
15. Уравнение плоскости.
16. Уравнение прямой в пространстве.
17. Угол между прямыми.
18. Кривые второго порядка на плоскости.
19. Поверхности второго порядка.
20. Пределы: числовых последовательностей, переменных, функций.
21. Основные теоремы о пределах.
22. Виды и раскрытие неопределенностей при нахождении пределов.
23. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
24. Сравнение функций. Эквивалентные бесконечно малые.
25. Асимптоты графика функций одной переменной.
26. Понятие неопределенности функции в точке.
27. Свойства функций, непрерывных в точках.
28. Свойства функций, непрерывных на множестве.
29. Непрерывность сложной функции.
30. Односторонняя непрерывность.
31. Непрерывность обратной функции.
32. Точка разрыва функции и их классификации.

Раздел 2. Дифференциальное исчисление.

1. Производная функции.
2. Дифференцируемость и дифференциал функции.
3. Геометрический смысл производной и дифференциала.
4. Физический смысл производной и дифференциала.
5. Приложение производной в экономике. Эластичность функции.
6. Правила вычисления производной и дифференциала.
7. Производная и дифференциал сложной функции.
8. Логарифмическое дифференцирование.
9. Производные и дифференциалы высших порядков.
10. Производная обратной функции.
11. Производная функции, заданной параметрически.
12. Производная неявно заданной функции.
13. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций
14. Формула Тейлора.
15. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.

16. Признаки монотонности функции.
17. Экстремум функции.
18. Наибольшее и наименьшее значение функции на множестве.
19. Направление выпуклости графика функции.
20. Точки перегиба графика функции.
21. Общая схема исследования функции.
22. Частные производные функции нескольких переменных.
23. Полное приращение функции нескольких переменных.
24. Дифференцируемость функции нескольких переменных.
25. Дифференциал функции нескольких переменных.
26. Градиент функции нескольких переменных.
27. Частные производные высших порядков.
28. Экстремумы функции нескольких переменных.
29. Наименьшее и наибольшее значение функции нескольких переменных.
30. Системы функциональных уравнений и неравенств.
31. Особые точки множеств.
32. Условные экстремумы функций нескольких переменных.
33. Наименьшее и наибольшее значение функции на множестве решений системы уравнений и неравенств.
34. Экстремумы выпуклых и вогнутых функций.
35. Интерполяция.
36. Интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона.
37. Интерполирование сплайнами.
38. Приближенное решение уравнений (методами хорд, касательных).
39. Функции полезности.
40. Кривые безразличия.
41. Функции спроса.
42. Уравнение Слуцкого.
43. Кривые " доход-потребление".
44. Кривые " цены-потребление".
45. Функции выпуска продукции.
46. Производственные функции затрат ресурсов.
47. Модели поведения фирмы в условиях совершенной и несовершенной конкуренции.
48. Модели общего экономического равновесия.
49. Модель Эрроу-Гурвица.

Вопросы к экзамену (2 семестр)

Раздел 3. Основы алгебры.

1. Определение матрицы.
2. Сложение и вычитание матриц, свойства.
3. Умножение матриц на число, свойства.
4. Умножение матриц.
5. Равенство матриц.
6. Транспонирование матриц.
7. Определитель, его определение, порядок.
8. Основные свойства определителей.
9. Обратная матрица (определение).
10. Нахождение обратной матрицы.
11. Решение матричных уравнений.
12. Минор матрицы.
13. Ранг матрицы.
14. Элементарные преобразование матриц.
15. Эквивалентные матрицы.

16. Общий вид систем линейных неоднородных уравнений.
17. Общий вид систем линейных однородных уравнений.
18. Определение решения систем линейных уравнений.
19. Совместные и несовместные системы уравнений.
20. Матричная запись систем линейных уравнений.
21. Методы решения систем линейных уравнений.
22. Методы Гаусса решения систем линейных уравнений.
23. Теорема Кронекера – Капелли.
24. Условия единственности решения систем линейных уравнений.
25. Общее и частное решения систем линейных уравнений, свободные и базисные неизвестные.
26. Решение систем линейных уравнений, когда число уравнений и неизвестных не совпадают.
27. N-мерные векторы. Действия с n-мерными векторами.
28. Скалярное произведение n-мерных векторов. Свойства скалярного произведения.
29. Длина вектора. Угол между n-мерными векторами.
30. Линейные комбинации векторов.
31. Линейная зависимость векторов.
32. Базис и размерность линейного пространства.
33. Ортогональные системы векторов.
34. Ортонормированная система векторов. Декартова система координат.
35. Модель Леонтьева.
36. Матрица затрат.
37. Условия продуктивности матрицы полных затрат.
38. Модель равновесных цен.
39. Линейная модель торговли.

Раздел 4. Интегральное исчисление.

1. Неопределенный интеграл, его определение геометрическая интерпретация.
2. Методы и правила интегрирования.
3. Определенный интеграл, определение и геометрическая интерпретация.
4. Методы интегрирования определенных интегралов.
5. Несобственные интегралы.

Раздел 5. Экономико-математические модели и методы.

1. Понятие модели и моделирование.
2. Элементы и этапы процесса моделирования.
3. Формы моделирования.
4. Особенности математического моделирования экономических объектов.
5. Производственно-технологический и социально-экономический уровни
6. экономико-математического моделирования.
7. Случайность и неопределённость в экономико-математическом моделировании.
8. Классификация моделей в экономике. Признаки классификации.
9. Теоретико-аналитические и прикладные модели.
10. Детерминистские и стохастические модели.
11. Статистические и динамические модели.
12. Открытые и замкнутые модели.
13. Макро и микроэкономические модели.
14. Задача математического программирования в общем виде.
15. Виды ограничений и множеств допустимых значений.
16. Целевая функция задачи математического программирования.
17. Классификация задач математического программирования.
18. Функция Лагранжа. Седловая точка функции Лагранжа.
19. Задача оптимизации плана выпуска готовой продукции.

20. Постановка и различные формы записи задач линейного программирования
21. Стандартная и каноническая формы представления задач линейного программирования.
22. Геометрическая интерпретация. Симплекс – метод. Симплексные таблицы.
23. Экономическая интерпретация элементов симплексной таблицы.
24. Двойственные задачи и методы.
25. Экономическая интерпретация и свойства двойственных оценок в производственных задачах.
26. Экономическая и математическая формулировки транспортной задачи.
27. Потенциалы, их экономический смысл.
28. Метод потенциалов.
29. Основные способы построения начального опорного решения.
30. Транспортные задачи с нарушенным балансом производства и потребления.
31. Примеры целочисленных моделей.
32. Метод Гомори.
33. Метод ветвей и границ.
34. Постановка задачи о коммивояжере. Решение её методом ветвей и границ
35. Дробно-линейное программирование.

Вопросы к экзамену (3 семестр)

Раздел 6 . Теория вероятностей.

1. Случайные события и их классификация.
2. Элементы комбинаторики.
3. Различные подходы к введению вероятности. Практически невозможные и практически достоверные события. Практической уверенности.
4. Теорема сложения вероятностей несовместимых событий.
5. Теорема умножения вероятностей.
6. Теорема сложения вероятностей, совместимых событий.
7. Формула полной вероятности.
8. Теорема Бейеса.
9. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число наступления события.
10. Теоремы Лапласа.
11. Вероятность отклонения частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.
12. Случайные величины. Закон распределения дискретных случайных величин.
13. Функция распределения и ее свойства.
14. Плотность распределения и ее свойства.
15. Функция случайной величины и ее распределение.
16. Математическое ожидание случайной величины, свойство математического ожидания.
17. Дисперсия случайной величины, свойства дисперсии.
18. Биноминальное распределение.
19. Распределение Пуассона.
20. Равномерное распределение.
21. Нормальное распределение.
22. Вероятность попадания нормального распределенной величины на заданный участок. Правило трех сигм.
23. Понятие о теореме Ляпунова.
24. Оценка отклонения распределения случайной величины от нормального.
25. Эксцесс и асимметрия.
26. Показательное распределение.
27. Неравенство Чебышева.
28. Теорема Чебышева.

29. Теорема Бернулли.
30. Понятие о системе случайных величин. Закон распределения системы случайных величин, таблица распределения.
31. Функция распределения системы случайных величин, ее свойства.
32. Плотность распределения системы случайных величин, ее свойства.
33. Плотность распределения отдельных величин, входящих в систему. Условные законы распределения.
34. Зависимые и независимые случайные величины.
35. Числовые характеристики системы случайных величин.
36. Понятие о случайном процессе и его реализации.
37. Марковский случайный процесс.

Раздел 7. Математическая статистика.

1. Понятие выборки случайных величин.
2. Понятие о выборочном методе.
3. Понятие генеральной совокупности (генеральной выборки).
4. Понятие регрессии, регрессионные зависимости.
5. Регрессионная зависимость как "ослабленная" функциональная зависимость.
6. Виды регрессионной зависимости.
7. Метод наименьших квадратов как метод аналитического сглаживания и определения параметров регрессионной зависимости.
8. Множественная регрессия.
9. Корреляционная зависимость между случайными величинами.
10. Ковариация. Коэффициент корреляции.
11. Различия между регрессионной и корреляционной зависимостями.
12. Основные задачи математической статистики.
13. Статистическая функция распределения.
14. Статистический ряд. Гистограмма.
15. Числовые характеристики статистического распределения.
16. Выравнивание статистических рядов, метод наибольшего правдоподобия.
17. Свойства точечных оценок.
18. Доверительный интервал. Доверительная вероятность.
19. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения.
20. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.
21. Статистические гипотезы.
22. Статистический критерий проверки нулевой гипотезы. Наблюдаемое значение критерия.
23. Критическая область. Критические точки и их нахождение.
24. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей.
25. Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых известны. Понятие о критериях согласия.

Вопросы к зачёту (5 семестр)

1. Системы массового обслуживания и их классификация.
2. Основные понятия: поток, очередь, канал обслуживания.
3. Показатели эффективности систем массового обслуживания.
4. Простейший поток и его свойства.
5. Система дифференциальных уравнений для потока и её решение.
6. Системы массового обслуживания с Марковскими потоками состояний.
7. Простейшие системы массового обслуживания и их характеристики.
8. Понятие динамического программирования.
9. Принцип поэтапного построения оптимального управления.

10. Простейшие экономические задачи, решаемые методом динамического программирования.
11. Классификация игр и методов решения игровых задач.
12. Оптимальность в антагонистических играх.
13. Принцип максимина.
14. Нижнее значение игры.
15. Принцип минимакса.
16. Верхнее значение игры.
17. Ситуация равновесия в чистых стратегиях.
18. Седловая точка. Значение игры.
19. Смешанные стратегии.
20. Существования минимаксов в смешанных стратегиях.
21. Решение игры “2*2”, графический метод решения игры “2*2”.
22. Графоаналитический метод решение игр “2*n”, “m*2”.
23. Способы редуцирования игр “m*n”.
24. Доминирование стратегий.
25. Матричные игры и линейное программирование.
26. Игры с природой. Критерии выбора оптимальной стратегии Лапласа, Вальда, Гурвица, Сэвиджа. Примеры.
27. Элементы теории графов. Основные понятия и определения.
28. Задание графов. Плоские графы; эйлеровы графы; гамильтоновы графы.
29. Основные понятия: работы, события, сетевой график.
30. Правила построения сетевых графиков, нумерация событий.
31. Основные показатели сетевых графиков: критический путь и его продолжительность, временные показатели.

Примерные варианты контрольных работ

1. Комплексные числа.

Задание 1: Вычислить: a) $\dfrac{1+3i}{-2+i}\cdot(-2i)+1$; b) $\left(\sin(\dfrac{\pi}{3})+i\cdot\cos(\dfrac{\pi}{3})\right)\cdot(-4-3i)$;

c) $\left(\dfrac{i^{16}+3}{i^{6}+3}\right)^{5}$; d) $\dfrac{1+i}{(\sqrt{3}+i)(1+i\sqrt{3})}$

Задание 2: Найти модуль и аргумент комплексного числа:

a) $z=(-5+i)(-5-i)$; b) $z=\left(\dfrac{4+3i}{5}\right)^{10}$

Задание 3: Решить уравнение: a) $z^2-8iz-15=0$; b) $z^3+8i=0$.

Задание4: Составить приведенное квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее корень: z=1+i

2. Аналитическая геометрия.

1. Даны вершины треугольника: A(2, 3), B(6, 1), C(2, -2).

Найти:

1. Длину стороны AB.
2. Уравнения сторон AB, BC, AC.
3. Уравнение высоты из вершины A.
4. Уравнение медианы из вершины B.
5. Расстояние от точки C до прямой AB.

2. Построить кривые:

1. $y=\sqrt{4-x^2}$.
2. $2x^2+3y=9$.

3. Построить плоскость $4x+2y+3z=12$.

3. Введение в анализ. Приложение производной.

1. Вычислите y'

$$y = \frac{2 - \arcsin 2x}{\cos(1-3x)}$$

2. Вычислите y''

$$y = \sqrt{1-x^2} + 4x$$

3. Найти предел функции

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}$$

4. Исследовать функцию на непрерывность

$$y = \begin{cases} 2x+3, x \le 0 \\ 3+4x, x > 0 \end{cases}$$

5. Решить задачу.

Производитель реализует свою продукцию по цене *p* за единицу, а издержки при этом задаются функцией $C(x) = 9x + 0{,}2x^2$, где *x* - объем выпускаемой продукции в условных единицах ($x > 0$) Найти оптимальный для производителя объем выпуска продукции и соответствующую ему прибыль, если p=49 ден. ед.

4. Функции нескольких переменных.

1. Найти все частные производные второго порядка

$$z = yx^2 - e^{xy}.$$

2. Фирма производит продукцию на двух заводах; x и y – соответственно объёмы этой продукции за месяц. Сколько продукции ежемесячно следует выпускать на каждом заводе при наименьших суммарных затратах, если функция издержек заводов имеет вид: $C = x^2 + y^2 - 10x - 40y + 5500$.

3. Задана производственная функция: $Q = 10\sqrt{L}\sqrt{K} + 15\sqrt{K}$. Вычислить предельный продукт труда и предельный продукт капитала при L=100, K=2500.

5. Элементы линейной алгебры.

1. Задана матрица $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Требуется найти:

транспонированную матрицу A^T; ранг матрицы A; произведение матриц $A^T \cdot A$ и $A \cdot A^T$; обратную матрицу A^{-1}.

2. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

1)методом обратной матрицы; 2)по формулам Крамера; 3)методом Гаусса.

6. Неопределённый интеграл.

1. $\int \frac{ctg^3 x}{\sin^2 x} dx$;

2. $\int \sqrt[5]{3x-2} dx$;

6. $\int \arcsin 2x dx$;

7. $\int \frac{x dx}{x+6}$;

3. $\int \frac{xdx}{1+x^2}$;

4. $\int x\cos 3xdx$;

5. $\int \frac{dx}{x^2+3x+5}$;

8. $\int \cos 3x \sin 7xdx$;

9. $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+4)}$;

10. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

7. Определенный интеграл

Задание 1: Вычислить определенный интеграл:

1) $\int_1^2 (x^2+1)dx$; 2) $\int_0^3 e^{-\frac{x}{3}}dx$; 3) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$; 4) $\int_1^e \ln xdx$; 5) $\int_{1/2}^1 x^2 \cdot (2x-1)^8 dx$

Задание 2: Вычислить несобственный интеграл:

1) $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int_3^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+4}dx$

Задание 3: Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1) $y=x^2,\ y=2-x^2$; 2) $y=x(3-x),\ y=x-3$.

8. Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

1. $\frac{y'}{e^{2x-1}}=tgy \quad y(0)=0$;
2. $y'\sqrt{1-x}=\frac{1}{\sqrt{1-y}}$;
3. $y'-\frac{y}{x-2}=x+2$;
4. $y'''+2y''+5y'=0$;
5. $y''+y'-2y=3e^x$.

9. Экономико-математические модели

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом

$L=3x_1+2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1-2x_2 \ge 6, \\ x_1+2x_2 \ge 0, \\ x_1 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

2. Решить задачу линейного программирования симплекс методом

$L=x_1+x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2 \le 4, \\ -x_1+2x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

3. Решить задачу линейного программирования М-методом

$L=6x_1+3x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \ge 3 \\ 3x_1 - 3x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

4. Двойственная задача.

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют четыре вида ресурсов S_1, S_2, S_3 и S_4. Известны запасы ресурсов и число единиц ресурсов, затрачиваемых на производство единицы продукции (числа условные).

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на производство единицы продукции.	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	0	1
S_4	21	3	0

Прибыль, получаемая от единицы продукции P_1 и P_2 – соответственно 2 и 3 рубля. Найти такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Сформулировать экономически и математически для данной задачи двойственную. Найти решение двойственной задачи, используя основные теоремы двойственности. Провести анализ устойчивости двойственных оценок.

5. Для исходной задачи составить двойственную. Решить обе задачи симплексным методом и по решению каждой из них найти решение другой. Одну из задач решить графическим методом:

$$L = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\text{при ограничениях: } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ -x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$$

6. Решить задачу целочисленного программирования.

Для приобретения оборудования по сортировке зерна фермер выделяет a усл. ед. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей b м^2.

Фермер может заказать оборудование двух видов: мене мощные машины A стоимостью c_1 усл. ед., требующие производственной площади d_1 м^2 (с учетом проходов) и обеспечивающие производительность за смену k_1 т. зерна, и более мощные машины В стоимостью c_2 усл. ед., занимающие площадь d_2 м^2 и обеспечивающие за смену сортировку k_2 т. зерна.

Определить оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий фермеру при данных ограничениях максимум общей производительности сортировки, если он может приобрести не более 8 машин типа В.

Данные	Параметры							
	a	b	c_1	c_2	d_1	d_2	k_1	k_2
1	34	60	3	4	3	5	2	3

7. Транспортная задача.

Требуется спланировать перевозку строительного материала с трёх заводов к четырём строительным площадкам, используя железнодорожную сеть. В течение каждого квартала на 4 площадках требуется соответственно 5,10,20,15 вагонов строительных материалов. Возможности различных заводов соответственно равны 10, 15 и 25 вагонов в квартал. Стоимость перевозки одного вагона заданы матрицей $\begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Теория вероятностей: случайные события

1. Студент знает 45 из 60 вопросов программы. Каждый Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Найти вероятность того, что: а) студент знает все три вопроса, содержащиеся в билете; б) студент знает только два вопроса; в) студент знает только один вопрос своего экзаменационного билета.
2. В ящике имеется 15 деталей, из которых 10 стандартных. Сборщик наугад берёт 3 детали. Найти вероятность того, что все взятые детали будут стандартными.
3. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,3. Производится 5 выстрелов. Чему равна вероятность того, что цель будет поражена?
4. Вероятность того, что клиент банка не вернёт заём в период экономического роста, равна 0,04, а в период экономического кризиса – 0,13. Предположим, что вероятность того, что начнётся период экономического роста, равна 0,65. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернёт полученный кредит?
6. Вероятность того что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа равна 0,01.Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 4 абонента?
7. В партии деталей двух сходных форматов число крупных деталей вдвое больше числа мелких. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу 10 деталей окажется 6 крупных?
8. Вероятность допущения дефекта при производстве механизмов равна 0,4. Случайным образом отбирается 500 механизмов. Установить величину наибольшего отклонения частости изготовленных механизмов с дефектами от вероятности 0,4, которую можно гарантировать с вероятностью 0,9973.

11. Теория вероятностей: случайные величины.

1. Производится 4 выстрела по некоторой цели. Вероятность попадания в цель от выстрела к выстрелу не меняется и остаётся равной 0,4. Требуется для С. В. Х –числа попаданий составить ряд распределения и построить многоугольник распределения.
2. Детали, выпускаемые цехом по размеру диаметра распределяются по нормальному закону с параметрами: а=5 см, и σ =0,9. найдите границы в которых следует ожидать размер диаметра детали, чтобы вероятность невыхода за эти границы была равна 0,95
3. СВ Х задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 0 \\ x^2 & при \quad 0 < x \le 1 \\ 1 & при \quad x > 1. \end{cases}$$

Найдите плотность вероятности, M(X), D(X).

4. Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого имеет показательное распределение $F_1(t) = 1 - e^{-0,02t}$, второго $F_2(t) = 1 - e^{-0,05t}$. Найдите вероятность того, что за время t=6ч хотя бы один элемент откажет.
5. Найти числовые характеристики СВ Х, распределённой равномерно в промежутке [6, 10].

6. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время Т равна 0,05. Оценить вероятность того что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом отказов за время Т окажется меньше 2.
7. Вероятность вынуть из урны белый шар 1/3. Вынули (с возвращением)300 шаров. Оценить вероятность того, что отклонение частости появления белых шаров от вероятности будет менее 1/15.

12. Математическая статистика.

1. Предположим, что на некотором предприятии собраны данные о числе дней, пропущенных работником по болезни:

Число дней, пропущен. в данном мес.	0	1	2	3	4
Число работников	10	17	25	28	24

Постройте полигон распределения частот. Найдите среднее число пропущенных дней, стандартное отклонение, коэффициент вариации. Объясните полученные результаты.

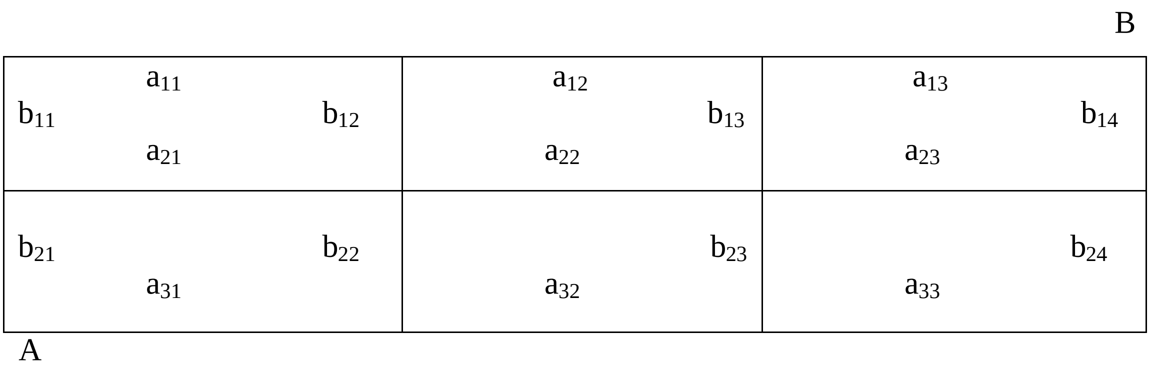
2. Аудиторская фирма хочет проконтролировать состояние счетов одного из коммерческих банков. Для этого случайно отбираются 50 счетов. По 20 счетам из 50 отобранных имело место движение денежных средств в течение месяца. Постройте 99%-й доверительный интервал, оценивающий долю счетов в генеральной совокупности, по которым имело место движение денежных средств в течение месяца.
3. Компания занимающаяся консультированием в области инвестиций заявляет, что среднегодовой процент по акциям определённой отрасли промышленности составляет 11,5% . Инвестор, желая проверить истинность этого утверждения на основе случайной выборки 50 акций выявил, что среднегодовой процент по ним составил 10,8% с исправленным средним квадратическим отклонением s=3,4%. На основе имеющейся информации определите, имеет ли инвестор достаточно оснований, чтобы опровергнуть заявление компании? Принять уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

13. Системы массового обслуживания.

1. В порту имеется один причал для разгрузки судов. Интенсивность прохождения потока судов равна 0,2 (судов в сутки). Среднее время разгрузки одного судна составляет 3 суток. Предполагается, что очередь может быть неограниченной длины. Найти среднее число судов ожидающих разгрузки, среднее время ожидания разгрузки, среднее число судов находящихся у причала.

14. Динамическое программирование.

1. Требуется проложить трубопровод на дачном массиве между двумя пунктами А и В таким образом, чтобы затраты на проведение работ (в тыс. руб.) были минимальные.



a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{24}

7	6	5	7	3	2	4	6	1	4	8	2	5	6	3	5	9

2. В таблице указан возможный прирост выпуска продукции четырьмя плодово-консервными заводами области в млн. руб., при осуществлении инвестиции на их модернизацию с дискретностью 50 млн. руб., причём на один завод можно осуществить только одну инвестицию.

Составить план распределения инвестиций между заводами области, максимизирующий общий прирост выпуска продукции.

x	0	50	100	150	200
$f_1(x_1)$	0	25	60	100	140
$f_2(x_2)$	0	30	70	90	122
$f_3(x_3)$	0	36	64	95	130
$f_4(x_4)$	0	28	56	110	142

3. В трех районах города предприниматель планирует строительство пользующихся спросом одинаковых по площади магазинов. Известны места, в которых их можно построить. Посчитаны затраты на их строительство и эксплуатацию.
   Необходимо так разместить магазины, чтобы затраты на их строительство и эксплуатацию были минимальные.

x	0	1	2	3	4
$g_1(x)$	0	8	14	23	32
$g_2(x)$	0	5	10	17	28
$g_3(x)$	0	6	15	25	31

15. Теория игр.

1. Найти седловую точку и значение игры для каждой из двух следующих игр с платежными матрицами:

$$A=\begin{pmatrix}8&6&2&8\\8&9&4&5\\7&5&3&5\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}10&3&7&4\\13&15&9&16\\14&13&6&4\\9&10&8&7\end{pmatrix}.$$

2. Определите области значений x, для которых стратегии A_2, B_2 будут оптимальными в играх с платёжными матрицами:

$$A=\begin{pmatrix}1&4&6\\5&x&9\\7&3&4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2&4&5\\10&x&6\\4&8&3\end{pmatrix}.$$

3. Определите, будут ли значения следующих игр больше, меньше или равны нулю:

$$A=\begin{pmatrix}2&10&5&0\\3&4&9&6\\-5&3&-2&-4\\8&5&-3&-5\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}4&8&-2&-3\\5&9&1&0\\5&-8&-3&5\end{pmatrix}.$$

4. Найти решение игры заданной матрицей:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}5&6&4&3\\4&5&3&7\end{pmatrix};\ 2)\ B=\begin{pmatrix}6&4\\5&3\\1&7\\2&3\end{pmatrix}.$$

5. Решите игру с платёжной матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}; \; C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & 7 \\ 5 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 8 & 9 & 9 \\ 10 & 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

16. Сетевые модели.

1. Предположим, что при составлении некоторого проекта выделено 6 событий: 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 9 связывающих их работ (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 6). Требуется: составить сетевой график выполнения работ; рассчитать параметры сетевого графика.

8. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

а) основная литература:

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -2-е изд., перераб. и доп.. – М.: Банки и биржи: ЮНИТИ, 2003, 2004.- 472с.

3. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

б) дополнительная литература:

1. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

2. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.

3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

5. Математика в экономике: В 2 ч.: учеб.: рек. Мин.обр.РФ/ А.С. Солодовников [и др.]. -2-е изд., перераб и доп.. –М.: Финансы и статистика. – 2003, 2005. Ч.1 .-2003.-2005.- 384 с.

6. Математика в экономике: В 2 ч.: учеб.: рек. Мин.обр.РФ/ А.С. Солодовников [и др.]. -2-е изд., перераб и доп.. –М.: Финансы и статистика. – 2003, 2005. Ч.2 .-2003.-2005.- 560 с.

7. Математика: энцикл. / гл. ред. Ю. В. Прохоров. - репр. изд. "Математического энциклопедического словаря" 1988 г. - М. : Большая Рос. энцикл., 2003. - 848 с.

в)программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

№	Наименование ресурса	Краткая характеристика
1	http://www.iqlib.ru	Интернет-библиотека образовательных изданий, в которой собраны электронные учебники, справочные и учебные пособия. Удобный поиск по ключевым словам отдельным темам и отраслям знаний
2	http://elibrary.ru	Научная электронная библиотека журналов

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Лекционная аудитория с мультимедийным оборудованием.

Рейтинг-план дисциплины
МАТЕМАТИКА
1семестр

		Модуль 1	**Модуль 2**	**Модуль 3**	**Модуль 4**	**Модуль 5**		
	Вид работы	Комплексные числа	Аналитическая геометрия	Введение в анализ	Приложение производной	Функции не-скольких переменных	Итоговая работа за семестр	
1.	Контрольная работа	5	5	5	5	5		
2.	Тест						5	
3.	Расчётно-графическая работа		5		5	5		
4.	Коллоквиум			5				
5.	Домашние задания	2	2	2	2	2		
	$\sum$	7	12	12	12	12	5	**60**
	Экзамен							**40**

Расчётно-графическая работа:
Сдача в срок -2 балла
Защита: «3»-1балл
«4»-2балла
«5»-3 балла

Коллоквиум:
«5»-5 баллов
«4»-4 балла
«3»-3 балла

Контрольная работа:
«5»-5 баллов
«4»-4 балла
«3»-3 балла

Тест 25 заданий:
7-12 –1 балл
13-19 –3 балла
20-22 –4 балла
23-25 –5 баллов

Рейтинг-план дисциплины
МАТЕМАТИКА
2 семестр

		Модуль 1	**Модуль 2**	**Модуль 3**		
	Вид работы	Матричная алгебра	Интегральное исчисление	Экономико-матем. модели и методы	Итоговая работа за семестр	
1.	Контрольная работа	5/5	5/5	5		
2.	Тест				5	
3.	Расчётно-графическая работа	5	5	5		
4.	Коллоквиум		5			
5.	Домашние задания	4	4	2		
	$\sum$	19	24	12	5	**60**
	Экзамен					**40**

Расчётно-графическая работа:
Сдача в срок -2 балла
Защита: «3»-1 балл
«4»-2 балла
«5»-3 балла

Коллоквиум:
«5»-5 баллов
«4»-4 балла
«3»-3 балла

Контрольная работа:
«5»-5 баллов
«4»-4 балла
«3»-3 балла

Тест 25 заданий:
7-12 –1 балл
13-19 –3 балла
20-22 –4 балла
23-25 –5 баллов

Рейтинг-план дисциплины
МАТЕМАТИКА
3 семестр

		Модуль 1	**Модуль 2**	**Модуль 3**		
	Вид работы	Случайные события	Случайные величины	Математическая статистика	Итоговая работа за семестр	
1.	Контрольная работа	5/5	5	5		
2.	Тест			12 (лаб/раб)	5	
3.	Расчётно-графическая работа	5	5			
4.	Коллоквиум		5			
5.	Домашние задания	3	3	2		
	$\sum$	18	18	19	5	**60**
	Экзамен					**40**

Л/р сдача в срок -1б, защита – 1б.

Расчётно-графическая работа:
Сдача в срок -2 балла
Защита: «3»-1балл
«4»-2балла
«5»-3 балла

Коллоквиум:
«5»-5 баллов
«4»-4 балла
«3»-3 балла

Контрольная работа:
«5»-5 баллов
«4»-4 балла
«3»-3 балла

Тест 25 заданий:
7-12 –1 балл
13-19 –3 балла
20-22 –4 балла
23-25 –5 баллов

Рейтинг-план дисциплины
МАТЕМАТИКА
5 семестр

		Модуль 1	**Модуль 2**	**Модуль 3**	**Модуль 4**		
	Вид работы	Системы массового обслуживания	Динамическое программирование	Теория игр	Сетевые модели	Итоговая работа за семестр	
1.	Контрольная работа	5/5	5/5	5	5		
2.	Тест					5	
3.	Коллоквиум			5			
4.	Домашние задания	5	5	5	5		
	$\sum$	15	15	15	10	5	**60**
	Зачёт						**40**

Коллоквиум:
«5»-5 баллов
«4»-4 балла
«3»-3 балла

Контрольная работа:
«5»-5 баллов
«4»-4 балла
«3»-3 балла

Тест 25 заданий:
7-12 –1 балл
13-19 –3 балла
20-22 –4 балла
23-25 –5 баллов

II КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ПРОГРАММНОГО МАТЕРИАЛА

1. Семестр I

Лекция 1.

Тема: Введение в анализ. Основные понятия

План

1. Числа. Переменные. Множества. Отображения.
2. Действительные и комплексные числа. Переменные и постоянные величины.
3. Конечные и бесконечные множества, операции над ними.

Цель: дать студентам представление о теоретических основах данной темы.

Задачи:

– сформировать представления, первичные знания по теме;
– формировать направленность, интерес;
– привить необходимую математическую культуру.

Ключевые вопросы

1. Под множеством понимается совокупность (собрание, набор) некоторых объектов. Объекты, которые образуют множества называются элементами, или точками, этого множества.

2. Комплексным числом z называется выражение $z = a + ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением: $i^2 = -1$; $i = \sqrt{-1}$.

При этом число a называется действительной частью числа z (a = $Re\ z$), а b- мнимой частью (b = $Im\ z$).

3. Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Объединение двух множеств А и В называется множество С, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств, т.е. С=АUВ.

Например, если А= {а, в, d, е}; В= {а, е, f, с, к}, то С =АUВ = {а, в, d, е, f, с, к}

Пересечением двух множеств А и В называется множество Д, состоящее из всех элементов, принадлежащих каждому из данных множеств А и В, т.е. Д = А∩В.

Разностью множеств А и В называется множество Е, состоящее из всех элементов множества А, которые не принадлежат множеству В, т.е. Е = А \ В.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 2.

Тема: Введение в анализ. Функциональная зависимость

План

1. Понятие функции. Область определения функции. Способы её задания.
2. Классификация функций, их графики.
3. Понятие обратной функции.
4. Основные элементарные функции, их графики.
5. Сложная функция.
6. Преобразование графиков функции.
7. Функции в экономике.

Цель: раскрыть понятие функции и функциональной зависимости, рассмотреть наиболее часто используемые в экономике функции.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Рассмотрим два множества Х и У, элементами которых могут быть любые объекты. Предложим, что каждому элементу х множества Х по некоторому закону или способу поставлен в соответствие определенный элемент у множества У, то говорят что на множестве Х задана функция у = f(х), (или отображение множества Х во множество У). Множество Х на-

зывается областью определения функции f, а элементы $y = f(x)$ образуют множество значений функции – У. x – независимая переменная (аргумент).

y – зависимая переменная, f – закон соответствия, знак функции.

2. Элементарные функции делятся на два класса:

1 класс алгебраических функций:

а) $y = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots + A_{n-1}x + A_n$, это многочлен (полином) n – степени или целая алгебраическая функция, где $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ – вещественные числа, коэффициенты многочлена;

б) $y = (A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n)/(B_0x^m + B_1x^{m-1} + \dots + B_m)$, это дробно – рациональная функция, она представляет собой отношения двух многочленов;

в) Иррациональная функция, например, $y = \sqrt{x-1} + x^2$.

2 класс трансценденных функций.

а) $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, показательная функция,

б) $y = \log_a x$, $a> 0$, $a \neq 1$, логарифмическая функция,

в) все тригонометрические функции,

г) все обратные тригонометрические функции,

д) функции вида $y = x^L$, где L – иррациональное число.

3. Все функции, с которыми встречаемся в школьном курсе, элементарные. Перечислим их:

1. $y = x^n$, $y = x^{-n}$ $y = x^{m/n}$, где n Є N, m Є Z. Эти функции называются степенными.
2. Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a>0$, $a \neq 1$
4. Тригонометрические функции y = sin x, y = cos x , y = tg x, y = ctg x.
5. Обратные тригонометрические функции y = argsin x, y =arccos x,

y =arctg x, y = arcctg x.

4. Пусть функция y = f(u) есть функция от переменной u, определенная на множестве U с областью значений – У, а переменная u = φ(x) функция от переменной x, определенной на множестве X с областью значения U. Тогда заданная на множестве X функция y = f(φ(x)) называется сложной функцией (функцией от функций).

5. Рассмотрим какой-нибудь товар. При цене *p* за единицу товара обозначим *D* число единиц товара, которые покупатели на рынке желают купить. Функция *D=D(p)* называется функцией спроса на товар. Она убывающая, т.к. при увеличении цены спрос на товар падает. Рассмотрим функцию *S=S(p)* - число единиц товара, который предлагают производители для продажи. Эта функция называется функцией предложения товара. Она возрастающая, т.к. с увеличением цены на одну единицу товара предложение товара увеличивается.

Производственная функция есть экономико-математическое уравнение, связывающее ресурсы (факторы производства) и выпуск продукции. К ресурсам относятся: земля, капитал (основные фонды), труд, предпринимательская способность. Рассмотрим однофакторные производственные функции *Q* , зависящие от капитала *К*, либо от труда *L*, которые будем записывать: *Q=f(K)* и *Q=f(L).*

Прибыль одно из важнейших понятий в экономике, позволяющее оценить деятельность любого предприятия или фирмы. В наиболее общем виде прибыль можно определить как разницу между полным доходом (выручкой) от реализации продукции или услуг и полными издержками (затратами).Обозначим прибыль через букву П, полный доход R и полные затраты *C*, тогда: *П = R-C.*

Основным понятием теории потребления является функция полезности *U=U(x)*, где *x* - количество товара *X*. Данная функция – субъективная числовая оценка данным индивидом полезности U(*x)* для него количества *x* товара *X*.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 3.
Тема: Уравнения прямой на плоскости
План

1. Общее уравнение прямой.
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
3. Уравнение прямой проходящей через 2 точки.
4. Уравнение прямой проходящей через данную точку в данном направлении.
5. Уравнение прямой в отрезках.
6. Уравнение прямой проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
7. Основные задачи: угол между двумя прямыми, расстояние от точки до прямой.

Цель: рассмотреть различные виды уравнения прямой на плоскости, основные задачи по теме.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$Ax + By + C = 0$, причем постоянные A, B не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют общим уравнением прямой.

2. Если общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ привести к виду:

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ и обозначить $-\frac{A}{B} = k$; $-\frac{C}{B} = b$; *т.е.* $y = kx + b$, то полученное уравнение называется уравнением прямой с угловым коэффициентом k.

3. Пусть на плоскости заданы две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

4. Выше записанное уравнение прямой можно упростить: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если $x_1 = x_2$. Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ = k называется угловым коэффициентом прямой. $y - y_1 = \kappa(x - x_1)$ -уравнение прямой проходящей через данную точку в данном направлении.

5. Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ $C \neq 0$, то, разделив на –С, получим: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ или $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $a = -\frac{C}{A}$; $b = -\frac{C}{B}$.

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент *а* является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а *b* – координатой точки пересечения прямой с осью Оу.

6. Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как $tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|$.

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.

Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 4.
Тема: Кривые второго порядка
План

1. Общее уравнение кривых второго порядка.
2. Окружность.

3. Эллипс.
4. Гипербола.
5. Парабола.

Цель: сформировать знания о кривых второго порядка, исследовать форму кривых по их уравнениям.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Кривая второго порядка может быть задана уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Существует система координат (не обязательно декартова прямоугольная), в которой данное уравнение может быть представлено в одном из видов, приведенных ниже.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - уравнение эллипса.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ - уравнение “мнимого” эллипса.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - уравнение гиперболы.

$a^2x^2 - c^2y^2 = 0$ – уравнение двух пересекающихся прямых.

$y^2 = 2px$ – уравнение параболы.

$y^2 - a^2 = 0$ – уравнение двух параллельных прямых.

$y^2 + a^2 = 0$ – уравнение двух “мнимых” параллельных прямых.

$y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых.

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ – уравнение окружности.

2. Окружностью радиуса R с центром в точке M_0 называется множество всех точек M плоскости удовлетворяющих условию $M_0M=R$.

3. Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами есть величина постоянная, большая чем расстояние между фокусами.

4. Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.

5. Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 5.
Тема: Аналитическая геометрия в пространстве
План

1. Уравнение плоскости.
2. Плоскость. Основные задачи: угол между двумя плоскостями, расстояние от точки до плоскости.
3. Уравнение прямой в пространстве.
4. Прямая в пространстве. Основные задачи.
5. Прямая и плоскость в пространстве.
6. Поверхности второго порядка.

Цель: сформировать знания о плоскости, прямой в пространстве, поверхностях второго порядка, рассмотреть основные задачи по теме.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Уравнением данной поверхности в прямоугольной системе координат $OXYZ$ называется такое уравнение $\mathrm{F(x, y, z) = 0}$ с тремя переменными x, y, z, которому удовлетворяет координаты каждой точки лежащей на поверхности и не удовлетворяют координаты точки не лежащие на этой поверхности.

Простейшей поверхностью является плоскость.

Общее уравнение плоскости имеет вид: $\mathrm{Ax + By + Cz + D = 0}$.

2. Угол между плоскостями находится по формуле:

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Выбор знака косинуса зависит от того, какой угол между плоскостями следует найти – острый, или смежный с ним тупой.

3. Возьмем произвольную прямую и вектор $\vec{S}$ (m, n, p), параллельный данной прямой. Вектор $\vec{S}$ называется направляющим вектором прямой. На прямой возьмем две произвольные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и M(x, y, z). Обозначим радиус- векторы этих точек как $\overrightarrow{r_0}$ и $\vec{r}$, очевидно, что $\vec{r}$ - $\overrightarrow{r_0}$ = $\overrightarrow{M_0M}$. Т.к. векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{S}$ коллинеарны, то верно соотношение $\overrightarrow{M_0M}$ = $\vec{S}$ t, где t – некоторый параметр.

Итого, можно записать: $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{S}$ t.

Т.к. этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки прямой, то полученное уравнение – параметрическое уравнение прямой.

Это векторное уравнение может быть представлено в координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

Преобразовав эту систему и приравняв значения параметра t, получаем канонические уравнения прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

4. Угол между двумя прямыми в пространстве вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi = \pm\frac{\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}}{\left|\overrightarrow{S_1}\right|\left|\overrightarrow{S_2}\right|} = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

5. Угол между прямой и плоскостью в пространстве вычисляется по формуле:

$$\sin\varphi = \pm\frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 6.

Тема: Числовая последовательность. Предел числовой последовательности

План

1. Числовая последовательность.
2. Предел последовательности.
3. Геометрический смысл предела последовательности.

Цель: расширить представление о числовой последовательности, сформировать знания о пределе числовой последовательности.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана последовательность: $x_1, x_2, \dots, x_n = \{x_n\}$. Общий элемент последовательности является функцией от n: $x_n = f(n)$.

2. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется условие: $|a - x_n| < \varepsilon$. Это записывается: $\lim x_n = a$.

3. Определение предела последовательности геометрически можно сформулировать так: число a предел последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε-окрестности точки a найдётся натуральное число N, такое что все значения $\{x_n\}$ для которых $n > N$ попадут в ε-окрестности точки a.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 7.
Тема: Предел функции. Основные теоремы о пределах
План

1. Предел функции.
2. Односторонние пределы.
3. Основные теоремы о пределах.

Цель: сформировать знания о пределе функции, рассмотреть основные теоремы о пределах.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Число A называется пределом функции f(x) при $x \to a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\Delta>0$, что для всех x таких, что $0 < |x - a| < \Delta$ верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

2. Если $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ только при $x < a$, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A_1$ - называется пределом функции f(x) в точке x = a слева, а если $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ только при $x > a$, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A_2$ называется пределом функции f(x) в точке x = a справа.

3. Теорема 1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при $x \to a$.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Теорема 5. Если $f(x)>0$ вблизи точки x = a и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то $A>0$.

Теорема 6. Если $g(x) \le f(x) \le u(x)$ вблизи точки x = a и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$, то и

$\lim\limits_{x \to a} = A$.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 8.

Тема: Бесконечно малые и бесконечно большие функции

План

1. Определение бесконечно большой и бесконечно малой функции.
2. Свойства бесконечно большой и бесконечно малой функции.
3. Эквивалентные бесконечно малые функции и их применение.

Цель: сформировать знания о бесконечно большой и бесконечно малой функциях, их свойствах.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Функция называется бесконечно большой при x→a, где а – чосли или одна из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, где А – число или одна из величин ∞, +∞ или -∞.

Функция f(x) называется бесконечно малой при x→a, где а может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

2. <u>Свойства бесконечно малых функций:</u>

1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при x→a тоже бесконечно малая функция при x→a.

2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при x→a тоже бесконечно малая функция при x→a.

3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки x = a является бесконечно малой функцией при x→a.

4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю, есть величина бесконечно малая.

3. Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$, то функция α называется бесконечно малой более высокого порядка, чем функция β.

Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = A, \quad A \neq 0, \quad A = const$, то α и β называются бесконечно малыми одного порядка.

Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$, то функции α и β называются эквивалентными бесконечно малыми. Записывают α ~ β.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 9.

Тема: Непрерывность функции. Классификация точек разрыва

1. Основные понятия. Непрерывность функции в точке и в интервале.
2. Основные теоремы о непрерывных функциях.
3. Точки разрыва функции и их классификация.

Цель: сформировать знания о непрерывности функции, точках разрыва.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Функция f(x), определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется непрерывной в точке x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.

Частное двух непрерывных функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что g(x) не равна нулю в точке x_0.

Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:

Если u = f(x), v = g(x) – непрерывные функции в точке $x = x_0$, то функция v = g(f(x)) – тоже непрерывная функция в этой точке.

3. Точка x_0 называется точкой разрыва функции f(x), если f(x) не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

Точка x_0 называется точкой разрыва 1- го рода, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Точка x_0 называется точкой разрыва 2 – го рода, если в этой точке функция f(x) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

Литература: [1], [2], [3].

Лекции 10, 11.

Тема: Производная функции, ее геометрический и физический смысл

План

1. Задачи, приводящие к понятию производной.
2. Определение производной. Геометрический и физический смысл производной.
3. Уравнения касательной и нормали.
4. Правила дифференцирования. Таблица производных.
5. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций.
6. Производные высших порядков.

Цель: расширить представление о производной, рассмотреть правила дифференцирования.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1.Производной функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

2.Уравнение касательной к кривой: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали к кривой: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

3.Обозначим *f(x) = u, g(x) = v*- функции, дифференцируемые в точке x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2) $(u\cdot v)' = u\cdot v' + u'\cdot v$

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$.

4.Пусть $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad t_0 \le t \le T$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ - производная функции, заданной параметрически.

5.Пусть функция f(x)- дифференцируема на некотором интервале.

Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную функции f′(x), получим вторую производную функции f(x). $y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ т.е. y′′ = (y′)′ или $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 12.
Тема: Дифференциал функции
План

1. Понятие дифференциала функции.
2. Основные теоремы о дифференциале.
3. Применение дифференциала к приближённым вычислениям.

Цель: сформировать знания о дифференциале, его свойствах и применении.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Дифференциалом функции f(x) в точке x называется главня линейная часть приращения функции. Обозначается dy или df(x).

Из определения следует, что dy = f′(x)Δx или *dy = f′(x)dx*. Можно также записать: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

2. Если *u = f(x)* и *v = g(x)*- функции, дифференцируемые в точке x, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

d(u ± v) = (u ± v)′dx = u′dx ± v′dx = du ± dv;

d(uv) = (uv)′dx = (u′v + v′u)dx = vdu + udv;

d(Cu) = Cdu;

$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

3. Формула, для вычисления приближенных значений функции:

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 13.
Тема: Основные теоремы дифференциального исчисления
План

1. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши.
2. Правило Лопиталя.

Цель: сформулировать и доказать основные теоремы дифференциального исчисления, рассмотреть правило Лопиталя.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Теорема Роля. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], дифференцируема на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны f(a) = f(b), то на интервале (a, b) существует точка ε, a < ε < b, в которой производная функция f(x) равная нулю, $f'(\varepsilon) = 0$.

Теорема Лагранжа. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b), то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка ε a < ε < b, такая, что $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\varepsilon)$.

Теорема Коши. Если функции f(x) и g(x) непрерывны на отрезке [a, b] и дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b), то существует по крайней мере одна точка ε, a < ε < b, такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.$$

2. Теорема (правило Лопиталя). Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы в вблизи точки a, непрерывны в точке a, $g'(x)$ отлична от нуля вблизи a и f(a) = g(a) = 0, то предел отношения функций при x→a равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 14.
Тема: Исследование функций с помощью производных

1. Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции.
2. Выпуклость и вогнутость. Точки перегиба.
3. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.
4. Схема исследования поведения функции с помощью первой и второй производных.

Цель: сформировать знания о приложении производной к исследованию функций.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на промежутке (a, b), причем $f'(x) > 0$ для a < x < b, то эта функция возрастает на отрезке [a, b].

Если $f'(x)<0$ в промежутке (a, b), то f(x) убывает на отрезке [a, b].

Функция f(x) имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Функция f(x) имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

2. Кривая обращена выпуклостью вверх на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется выпуклой, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется вогнутой.

Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется точкой перегиба.

3. План нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

1) Найти критические точки функции.
2) Найти значения функции в критических точках.
3) Найти значения функции на концах отрезка.
4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

4. Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

1) Область существования функции.

Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.

2) Точки разрыва. (Если они имеются).
3) Интервалы возрастания и убывания.
4) Точки максимума и минимума.
5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.
6) Области выпуклости и вогнутости.
7) Точки перегиба. (Если они имеются).
8) Асимптоты. (Если они имеются).
9) Построение графика.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 15.
Тема: Приложения производной в экономике
План

1. Предельные величины.
2. Издержки производства.
3. Производительность труда.
4. Эластичность функции.

Цель: сформировать знания о приложении производной в экономике.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Предельные величины характеризуют процесс изменения экономического объекта. Таким образом, производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого исследуемого фактора.

2. Пусть зависимость издержек производства от объема выпускаемой продукции выражается формулой $\mathrm{C} = \mathrm{C(Q)}$.Функция средних издержек на единицу продукции определяется по формуле $\overline{C} = \dfrac{C}{Q}$.

Предельные издержки определяются по формуле $C_{пр} = C'$.

3. Производительность труда есть производная от объема произведенной продукции по времени $Z = Q'(t)$.

4. Эластичностью функции $y = f(x)$ называется предел отношения относительного приращения функции $\dfrac{\Delta y}{y}$ к относительному приращению независимой переменной $\dfrac{\Delta x}{x}$ при $\Delta x \to 0$ и записывается

$$\varepsilon_x(y) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} \div \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}y'.$$

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 16.

Тема: Функции нескольких переменных. Основные понятия

План

1. Понятие о метрическом пространстве. Окрестность точки. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве.
2. Понятие о функции многих переменных.
3. Предел и непрерывность функции многих переменных.

Цель: сформировать первоначальные знания о функции нескольких переменных.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ радиуса r называется совокупность всех точек (x, y), которые удовлетворяют условию $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$.

2. Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому - либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z, то переменная z называется функцией двух переменных z = f(x, y).

Если паре чисел (x, y) соответствует одно значение z, то функция называется однозначной, а если более одного, то – многозначной.

Областью определения функции z называется совокупность пар (x, y), при которых функция z существует.

3. Число A называется пределом функции f(x, y) при стремлении точки M(x, y) к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа ε > 0 найдется такое число r >0, что для любой точки M(x, y), для которых верно условие: $MM_0<r$,также верно и условие $\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon$. Записывают: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$.

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции f(x, y). Тогда функция z = f(x, y) называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$, причем точка M(x, y) стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 17

Тема: Экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум

План

1. Частные производные и полный дифференциал функции нескольких переменных функции.
2. Производная высших порядков.
3. Экстремум функции нескольких переменных.Понятие условного экстремума. Метод неопределённых множителей Лагранжа.

Цель: сформировать знания об экстремуме функции нескольких переменных.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Пусть в некоторой области задана функция z = f(x, y). Возьмем произвольную точку M(x, y) и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z$ = f(x + Δx, y) – f(x, y) называется частным приращением функции по x.

Можно записать $\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$.

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется частной производной функции z = f(x, y) по x.

Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$; $f'_x(x,y)$.

Полным дифференциалом функции z = f(x, y) называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y)

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy.$$

2. Если функция f(x, y) определена в некоторой области D, то ее частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ тоже будут определены в той же области или ее части. Будем называть эти производные частными производными первого порядка.

Производные этих функций будут частными производными второго порядка.

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$ и т.д. называются смешанными производными.

3. Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$f(x_0, y_0) > f(x,y)$,то точка M_0 называется точкой максимума.

Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство $f(x_0, y_0) < f(x,y)$,то точка M_0 называется точкой минимума.

Условный экстремум находится, когда переменные x и y, входящие в функцию u = f(x, y), не являются независимыми, т.е. существует некоторое соотношение φ(x, y) = 0, которое называется уравнением связи.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 18

Тема: Приложения функций нескольких переменных к решению экономических задач

План

1. Эластичность функции нескольких переменных.
2. Полезность. Предельная полезность.
3. Производственная функция.
4. Кривые безразличия производства.

Цель: рассмотреть применение частных производных в экономических задачах.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Спрос на отдельный товар *D* при прочих равных условиях зависит от уровня цен всех товаров. Практически наибольший интерес представляет изучение влияния цены одного альтернативного товара p_A. Кроме того, спрос на товар зависит от цены данного товара *p* и доходов потребителя *y*, т.е. спрос-это функция трёх переменных $D = f(p, p_A, y)$.

Эластичность спроса от цены (собственной) : $\varepsilon_P = \frac{p}{D} \cdot D'_p$.

Эластичность спроса от цены альтернативного товара (перекрёстная эластичность): $\varepsilon_A = \frac{p_A}{D} \cdot D_{p_A}$. Эластичность спроса от дохода: $\varepsilon_Y = \frac{y}{D} \cdot D'_Y$.

2. Основным понятием теории потребления является функция полезности $U = f(x, y)$. Эта функция выражает меру полезности набора *(x,y)*, где *x*- количество товара *X*, а *y*- количество товара *У*. Чувствительность набора *(x,y)* к незначительному изменению *x* при фиксированном *y* называется предельной полезностью *x* и определяется как частная производная $U_x^/$. Аналогично, предельная полезность *y* определяется как $U_y^/$. Изменение полезности приближённо определяется формулой $\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y,$ когда *x* и *y* изменяются одновременно.

3. Производственная функция есть экономико-математическое уравнение, связывающее ресурсы (факторы производства) и выпуск продукции. К ресурсам относятся: земля, капитал (основные фонды), труд, предпринимательская способность. Ограничимся двумя ресурсами: капиталом *К* и трудом *L*, тогда производственная функция примет вид: $Q = f(K, L)$.

Предельным продуктом фактора производства называется добавочный продукт, полученный в результате добавления одной единицы данного фактора (ресурса) при неизменной величине остальных факторов производства. Иными словами, это частная производная от производственной функции по соответствующей переменной (ресурсу).

Функция $Q = f(K, L)$ имеет две частные производные: предельный продукт капитала $Q_K^/$ и предельную производительность труда $Q_L^/$.

4. Линия, в каждой точке которой различные сочетания факторов производства (капитал Л и труд L) дают одно и то же количество выпускаемой продукции Q, называется изоквантой, или кривой безразличия производства.

Величина углового коэффициента касательной к кривой безразличия, взятая с обратным знаком, определяет коэффициент заменяемости ресурсов $R = -\frac{dK}{dL}$.

Литература: [1], [2], [3].

2. Семестр II
Лекция 1
Тема: Матрицы
План

1. Определение матрицы. Примеры.
2. Виды матриц. Равенство матриц. Транспонирование.
3. Сложение матриц. Свойства операции сложения.
4. Умножение матрицы на число. Свойства операции умножения матрицы на число.
5. Умножение матриц. Свойства операции умножения матриц.

Цель: сформировать первоначальные знания о матрицах, операциях над матрицами и основных свойствах операций над матрицами.

Задачи:

– актуализировать представления о матрицах как о аппарате представления данных в сфере торгового дела;
– сообщить теоретический материал по данной теме;
– привести примеры по выполнению действий над матрицами.

Ключевые вопросы

1. Прямоугольная таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

расположенных в m строк и n столбцов, называется матрицей размера $m \times n$.
Числа $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ называются ее элементами.

2. Если число строк матрицы равно числу ее столбцов m = n, то матрица называется квадратной порядка n. Элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} образуют главную диагональ, а элементы a_{1n}, a_{2n-1}, …, a_{n1} – побочную диагональ квадратной матрицы. Квадратная матрица называется диагональной, если все ее элементы, не лежащие на главной диагонали, равны нулю. Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице. Матрица любого размера называется нулевой, если все ее элементы равны нулю. Матрица, состоящая из одной строки, называется матрицей-строкой**,** а из одного столбца – матрицей-столбцом.

Транспонированием матрицы называется замена ее столбцов (строк) на строки (столбцы) с сохранением их порядка.

Матрицы A= (a_{ij}) и B= (b_{ij}) одного размера называются равными, если все их соответствующие элементы равны, т.е. A=B, если $a_{ij} = b_{ij}$ для всех i и j.

3. Суммой двух матриц A и B одного размера m×n называется матрица C= A+B, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для i= 1,2,…,m; j=1,2,…,n.

4**.** Произведением матрицы A на число α называется матрица, элементы которой получены умножением всех элементов матрицы A на число α, т. е. $\alpha A = A\alpha = (\alpha a_{ij})$.

5. Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. В этом случае матрицы называются согласованными.

Произведением матриц $\underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B}$ называется такая матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B: $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{ik} b_{kj}$.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 2
Тема: Определители
План

1. Определение определителя второго порядка. Его вычисление.
2. Определение определителя третьего порядка. Правило «треугольников» вычисления определителей третьего порядка.
3. Определитель порядка *n*.
4. Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя.
5. Свойства определителей.
6. Методы вычисления определителей.

Цель: Сформировать знания об определителях их основных свойствах и способах вычисления определителей.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры по вычислению определителей;
- провести рефлексию.

Ключевые вопросы

1. Определитель второго порядка $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2}$, $j=(j_1, j_2)$ –перестановки из чисел 1, 2; t – число инверсий в перестановке вторых индексов произведения $a_{1j_1} a_{2j_2}$, суммирование ведется по всем перестановкам (j_1, j_2).

2. Определитель третьего порядка $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$, $j=(j_1, j_2, j_3)$ – все возможные перестановки вторых индексов в произведении $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$, суммирование ведет-

ся по всем перестановкам.

3. Определитель порядка n: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_j (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$, суммирование ведется по всем перестановкам $j=(j_1, j_2, \dots, j_n)$ из чисел 1, 2, …, n; t – число инверсий в перестановке вторых индексов произведения $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$.

4. Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя Δ порядка n называется определитель порядка n-1, который получается из Δ вычеркиванием i – строки и j – столбца. Число $A_{ij}=(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя.

5. К свойствам определителя относятся следующие: величина определителя не меняется при транспонировании; определитель меняет знак, если поменять местами две строки (два столбца); определитель, у которого две строки (два столбца) одинаковы, равен 0; общий множитель элементов какой-нибудь строки (столбца) можно выносить за знак определителя; определитель равен произведению элементов главной диагонали, если все элементы определителя, находящиеся ниже (выше) главной диагонали, равны 0; определитель не изменится, если элементам какой-нибудь строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же произвольное число, не равное нулю; определитель равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на их алгебраические дополнения: $\Delta=a_{i1}A_{i1}+ a_{i2}A_{i2}+\ldots+ a_{in}A_{in}\ (i=\overline{1,n})$, $\Delta=a_{1j}A_{1j}+ a_{2j}A_{2j}+\ldots+ a_{nj}A_{nj}\ (j=\overline{1,n})$.

6. К методам вычисления определителя относят метод разложения по элементам строки (столбца), метод накопления нулей ниже главной диагонали и комбинированный.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 3
Тема: Системы линейных уравнений
План

1. Основные понятия.
2. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
2. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.
3. Обратная матрица.
4. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.
5. Теорема Кронекера-Капелли.

Цель: сформировать знания о видах и свойствах систем линейных уравнений, а также структурировать полученные знания о частном и общем решении систем, расширить первоначальные представления студентов о методах решения систем линейных уравнений.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– привести примеры по исследованию систем линейных уравнений;
– закрепить полученную информацию.

Ключевые вопросы

1. В общем виде система m линейных уравнений с n неизвестными (переменными) x_1, x_2, …, x_n имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Здесь a_{ij} и b_j – произвольные числа (i = 1,2, …, m; j = 1,2, …, n), которые называются соответственно коэффициентами при неизвестных и свободными членами уравнений.

Решением системы уравнений называется набор n чисел $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, … , $x_n=a_n$, при подстановке которых каждое из уравнение системы обращается в тождество.

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение; и несовместной, если система не имеет решений. Совместная система уравнений имеет либо одно решение - и в таком случае называется определенной, либо больше одного решения и тогда она называется неопределенной.

Системы уравнений называются эквивалентными, если имеют одно и то же множество решений. Элементарные преобразования системы на практике заменяют соответствующими преобразованиями расширенной матрицы системы, содержащей коэффициенты при неизвестных и свободные члены.

2. Метод Гаусса − метод последовательного исключения переменных −заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к эквивалентной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Элементарными преобразованиями системы являются: умножение уравнения на число отличное от нуля; сложение уравнения умноженного на любое число, с другим уравнением; перестановка уравнений; отбрасывание уравнений вида 0 = 0. Элементарные преобразования системы на практике заменяют соответствующими преобразованиями расширенной матрицы системы, содержащей коэффициенты при неизвестных и свободные члены.

3. Пусть Δ -определитель матрицы системы, а Δj -определитель, полученный из определителя Δ заменой j-го столбца свободных членов В. Тогда, если $\Delta \neq 0$, система линейных уравнений имеет единственное решение, определяемое по формулам $x_j = \dfrac{\Delta_{x_j}}{\Delta}$, j = 1,2, **...** , n. Данные формулы называются формулами Крамера.

3. Матрица A^{-1} называется обратной квадратной матрице *A*, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E -единичная матрица.

Обратная матрица $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\tilde{A}^T = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, где $-\tilde{A}^T$ присоединенная транспонированная матрица, элементы которой являются алгебраическими дополнениями элементов матрицы *A*.

4. Система уравнений в матричной форме примет вид AX = B. Пусть матрица системы А является невырожденной, т.е. существует обратная матрица A^{-1}. Умножив обе части этого уравнения слева на A^{-1}, получаем решение системы уравнений. $X = A^{-1}B$, где A^{-1} обратная матрица.

5. Рангом матрицы А называется наивысший порядок минора матрицы А, отличного от нуля. Обозначается ранг матрицы А символами: $rangA$ или $r(A)$. Из определения следует, что если $r(A) = k$, то существует минор порядка k матрицы А, отличный от нуля, а все миноры порядка (k+1) равны нулю или не существуют.

Чтобы система была совместной, необходимо и достаточно, чтобы $r(A) = r(B)$, при этом: а) если $r(A) = r(B)$=n − система имеет единственное решение, б) если $r(A) = r(B)$<n система имеет множество решений, в которой r независимых уравнений, r базисных переменных и n-r свободных переменных.

6.Система, у которой все свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$), называется однородной. Однородная система всегда совместна, так как набор из *n* нулей удовлетворяет любому уравнению такой системы.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 4

Тема: Применение элементов линейной алгебры в экономике

План

1. Собственные векторы и собственные значения матрицы.
2. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики.
3. Линейная модель торговли.

Цель: дать первоначальные понятия о применении матричных моделей в экономике и развить умения использования методов линейной алгебры

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;

– привести примеры по использования методов линейной алгебры в экономических задачах;

– осуществить рефлексию.

Ключевые вопросы

1. Ненулевой вектор $\vec{x}$ называется собственным вектором матрицы А, соответствующий собственному значению λ, если имеет место равенство: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

2. В. Леонтьев на основании анализа экономики США в предвоенный период установил важный факт: в течение длительного времени величины $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ остаются практически неизменными и могут рассматриваться как постоянные числа, где x_i – общий объем продукции i-й отрасли (ее валовый выпуск); x_{ij}– объем продукции i-й отрасли, потребляемый j-й отраслью при производстве объема продукции x_j.

Уравнение $\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}$ называются экономико-математической моделью межотраслевого баланса или вместе с интерпретацией матрицы А и векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ ($\vec{x}$ – вектор валового выпуска; $\vec{y}$ – вектор конечного потребления; А – матрица прямых затрат.) – моделью Леонтьева или моделью «затраты - выпуск».

3. Пусть бюджеты n стран, которые обозначим $x_1, x_2, \ldots, x_n$, расходуются на покупку товаров; a_{ij} – доля бюджета x_j, которую j-я страна тратит на закупку товаров у i-й страны.

Тогда, если весь бюджет идет на закупки внутри страны и вне ее (это можно трактовать как торговый бюджет), справедливо равенство: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\ \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22}\ \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, a_{n2}\ \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$, в этом случае, называется структурной матрицей торговли. Общая выручка от внутренней и внешней торговли для i-й страны выражается равенством $p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$.

Вектор бюджетов стран бездефицитной международной торговли есть собственный вектор структурной матрицы торговли, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 5

Тема: Векторное пространство и линейные преобразования

План

1. Вектор. Длина вектора.
2. Линейные операции над векторами.
3. Свойства векторов.
4. Базис. Линейная зависимость векторов.

Цель: сформировать знания о векторном пространстве и линейных преобразованиях.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;

– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и нулевой вектор, начало и конец которого совпадают.

Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right|$$

Векторы называются коллинеарными, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Векторы называются компланарными, если существует плоскость, которой они параллельны.

Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Векторы называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

2. Линейными операциями над векторами называется сложение и умножение на число.

Суммой векторов является вектор - $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Произведение - $\vec{b} = \alpha\, \vec{a}$; $\left|\vec{b}\right| = \alpha\left|\vec{a}\right|$, при этом $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$), если $\alpha > 0$.

Вектор $\vec{a}$ противоположно направлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$), если $\alpha < 0$.

3. Свойства векторов.

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - коммутативность.

2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$

5) $(\alpha\cdot\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ – ассоциативность

6) $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ - дистрибутивность

7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

8) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$

4. 1) Базисом в пространстве называются любые 3 некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

2) Базисом на плоскости называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.

3)Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор.

Если $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ - базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2} + \gamma\,\overrightarrow{e_3}$, то числа α, β и γ - называются компонентами или координатами вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

Векторы $\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n}$ называются линейно зависимыми, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$, при не равных нулю одновременно α_i , т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0$.

Если же только при $\alpha_i = 0$ выполняется $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$, то векторы называются линейно независимыми.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 6

Тема: Первообразная функция и неопределённый интеграл

План

1. Первообразная функция
2. Определение неопределенного интеграла
3. Свойства неопределенного интеграла
4. Таблица основных элементарных функций

Цель: углубить представления студентов о первообразной функции и сформировать знания о неопределенном интеграле.

Задачи:

– актуализировать представления о первообразной функции;
– сообщить теоретический материал по данной теме;
– привести примеры по использованию таблицы и свойств неопределенного интеграла.

Ключевые вопросы

1. Функция *F(x)* называется первообразной для функции *f(x)* на некотором промежутке *X*, если для всех значений *x* из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

2. Если функция *F(x)* – первообразная для функции *f(x)* на промежутке *X*, то множество функций *F(x) + C*, где *C* – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции *f(x)* на этом промежутке и обозначается символом $\int f(x)dx = F(x) + C$.

3. Неопределенный интеграл обладает следующими его свойствами:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) $d\int f(x)dx = f(x)dx$;

3) $\int dF(x) = F(x) + C$;

4) $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)\,dx, \quad \kappa = const \neq 0$;

5) $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$;

6) $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$;

7) $\int f(u)du = F(u) + C$.

4. Таблица неопределенных интегралов, где $u = \varphi(x)$

1. $\int du = u + C.$
2. $\int\limits_{n \neq -1} u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C.$
3. $\int\limits_{u \neq 0} \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C.$
4. $\int\limits_{a \neq 1,\, a > 0} a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C.$
5. $\int e^u du = e^u + C.$
6. $\int \sin u du = -\cos u + C.$
7. $\int \cos u du = \sin u + C.$
8. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tgu + C.$
9. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C.$
10. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{u}{a} + C.$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C.$ 12. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 7

Тема: Основные методы интегрирования

План

1. Метод подстановки
2. Интегрирование по частям

Цель: сформировать знания о методах интегрирования.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– привести примеры по вычислению интегралов различными методами;
– закрепить полученную информацию.

Ключевые вопросы

1. Метод подстановки или метод замены переменной основан на формуле $\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{vmatrix} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$. Данная формула называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

2. Метод интегрирования по частям основан на использовании формулы $\int udv = uv - \int vdu$. Эта формула позволяет свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться более простым.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 8

Тема: Интегрирование рациональных дробей

План

1. Интегрирование простейших дробей.
2. Разложение правильной дроби на сумму простейших дробей.

Цель: сформировать знания об интегрировании рациональных дробей.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– привести примеры интегрирования рациональных дробей;
– закрепить полученную информацию.

Ключевые вопросы

1. Рациональные дроби I. $\frac{A}{x-a}$, II. $\frac{A}{(x-a)^n}$, III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, IV. $\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}$, где A, a, p, q, M, N, $(n \geq 2)$ – действительные числа, n – натуральное число, а x^2+px+q не имеет действительных корней, относятся к простейшим рациональным дробям.

Интегралы I и II берутся с помощью подстановки $x-a=t$, а III сводится к табличному подстановкой $z=\frac{1}{2}(x^2+px+q)'=x+\frac{p}{2}$.

2. Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде суммы конечного числа простейших рациональных дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^{\kappa}} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{\kappa-1}} + \cdots + \frac{A_{\kappa}}{x-\alpha} + \frac{B_1}{(x-\beta)^{\ell}} + \frac{B_2}{(x-\beta)^{\ell-1}} + \cdots + \frac{B_{\ell}}{x-\beta} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+g)^S} +$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+g)^{s-1}}+\cdots+\frac{M_sx+N_s}{x^2+px+g}+\frac{K_1x+\lambda_1}{(x^2+ux+v)^r}+\frac{K_2x+\lambda_2}{(x^2+ux+v)^{r-1}}+\cdots+\frac{K_rx+\lambda_r}{x^2+ux+v}+\cdots,$$

где $A_1, A_2, \dots, A_\kappa, B_1, B_2, \dots, B_\ell, M_1, N_1, \dots, M_s, N_s, K_1, \lambda_1, \dots, K_r, \lambda_r$ – некоторые вещественные числа, подлежащие определению, $\alpha, \beta, \dots$ - действительные корни многочлена Q(x) кратностей $\kappa, \ell, \dots$ соответственно; $p, g, u, v, \dots$ - действительные числа; x^2+px+g, $x^2+ux+v, \dots$ имеет комплексные сопряженные корни; число $\kappa+\ell+\cdots+s+r+\cdots$ равно степени многочлена Q(x).

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 9

Тема: Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций

План

1. Интегрирование тригонометрических функций.
2. Интегрирование иррациональных функций.

Цель: сформировать знания об интегрировании тригонометрических и иррациональных функий.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;

– привести примеры интегрирования тригонометрических и иррациональных функций;

– закрепить полученную информацию.

Ключевые вопросы

1. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Здесь R – обозначение некоторой рациональной функции от переменных sinx и cosx.

Интегралы этого вида вычисляются с помощью подстановки $t = tg\frac{x}{2}$. Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad x = 2arctgt; \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2};$$

Таким образом: $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int r(t)dt.$

Описанное выше преобразование называется универсальной тригонометрической подстановкой.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ если функция R является нечетной относительно cosx. Тогда $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\sin x)\cos x dx = \int r(t)dt.$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ если функция R является нечетной относительно sinx. Тогда $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\cos x)\sin x dx = -\int r(t)dt.$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ функция R четная относительно sinx и cosx.

Для преобразования функции R в рациональную используется подстановка t = tgx.

Тогда $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(t)dt$.

2. Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ где n- натуральное число.

С помощью подстановки $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}=t$ функция рационализируется.

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n; \qquad x=\frac{t^n-b}{a-ct^n}; \qquad dx=\left(\frac{t^n-b}{a-ct^n}\right)'dt;$$

Тогда $\int R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R\left(\dfrac{t^n-b}{a-ct^n},t\right)\left(\dfrac{t^n-b}{a-ct^n}\right)'dt=\int r(t)dt.$

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 10
Тема: Определенный интеграл
План

1. Определение определенного интеграла и его свойства
2. Условие интегрируемости функций
3. Формула Ньютона – Лейбница
4. Вычисление определенного интеграла по частям
5. Вычисление определенного интеграла методом подстановки
6. Несобственные интегралы
7. Приложения определённого интеграла.

Цель: расширить представления студентов об определенном интеграле и методах его вычисления, дать первоначальное понятие о несобственных интегралах.

Задачи:

- актуализировать представления об определенном интеграле;
- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры по вычислению определенных и несобственных интегралах.

Ключевые вопросы

1. Если существует конечный предел интегральной суммы при $\lambda\to 0$, то этот предел называется определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [a,b]:

$$I=\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Сама функция f(x) на отрезке [a,b] называется интегрируемой подынтегральной функцией, a – верхний предел интегрирования, b – нижний предел интегрирования, а x – переменная интегрирования.

2. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b], то она интегрируема на этом отрезке.

3. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и функция F(x) является ее некоторой первообразной на этом отрезке, то имеет место формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

4. Пусть u=u(x) и v=v(x) – непрерывные и дифференцируемые (т.е. имеют непрерывные производные) функции на отрезке [a,b], тогда $\int_a^b udv=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b vdu$.

5. Пусть выполняются следующие условия: функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b]; функция x=φ(t) непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке [α, β]; a=φ(α), b=φ(β). Тогда $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

6. Пусть функция $y=f(x)$ задана на луче $[a,\infty)$ и интегрируема на любом конечном

отрезке $[a,b]$, где $a<b<\infty$. Если существует предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$, то он называется несобственным интегралом I рода от функции $f(x)$ на промежутке $[a,\infty)$ и обозначается символом: $\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$

Если функция $y=f(x)$ непрерывна при $a<x\le b$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x=a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$, $(\varepsilon>0)$.

7. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a,b]$. В силу геометрического смысла определенного интеграла площадь криволинейной трапеции численно равна интегралу от данной функции по данному отрезку, т.е. $S=\int\limits_a^b f(x)dx$. Длина L дуги кривой, заданной уравнением y=f(x), a ≤ x ≤ b вычисляется по формуле: $L=\int\limits_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$. Объем тела вращения определяется формулой $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью v=v(t). Путь S, пройденный точкой за промежуток времени от t_1 до t_2 вычисляется по формуле: $S=\int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.

Если запас товара на складе есть функция времени $f(t)$, то издержки хранения за время от a до b равны: $C=\int\limits_a^b pf(t)dt$. По известной функции производительности труда объем произведенной продукции $Q=\int\limits_0^T f(t)\,dt$, где $f(t)$ - производительность труда в момент времени t, $[0,T]$ - рассматриваемый промежуток времени. Пусть известна функция $t=t(x)$, описывающая изменение затрат времени t на изготовление изделия, в зависимости от степени освоения производства, где x - порядковый номер изделия в партии. Тогда среднее время t_{cp}, затраченное на изготовление одного изделия в период освоения от x_1 до x_2 изделий вычисляется по теореме о среднем: $t_{cp}=\dfrac{1}{x_2-x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2} t(x)dx$.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 11.

Тема: Основные понятия математического моделирования. Классификация методов математического моделирования

План

1. Понятие математической модели.
2. Основные требования к математическим моделям.
3. Классификация математических моделей.

Цель: сформировать теоретические знания по данной теме.

Задачи:
- сообщить теоретический материал;
- ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
- осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1.*Математической моделью* реального объекта (явления) называется ее упрощенная, идеализированная схема, составленная с помощью математических символов и операций (соотношений).

Для получения математической модели сначала вводится система буквенных обозначений элементов реального объекта и затем, на основе изучения существующих взаимосвязей между этими элементами, составляются отражающие их математические соотношения (уравнения, неравенства и др.).

2.Универсальных методов построения математических моделей в экономике не существует. Перечислим наиболее основные общие принципы и требования к моделям:
1. адекватность (соответствие модели своему оригиналу),
2. объективность (соответствие научных выводов реальным условиям),
3. простота (не засоренность модели второстепенными факторами),
4. чувствительность (способность модели реагировать изменению начальных параметров),
5. устойчивость (малому возмущению исходных параметров должно соответствовать малое изменение решения задачи),
6. универсальность (широта области применения).

3.Для классификации этих моделей используются разные основания.

По целевому назначению экономико-математические модели делятся на теоретико-аналитические, используемые в исследованиях общих свойств и закономерностей экономических процессов, и прикладные, применяемые в решении конкретных экономических задач (модели экономического анализа, прогнозирования, управления).

При классификации моделей по исследуемым экономическим процессам и содержательной проблематике можно выделить модели народного хозяйства в целом и его подсистем - отраслей, регионов и т.д., комплексы моделей производства, потребления, формирования и распределения доходов, трудовых ресурсов, ценообразования, финансовых связей и т.д.

Остановимся более подробно на характеристике таких классов экономико-математических моделей, с которыми связаны наибольшие особенности методологии и техники моделирования.

В соответствии с общей классификацией математических моделей они подразделяются на функциональные и структурные, а также включают промежуточные формы (структурно-функциональные).

По характеру отражения причинно-следственных связей различают модели жестко детерминистские и модели, учитывающие случайность и неопределенность. Необходимо различать неопределенность, описываемую вероятностными законами, и неопределенность, для описания которой законы теории вероятностей неприменимы. Второй тип неопределенности гораздо более сложен для моделирования.

По способам отражения фактора времени экономико-математические модели делятся на статические и динамические. В статических моделях все зависимости относятся к одному моменту или периоду времени. Динамические модели характеризуют изменения экономических процессов во времени.

По длительности рассматриваемого периода времени различаются модели краткосрочного (до года), среднесрочного (до 5 лет), долгосрочного (10-15 и более лет) прогнозирования и планирования. Само время в экономико-математических моделях может изменяться либо непрерывно, либо дискретно.

Модели экономических процессов чрезвычайно разнообразны по форме математических зависимостей. Особенно важно выделить класс линейных моделей, наиболее удобных для анализа и вычислений и получивших вследствие этого большое распространение. Различия между линейными и нелинейными моделями существенны не только с математической точки зрения, но и в теоретико-экономическом отношении, поскольку многие зависимости в экономике носят принципиально нелинейный характер: эффективность использования ресурсов при увеличении производства, изменение спроса и потребления населения при увеличении производства, изменение спроса и потребления населения при росте доходов и т.п.

По соотношению экзогенных и эндогенных переменных, включаемых в модель, они могут разделяться на открытые и закрытые. Полностью открытых моделей не существует; модель должна содержать хотя бы одну эндогенную переменную. Полностью закрытые экономико-математические модели, т.е. не включающие экзогенных переменных, исключительно редки; их построение требует полного абстрагирования от "среды", т.е. серьезного огрубления реальных экономических систем, всегда имеющих внешние связи. Подавляющее большинство экономико-математических моделей занимает промежуточное положение и различаются по степени открытости (закрытости).

Для моделей народнохозяйственного уровня важно деление на агрегированные и детализированные.

В зависимости от того, включают ли народнохозяйственные модели пространственные факторы и условия или не включают, различают модели пространственные и точечные.

Таким образом, общая классификация экономико-математических моделей включает более десяти основных признаков. С развитием экономико-математических исследований проблема классификации применяемых моделей усложняется. Наряду с появлением новых типов моделей (особенно смешанных типов) и новых признаков их классификации осуществляется процесс интеграции моделей разных типов в более сложные модельные конструкции.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 12.

Тема: Линейное программирование. Графический метод решения задач линейного программирования

План

1. Постановка задачи линейного программирования.
2. Алгоритм графического метода решения задач линейного программирования.

Цель: сформировать теоретические знания по данной теме.

Задачи:

– сообщить теоретический материал;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Линейное программирование – раздел математики, в котором изучаются методы исследования и отыскания экстремальных значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения. В общем виде задача линейного программирования формулируется следующим образом:

Дана линейная функция $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ и система m линейных уравнений и неравенств с n переменными

Необходимо найти такое неотрицательное решение системы $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при котором линейная функция *F* принимает оптимальное (максимальное или минимальное) значение.

Система называется *системой ограничений*, а функция *F* – *целевой функцией*.

Для решения задач линейного программирования используют графический и симплексный методы.

2. Графический метод решения задач является наиболее простым и наглядным, его алгоритм заключается в следующем:

1. Построить область допустимых решений.

2. Если область допустимых решений является пустым множеством, то задача не имеет решения из-за несовместности системы ограничений.

3. Если область допустимых решений является непустым множеством, построить вектор $\vec{g} = grad\ Z$ и линии уровня. Вектор $\vec{g}$ указывает направление наискорейшего возрастания Z.

4. Линию уровня переместить параллельно самой себе в направлении вектора $\vec{g}$. В первой встречаемой вершине многоугольника решений получим $minZ$, а в последней пересекаемой линией уровня вершине – $maxZ$.

5. Если при перемещении линии уровня по области допустимых решений она уходит в бесконечность, то задача не имеет решения, т.к. целевая функция неограниченна или говорят, что $Z \to \infty$.

6. Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то, чтобы найти компоненты решения, достаточно решить систему из двух уравнений, определяющих вершину, в которой достигается оптимальное значение.

7. Если целевая функция достигает экстремума в нескольких крайних точках, то задача имеет бесконечное множество решений. Оптимальным решением является линейная комбинация этих крайних точек.

8. После нахождения оптимальных решений необходимо вычислить значение целевой функции Z при этих решениях.

Литература: [1], [2],.

Лекция 13.

Тема: Симплексный метод решения задач линейного программирования

План

1. Алгоритм симплексного метода решения задач линейного программирования. Понятие о симплекс-таблице.
2. Метод фиктивной функции.

Цель: сформировать теоретические знания по данной теме.

Задачи:

– сообщить теоретический материал;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Симплексный метод универсален, так как позволяет решить практически любую задачу линейного программирования, записанную в каноническом виде, то есть в таком виде, где система ограничений представлена в форме уравнений.

Идея симплексного метода заключается в том, что, начиная с некоторого исходного опорного решения, осуществляется последовательно направленное перемещение по опорным решениям задачи к оптимальному. Значение целевой функции при этом улучшается. Через конечное число шагов получаем оптимальное решение. Алгоритм симплексного метода:

1) Приводим математическую модель задачи к каноническому виду и выделяем базисные переменные (БП).

2) Сравниваем знаки базисных переменных и свободных членов.

Если знаки не совпадают, используем *M*-метод (метод искусственного базиса) или метод фиктивной функции. Если все базисные переменные имеют тот же знак, что и свободные члены, находим исходное опорное решение и проверяем его на оптимальность. Для этого заполняем симплексную таблицу:

c_i	БП	$c_1\ \ c_2\ \ c_3\ \ \ldots\ \ c_m\ \ c_{m+1}\ \ \ldots\ \ c_n$	$L(x)$
		$x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ \ldots\ \ x_m\ \ x_{m+1}\ \ \ldots\ \ x_n$	b_i

c_1	x_1	$1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; h_{1,m+1} \ldots \;\; h_{1,n}$	f_1
c_2	x_2	$0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; h_{2,m+1} \ldots \;\; h_{2,n}$	f_2
…	…	………………………………...	…
c_m	x_m	$0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 1 \;\; h_{m,m+1} \ldots \;\; h_{m,n}$	f_m
	Δ_j	$0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; \Delta_{m+1} \;\ldots\; \Delta_n$	$L(\overline{x}_1)$

Все строки таблицы 1-го шага, за исключением строки Δ_j (индексная строка), заполняются по данным системы ограничений и целевой функции.

Индексная строка для переменных находится по формуле: $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i h_{ij} - c_j$, $j = \overline{1,n}$,

а для свободного члена: $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i$.

Возможны следующие случаи при решении задач на максимум (минимум):

если все оценки $\Delta_j \geq 0$ ($\Delta_j \leq 0$), то найденное решение оптимально;

если хотя бы одна оценка $\Delta_j \leq 0$ ($\Delta_j \geq 0$), но при соответствующей переменной нет ни одного положительного коэффициента, решение задачи прекращаем, так как $L(x) \to \infty$, то есть целевая функция неограниченна в области допустимых решений;

если найдется $\Delta_j < 0$ ($\Delta_j > 0$), а при соответствующей переменной есть хотя бы один положительный коэффициент, то нужно перейти к другому опорному решению. Причем среди нескольких отрицательных (положительных) оценок выбирают наибольшую по модулю.

Пусть $\Delta_k < 0$ ($\Delta_k > 0$), k-ый столбец принимаем за разрешающий. За разрешающую строку принимаем ту, которой соответствует минимальное отношение свободных членов к положительным коэффициентам k-ого столбца. Элемент, находящийся на пересечении разрешающих строки и столбца называется разрешающим элементом.

3) Заполняем симплексную таблицу 2-ого шага:

заполняем базисный столбец;

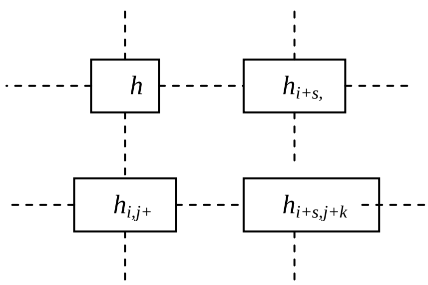
в столбцах, соответствующих базисным переменным, проставляем нули и единицы: 1 – против «своей» базисной переменной, 0 – против «чужой» базисной переменной, 0 – в индексной строке для всех базисных переменных;

переписываем разрешающую строку, разделив на разрешающий элемент;

все остальные элементы вычисляем по правилу «прямоугольника».

Правило «прямоугольника»

Пусть h_{ij} – разрешающий элемент 1-го шага.



Тогда

$$h'_{i+s,j+k} = h_{i+s,j+k} - \frac{h_{i+sj} \cdot h_{ij+k}}{h_{ij}} .$$

Оценки можно считать по приведенным выше формулам или по правилу «прямоугольника». Получаем новое опорное решение, которое проверяем на оптимальность.

2. Метод фиктивной функции

1. Вводят фиктивную целевую функцию $\varphi(x)$ и отводят ей дополнительную строку в симплекс-таблице.

2. Элементами строки для $\varphi(x)$ являются суммы соответствующих элементов строк, где знаки базисных переменных и свободных членов не совпадают.

3. Максимизируют фиктивную целевую функцию $\varphi(x)$, используя симплексный метод:

если $max\ \varphi(x)=0$ и все коэффициенты в строке для $\varphi(x)$ равны нулю, то полученное при этом базисное решение является опорным, исключаем строку для $\varphi(x)$ и решаем исходную задачу, проверяя полученное решение на оптимальность;

если $max\ \varphi(x)=0$, а среди элементов строки для $\varphi(x)$ есть ненулевые, то соответствующие этим элементам переменные тождественно равны нулю, исключаем строку для $\varphi(x)$ и столбцы соответствующие ненулевым элементам;

если $max\ \varphi(x)\neq 0$, то система ограничений противоречива и исходная задача не имеет решения.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 14.

Тема: Взаимно-двойственные задачи: постановка задач

План

1. Понятие двойственности в линейном программировании
2. Симметричные двойственные задачи.
3. Несимметричные двойственные задачи.
4. Смешанные двойственные задачи.

Цель: сформировать теоретические знания по данной теме.

Задачи:

– сообщить теоретический материал;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Каждой задаче линейного программирования можно определенным образом сопоставить некоторую другую задачу (линейного программирования), называемую двойственной или сопряженной по отношению к исходной или прямой. Эти две задачи взаимосвязаны между собой и образуют пару задач, называемую в линейном программировании двойственной парой.

Различают симметричные, несимметричные и смешанные двойственные задачи.

2. Симметричные двойственные задачи.

Дана исходная задача, состоящая в нахождении максимального значения функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad \to max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \cdots, x_n \ge 0, \end{cases}$$

Для составления математической модели двойственной задачи необходимо:

– каждому неравенству системы ограничений исходной задачи поставить в соответствие переменную y_i. Число переменных в двойственной задаче равно числу ограничений в системе исходной задачи, а число ограничений в системе двойственной задачи – числу переменных в исходной задаче;

– составить целевую функцию. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены в системе условий исходной задачи;

– составить систему ограничений. Коэффициенты системы ограничений двойственной задачи образуют транспонированную матрицу коэффициентов системы ограничений исходной задачи. Свободными членами системы ограничений являются коэффициенты целевой функции исходной задачи;

– знаки неравенств поменять на противоположные;

– все переменные двойственной задачи неотрицательны.

Математическая модель симметричной двойственной задачи имеет вид:

Определить минимальное значение функции

$$L = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \quad \to min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n \\ \quad y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \cdots, y_m \geq 0 \end{cases}$$

3. Несимметричные двойственные задачи.

Дана исходная задача, состоящая в нахождении максимального значения функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad \to max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0, \end{cases}$$

Для составления математической модели несимметричной двойственной задачи пользуются тем же алгоритмом, что и в случае симметричных задач, но с учетом следующих особенностей: ограничениями двойственной задачи будут неравенства. Если в целевой функции двойственной задачи требуется найти минимум, то знак неравенства $\geq$, если максимум, то $\leq$; переменные y_i – произвольные по знаку.

Математическая модель несимметричной двойственной задачи имеет вид:

$$L = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \quad \to min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n \end{cases}$$

4. Смешанные двойственные задачи.

Математическая модель исходной задачи имеет условия симметричных и несимметричных задач. При составлении двойственной задачи необходимо выполнять правила симметричных и несимметричных задач.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 15.

Тема: Взаимно-двойственные задачи: основные теоремы двойственности

План

1. Основные теоремы двойственности.
2. Анализ устойчивости двойственных оценок.

Цель: сформировать теоретические знания по данной теме.

Задачи:

– сообщить теоретический материал;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Связь между оптимальными решениями пары взаимно двойственных задач устанавливается с помощью основных теорем двойственности.

Теорема 1. Если одна из двойственных задач имеет конечное оптимальное решение, то другая также имеет конечное оптимальное решение, при этом оптимальные значения их целевых линейных функций равны, т.е. выполняется равенство: $F_{max} = L_{min}$

Если одна из двойственных задач неразрешима ввиду того, что одна из целевых функций стремится к бесконечности, то другая задача не имеет допустимых решений.

Теорема 2. В оптимальном решении для каждой пары сопряженных условий положительным ненулевым компонентам оптимального решения одной из взаимно двойственных задач соответствуют нулевые компоненты оптимального решения другой задачи, т.е. выполняются следующие соотношения: если одно из них выполняется как строгое равенство, то другое – как строгое неравенство и наоборот, т.е.

2. Основываясь на сформулированных теоремах (для невырожденных и единственных решений), можно дать следующую экономическую интерпретацию переменным двойственной задачи yi, которые будем называть двойственными оценками.

1. Оценка (y_i^*) i-го ресурса показывает, на сколько изменится оптимальное значение целевой функции z_{max} исходной задачи (доход от реализации продукции), если объем соответствующего ресурса изменить на единицу. Если же объем i–го ресурса изменить на k единиц, то целевая функция изменится на величину ($k \cdot y_i *$) в случае, если это изменение не выйдет за границы устойчивости двойственных оценок.

2. Если ресурс в оптимальном плане израсходован полностью, то его оценка положительна, если же ресурс не полностью израсходован в оптимальном плане, то его оценка равна нулю. В первом случае ресурс будем называть дефицитным, во втором недефицитным. Для недефицитного ресурса значение соответствующей балансовой переменной в оптимальном решении покажет его остаток после выполнения оптимального плана. Чем больше оценка ресурса, тем он дефицитнее с точки зрения его вклада в целевую функцию.

3. В оптимальный план включается производство только тех видов продукции, оценка ресурсов на производство единицы которых совпадает с ценой и продукция не выпускается в оптимальном плане, если аналогичная оценка превышает цену. В первом случае продукцию будем называть рентабельной, во втором нерентабельной.

4. В оптимальном плане результаты производства совпадают с оценкой затрат на производство.

Литература: [1], [2],[3].

Лекция 16.
Тема: Целочисленное программирование
План

1. Постановка задачи целочисленного программирования.
2. Метод Гомори.
3. Метод ветвей и границ

Цель: сформировать теоретические знания по данной теме.

Задачи:

– сообщить теоретический материал;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. При решении многих задач нецелочисленное решение не имеет смысла. Попытка тривиального округления до целых значений приводит либо к нарушению ограничений задачи, либо к недоиспользованию ресурсов. Для произвольной задачи линейного программирования гарантировать целочисленность решения невозможно.

В случае двухмерной задачи проблема решается путем выявления всех целочисленных точек, близких к границе множества планов и решения задачи над этим множеством.

2. В общем случае выдвигается *идея последовательного отсечения нецелочисленных оптимальных планов*: обычным симплексным методом отыскивается оптимальный план и, если он нецелочисленный, строится дополнительное ограничение, отсекающее найденный оптимальный план, но не отсекающее ни одного целочисленного плана. Метод нахождения оптимального целочисленного плана с помощью отсечений назван **методом Гомори**.

3. Нахождение целочисленного решения можно осуществлять **методом ветвей и границ.** Как и в случае метода Гомори, здесь решение начинается с поиска оптимального плана без учета целочисленности. Если компонента X_k найденного плана равна нецелочисленной величине Т, то строятся две расширенные задачи с дополнительными ограничениями $X_k \le [T]$ и $X_k \ge [T]+1$ соответственно (квадратные скобки здесь определяют целую часть числа).

Решаем одну из задач (в любом порядке). В зависимости от полученного решения список задач расширяется, либо уменьшается. Если в результате решения одной из задач получен нецелочисленный оптимальный план, для которого значение целевой функции меньше нижней границы целевой функции исходной задачи, то данная задача исключается из списка. Если же полученное значение целевой функции больше нижней границы целевой функции исходной задачи, то из данной задачи формируются новые две задачи.

Если полученное оптимальное решение одной из вспомогательных задач удовлетворяет условию целочисленности и оптимальное решение ее больше нижней границы целевой функции исходной задачи, то значение нижней границы целевой функции заменяется на оптимум целевой функции полученного оптимального целочисленного плана.

Процесс продолжается до тех пор, пока список задач не будет исчерпан, т.е. все задачи не будут решены.

Литература: [1], [2],[3].

Лекция 17.
Тема: Транспортная задача: постановка задачи.
План

1. Общая постановка транспортной задачи.
2. Типы транспортных задач.
3. Вырожденность в транспортных задачах.

Цель: сформировать теоретические знания по данной теме.

Задачи:

– сообщить теоретический материал;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Общая постановка транспортной задачи состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из m пунктов отправления $A_1, A_2,.., A_m$ в n пунктов назначения $B_1, B_2, \ldots, B_n$. При этом в качестве критерия оптимальности обычно берется либо минимальная стоимость перевозок всего груза, либо минимальное время его доставки.

Обозначим через c_{ij} тарифы перевозок единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, через a_i – запасы груза в i-м пункте отправления, через b_j – потребности в грузе в j-м пункте назначения, а через x_{ij} – количество единиц груза, перевозимого из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения. Тогда математическая постановка транспортной задачи состоит в определении минимального значения функции

$$F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \text{ при условиях}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j \left(j=\overline{1,n}\right),$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_j \left(i=\overline{1,m}\right),$$

$$x_{ij}\ge 0 \left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$$

Всякое неотрицательное решение систем линейных уравнений, определяемое матрицей $X=\left(x_{ij}\right)\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$, называется *планом* транспортной задачи. План $X^*=\left(x_{ij}^*\right)\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$, при котором целевая функция принимает свое минимальное значение, называется *оптимальным планом* транспортной задачи.

Обычно исходные данные транспортной задачи записываются в виде таблицы.

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	…	B_j	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}		c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…	…
A_i	c_{i1} x_{i1}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	…	b_j	…	b_n	

2. Очевидно, общее наличие груза у поставщиков равно $\sum_{i=1}^{m} a_i$, а общая потребность в грузе в пунктах назначения равна $\sum_{j=1}^{n} b_j$. Если общая потребность в грузе в пунктах назначения равна запасу груза в пунктах отправления, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$,то модель такой транспортной задачи называется *закрытой*. Если же указанное условие не выполняется, то модель транспортной задачи называется *открытой*.

Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы запасы груза в пунктах отправления были равны потребностям в грузе в пунктах назначения, т. е. чтобы выполнялось равенство.

В случае превышения запаса над потребностью, т. е. при $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводят фиктивный ($n$+1)-й пункт назначения с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ и соответствующие тарифы считают равными нулю: $c_{in+1} = 0 \left(i = \overline{1,m}\right)$. Полученная задача является транспортной задачей, для которой выполняется равенство закрытости. При $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводят фиктивный ($m$+1)-й пункт отправления с запасом груза $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ и соответствующие тарифы считают равными нулю: $c_{m+1j} = 0 \left(j = \overline{1,n}\right)$. Этим задача сводится к транспортной задаче с закрытой моделью, из оптимального плана которой получается оптимальный план исходной задачи.

3. Число переменных x_{ij} в транспортной задаче с m пунктами отправления и n пунктами назначения равно nm, а число уравнений в системе ограничений равно n+m. Так как предполагается, что выполняется условие закрытости, то число линейно-независимых уравнений равно n+m–1. Следовательно, опорный план транспортной задачи может иметь не более n+m–1 отличных от нуля неизвестных. Если в опорном плане число отличных от нуля компонент равно в точности n+m–1, то план является невырожденным, а если меньше – то вырожденным.

Литература: [1], [2],[3].

Лекция 18.

Тема: Транспортная задача: нахождение опорного плана

План

1. Метод северо-западного угла.
2. Метод минимального элемента.

3. Метод аппроксимации Фогеля.

Цель: сформировать теоретические знания по данной теме.

Задачи:

– сообщить теоретический материал;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Для определения опорного плана существует несколько методов: метод северо-западного угла, метод минимального элемента и метод аппроксимации Фогеля.

При нахождении опорного плана транспортной задачи методом северо-западного угла на каждом шаге рассматривают первый из оставшихся пунктов отправления и первый из оставшихся пунктов назначения. Заполнение клеток таблицы условий начинается с левой верхней клетки для неизвестного x_{11} («северо-западный угол») и заканчивается для неизвестного xmn, т. е. идет как бы по диагонали таблицы с севера на запад.

2. При использовании метода северо-западного угла на каждом шаге потребности первого из оставшихся пунктов назначения удовлетворялись за счет запасов первого из оставшихся пунктов отправления. Очевидно, выбор пунктов назначения и отправления целесообразно производить, ориентируясь на тарифы перевозок, а именно: на каждом шаге следует выбирать какую-нибудь клетку, отвечающую минимальному тарифу (если таких клеток несколько, то следует выбирать любую из них), и рассмотреть пункты назначения и отправления, соответствующие выбранной клетке.

Сущность метода минимального элемента и состоит в выборе клетки с минимальным тарифом. Следует отметить, что этот метод, как правило, позволяет найти опорный план транспортной задачи, при котором общая стоимость перевозок груза меньше, чем общая стоимость перевозок при плане, найденном для данной задачи с помощью метода северо-западного угла. Поэтому наиболее целесообразно опорный план транспортной задачи находить методом минимального элемента.

3. При определении опорного плана транспортной задачи методом аппроксимации Фогеля на каждой итерации по всем столбцам и по всем строкам находят разность между двумя записанными в них минимальными тарифами. Эти разности записывают в специально отведенных для этого строке и столбце в таблице условий задачи. Среди указанных разностей выбирают минимальную. В строке (или столбце), которой данная разность соответствует, определяют минимальный тариф. Клетку, в которой он записан, заполняют на данной итерации.

Если минимальный тариф одинаков для нескольких клеток данной строки (столбца), то для заполнения выбирают ту клетку, которая расположена в столбце (строке), соответствующем наибольшей разности между двумя минимальными тарифами, находящимися в данном столбце (строке).

Литература: [1], [2],[3].

3. Семестр III

Лекция 1.

Тема: Предмет теории вероятностей. Основные понятия

План

1. Предмет теории вероятностей
2. Различные подходы к определению вероятности события
3. Основные формулы комбинаторики

Цель: сформировать знания о предмете теории вероятностей, определении вероятности события и ее свойствах, основах комбинаторики.

Задачи:

– привести примеры решения задач с использованием различных походов к определению вероятности;
– осуществить рефлексию.

Ключевые вопросы

1. Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений.

2. Классической вероятностью *P(A)* события *A* называется отношение числа благоприятствующих этому событию исходов (т.е. таких, при которых событие А обязательно произойдет) к общему числу несовместных единственно возможных и равновозможных исходов. Геометрической вероятностью события *A* называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события А, к мере пространства элементарных исходов. Статистической вероятностью события А называется число, около которого колеблются частости W(A) появления этого события во многих сериях выборочных испытаний больших объемов, проводимых в одинаковых условиях.

3. К основным типам комбинаторных задач относятся отыскание числа перестановок, размещений, сочетаний, перестановок с повторениями, размещений с повторениями, сочетаний с повторениями.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 2.
Тема: Сложение и умножение вероятностей
План

1. Алгебра событий.
2. Теорема сложения вероятностей несовместных и совместных событий.
3. Теорема умножения вероятностей независимых и независимых событий.
4. Вероятность появления хотя бы одного из событий.

Цель: ознакомить с теоремами сложения и умножения вероятностей; выработать навыки решения задач по данной теме.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Объединением (или суммой) нескольких случайных событий называется событие, состоящее в осуществлении, по крайней мере, одного из данных событий.

Совмещением (или произведением) двух событий А и В называется событие, состоящее в одновременном осуществлении обеих событий.

2. Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A)_2 + ... + P(A_n)$.

Вероятность суммы совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

3. Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий: $P(A_1, A_2, ..., A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \, ... P(A_n)$.

Вероятность совместного появления нескольких зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятности каждого последующего события вычисляются в предположении, что все предыдущие события произошли: $P(A_1, A_2, ..., A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) \, ... P_{A_1 A_2 ... A_{n-1}}(A_n)$.

4. Если в результате испытания может появиться *n* событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 ... q_n$$

Здесь событие А обозначает наступление хотя бы одного из событий A_i, а q_i – вероятность противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$.

Литература: [1], [2], [3].

Лекции 3-5.

Тема: Формулы полной вероятности и Байеса. Повторные независимые испытания. Интегральная теорема Лапласа

План

1. Формулы полной вероятности и Байеса
2. Формула Бернулли
3. Локальная теорема Лапласа
4. Формула Пуассона
5. Интегральная теорема Лапласа

Цель: сформировать знания о применении формул полной вероятности и Байеса, различных вариантах решения задач на повторные независимые испытания.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– привести примеры решения задач;
– осуществить рефлексию.

Ключевые вопросы

1. Вероятность события А, которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий, образующих полную группу событий, равна сумме произведений вероятности каждого из событий на соответствующую условную вероятность события А: $P(A)=P(H_1)P_{H_2}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)+\ ...+P(H_n)P_{H_n}(A)$.

Условные вероятности гипотез определяются по формулам Байеса: $P_A(H_i)=\dfrac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_n)P_{H_n}(A)}$.

2. Вероятность появления события А m раз в n независимых испытания, в каждом из которых вероятность этого события постоянна и равна p, находится по формуле Бернулли: $P_n(m)=C_n^m\, p^m q^{\,n-m}$. Если число испытаний n велико, то применение формулы Бернулли приводит к очень громоздким вычислениям. В таких случаях пользуются приближенными формулами, основанными на теоремах Лапласа и Пуассона.

3. Локальная теорема Лапласа: Вероятность Pn (m) того, что в n испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, событие наступит ровно m раз приближённо равна $P_n(m)\approx\dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$, где $x=\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

4. Формула Пуассона: Если вероятность p наступления события постоянна и мала, а число испытаний n велико, то Pn (m) $\approx\dfrac{\lambda^m\cdot e^{-\lambda}}{m!}$, где $\lambda = n\,p$.

5. Интегральная теорема Лапласа: Если вероятность p наступления некоторого события в каждом испытании постоянна ($0 < p < 1$), а число испытаний n достаточно велико, то вероятность того, что это событие наступит не менее a раз и не более b приближенно равна $P(a\le m\le b)=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$, где $\alpha=\dfrac{a-np}{\sqrt{npq}}$, $\beta=\dfrac{b-np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – функция Лапласа.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 6.

Тема: Случайные величины. Числовые характеристики случайных величин

План

1. Определение случайной величины. Определение дискретной и непрерывной случайных величин

2. Закон распределения случайной величины. Способы задания закона распределения дискретной случайной величины.

3. Способы задания закона распределения непрерывной случайной величины.

4. Числовые характеристики случайных величин.

Цель: дать первоначальное понятие о случайных величинах, сформировать знания о законах распределения и способах их описания, научить вычислять и интерпретировать числовые характеристики случайных величин.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– привести примеры решения задач;
– осуществить рефлексию.

Ключевые вопросы

1. Случайная величина X – это некоторая функция элементарного события $\omega: X = \varphi(\omega)$, где $\omega \in U$. Значение этой функции зависит от того, какое элементарное событие ω появилось в результате опыта. Случайные величины часто обозначают большими буквами, а их значения малыми. Случайная величина называется дискретной, если ее возможные значения могут быть пронумерованы числами натурального ряда. Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

2. Законом распределения случайной величины называется любое правило, позволяющее находить вероятность возможных событий (значений), связанных со случайной величиной. Закон распределения дискретных случайных величин может быть задан в форме ряда, многоугольника и функции (интегрального закона) распределения.

3. Непрерывную случайную величину можно задать функцией распределения F(x) действительной переменной x, определяемой формулой F(x) = P (X < x) и функцией, которая называется плотностью распределения или дифференциальной функций и определяется формулой f(x) = F'(x).

4. Основные числовые характеристики и формулы приведены в таблице:

Характеристика	Обозначение	Случайная величина	
		Дискретная	Непрерывная
Математическое ожидание	M(X)	$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$	$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$
Дисперсия	D(X)	$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X))^2 \cdot p_i$	$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x - M(X))^2 \cdot f(x)dx$
		$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$	
Среднее квадратичное отклонение (стандарт)	σ_x	$\sigma_x = \sqrt{D(X)}$	

Литература: [1], [2], [3]

Лекции 7-9.

Тема: Основные законы распределения случайных величин

План

1. Биномиальный закон распределения
2. Распределение Пауссона
3. Геометрическое распределение
4. Нормальный закон распределения

5. Равномерное распределение
6. Показательное распределение
7. Законы больших чисел

Цель: сформировать знания об основных законах распределения случайных величин, развивать умения анализировать случайные величины.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– привести примеры решения задач;
– осуществить рефлексию.

Ключевые вопросы

1. Дискретная случайная величина X имеет биномиальный закон распределения, если она принимает значения 0, 1, 2, …, m, …, n с вероятностями $P_n(m)=C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, где 0 < p < 1, q=1-p, m=0, 1, …, n.

2. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения Пуассона, если она принимает значения 0, 1, 2, …, m, … (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями $P_n(m)=\dfrac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \quad \lambda = n \cdot p$.

3. Дискретная случайная величина X имеет геометрическое распределение, если она принимает значения 0, 1, 2, …, m, … (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями $P_n(m)=p\cdot q^{m-1}$, где $0<p<1,\ q=1-p,\ m=1,2,\ldots$.

4. Распределение вероятностей называют нормальным, если оно описывается дифференциальной функцией $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

5. Равномерным распределением называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, дифференциальная функция f (x) которой сохраняет постоянное значение на сегменте [a; b] и равна нулю вне этого сегмента, т. е. $f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<a,\\ \dfrac{1}{b-a} & при \quad a\le x\le b,\\ 0 & при \quad x>b.\end{cases}$

6. Непрерывная случайная величина x распределена по показательному закону, если ее плотность вероятности имеет вид: $f(x)=\begin{cases}0 & при\, x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & при\, x\ge 0. \quad где\ \lambda>0.\end{cases}$

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 10.
Тема: Система случайных величин
План

1. Случайные векторные величины.
2. Функция и плотность распределения случайной двумерной величины.
3. Корреляционный момент связи двух случайных величин.
4. Коэффициент корреляции.

Цель: сформировать знания о случайной двумерной величине и ее характеристиках, рассмотреть основные задачи по теме.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Если на пространстве событий $\Omega = \{\omega\}$ заданы две случайные функции $X = \phi(\omega)$ и $Y = \psi(\omega)$, то говорят, что задана двумерная случайная величина (X, Y).

2. Интегральной функцией распределения двумерной случайной величины (X, Y) называется вероятность совместного выполнения двух неравенств: $X < x$ и $Y < y$:

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\}$$

и геометрически определяет вероятность попадания случайной точки (X, Y) в бесконечный квадрат с вершиной в точке (x,y), лежащей левее и ниже ее.

Закон распределения дискретной двумерной с.в. (X, Y) может быть задан с помощью таблицы

X/Y	y_1	y_2	$\dots$	y_m	$\dots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}	$\dots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$		$\dots$	
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$		$\dots$	

где $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

Для двумерной с.в. (X, Y) дискретного и непрерывного типов интегральные функции распределения соответственно равны

$$F(x,y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_i < y} p_{ij} \quad F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv,$$

где, f(x, y) плотность вероятности величины (X, Y).

Свойства функции плотности вероятности: $f(x,y) \geq 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1, \qquad f(x,y) = F''_{xy}(x,y), \qquad P\{(X,Y) \in D\} = \iint_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

3. Случайная величина описывается двумя числовыми характеристиками: математическим ожиданием и дисперсией. Чтобы описать систему из двух случайных величин кроме «основных» характеристик используют так же корреляционный момент и коэффициент корреляции.

Корреляционным моментом $\boldsymbol{\mu_{xy}}$ случайных величин X и У называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин:

$$\mu_{xy} = M\{ [X - M(X)] [Y - M(Y)] \}.$$

Для нахождения корреляционного момента дискретных величин используют формулу:

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[x_i - M(X)][y_j - M(Y)]p(x_i, y_j)$$
,

а для непрерывных величин — формулу :

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x - M(X)][y - M(Y)]f(x,y)dxdy$$

Коэффициентом корреляции r_{xy} случайных величин X и У называют отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин: $r_{xy}= \mu_{xy}/\sigma_x\sigma_y$

Абсолютная величина коэффициента корреляции не превышает единицы: $|\, r_{xy} \,| \leq 1$.

Литература: [1], [2], [3].

Лекции 11-13.
Элементы математической статистики. Выборочный метод.
Статистические оценки параметров распределения

План

1. Предмет и задачи математической статистики
2. Генеральная и выборочная совокупность
3. Построение вариационного или сгруппированного статистического ряда
4. Полигон и гистограмма
5. Эмпирическая функция распределения. Числовые характеристики вариационных рядов
6. Точечные оценки параметров распределения и их свойства
7. Доверительный интервал. Интервальные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии

Цель: дать первоначальное понятие о предмете математической статистики, выборочном методе анализа данных, научить способам описания выборочных совокупностей и вычислению их числовых характеристик; сформировать знания о методах точечного и интервального оценивания основных характеристик генеральной совокупности.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры решения задач;
- осуществить рефлексию.

Ключевые вопросы

1. Математическая статистика – это направление математики, которое опирается на теорию вероятностей, позволяющую оценить надёжность и точность выводов, делаемых на основании ограниченного статистического материала.

2. Выборкой или выборочной совокупностью называется совокупность случайно отобранных объектов. Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

3. Вариационным рядом называется ряд значений исследуемого признака с указанием соответствующих весов (частот или относительных частот). Выделяют дискретные и вариационные ряды.

4. Гистограммой частот сгруппированной выборки называется кусочно-постоянная функция, постоянная на интервалах группировки и принимающая на каждом из них соответственно значения $\frac{n_i}{\Delta x_i}$, i = 1,2, …, k. Площадь ступенчатой фигуры под графиком гистограммы равна объему выборки n. Полигоном частот называется ломаная с вершинами в точках $(\chi_i, \frac{n_i}{\Delta x_i})$, i – 1,2 ,…, k, где k – число интервалов вариационного ряда.

5. Эмпирической функцией распределения случайной величины X называется функция

$F_n(x) = \dfrac{n_x}{n}$, где n – объем выборки; n_x – число значений x_i из выборки, удовлетворяющих неравенству $x_i < x$.

Выборочная средняя вычисляется по формуле: $\bar{x}_в = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}$. Выборочная дисперсия вычисляется по формуле: $D_в(x) = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_в)^2 n_i}{n}$. Выборочные начальные моменты вычисляются по формулам: $\overline{m}_к(x) = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} (x_i)^к n_i}{n}$. Выборочные центральные моменты вычисляются по формулам: $\mu_к(x) = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_b)^к n_i}{n}$. Эксцесс: $E_x = \dfrac{\mu_4}{S^4} - 3$. Асимметрия: $a_x = \dfrac{\mu_3}{S^3}$.

6. Точечной оценкой параметра называется оценка, определяемая одним числом.

Оценка $\tilde{\Theta} = \tilde{\Theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$−должна приближаться к оцениваемому параметру Θ по мере увеличения объема выборки. Если оценка стремится по вероятности к оцениваемому параметру, то она называется состоятельной.

Оценка параметра $\tilde{\Theta}$ называется несмещенной, если она при любом объеме выборки имеет математическое ожидание, совпадающее с оцениваемым параметром, т.е. $M(\tilde{\Theta}) = \Theta$.

Несмещенная оценка $\tilde{\Theta}$ параметра Θ называется эффективной, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок параметра Θ, вычисленных по выборкам одного и того же объема n.

7. Доверительным интервалом для параметра θ называется интервал (θ_1, θ_2), содержащий (покрывающий) истинное значение θ с заданной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$. Число $\gamma = 1 - \alpha$ называется доверительной вероятностью, а значение γ − уровнем значимости, границы θ_1 и θ_2 являющимися случайными величинами − соответственно нижней и верхней границами доверительного интервала.

Величина $\alpha = 1 - \gamma$ указывает на то, что те значения параметра θ, для которых $|\theta - \tilde{\theta}| > \varepsilon$ нужно признать противоречащими опытным данным.

Доверительный интервал для оценки математического ожидания a при неизвестном σ: $\left(\bar{x}_в - \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x}_в + \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ с надежностью γ покрывает неизвестный параметр a; точность оценки $\delta = \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

Доверительный интервал для оценки математического ожидания a при неизвестном σ для заданной доверительной вероятности γ вычисляется по формуле: $\bar{x}_в - t_\gamma S/\sqrt{n} < a < \bar{x}_в + t_\gamma S/\sqrt{n}$, где $\bar{x}_в = \dfrac{\sum_{i-1}^{n} x_i}{n}$, $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_в)^2 n_i}{n-1}$.

Доверительный интервал для дисперсии записан скобках: $P\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}; n-1} \le \sigma^2 \le \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}}\right) = \gamma$

Литература: [1], [2], [3]

Лекции 14-16.
Тема: Проверка статистических гипотез
План

1. Постановка задачи проверки гипотез.
2. Критерий оценки и его мощность.
3. Критическая область и область принятия гипотезы.
4. Проверка гипотез о значениях параметров нормального распределения.
5. Проверка гипотез о виде распределения.
6. Критерий Пирсона.

Цель: сформировать знания о методах проверки статистических гипотез о параметрах и законах распределения.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Статистической гипотезой называют гипотезу о виде неизвестного распределения генеральной совокупности или о параметрах известных распределений.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0. Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение, сложной – гипотезу, состоящую из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

В результате проверки правильности выдвинутой нулевой гипотезы (такая проверка называется статистической, так как производится с применением методов математической статистики) возможны ошибки двух видов: ошибка первого рода, состоящая в том, что будет отвергнута правильная нулевая гипотеза, и ошибка второго рода, заключающаяся в том, что будет принята неверная гипотеза.

Вероятность ошибки первого рода называется уровнем значимости α.

Основной прием проверки статистических гипотез заключается в том, что по имеющейся выборке вычисляется значение некоторой случайной величины, имеющей известный закон распределения.

Статистическим критерием называется случайная величина K с известным законом распределения, служащая для проверки нулевой гипотезы.

Критической областью называют область значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают, областью принятия гипотезы – область значений критерия, при которых гипотезу принимают.

2. Критерий для проверки гипотезы о математическом ожидании.

Пусть генеральная совокупность X имеет нормальное распределение, и требуется проверить предположение о том, что ее математическое ожидание равно некоторому числу a_0.

Пусть известна дисперсия σ^2 генеральной совокупности. Тогда по выборке объема n найдем выборочное среднее $\bar{x}_B$ и проверим нулевую гипотезу

$$H_0: M(X) = a_0.$$

Учитывая, что выборочное среднее $\bar{X}$ является несмещенной оценкой $M(X)$, то есть $M(\bar{X}) = M(X)$, можно записать нулевую гипотезу так:

$M(\bar{X}) = a_0$. Для ее проверки выберем критерий

$$U = \frac{\bar{X} - a_0}{\sigma(\bar{X})} = \frac{(\bar{X} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}.$$

Это случайная величина, имеющая нормальное распределение, причем, если нулевая гипотеза справедлива, то $M(U) = 0$, $\sigma(U) = 1$.

Выберем критическую область в зависимости от вида конкурирующей гипотезы:

- если H_1: $M(\overline{X}) \neq a_0$, то $u_{кр}$: $\Phi(u_{кр}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$, критическая область двусторонняя, $U_{набл} = \dfrac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}$, и, если $|U_{набл}| < u_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается; если $|U_{набл}| > u_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается.

- если H_1: $M(\overline{X}) > a_0$, то $u_{кр}$: $\Phi(u_{кр}) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$, критическая область правосторонняя, и, если $U_{набл} < u_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается; если $U_{набл} > u_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается.

- если H_1: $M(\overline{X}) < a_0$, то $u_{кр}$: $\Phi(u_{кр}) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$, критическая область левосторонняя, и, если $U_{набл} > - u_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается; если $U_{набл} < - u_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается.

3. Достоинством критерия Пирсона является его универсальность: с его помощью можно проверять гипотезы о различных законах распределения.

1. Проверка гипотезы о нормальном распределении.

Пусть получена выборка достаточно большого объема n с большим количеством различных значений вариант. Для удобства ее обработки разделим интервал от наименьшего до наибольшего из значений вариант на s равных частей и будем считать, что значения вариант, попавших в каждый интервал, приближенно равны числу, задающему середину интервала. Подсчитав число вариант, попавших в каждый интервал, составим так называемую сгруппированную выборку:

варианты..........$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_s$

частоты............$n_1 \quad n_2 \quad \dots \quad n_s$,

где x_i – значения середин интервалов, а n_i – число вариант, попавших в i-й интервал (эмпирические частоты).

По полученным данным можно вычислить выборочное среднее $\bar{x}_B$ и выборочное среднее квадратическое отклонение σ_B. Проверим предположение, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону с параметрами $M(X) = \bar{x}_B$, $D(X) = \sigma_B^2$. Тогда можно найти количество чисел из выборки объема n, которое должно оказаться в каждом интервале при этом предположении (то есть теоретические частоты). Для этого по таблице значений функции Лапласа найдем вероятность попадания в i-й интервал:

$$p_i = \Phi\left(\frac{b_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}\right) - \Phi\left(\frac{a_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}\right),$$

где a_i и b_i - границы i-го интервала. Умножив полученные вероятности на объем выборки п, найдем теоретические частоты: $n_i = n \cdot p_i$. Наша цель – сравнить эмпирические и теоретические частоты, которые, конечно, отличаются друг от друга, и выяснить, являются ли эти различия несущественными, не опровергающими гипотезу о нормальном распределении исследуемой случайной величины, или они настолько велики, что противоречат этой гипотезе. Для этого используется критерий в виде случайной величины

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}.$$

Для выбранного критерия строится правосторонняя критическая область, определяемая условием

$$p(\chi^2 > \chi^2_{kp}(\alpha, k)) = \alpha,$$

где α – уровень значимости. Следовательно, критическая область задается неравенством $\chi^2 > \chi^2_{kp}(\alpha, k)$, а область принятия гипотезы - $\chi^2 < \chi^2_{kp}(\alpha, k)$.

Итак, для проверки нулевой гипотезы H_0: генеральная совокупность распределена нормально – нужно вычислить по выборке наблюдаемое значение критерия:

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} \ ,$$

а по таблице критических точек распределения χ^2 найти критическую точку $\chi^2_{кр}(\alpha, k)$, используя известные значения α и $k = s - 3$. Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{kp}$ - нулевую гипотезу принимают, при $\chi^2_{набл} > \chi^2_{kp}$ ее отвергают.

Литература: [1], [2], [3].

Лекции 17,18.

Тема: Корреляционный и регрессионный анализ

План

1. Функциональные и корреляционные зависимости случайных величин.
2. Линейная и нелинейная регрессия.
3. Составление уравнений прямых регрессий, метод наименьших квадратов.
4. Статистическая оценка коэффициента корреляции и её свойства. Построение доверительных интервалов для параметров линейной регрессии. Проверка статистической значимости регрессии и адекватности модели регрессии результатам наблюдений.

Цель: сформировать знания о корреляционном и регрессионном анализе.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Пусть составляющие X и Y двумерной случайной величины (X, Y) зависимы. Будем считать, что одну из них можно приближенно представить как линейную функцию другой, например

$$Y \approx g(X) = \alpha + \beta X,$$

и определим параметры α и β с помощью метода наименьших квадратов.

Определение. Коэффициент $\beta = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ называется коэффициентом регрессии Y на X, а прямая

$$y - m_y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x) \text{ -}$$

- прямой среднеквадратической регрессии Y на X.

Аналогично можно получить прямую среднеквадратической регрессии X на Y:

$$x - m_x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - m_y)\,.$$

2. Рассмотрим выборку объема n, извлеченную из нормально распределенной двумерной генеральной совокупности (X, Y). Вычислим выборочный коэффициент корреляции r_B. Пусть он оказался не равным нулю. Это еще не означает, что и коэффициент корреляции генеральной совокупности не равен нулю. Поэтому при заданном уровне значимости α возникает необходимость проверки нулевой гипотезы H_0: $r_г = 0$ о равенстве нулю гене-рального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе H_1: $r_г \neq 0$. Таким образом, при принятии нулевой гипотезы X и Y некоррелированы, то есть не связаны линейной зависимостью, а при отклонении H_0 они коррелированы.

В качестве критерия примем случайную величину

$$T = \frac{r_B\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_B^2}},$$

которая при справедливости нулевой гипотезы имеет распределение Стьюдента (см. лекцию 12) с $k = n - 2$ степенями свободы. Из вида конкурирующей гипотезы следует, что критическая область двусторонняя с границами $\pm t_{кр}$, где значение $t_{кр}(\alpha, k)$ находится из таблиц для двусторонней критической области.

Вычислив наблюдаемое значение критерия

$$T_{набл} = \frac{r_B\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_B^2}}$$

и сравнив его с $t_{кр}$, делаем вывод:

- если $|T_{набл}| < t_{кр}$ – нулевая гипотеза принимается (корреляции нет);
- если $|T_{набл}| > t_{кр}$ – нулевая гипотеза отвергается (корреляция есть).

3. Пусть изучается двумерная случайная величина (X, Y), и получена выборка из n пар чисел (x_1, y_1), (x_2, y_2),…, (x_n, y_n). Будем искать параметры прямой линии среднеквадратической регрессии Y на X вида

$$Y = \rho_{yx}x + b\ ,$$

Подбирая параметры ρ_{yx} и b так, чтобы точки на плоскости с координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) лежали как можно ближе к прямой . Используем для этого метод наименьших квадратов и найдем минимум функции

$$F(\rho,b) = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\rho x_i + b - y_i)^2\ .$$

Приравняем нулю соответствующие частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \rho} &= 2\sum_{i=1}^{n}(\rho x_i + b - y_i)x_i = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b} &= 2\sum_{i=1}^{n}(\rho x_i + b - y_i) = 0 \end{aligned}.$$

В результате получим систему двух линейных уравнений относительно ρ и b:

$$\begin{cases} \left(\sum x^2\right)\rho + \left(\sum x\right)b = \sum xy \\ \left(\sum x\right)\rho + nb = \sum y \end{cases}.$$

Ее решение позволяет найти искомые параметры в виде:

$$\rho_{xy} = \frac{n\sum xy - \sum x\cdot\sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2};\quad b = \frac{\sum x^2\cdot\sum y - \sum x\cdot\sum xy}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}\ .$$

Литература: [1], [2], [3].

4. Семестр V

Лекция 1.

Тема: Предмет, цели и задачи теории массового обслуживания. Потоки требований. Классификация систем массового обслуживания.

План

1. Постановка задачи теории массового обслуживания
2. Потоки требований.
3. Классификация систем массового обслуживания.

Цель: сформировать теоретические знания по данной теме.

Задачи:

– сообщить теоретический материал;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Ожидание является следствием вероятностного характера возникновения потребностей в обслуживании и разброса показателей обслуживающих систем называют системами массового обслуживания (СМО).

Цель изучения СМО состоит в том, чтобы взять под контроль некоторые характеристики системы, установить зависимость между числом обслуживающих единиц и качеством обслуживания.

Основными элементами СМО являются источники заявок, их входящий поток, каналы обслуживания и выходящий поток.

2. Наиболее распространенным является простейший поток заявок, обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия.

Стационарность характеризуется тем, что вероятность поступления определенного количества заявок в течение некоторого промежутка времени зависит только от длины этого промежутка. Ординарность потока определяется невозможностью одновременного появления двух или более заявок. Отсутствие последействия характеризуется тем, что поступление заявки не зависит от того, когда и сколько заявок поступило до этого момента.

3. В зависимости от характера формирования очереди СМО различают системы с отказами и системы с неограниченным ожиданием.

По числу каналов обслуживания СМО делятся на одноканальные и многоканальные. По расположению источника требований системы могут быть разомкнутыми и замкнутыми.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 2.
Тема: Модели массового обслуживания
План

1. Элементы теории случайных процессов.
2. Цепи Маркова.
3. Уравнения Колмогорова.

Цель: сформировать теоретические знания по данной теме.

Задачи:

– сообщить теоретический материал;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Случайным процессом называется соответствие, при котором каждому значению аргумента ставится в соответствие случайная величина.

Процесс, протекающий в физической системе, называется марковским, если в любой момент времени вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от состояния системы в текущий момент и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние.

2. Цепью Маркова называется последовательность испытаний, в каждом из которых появляется только одно из k несовместных событий A_i из полной группы. При этом условная вероятность $p_{ij}(s)$ того, что в s –ом испытании наступит событие A_j при условии, что в $(s-1)$ – ом испытании наступило событие A_i, не зависит от результатов предшествующих испытаний.

Независимые испытания являются частным случаем цепи Маркова. События называются состояниями системы, а испытания – изменениями состояний системы.

По характеру изменений состояний цепи Маркова можно разделить на две группы.

Цепью Маркова с дискретным временем называется цепь, изменение состояний которой происходит в определенные фиксированные моменты времени. Цепью Маркова с непрерывным временем называется цепь, изменение состояний которой возможно в любые случайные моменты времени.

Однородной называется цепь Маркова, если условная вероятность p_{ij} перехода системы из состояния i в состояние j не зависит от номера испытания. Вероятность p_{ij} называется переходной вероятностью.

Допустим, число состояний конечно и равно k.

Тогда матрица, составленная из условных вероятностей перехода будет иметь вид:

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kk} \end{pmatrix}$$

Эта матрица называется матрицей перехода системы.

Т.к. в каждой строке содержаться вероятности событий, которые образуют полную группу, то, очевидно, что сумма элементов каждой строки матрицы равна единице.

На основе матрицы перехода системы можно построить так называемый граф состояний системы, его еще называют размеченный граф состояний.

Вероятность $P_{ij}(n)$ может быть найдена по формуле, называемой равенством Маркова:

$$P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} P_{ir}(m) P_{rj}(n-m)$$

Здесь т – число шагов (испытаний), за которое система перешла из состояния i в состояние r.

Матрицы, суммы элементов всех строк которых равны единице, называются стохастическими. Если при некотором п все элементы матрицы $P^п$ не равны нулю, то такая матрица переходов называется регулярной.

Другими словами, регулярные матрицы переходов задают цепь Маркова, в которой каждое состояние может быть достигнуто через п шагов из любого состояния. Такие цепи Маркова также называются регулярными.

Теорема. (теорема о предельных вероятностях) Пусть дана регулярная цепь Маркова с п состояниями и Р – ее матрица вероятностей перехода. Тогда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = P^{(\infty)}$ и матрица $P^{(\infty)}$ имеет вид:

$$P^{(\infty)} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}$$

Т.е. матрица состоит из одинаковых строк.

Теперь о величинах u_i. Числа $u_1, u_2, \dots, u_n$ называются предельными вероятностями. Эти вероятности не зависят от исходного состояния системы и являются компонентами собственного вектора матрицы P^T (транспонированной к матрице Р).

Этот вектор полностью определяется из условий:

$$P^T \cdot \vec{u} = \vec{u}; \qquad \sum u_i = 1;$$

3. Сформулируем правило составления Уравнений Колмогорова:

в левой части каждого уравнения стоит производная вероятности состояния, а правая содержит столько членов, сколько стрелок связано с данным состоянием. Если стрелка направлена из состояния, соответствующий член имеет знак "-", если в состояние знак "+". Каждый член равен произведению плотности вероятности перехода, соответствующему данной стрелке, умноженной на вероятность состояния, из которого исходит стрелка.

Литература: [1], [2],[3].

Лекция 3.

Тема: Модели массового обслуживания. Простейшие системы массового обслуживания и их характеристики.

План

1. СМО с отказами.
2. СМО с неограниченным ожиданием.
3. СМО с ожиданием и с ограниченной длиной очереди.

Цель: сформировать знания о простейших системах массового обслуживания.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. СМО с отказами Заявка, поступившая в систему с отказами и нашедшая все каналы занятыми, получает отказ и покидает систему необслуженной. Показателем качества обслуживания выступает вероятность получения отказа. Предполагается, что все каналы доступны в равной степени всем заявкам, входящий поток является простейшим, длительность (время) обслуживания одной заявки (tобс) распределена по показательному закону.

Формулы для расчета установившегося режима

1. Вероятность простоя каналов обслуживания, когда нет заявок (k = 0):

$$P_0 = 1/\sum_{k=0}^{n} \rho^k/k!$$

2. Вероятность отказа в обслуживании, когда поступившая на обслуживание заявка найдет все каналы занятыми ($k = n$):

$$P_{\text{отк}} = P_n = P_0\rho^n/n!$$

3. Вероятность обслуживания:

$$P_{\text{обс}} = 1 - P_{\text{отк}}.$$

4. Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$\bar{n}_з = \rho P_{\text{обс}}.$$

5. Доля каналов, занятых обслуживанием:

$$k_з = \bar{n}_з/n.$$

6. Абсолютная пропускная способность СМО:

$$A = \lambda P_{\text{обс}}.$$

2. СМО с неограниченным ожиданием Заявка, поступившая в систему с неограниченным ожиданием и нашедшая все каналы занятыми, становится в очередь, ожидая освобождения одного из каналов.

Основной характеристикой качества обслуживания является время ожидания (время пребывания заявки в очереди).

Для таких систем характерно отсутствие отказа в обслуживании, т.е. Ротк = 0 и Робс = 1.

Для систем с ожиданием существует дисциплина очереди:

1) обслуживание в порядке очереди по принципу "первым пришел — первым обслужен";

2) случайное неорганизованное обслуживание по принципу "последний пришел — первым обслужен";

3) обслуживание с приоритетами по принципу "генералы и полковники вне очереди".

Формулы для установившегося режима

1. Вероятность простоя каналов, когда нет заявок (k = 0):

$$P_0 = 1\Big/\sum_{k=0}^{n}(\rho^k/k!) + \rho^{n+1}/n!(n-\rho).$$

Предполагается, что $\rho/n < 1$.

2. Вероятность занятости обслуживанием k заявок:

$$P_k = \rho^k P_0/k!, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

3. Вероятность занятости обслуживанием всех каналов:

$$P_n = \rho^n P_0 / n!$$

4. Вероятность того, что заявка окажется в очереди:

$$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} P_0.$$

5. Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{L}_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2} P_0.$$

6. Среднее время ожидания заявки в очереди:

$$\bar{t}_{оч} = \bar{L}_{оч} / \lambda.$$

7. Среднее время пребывания заявки в СМО:

$$\bar{t}_{смо} = \bar{t}_{оч} + \bar{t}_{обс}.$$

8. Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$\bar{n}_з = \rho.$$

9. Среднее число свободных каналов:

$$\bar{n}_{св} = n - \bar{n}_з.$$

10. Коэффициент занятости каналов обслуживания:

$$k_з = \bar{n}_з / n.$$

11. Среднее число заявок в СМО:

$$\bar{z} = \bar{L}_{оч} + \bar{n}_з.$$

3. СМО с ожиданием и с ограниченной длиной очереди. Заявка, поступившая в систему с ожиданием с ограниченной длиной очереди и нашедшая все каналы и ограниченную очередь занятыми, покидает систему необслуженной.

Основной характеристикой качества системы является отказ заявке в обслуживании.

Ограничения на длину очереди могут быть из-за:

1) ограничения сверху времени пребывания заявки в очереди;
2) ограничения сверху длины очереди;
3) ограничения общего времени пребывания заявки в системе.

Формулы для установившегося режима

1. Вероятность простоя каналов обслуживания, когда нет заявок ($k = 0$):

$$P_0 = 1 : \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \left[1 - \left(\frac{\rho}{n} \right)^m \right] \right\}.$$

2. Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{отк} = \frac{\rho^{n+m}}{n! n^m} \cdot P_0.$$

3. Вероятность обслуживания:

$$P_{обс} = 1 - P_{отк}.$$

4. Абсолютная пропускная способность:

$$A = P_{обс} \cdot \lambda.$$

5. Среднее число занятых каналов:

$$\bar{n}_з = \frac{A}{\mu}.$$

6. Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{L}_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \frac{1 - (\rho/n)^m (m + 1 - m\rho/n)}{(1-\rho/n)^2} P_0.$$

7. Среднее время ожидания обслуживания:

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\bar{L}_{\text{оч}}}{\lambda}.$$

8. Среднее число заявок в системе:

$$\bar{z} = \bar{L}_{\text{оч}} + \bar{n}_{\text{з}}.$$

9. Среднее время пребывания в системе:

$$\bar{t}_{\text{смо}} = \frac{\bar{z}}{\lambda}.$$

Литература: [1], [2],[3].

Лекция 4.

Тема: Динамическое программирование

План

1. Понятие динамического программирования.
2. Постановка задачи.

Цель: сформировать знания о моделях динамического программирования.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Динамическое программирование — один из разделов оптимального программирования, в котором процесс принятия решения и управления может быть разбит на отдельные этапы (шаги).

Экономический процесс является управляемым, если можно влиять на ход его развития. Под управлением понимается совокупность решений, принимаемых на каждом этапе для влияния на ход развития процесса. Например, выпуск продукции предприятием — управляемый процесс. Совокупность решений, принимаемых в начале года (квартала и т.д.) по обеспечению предприятия сырьем, замене оборудования, финансированию и т.д., является управлением. Необходимо организовать выпуск продукции так, чтобы принятые решения на отдельных этапах способствовали получению максимально возможного объема продукции или прибыли.

Динамическое программирование позволяет свести одну сложную задачу со многими переменными ко многим задачам с малым числом переменных. Это значительно сокращает объем вычислений и ускоряет процесс принятия управленческого решения.

В отличие от линейного программирования, в котором симплексный метод является универсальным методом решения, в динамическом программировании такого универсального метода не существует. Одним из основных методов динамического программирования является метод рекуррентных соотношений, который основывается на использовании принципа оптимальности, разработанного американским математиком Р. Беллманом. Принцип состоит в том, что, каковы бы ни были начальное состояние на любом шаге и управление, выбранное на этом шаге, последующие управления должны выбираться оптимальными относительно состояния, к которому придет система в конце данного шага. Использование данного принципа гарантирует, что управление, выбранное на любом шаге, не локально лучше, а лучше с точки зрения процесса в целом.

Литература: [1], [2],[3].

Лекция 5.

Тема: Динамическое программирование

План

1. Принцип поэтапного построения оптимального управления.
2. Графический метод решения задач динамического программирования. Нахождение рациональных затрат при строительстве трубопроводов и транспортных артерий.

Цель: сформировать знания о методах решения задач динамического программирования.

Задачи:

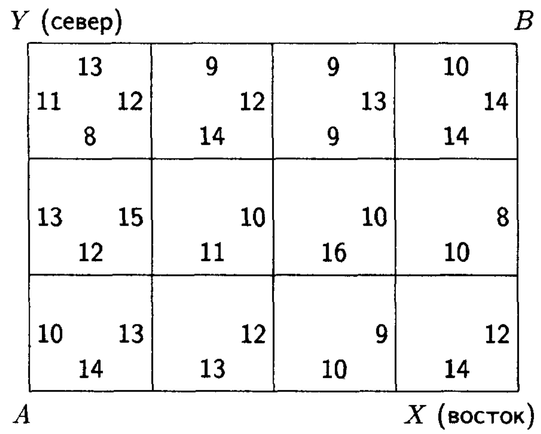
– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. В некоторых задачах, решаемых методом динамического программирования, процесс управления разбивается на шаги. При распределении на несколько лет ресурсов деятельности предприятия шагом целесообразно считать временной период; при распределении средств между предприятиями — номер очередного предприятия. В других задачах разбиение на шаги вводится искусственно. Например, непрерывный управляемый процесс можно рассматривать как дискретный, условно разбив его на временные отрезки (шаги). Исходя из условий каждой конкретной задачи, длину шага выбирают таким образом, чтобы на каждом шаге получить простую задачу оптимизации и обеспечить требуемую точность вычислений.

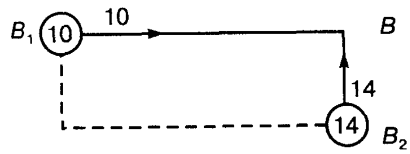
2. Требуется проложить путь (трубопровод, шоссе) между двумя пунктами *A* и *B* таким образом, чтобы суммарные затраты на его сооружение были минимальные.

Разделим расстояние между пунктами *A* и *B* на шаги (отрезки). На каждом шаге можем двигаться либо строго на восток (по оси *X*), либо строго на север (по оси *Y*). Тогда путь от *A* в *B* представляет ступенчатую ломаную линию, отрезки которой параллельны одной из координатных осей. Затраты на сооружение каждого из отрезков известны в млн рублей.

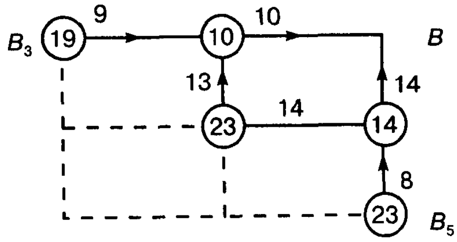


Разделим расстояние от А до В в восточном направлении на 4 части, в северном – на 3 части. Путь можно рассматривать как управляемую систему, перемещающуюся под влиянием управления из начального состояния А в конечное В. Состояние этой системы перед началом каждого шага будет характеризоваться двумя целочисленными координатами х и у. Для каждого из состояний системы (узловой точки) найдем условное оптимальное управление. Оно выбирается так, чтобы стоимость всех оставшихся шагов до конца процесса была минимальна. Процедуру условной оптимизации проводим в обратном направлении, т.е. от точки В к точке А.

Найдем условную оптимизацию последнего шага.

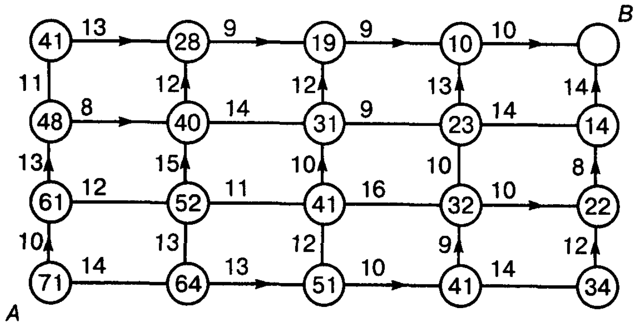


В точку *B* можно попасть из B_1 или B_2. В узлах запишем стоимость пути. Стрелкой покажем минимальный путь. Рассмотрим предпоследний шаг.



Для точки B_3 условное управление — по оси X, а для точки B_5 — по оси Y. Управление для точки B_4 выбираем как $\min(13 + 10, 14 + 14) = \min(23, 28) = 23,$ т.е. по оси Y.

Условную оптимизацию проводим для всех остальных узловых точек (рис. 29.5).



Получим $\bar{x}_{\text{опт}} = (с,\ с,\ в,\ с,\ в,\ в,\ в),$ где *с* — север, *в* —восток.

Минимальные затраты составляют $10 + 13 + 8 + 12 + 9 + 9 + 10 = 71$ млн р.

Если решать задачу исходя из оптимальности на каждом этапе, то решение будет следующим: $\bar{x} = (с,\ в,\ в,\ с,\ в,\ с,\ в)$

Затраты составят 10 +12 + 11 + 10 + 9 + 13 +10 = 75 > 71.

Прокладывать путь целесообразно по схеме: *с, с, в, с, в, в, в*, при этом затраты будут минимальные и составят 71 млн р.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 6.
Тема: Теория игр
План

1. Понятие теории игр.
2. Оптимальность в антагонистических играх.
3. Принцип максимина. Нижнее значение игры. Принцип минимакса. Верхнее значение игры.
4. Ситуация равновесия в чистых стратегиях. Седловая точка. Значение игры.
5. Смешанные стратегии.

Цель: сформировать теоретические знания по данной теме, рассмотреть методы решения задач по теории игр.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Теория игр – это теория математических моделей конфликтных ситуаций, - это одна из задач теории оптимальных решений – принятия решения в условиях.

Задачей теории игр является выработка рекомендаций для игроков, т.е. определение для них оптимальной стратегии. *Стратегией игрока* называется система правил, однозначно определяющих поведение игрока на каждом ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры. *Оптимальной* называется стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш. Количество стратегий у каждого игрока может быть конечным или бесконечным, в зависимости от этого игры подразделяются на конечные и бесконечные.

2. Игру можно представить в виде матрицы, в которой строки — стратегии первого игрока, столбцы — стратегии второго игрока, а элементы матрицы — выигрыши первого игрока. Такую матрицу называют *платежной.*

В общем случае парную игру с нулевой суммой можно записать платежной матрицей

$$(a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} .$$

Задача каждого из игроков — найти наилучшую стратегию игры, при этом предполагается, что противники одинаково разумны и каждый из них делает все, чтобы получить наибольший доход.

Найдем наилучшую стратегию первого игрока: минимальное число a„ в каждой строке обозначим α_i ($i = \overline{1, m}$),

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}.$$

Зная α_i, т.е. минимальные выигрыши при различных стратегиях A_i, первый игрок выберет ту стратегию, для которой α_i максимально. Обозначим это максимальное значение через α, тогда

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Величина α — гарантированный выигрыш, который может обеспечить себе первый игрок, — называется нижней ценой игры *(максимином).*

Аналогично для определения наилучшей стратегии второго игрока найдем максимальные значения выигрыша по столбцам и, выбрав из них минимальное значение, получим

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij},$$

где β — *верхняя цена игры (минимакс).*

Если второй игрок будет придерживаться своей минимаксной стратегии, то он гарантирован, что в любом случае проиграет не больше β.

Для матричной игры справедливо неравенство

$$\alpha \leqslant \beta.$$

3. Если $\alpha = \beta$, то такая игра называется *игрой с седловой точкой,* а пара оптимальных стратегий ($A_{i\text{опт}}$, $B_{j\text{опт}}$) — седловой точкой матрицы. В этом случае элемент $\alpha_{ij} = v$ называется *ценой игры*, является одновременно минимальным в i-й строке и j-м столбце. Если игра имеет седловую точку, то говорят, что она решается в чистых стратегиях.

4. Если платежная матрица не имеет седловой точки, т.е. $\alpha < \beta$, то поиск решения игры приводит к применению сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более стратегий с определенными частотами. Такая сложная стратегия называется *смешанной.*

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 7.
Тема: Теория игр
План

1. Игры с природой.
2. Критерии выбора оптимальной стратегии Лапласа, Вальда, Гурвица, Сэвиджа.

Цель: сформировать теоретические знания по данной теме, рассмотреть методы решения задач по теории игр.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Матричная игра, в которой игрок взаимодействует с окружающей средой, называется статистической игрой или «игрой с природой». Человек в играх с природой старается действовать осмотрительно, второй игрок (природа, покупательский спрос) действует случайно.

Условия игры задаются матрицей

$$(a_{ij})_{m\times n}.$$

2. Имеется ряд критериев, которые используются при выборе оптимальной стратегии. Рассмотрим некоторые из них.

1. Критерий Вальда. Рекомендуется применять максиминную стратегию. Она достигается из условия

$$\max\,\min a_{ij}$$

и совпадает с нижней ценой игры. Критерий является пессимистическим, считается, что природа будет действовать наихудшим для человека образом.

2. Критерий максимума. Он выбирается из условия

$$\max\,\max a_{ij}.$$

Критерий является оптимистическим, считается, что природа будет наиболее благоприятна для человека.

3. Критерий Гурвица. Критерий рекомендует стратегию, определяемую по формуле

$$\max\{\alpha\min a_{ij} + (1-\alpha)\max a_{ij}\},$$

где α — степень оптимизма — изменяется в диапазоне [0, 1].

Критерий придерживается некоторой промежуточной позиции, учитывающей возможность как наихудшего, так и наилучшего для человека поведения природы. При $\alpha = 1$ критерий превращается в критерий Вальде, при $\alpha = 0$ — в критерий максимума. На α оказывает влияние степень ответственности лица, принимающего решение по выбору стратегии. Чем хуже последствия ошибочных решений, больше желания застраховаться, тем a ближе к единице.

4. Критерий Сэвиджа. Суть критерия состоит в выборе такой стратегии, чтобы не допустить чрезмерно высоких потерь, к которым она может привести. Находится матрица рисков, элементы которой показывают, какой убыток понесет человек (фирма), если для каждого состояния природы он не выберет наилучшей стратегии.

Элемент матрицы рисков (r_{ij}) находится по формуле

$$r_{ij} = \max a_{ij} - a_{ij},$$

где $\max a_{ij}$ — максимальный элемент в столбце исходной матрицы.

Оптимальная стратегия находится из выражения

$$\min\{\max(\max a_{ij} - a_{ij})\}.$$

Литература: [1], [2],[3].

Лекция 8.

Тема: Модели сетевого планирования.

План

1. Элементы теории графов.
2. Сетевая модель.
3. Основные понятия сетевой модели.

Цель: сформировать знания о моделях сетевого планирования.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Сетевая модель — графическое изображение плана выполнения комплекса работ, состоящего из нитей (работ) и узлов (событий), которые отражают логическую взаимосвязь

всех операций. В основе сетевого моделирования лежит изображение планируемого комплекса работ в виде графа. Граф — схема, состоящая из заданных точек (вершин), соединенных системой линий. Отрезки, соединяющие вершины, называются ребрами (дугами) графа. Ориентированным называется такой граф, на котором стрелкой указаны направления всех его ребер (дуг), что позволяет определить, какая из двух его граничных вершин является начальной, а какая — конечной. Исследование таких сетей проводится методами теории графов.

Теория графов оперирует понятием пути, объединяющим последовательность взаимосвязанных ребер. Контур означает такой путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной. Сетевой график — это ориентированный граф без контуров. В сетевом моделировании имеются два основных элемента — работа и событие.

Работа — это активный процесс, требующий затрат ресурсов, либо пассивный (ожидание), приводящий к достижению намеченного результата.

Фиктивная работа — это связь между результатами работ (событиями), не требующая затрат времени и ресурсов.

Событие — это результат (промежуточный или конечный) выполнения одной или нескольких предшествующих работ.

Путь — это любая непрерывная последовательность (цепь) работ и событий.

Критический путь — это путь, не имеющий резервов и включающий самые напряженные работы комплекса. Работы, расположенные на критическом пути, называют критическими. Все остальные работы являются некритическими (ненапряженными) и обладают резервами времени, которые позволяют передвигать сроки их выполнения, не влияя на общую продолжительность выполнения всего комплекса работ.

2. При построении сетевых моделей необходимо соблюдать следующие правила.

1) Сеть изображается слева направо, и каждое событие с большим порядковым номером изображается правее предыдущего. Общее направление стрелок, изображающих работы, также в основном должно быть расположено слева направо, при этом каждая работа должна выходить из события с меньшим номером и входить в событие с большим номером.

2) Два соседних события могут объединяться лишь одной работой. Для изображения параллельных работ вводятся промежуточное событие и фиктивная работа.

3) В сети не должно быть тупиков, т.е. промежуточных событий, из которых не выходит ни одна работа.

4) В сети не должно быть промежуточных событий, которым не предшествует хотя бы одна работа.

5) В сети не должно быть замкнутых контуров, состоящих из взаимосвязанных работ, создающих замкнутую цепь. Для правильной нумерации событий поступают следующим образом: нумерация событий начинается с исходного события, которому дается номер 1. Из исходного события 1 вычеркивают все исходящие из него работы, на оставшейся сети вновь находят событие, в которое не входит ни одна работа. Этому событию дается номер 2. Затем вычеркивают работы, выходящие из события 2, и вновь находят на оставшейся части сети событие, в которое не входит ни одна работа, ему присваивается номер 3, и так продолжается до завершающего события.

Продолжительность выполнения работ устанавливается на основании действующих нормативов или по экспертным оценкам специалистов. В первом случае временные оценки являются детерминированными (однозначными), во втором — стохастическими (вероятностными).

Литература: [1], [2],[3].

Лекция 9.
Тема: Модели сетевого планирования
План

1. Сетевые графики.
2. Основные показатели сетевых графиков.

Цель: сформировать знания о сетевых графиках и их показателях.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Основным временным параметром сетевого графика является продолжительность критического пути.

Расчет критического пути включает два этапа. Первый называется прямым проходом. Вычисления начинают с исходного события и продолжают до тех пор, пока не будет достигнуто завершающее событие. Для каждого события определяется одно число, представляющее ранний срок его наступления. На втором этапе, называемом обратным проходом, вычисления начинают с завершающего события и продолжают, пока не будет достигнуто исходное событие. Для каждого события вычисляется поздний срок его наступления.

$t_i^{р.н.}$ — ранний срок начала всех операций, выходящих из события *i*.

Если $i = 0$, то $t_0^{р.н.} = 0$;

$t_j^{р.н.}$ — ранний срок начала всех операций, входящих в *j*.

Тогда

$$t_j^{р.н} = \max_i (t_i^{р.н} + t_{ij}) \text{ для всех } (i, j),$$

где t_{ij} — продолжительность операции *(i,j);*

$t_i^{п.о}$ — поздний срок окончания всех операций, входящих в событие *i*.

Если $i = n$, где n — завершающее событие сети, то $t_n^{п.о} = t_n^{р.н.}$ и является отправной точкой обратного прохода;

$$t_i^{п.о} = \min_j (t_j^{п.о} - t_{i,j}) \text{ для всех операций } (i,j);$$

Используя результаты вычислений при прямом и обратном проходах, можно определить операции критического пути. Операция *(i, j)* принадлежит критическому пути, если она удовлетворяет условиям:

$$t_i^{р.н} = t_i^{п.о},$$
$$t_j^{р.н} = t_j^{п.о},$$
$$t_j^{р.н} - t_i^{р.н} = t_j^{п.о} - t_i^{п.о} = t_{ij}.$$

Операции связаны еще с двумя сроками:

$t_{ij}^{п.н.}$ - поздний срок начала работы. Он является наиболее поздним (максимальным) из допустимых моментов начала данной работы, при котором еще возможно выполнение всех последующих работ в установленный срок:

$$t_{ij}^{п.н} = t_j^{п.о} - t_{ij};$$

$t_{ij}^{р.о}$ - ранний срок окончания работы. Он является наиболее ранним (минимальным) из возможных моментов окончания работы при заданной продолжительности работ:

$$t_{ij}^{р.о} = t_i^{р.н} + t_{ij}.$$

Различают два вида резервов времени: полный резерв ($r_п$) и свободный резерв ($r_{св}$).

Полный резерв времени показывает, на сколько может быть увеличена сумма продолжительности всех работ относительно критического пути. Он представляет собой разность между максимальным отрезком времени, в течение которого может быть выполнена операция, и ее продолжительностью (t_{ij}) и определяется как

$$t_{ij}^{п.н} - t_i^{р.н}.$$

Свободный резерв времени — максимальное время, на которое можно отсрочить начало или увеличить продолжительность работы при условии, что все события наступают в ранние сроки:

$$r_{св\,ij} = t_j^{р.н} - t_i^{р.н} - t_{ij}.$$

Результаты расчета критического пути и резервов времени некритических операций представлены в нижеследующей таблице. Следует отметить, что критические операции должны иметь нулевой полный резерв времени, при этом свободный резерв также должен быть равен нулю.

Литература: [1], [2],[3].

III МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И РЕКОМЕНДАЦИИ

1. Методические рекомендации для преподавателей

В качестве средств обучения могут быть использованы учебники, учебные пособия, электронные ресурсы, приведенные в рабочей программе.

В процессе обучения рекомендуем преподавателям использовать основные методы обучения, применяемые в высшей школе.

1. Информационно-рецептивный метод. Обучаемые усваивают знания в готовом виде, сообщенные преподавателем, почерпнутые из книжных источников или электронных ресурсов. Подобная деятельность необходима, так как она позволяет в сжатые сроки вооружать студента основными математическими определениями, теоремами, формулами и образцами способов деятельности.

2. Репродуктивный метод (метод организации воспроизведения способов деятельности). К этому методу относятся: решение типовых задач, ответы на теоретические вопросы.

3. Метод проблемного обучения. Преподаватель не просто излагает материал, а ставит проблему, формулирует познавательную задачу, показывает с помощью студентов логический путь решения проблемы. Здесь обучаемый становится соучастником поиска.

4. Эвристический (частично-поисковый) метод. После ознакомления обучаемых с материалом (определениями, математическими моделями, теоремами) перед ними ставится познавательная поисковая задача (лучше, если студенты сами ее выдвинут). Путем соответствующих заданий обучаемые подводятся к самостоятельным выводам. Таким образом, организуются активный учебный поиск, связанный с переходом к творческому, продуктивному мышлению.

5. Исследовательский метод. После постановки проблемы, формулирования задач, обучаемые самостоятельно работают над литературой, выдвигают гипотезу, ищут пути ее решения.

Рекомендуем использовать некоторые частно-дидактические методы обучения.

1. Мотивационное обеспечение учебной деятельности. Применение этого метода предполагает создание условий, при которых студентом осознается важность изучаемого материала для своей последующей деятельности. При этом полезны задачи прикладного содержания, соответствующие приобретаемой профессии.

2. Выделение базисного материала, концентрация учебного материала вокруг базисного. Применение этого метода облегчает процесс усвоения и запоминания, освобождает от необходимости изучать некоторые частные, второстепенные вопросы, способствует формированию обобщенных знаний.

3. Пропедевтика вводимых понятий, новых теорем, формул. Перед изучением материала ограничиваются наглядными соображениями, не строгими рассуждениями, интуитивными представлениями о понятиях. Использование догадок, интуиции в обучении развивает мышление, интерес, улучшает запоминание.

4. Выбор методически обоснованного, с учетом знаний студентов и их умения мыслить, уровня строгости изучаемого материала. При обучении студентов естественнонаучного направления следует иметь в виду, что излишняя формализация материала препятствует полноценному его усвоению, развитию интуиции и может привести к потере интереса к предмету.

5. Создание проблемных ситуаций, возможностей для студентов самим делать обобщения, выводы, открытия.

6. Составление и применение алгоритмов. Алгоритмы организуют познавательный

процесс, являются средством достижения результата, формируют у студента четкий стиль мышления. Их применение способствует более прочному усвоению материала.

7. Математическое моделирование. Математическая модель есть приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. Анализ математической модели позволяет проникнуть в сущность изучаемых явлений. При построении математических моделей необходимо выделять основные этапы:

- формализацию;
- решение задачи внутри построенной модели на языке той теории, в рамках которой находится модель;
- интерпретации полученного результата к исходной задаче.

В математических курсах модели различного вида встречаются очень часто: функциональном, графическом, знаковом и других выражениях. Особенно наглядны задачи практического содержания, в которых отчетливо выделяются все указанные три этапа математического моделирования.

8. Обучение с использованием информационных технологий. Размещение сотрудниками кафедры своих учебных материалов в сети Интернет позволяет студенту осваивать материал в соответствии с требованиями преподавателя в любое удобное для него время.

Любой способ учебной деятельности целесообразно представить как цепь управляемых ситуаций, направленных на стимулирование и развитие познавательной и практической активности студента.

Методика чтения лекций, организации практических занятий и самостоятельной работы должна содействовать развитию познавательной активности студентов, формированию необходимых компетенции. В практике необходимы лекции, предусматривающие как продуктивную, так и репродуктивную деятельность студента. При применении активных методов обучения доминирующими видами деятельности являются частично-поисковые, творческие, исследовательские. Важными моментами таких лекций являются:

- постановка проблемы;
- определение базовых знаний, необходимых для ее решения;
- создание атмосферы частично-поисковой деятельности;
- организация исследовательской деятельности;
- сравнение результатов исследования с точным результатом;
- корректировка определений, выводов, полученных студентами;
- самостоятельная работа студентов по специальным заданиям. Система задач и упражнений на практических и лабораторных занятиях должна давать целостное представление о функциях задач;
- обучающей (формирование у студентов системы математических знаний, умений, компетенции);
- развивающей (развитие математического мышления);
- воспитывающей (формирование познавательного интереса);
- контролирующей (проверка качества усвоения изучаемого материала). Задания для самостоятельной работы включают в себя задачи и упражнения:

1) тренировочного типа (в форме домашних заданий к практическим занятиям; самостоятельная работа над книгой или конспектом лекции по отбору и систематизации учебного материала);

2) реконструктивно-вариативного типа (при выполнении этих заданий студенты применяют правила, теоремы в различных ситуациях; реконструируют известный учебный материал или способы решения задач с целью их приложения к решению заданной задачи с измененными условиями).

2. Методические указания по изучению дисциплины

Успешное освоение дисциплины предполагает активное, творческое участие студента путем ежедневной планомерной работы. Изучение дисциплины следует начинать с проработки рабочей программы, особое внимание, уделяя целям и задачам, структуре и содержанию курса.

На лекциях студенты получают самые необходимые данные, во многом дополняющие учебники (иногда даже их заменяющие с последними достижениями науки. Умение сосредоточенно слушать лекции, активно, творчески воспринимать излагаемые сведения является непременным условием их глубокого и прочного усвоения, а также развития умственных способностей.

Слушание и запись лекций - сложные виды вузовской работы. Внимательное слушание и конспектирование лекций предполагает интенсивную умственную деятельность студента. Слушая лекции, надо отвлечься при этом от посторонних мыслей и думать только о том, что излагает преподаватель. Краткие записи лекций, конспектирование их помогает усвоить материал.

Внимание человека неустойчиво. Требуются волевые усилия, чтобы оно было сосредоточенным. Конспект является полезным тогда, когда записано самое существенное, основное. Это должно быть сделано самим студентом. Не надо стремиться записать дословно всю лекцию. Такое "конспектирование" приносит больше вреда, чем пользы. Некоторые студенты просят иногда лектора "читать помедленнее". Но лекция не может превратиться в лекцию-диктовку. Это очень вредная тенденция, ибо в этом случае студент механически записывает большое количество услышанных сведений, не размышляя над ними.

Запись лекций рекомендуется вести по возможности собственными формулировками. Желательно запись осуществлять на одной странице, а следующую оставлять для проработки учебного материала самостоятельно в домашних условиях. Конспект лучше подразделять на пункты, параграфы, соблюдая красную строку. Принципиальные места, определения, формулы следует сопровождать замечаниями: «важно», «особо важно», «хорошо запомнить» и т.п. Целесообразно разработать собственную «маркографию» (значки, символы), сокращения слов. Не лишним будет и изучение основ стенографии. Работая над конспектом лекций, всегда используй не только учебник, но и ту литературу, которую дополнительно рекомендовал лектор. Именно такая серьезная, кропотливая работа с лекционным материалом позволит глубоко овладеть знаниями. Конспект лекции рекомендуется просмотреть сразу после занятий. Отметьте материал конспекта лекций, который вызывает затруднения для понимания. Попытайтесь найти ответы на затруднительные вопросы, используя рекомендованную литературу. Если самостоятельно не удалось разобраться в материале, сформулируйте вопросы и обратитесь к преподавателю за консультацией.

Регулярно отводите время для повторения теоретического и практического материала, проверяя свои знания, умения и навыки по контрольным вопросам.

При подготовке к практическим занятиям целесообразно пользоваться планом, представленным в пункте 5.2 данного учебно-методического комплекса. Тщательно проработать лекционный материал и соответствующие учебные пособия по теме каждого практического занятия. Прорешать типовые задачи домашнего задания.

Практические занятия по данной дисциплине способствуют развитию аналитических и вычислительных способностей и формированию соответствующих навыков; – привитию навыков составления и анализа математических моделей простых реальных задач и развитию математической интуиции; – выработке умений решать прикладные задачи, связанные с будущей специальностью студента, требующие отбора данных и предварительного вывода аналитических зависимостей. Поэтому основным требованием преподавателя к студентам является обязательное присутствие студентов на всех практических занятиях, а также выполнение всех заданий преподавателя, как текущих, так и контрольных.

3. Краткие учебно-методические материалы к практическим занятиям

1 семестр

Практическое занятие № 1 «Комплексные числа Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы»

Основные вопросы

1. Понятие комплексного числа.

2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

Типовые задания

1. Перевести в тригонометрическую и показательную формы комплексные числа:

а) $z=-\sqrt{3}+i;$ б) $z=2i;$ в) $z=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i.$

2. Перевести в алгебраическую форму комплексные числа:

а) $z=2e^{\frac{\pi}{6}i}$; б) $z=e^{-i120^0}$; в) $z=6e^{i210^0}$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 2 «Действия над комплексными числами»

Основные вопросы

1. Сложение и вычитание.
2. Умножение и деление.
3. Возведение в степень.
4. Извлечение корня.

Типовые задания

1. Выполнить действие: $\dfrac{i-4}{1-i}+(2+2i)(-1-4i).$
2. Возвести в степень: $\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)^{10}.$
3. Найти корни: $\sqrt[3]{-1-i}.$
4. Решить уравнения: а) $x^4+16=0;$ б) $x^3-27=0$; в) $z^3+\dfrac{2\sqrt{2}}{1+i}=0.$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 3 «Уравнение прямой на плоскости»

Основные вопросы

1. Общее уравнение прямой.
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
3. Уравнение прямой проходящей через 2 точки.
4. Уравнение прямой проходящей через данную точку в данном направлении.
5. Уравнение прямой в отрезках.
6. Уравнение прямой проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
7. Основные задачи: угол между двумя прямыми, расстояние от точки до прямой.

Типовые задания

1. Даны вершины треугольника: А(2, 3), В(6, 1), С(2, -2). Найти:
1. Длину стороны АВ.
2. Уравнения сторон АВ, ВС, АС.
3. Уравнение высоты из вершины А.
4. Уравнение медианы из вершины В.
5. Расстояние от точки С до прямой АВ.
2. Составить уравнение прямой проходящей через точку $M(-2;-5)$, параллельно прямой $3x+4y+2=0$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 4 «Кривые второго порядка»

Основные вопросы

1. Окружность.
2. Эллипс.
3. Гипербола.
4. Парабола.

Типовые задания

8. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M\left(\frac{5}{2};\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$, $N\left(-2;\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$.
9. Построить линии:

1) $y=\sqrt{9-x^2}$; 2) $x-4y^2-12=0$; 3) $x^2-y^2+2x+2=0$;

4) $36x^2+4y^2+144x-40y+100=0$; 5) $x^2-4y^2-4x-8y+8=0$; 6) $2x+y-4=0$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 5 «Уравнение прямой и плоскости в пространстве»

Основные вопросы

1. Уравнение плоскости.
2. Плоскость. Основные задачи: угол между двумя плоскостями, расстояние от точки до плоскости.
3. Построение плоскостей.
4. Уравнение прямой в пространстве.
5. Прямая в пространстве. Основные задачи.

6. Прямая и плоскость в пространстве.

Типовые задания

1. Найти расстояние от точки A до плоскости, проходящей через точки B, C, D. $A(1,-6,-5), B(-1,2,-3), C(4,-1,0), D(2,1,-2)$.
2. Найти угол между плоскостями: $4x-5y+3z-1=0, x-4y-z+9=0$.
3. Построить плоскости:
   1) $y=4$; 2) $x-4y-12=0$; 3) $x-y+2x+2=0$;
   4) $x-3y+2z=6$; 5) $2x+z-3=0$.
4. Написать уравнение прямой, проходящей через точки: $A(3,-2,-1)$ и $B(1,3,1)$.
5. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,4,-3)$ и параллельно вектору $\vec{s}=\{1;-2;6\}$.
6. Данные прямые параллельны или перпендикулярны?
$$\frac{x+4}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-5}{-8},\ \frac{x}{-1}=\frac{y+8}{-1}=\frac{z-6}{4}.$$
7. При каком значении k данные прямые перпендикулярны?
$$\frac{x+4}{-5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2},\ \frac{x+7}{k}=\frac{y}{4}=\frac{z-3}{3}.$$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 6 «Понятие функции»

Основные вопросы

1. Область определения функции.
2. Чётность, нечётность функции.
3. Построение графиков функции.

Типовые задания

1. Найти область определения функций:
   1) $f(x)=\log_3(3x-2)+\lg(3-x)$; 2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+12-x^2}}{x^2-9}+\lg(x-3)$.
2. Выяснить четность(нечётность) функций:
   1) $y=\dfrac{\cos 3x}{x^2}$; 2) $y=-\lg|2x|\cdot tgx$; 3) $y=5^{x+1}-x^2$.
3. Построить графики функций:
   1) $y=3^{|x|}$; 2) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+3)$; 3) $y=\dfrac{2x+1}{4x+5}$;
   4) $y=3\cos(2x-1)$; 5) $y=3x^2+9x+11$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/

М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 7 «Вычисление пределов функций»

Основные вопросы

1. Понятие предела.
2. Основные теоремы о пределах.
3. Раскрытие неопределённостей различных типов.
4. Использование эквивалентных бесконечно малых функций.

Типовые задания

1. Вычислить пределы функций:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^2-1};\quad \lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right);\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-3x^3+5}{3x^4-5x^2+1};\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\ln(1+x)};\quad \lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\pi-2x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x};\quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+x-1}{x^4+2x};\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{2x+1}\right)^{x+1};\quad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{\sin 2x},\quad \lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2};$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2};\quad \lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{(x-1)^2};\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^5-7x+1}{3x^2+x+3};\quad \lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-1}{x+4}\right)^{2x+1},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{3^x-4\cdot 5^x}{5^x+3^x},\quad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right),\quad \lim_{n\to\infty}\frac{5n\cdot(n-1)!}{n!+(n+1)!}.$$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 8 «Замечательные пределы»

Основные вопросы

1. Первый замечательный предел.
2. Второй замечательный предел.

Типовые задания

1. Вычислить пределы функций:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x};\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{x+1};\quad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{\sin 2x};\quad \lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+4}\right)^{2x+1};\quad \lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}};\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x};\quad \lim_{x\to+\infty}(2x+1)[\ln(x+3)-\ln(x)].$$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 9 «Непрерывность функции. Точки разрыва»

Основные вопросы

1. Непрерывность функции в точке.
2. Основные теоремы о непрерывных функциях.
3. Точки разрыва функции и их классификация.

Типовые задания

1. Исследовать функции на непрерывность и сделать чертёж.

1) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le 0; \\ x^2+1, & 0<x<1; \\ x, & x\ge 1. \end{cases}$ 2) $y=\dfrac{4x+2}{x-1}$.

2. Найти точки разрыва функций и определить их тип:

1) y=$5^{\frac{2x}{x-1}}$; 2) y=$\dfrac{4x^2-25}{2x-5}$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 10 «Производная явно заданной функции»

Основные вопросы

1. Понятие производной.
2. Правила дифференцирования. Таблица производных.
3. Производная сложной функции.

Типовые задания

1. Вычислить производные:

1) $y=\dfrac{\cos x}{1+2\sin x}$; 2) $y=\ln\dfrac{x^2}{1-x^2}$; 3) $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$; 4) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$;

5) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; 6) $y=tg(x)\cdot\sin^2(3x)$; 7) $y=\ln\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)$; 8) $y=tg^3x-3tgx+3x$;

9) $y=arctg\dfrac{x+3}{x-3}$;10) $y=10^{3-\sin^3 2x}$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.

3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 11 «Дифференцирование функций заданных неявно, параметрически. Производная степенно-показательной функции»

Основные вопросы

1. Дифференцирование функций заданных неявно, параметрически.
2. Логарифмическое дифференцирование.
3. Производная степенно-показательной функции.
4. Производные высших порядков.

Типовые задания

1. Найти производную функции:

$1)\ x^2 + y^2 - xy + 3 = 0$; 2) $y_x = ?,\ если \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$; 3) $f(x) = (x^2 + 3x)^{x\cos x}$.

2. Вычислите y'', если $y = \ln(x^2 + 1)$.
3. Найти производную n-го порядка:

$y=2^x+2^{-x}$, $y^{(n)} = ?$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 12 «Интервалы монотонности и экстремумы функции. Интервалы выпуклости функции. Точки перегиба. Асимптоты»

Основные вопросы

1. Интервалы монотонности и экстремумы функции.
2. Интервалы выпуклости функции. Точки перегиба.
3. Асимптоты.

Типовые задания

1. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$.
2. Исследовать функцию на экстремум $y = 5x^3 - 15x^2 + 4$.
3. Найти интервалы вогнутости и точки перегиба графиков функций:

$y = x^4 + 3x^3$

4. Определить асимптоты кривой $y = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x+1}$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.

3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 13 «Исследование функций с помощью производных»

Основные вопросы

1. Область существования функции.
2. Точки разрыва. Интервалы возрастания и убывания.
3. Точки максимума и минимума.
4. Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.
5. Области выпуклости и вогнутости.
6. Точки перегиба.
7. Асимптоты.
8. Построение графика.

Типовые задания

1. Провести полное исследование функций и построить их графики:

1) $y = 2x^3 - 12x^2 + 18x$; 2) $y = \dfrac{x}{x^2 - 16}$; 3) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$; 4) $y = x\sin x$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 14 «Приложения производной в экономике»

Основные вопросы

1. Предельные величины.
2. Издержки производства.
3. Производительность труда.
4. Эластичность функции.

Типовые задания

1. Зависимость издержек производства C от объема выпускаемой продукции q выражается формулой $C = 40q + 0{,}02q^3$, где A и B – известные величины. Определить средние и предельные издержки производства при объеме продукции 10.
2. Производитель реализует свою продукцию по цене p за единицу, а издержки при этом задаются функцией $C(x)= 9x + 0{,}2x^2$, где x - объем выпускаемой продукции в условных единицах ($x > 0$) Найти оптимальный для производителя объем выпуска продукции и соответствующую ему прибыль, если p=49 ден. ед.
3. Объем продукции Q, произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением $Q = (-5/6)t^3 + (15/2)t^2 + 100t + 50$ (ед.), $t \in [1;8]$, где t - рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения через час после начала работы и за час до ее окончания.
4. Опытным путем установлены функции спроса q = (p + 8)/(p + 2) и предложения s = p + 0,5 , где q и s - количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p - цена товара. Найти: а) равновесную цену, т.е. цену,

при которой спрос и предложение уравновешиваются; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода при увеличении цены на 5% от равновесной.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 15 «Функции нескольких переменных. Частные производные»

Основные вопросы

1. Область определения функции нескольких переменных.
2. Частные производные первого порядка и полный дифференциал функции нескольких переменных функции.
3. Производные высших порядков.

Типовые задания

1. Найти частные производные I порядка:

1) $z = x^3 + 5x^2y^2 - y^3$; 2) $z = c\text{os}(x + 4y)$; 3) $z = arcctg\,\dfrac{y}{x}$; 4) $z = \ln(x + yx)$;

5) $z = xe^{xy}$; 6) $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2. Найти полный дифференциал: $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.
3. Найти частные производные II порядка:

1) $z = \dfrac{x^2}{1 + 2y^2}$; 2) $z = \ln\left(x + e^{xy}\right)$; 3) $z = arctgxy$.

4. Показать что функция $z = \ln(x^2 + y^2 + 2y + 1)$ удовлетворяет условию $Z''_{xx} + Z''_{yy} = 0$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 16 «Экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум»

Основные вопросы

1. Экстремум функции нескольких переменных.
2. Понятие условного экстремума. Метод подстановки. Метод неопределённых множителей Лагранжа.

Типовые задания

1. Исследовать функцию $z = y^4 - 2xy^2 + x^2 + 2y + y^2$ на экстремум.
2. Найти экстремум функции f(x, y) = xy, если уравнение связи: 2x + 3y – 5 = 0.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практические занятия № 17, 18 «Приложения функций нескольких переменных к решению экономических задач»

Основные вопросы

1. Эластичность функции нескольких переменных.
2. Полезность. Предельная полезность.
3. Производственная функция.
4. Кривые безразличия производства.

Типовые задания

1. Функция спроса имеет вид $D = f(p, p_A, y) = 15 - 4p + 3p_A + 0{,}02y$,где D -спрос на товар Q, p -цена товара Q, p_A -цена альтернативного товара, y -доход потребителей. Вычислить коэффициенты эластичности $\varepsilon_p, \varepsilon_A, \varepsilon_y$ и пояснить их экономический смысл при $p = 12, p_A = 18, y = 1000$.
2. Задана функция полезности $U = 4x^{1/4} y^{3/4}$, где x - количество товара X и y - количество товара Y. Требуется оценить изменение полезности, когда x уменьшается от 100 до 99, а y увеличивается от 200 до 201.
3. Найти предельные полезности и предельную норму замещения товара x на товар y для функции полезности $U = \ln x + \ln y + \ln(x + y)$ в точке А (2;10).
4. Производственная функция задана формулой $Q = 100\sqrt{L} \cdot \sqrt{K} - 20L$. Вычислить предельную производительность труда и предельный продукт труда при $L = 100, 400, 2500, K = 100$ у. е.
5. Задана производственная функция $Q = KL^2 + 9$, где Q - количество произведённых товаров или услуг, K и L - ресурсы. Построить кривую безразличия при $Q_0 = 10$, вычислить коэффициент заменяемости ресурсов R_A, пояснить экономический смысл решения, если А (1,1).

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

2 семестр

Практическое занятие № 1 «Матрицы и действия над ними»

Основные вопросы

1. Понятие матрицы. Виды матриц.

2. Равенство матриц.
3. Транспонирование матриц.
4. Операция сложение матриц и ее свойства.
5. Операция умножения матрицы на действительное число и ее свойства.
6. Операция умножения матриц и ее свойства.

Типовые задания

1.Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 5 & -6 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $C=2A-3B$.

2.Найти $-A+2B-\frac{1}{3}C$, если $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -9 \end{pmatrix}$.

3.Найти $A+A^{\mathrm{T}}$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -9 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

4.Матрицы A и B равны, $A=\begin{pmatrix} y+2 & -4 & 2 \\ 2x-3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & z+1 & 2 \\ 3 & 0 & -t \end{pmatrix}$. Найти x, y, z, t.

5.Дано матричное равенство $2A+B-A^T \cdot B^T=\Theta+C$, где $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3a & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Найти a.

6.Дано произведение матриц $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$. Указать значения x_2, x_3, y_1.

7. Перемножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 7 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 2 «Вычисление определителей»

Основные вопросы

1.Понятие определителя второго порядка и его вычисление.
2.Понятие определителя третьего порядка и его вычисление.
3.Понятие определителя порядка n.
4. Понятие алгебраического дополнения элемента определителя.
5. Обратная матрица.

Типовые задания

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{3} & 2-\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{2} & 1-\sqrt{3} \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} a+в & a-в \\ a-в & a+в \end{vmatrix}$, д) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

2. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.

4. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$.

5. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

6. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$ тремя способами:

1) по правилу «треугольников»;

2) путем разложения по элементам первой строки;

3) путем накопления нулей ниже главной диагонали.

7. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

7. Найти A^{-1}:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 3 «Методы решения систем линейных уравнений»

Основные вопросы

1. Теорема Кронекера-Капелли.
2. Метод Крамера решения систем линейных уравнений.
3. Решение систем уравнений матричным методом.
4. Метод Гаусса решения системы линейных уравнений.

Типовые задания

1. Показать, что система имеет единственное решение. Найти решение методом Крамера.

а) $\begin{cases} 2x-5y=1, \\ 3x+y=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1-3x_2=7, \\ 2x_1-5x_2=1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3=3, \\ x_1-5x_2+3x_3=0, \\ x_1-x_2+x_3=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2. \end{cases}$

2. Исследовать и решить систему. Найти общее решение и одно из частных решений в случае совместности неопределенной системы.

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

3. Затраты трех видов сырья на производство каждого из трех типов продукции заданы векторами $\vec{q_1}$, $\vec{q_2}$, $\vec{q_3}$. Запасы каждого вида сырья заданы вектором $\vec{S}$. Определить план производства, обеспечивающий использование всего сырья. Составить математическую модель задачи и решить ее, используя матричный метод и формулы Крамера.

а) $\vec{q_1}$ =(1, 2, 2), $\vec{q_2}$ =(3, 2, 5), $\vec{q_3}$ =(2, 4, 1), $\vec{S}$ =(80, 120, 90);

б) $\vec{q_1}$ =(2, 5, 1), $\vec{q_2}$ =(4, 3, 2), $\vec{q_3}$ =(3, 2, 5), $\vec{S}$ =(168, 173, 191).

4. Решить систему матричным способом:

а) $\begin{cases} 3x + 7y + 4z - 3 = 0, \\ x + 2y + 2z - 3 = 0, \\ 2x + 3y + 5z - 10 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 = -1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

2. Показать, что система имеет единственное решение. Найти решение методом Гаусса.

а) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -8, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + y - z = -6, \\ 4x - 3y - 4z = 4, \\ -2x + 2y + 3z = -2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14. \end{cases}$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 4 «Применение элементов линейной алгебры в экономике»

Основные вопросы

1. Экономический смысл элементов матрицы прямых затрат.
2. Уравнение линейного межотраслевого баланса.
3. Понятие «продуктивность матрицы прямых затрат».
4. Понятие «запаса продуктивности».
5. Критерии продуктивности матрицы прямых затрат.
6. Нормы добавленной стоимости.
7. Структурной матрицы торговли.
8. Условие бездефицитной торговли.

Типовые задания

1. Дана матрица прямых материальных затрат $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$.Зная конечный продукт первой отрасли $y_1 = 80$ и валовой выпуск второй отрасли $x_2 = 100$, найти конечный продукт второй и валовой выпуск первой отрасли.

2. Рассматривается экономическая система, состоящая из двух отраслей– промышлен-

ности и сельского хозяйства. $A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}3\\ 0{,}3 & 0{,}6\end{pmatrix}$ – матрица прямых затрат, $\vec{V}=\begin{pmatrix}8 & 9\end{pmatrix}$– вектор норм добавленной стоимости. Определить: равновесные цены; равновесные цены при увеличении норм добавленной стоимости на a=2, b=3 соответственно.

3. $A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}5\end{pmatrix}$ торговли трех стран. Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие бездефицитной торговле, при условии, что сумма бюджетов равна 15000.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 5 «Непосредственное интегрирование»

Основные вопросы

1. Первообразная
2. Неопределенный интеграл, его определение и свойства
3. Геометрическая интерпретация неопределенного интеграла
4. Таблица интегралов основных элементарных функций

Типовые задания

$\int(4\sin x+2\sqrt{x}-\frac{3}{x}+5^x)dx.$ $\int(\frac{3}{\sin^2 x}+e^x+3x^3-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}})dx.$ $\int\frac{cos2x}{\cos x-\sin x}dx.$

$\int(\frac{1}{1+x^2}+2^{3x}+\frac{1}{2x}+e^x)dx.$ $\int\frac{dx}{1+4x^2}.$ $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}.$ $\int\frac{dx}{x^2+2x-10}.$ $\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}.$ $\int\cos^2 4xdx.$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 6 «Замена переменной. Интегрирование по частям»

Основные вопросы

1.Замена переменной.

2.Интегрирование по частям.

Типовые задания

$\int\frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ $\int\frac{arctg^5 x}{1+x^2}dx.$ $\int\cos^5 x\sin 2xdx.$ $\int\frac{\cos xdx}{\sin^2 x+1}.$ $\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ $\int\frac{3x+4}{x^2+9}dx.$ $\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx.$

$\int\frac{\sqrt{tgx+3}}{\cos^2 x}dx.$ $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$ $\int\frac{\sin(arctgx)}{1+x^2}dx.$ $\int\sin^3 xdx.$ $\int(x+2)\sin xdx.$ $\int x^2\ln xdx.$ $\int\arcsin 2xdx.$

$\int x^2\ell^{4x}dx.$ $\int\sin(\ln x)dx.$ $\int e^{3x}\sin xdx.$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 7 «Интегрирование рациональных дробей»

Основные вопросы

1.Разложение правильной дроби на простейшие

2.Интегрирование рациональных функций.

Типовые задания

$$\int\frac{dx}{(x+1)(x-2)}\ \int\frac{dx}{(x-1)^2x}\cdot\int\frac{xdx}{(x-3)(x^2+25)}\cdot\int\frac{x^5-2x^3+4}{x^3-4x}dx\ \int\frac{2x+3}{x^2+6x+13}dx.$$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 8 «Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций»

Основные вопросы

1. Интегрирование иррациональных функций.
2. Интегрирование тригонометрических функций.

Типовые задания

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.\quad\int\frac{dx}{(5+x)\sqrt{x+1}}.\ \int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{(x-1)^3}.\ \int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx.\ \int\cos^3 x\sin^4 xdx.\ \int\frac{\cos^2 x}{1-\sin^4 x}dx$$

$$\int\frac{dx}{4\sin^2 x-7\cos^2 x}.\int\frac{dx}{5+4\sin x}\ \int(2+ctgx)^3dx.\ \int\frac{tgx}{1-ctg2x}dx\ \int\frac{\sin^7 x}{\sqrt{\cos^4 x}}dx$$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практические занятия № 9, 10 «Приложения определённого интеграла»

Основные вопросы

1. Вычисление площади криволинейной трапеции.
2. Вычисление длины дуги.
3. Вычисление объем тела вращения.
4. Экономический смысл определенного интеграла.

Типовые задания

1. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

1) $y=2x-x^2$; $y=0$; 2) $y=x^2$; $y=1$;

3) $y=\ell^x$; $y=\ell^{-x}$; $x=1$; 4) $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

2. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной данными кривыми.

1) $y=\sqrt{x}$; $y=0$; $x=4$. 2) $y=\sin 2x$; $y=0$; $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

3. Определить величину вклада через 2 года, если начальный капитал 10000 ден. ед., а проценты начисляются непрерывно по ставке 5 %.

4. Найти объем произведенной продукции за время t=5 час, если производительность труда задана функцией $f(t)=-t^2+10t$ (ед./час)

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 11 «Графический метод решения задачи линейного программирования»

Основные вопросы

1. Построение области допустимых решений.
2. Нахождение оптимального решения задачи линейного программирования.
3. Анализ найденного решения с использованием графического метода.

Типовые задания

Решить графическим методом следующие задачи линейного программирования

1. $Z = 4x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 18, \\ -x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 2x_1 - x_2 \le 10, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2. $Z = 5x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

3. $Z = -3x_1 - x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 0, \\ 2x_1 - x_2 \le 0, \\ x_1 + x_2 \le 3, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

4. $Z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ -x_1 + 2x_2 \le 3, \\ x_2 \le 3, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

3. Математика в экономике: В 2 ч.: учеб.: рек. Мин.обр.РФ/ А.С. Солодовников [и др.]. -2-е изд., перераб и доп.. –М.: Финансы и статистика. – 2003, 2005. Ч.1 .-2003.-2005.-384 с.

Практические занятия №12,13,14 «Симплекс-метод. М-метод решения задач линейного программирования. Двойственные задачи»

Основные вопросы

1. Построение симплекс-таблиц.
2. Проверка найденного плана на оптимальность.
3. Использование М-метода для решения задач.
4. Двойственные задачи.

Типовые задания

Решить следующие задачи линейного программирования, представленные в канонической форме, графическим и симплексным методами

1. $F(x) = 12x_1 + 10x_2 - 2x_3 - x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 25 \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 20 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$

2. $F(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 3 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$

3. $F(x) = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 6 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 12 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0,$

4. $F(x) = x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0,$

Двойственные задачи.

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют четыре вида ресурсов S_1, S_2, S_3 и S_4. Известны запасы ресурсов и число единиц ресурсов, затрачиваемых на производство единицы продукции (числа условные).

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на производство единицы продукции.	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	0	1
S_4	21	3	0

Прибыль, получаемая от единицы продукции P_1 и P_2 – соответственно 2 и 3 рубля. Найти такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Сформулировать экономически и математически для данной задачи двойственную. Найти решение двойственной задачи, используя основные теоремы двойственности. Провести анализ устойчивости двойственных оценок.

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.
2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.
3. Математика в экономике: В 2 ч.: учеб.: рек. Мин.обр.РФ/ А.С. Солодовников [и др.]. - 2-е изд., перераб и доп.. –М.: Финансы и статистика. – 2003, 2005. Ч.1 .-2003.-2005.-384 с.

Практическое занятие № 15 «Транспортная задача»

Основные вопросы

1. Определение типа транспортной задачи.
2. Нахождение опорного плана, оценка вырожденности задачи.
3. Проверка опорного плана на оптимальность.

Типовые задания

Требуется найти план перевозок однородного груза из пунктов A_1, A_2, A_3 и A_4, содержащих соответственно a_1, a_2, a_3 и a_4 единиц груза, в пункты B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5 в количествах b_1, b_2, b_3, b_4 и b_5 соответственно, при котором суммарные транспортные затраты будут наименьшими. Известны c_{ij} – затраты на перевозку 1 единицы груза из пункта A_i и B_j. Опорный план найти методом северо-западного угла и методом минимального элемента. Полученный план проверить на оптимальность методом потенциалов.

1. $\begin{matrix} a_i = (210,\ 250,\ 200,\ 290) \\ b_j = (150,\ 210,\ 170,\ 220,\ 200) \end{matrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 10 & 4 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 7 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{matrix} a_i = (270,\ 230,\ 250,\ 200) \\ b_j = (170,\ 210,\ 200,\ 170,\ 200) \end{matrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 12 & 10 & 8 \\ 12 & 14 & 8 & 12 & 7 \\ 5 & 10 & 8 & 9 & 6 \\ 7 & 6 & 7 & 10 & 5 \end{pmatrix}$

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/

М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

3. Математика в экономике: В 2 ч.: учеб.: рек. Мин.обр.РФ/ А.С. Солодовников [и др.]. -2-е изд., перераб и доп.. –М.: Финансы и статистика. – 2003, 2005. Ч.1 .-2003.-2005.-384 с.

Практическое занятие № 16 «Транспортная задача»

Основные вопросы

1. Составление математической модели транспортной задачи.
2. Выбор наилучшего метода для нахождения опорного плана и оценки его оптимальности.
3. Анализ полученного решения транспортной задачи.

Типовые задания

Составить математическую модель транспортной задачи. Найти опорный план, проверить его на оптимальность.

1. На трех складах имеется мука в количестве 60, 130 и 90 т, которая должна быть в течение месяца доставлена четырем хлебозаводам в количестве 30, 80, 60 и 110 т соответственно. Известна стоимость доставки 1 т муки на хлебозаводы.

Склады	Хлебозаводы			
	1	2	3	4
1	6	8	15	4
2	9	15	2	3
3	6	12	7	10

Составить оптимальный план перевозок, имеющий минимальные транспортные расходы.

2. Фирма осуществляет поставку бутылок на четыре завода, занимающиеся производством прохладительных напитков. Она имеет три склада, причем на складе 1 находится 6000 бутылок, на складе 2 – 3000 бутылок и на складе 3 – 4000 бутылок. Первому заводу требуется 4000 бутылок, второму заводу – 5000 бутылок, третьему заводу – 1000 бутылок, четвертому заводу – 3000 бутылок. Известна стоимость перевозки одной бутылки от каждого склада к каждому заводу.

Склады	Заводы			
	1	2	3	4
1	6	4	9	8
2	5	3	2	8
3	2	3	6	8

Необходимо организовать доставку бутылок на заводы, чтобы стоимость перевозки была минимальной.

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

3. Математика в экономике: В 2 ч.: учеб.: рек. Мин.обр.РФ/ А.С. Солодовников [и др.]. -2-е изд., перераб и доп.. –М.: Финансы и статистика. – 2003, 2005. Ч.1 .-2003.-2005.-384 с.

Практические занятия № 17,18 «Целочисленное программирование»

Основные вопросы

1. Построение математической модели задачи целочисленного программирования.
2. Нахождение решения задачи методом Гомори.
3. Нахождение решения задачи методом ветвей и границ

Типовые задания

Решить задачу целочисленного линейного программирования.

1. Организация арендует баржу грузоподъемностью 83 т, на которой предполагает перевозить груз, состоящий из предметов четырех типов. Веса и стоимости предметов равны соответственно 24 т, 22 т, 16 т, 10 т и 96 у. е., 85 у. е., 50 у. е., 20 у. е. Требуется погрузить на баржу груз максимальной стоимости.

2. Супружеская пара фермеров посылает трех своих сыновей на базар продать 90 яблок, для того чтобы обучить их числам и обращению с деньгами. Самый старший Джим получил для продажи 50 яблок, Билл (средний) – 30 и самый младший Джон – лишь 10. Родители поставили пять условий. I) Цена яблок должна быть равна либо $1 за 7 яблок, либо $3 за 1 яблоко. 2) Каждый ребенок может использовать один или оба варианта цен. 3) Все дети должны вернуться с одинаковой суммой денег. 4) Каждый ребенок приносит домой сумму, которая является четным числом (без центов). 5) Сумма денег, полученная каждым из детей, должна быть максимальной при сформулированных условиях. Считается, что дети могут продать все яблоки, которые они имеют. Как дети могут выполнить требования своих родителей?

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

3. Математика в экономике: В 2 ч.: учеб.: рек. Мин.обр.РФ/ А.С. Солодовников [и др.]. -2-е изд., перераб и доп.. –М.: Финансы и статистика. – 2003, 2005. Ч.1 .-2003.-2005.-384 с.

3 семестр

Практические занятия № 1-3 «Элементы комбинаторики. Теоремы сложения и умножения вероятностей»

Основные вопросы

1. Элементы комбинаторики.
2. Классическая вероятность.
3. Геометрическая вероятность.
4. Теоремы сложения вероятностей.
5. Теоремы умножения вероятностей.
6. Вероятность появления хотя бы одного события.

Типовые задания

1. Сколько различных пятизначных цифр можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6

а) цифры могут повторяться;

б) цифры не повторяются?

2. На окружности выбрано 7 точек, сколько можно построить треугольников с вершинами в этих точках?
3. Из 10 различных книг выбирают 4 для посылки. Сколькими способами это можно сделать?
4. Сколько различных восьмибуквенных «слов» можно получить переставляя буквы в слове ПАРАГРАФ?
5. В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить в нём 12 открыток?
6. Монета подброшена 2 раза. Какова вероятность того, что оба раза выпадет герб?
7. В некоторой точке С провода длиной 20 м. произошёл разрыв. Определить вероятность того, что С удалена от левого кон6ца на расстояние не меньшее 4 м.
8. Точка взята наудачу внутри круга с радиусом 50 см. Найти вероятность того, что эта точка окажется от центра на расстоянии меньшем 20 см.

9. Студент разыскивает нужную ему формулу в 3 справочниках. Вероятность того, что формула содержится в 1,2 и 3 справочнике соответственно равна 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что формула содержится : а) только в 1 справочнике; б) только в 2 справочниках; в) во всех 3 справочниках; г) ни в одном справочнике.
10. В электрическую цепь параллельно включены 2 элемента. Вероятности отказов первого и второго из них соответственно равны: p_1=0,3 ;p_2=0,6. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.
11. Вероятность для компании занимающейся строительством терминалов для аэропортов, получить контракт в стране А равна 0,4 , в стране В 0,3 . Чему равна вероятность того, что компания получит контракт хотя бы в одной стране?
12. Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из центрального круга и двух концентрических колец. Вероятности попадания в круг и в кольца соответственно равны 0.2, 0.15 и 0.1. Найти вероятность попадания в мишень.
13. В мешочке смешаны нити, среди которых 30 % белых, а остальные красные. Найти вероятность того, что вынутые наудачу две нити будут: а) одного цвета; б) разных цветов?

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

Практические занятия № 4-6 «Формулы полной вероятности и Байеса. Повторные независимые испытания»

Основные вопросы

1. Формула полной вероятности.
2. Формула Байеса.
3. Повторные независимые испытания.
4. Интегральная теорема теорема Муавра-Лапласа.

Типовые задания

1. В двух урнах находятся белые и красные шары: в первой — 4 белых и 5 красных, во второй — 7 белых и 3 красных. Из второй урны наудачу взяли шар и переложили его в первую урну. Найти вероятность того, что наудачу взятый после этого из первой урны шар будет белым.
2. В двух ящиках находятся детали: в первом — 10 штук и из них 3 нестандартные, а во втором — 20 штук и из них 8 нестандартных. Из каждого ящика наудачу вынуто по одной детали, а потом из этих двух деталей наудачу взята одна. Найти вероятность того, что эта деталь окажется стандартной.
3. Вероятность изготовления изделия с браком равна 0,08. После изготовления все изделия подвергаются проверке, в результате которой изделия без брака признаются годными с вероятностью 0,95, а изделия с браком — с вероятностью 0,06. Найти долю изделий, выпущенных после проверки, а также вероятность того, что выпущенное после проверки изделие окажется без брака.
4. В среднем из каждых 100 клиентов отделения банка 60 обслуживаются первым операционистом и 40 — вторым операционистом. Вероятность того, что клиент будет обслужен без помощи заведующего отделением, только самим операционистом, составляет 0,9 и 0,75 соответственно для первого и второго служащих банка. Найти вероятность полного обслуживания клиента первым операционистом.
5. Монету бросают 6 раз. Найти вероятности того, что герб выпадет: 1) 2 раза, 2) не менее двух раз.
6. Вероятность выпуска бракованного изделия равна 0,3. Найти вероятность того, что среди 100 выпущенных изделий будет ровно 60 изделий без брака.

7. Вероятность выпуска бракованных деталей равна 0,3. Найти вероятность того, что среди 100 выпущенных деталей будет не менее 75 стандартных.

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

Практические занятия № 7, 8 «Случайные величины. Числовые характеристики случайных величин»

Основные вопросы

1. Случайные величины.
2. Функция распределения.
3. Числовые характеристики случайных величин.

Типовые задания

1. В денежной лотерее на 100 билетов разыгрывается один выигрыш в 20 р., два выигрыша по 10 р. и 10 выигрышей по 1 р. Найти закон распределения случайной величины X возможного выигрыша на один билет.
2. Партия из 8 изделий содержит 5 стандартных. Наудачу отбираются 3 изделия. Составить таблицу закона распределения числа стандартных изделий среди отобранных.
3. Вероятностный прогноз для величины X — процентного изменения стоимости акций по отношению к их текущему курсу в течение шести месяцев — дан в виде закона распределения:

X	5	10	15	20	25	30
P	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1.

Найти вероятность того, что покупка акций будет более выгодна, чем помещение денег на банковский депозит под 36% годовых.

4. Пусть ежедневные расходы на обслуживание и рекламу автомобилей в некотором автосалоне составляют в среднем 100 тыс. р., а число продаж X автомашин в течение дня подчиняется следующему закону распределения:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	0,25	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,025	0,025.

Найти математическое ожидание ежедневной прибыли при цене на машину 150 тыс. р.

5. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной следующим распределением:

X	−5	2	3	4	6
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1.

6. Законы распределения независимых случайных величин X и Y приведены соответственно в таблицах:

X	−2	0	1	3	4
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1;

Y	2	4	6	8
p	0,2	0,4	0,3	0,1.

Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z = 2X + 3Y$.

7. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ \sin x, \quad 0 < & x \leqslant \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения X.

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

Практическое занятие № 9-11 «Основные законы распределения случайных величин»

Основные вопросы

1. Биноминальное распределение и его характеристики.
2. Распределение Пуассона и его характеристики.
3. Нормальное распределение и его характеристики.
4. Показательное распределение и его характеристики.
5. Равномерное распределение и его характеристики.

Типовые задания

1. Банк выдает 5 кредитов. Вероятность невозврата кредита равна 0,2 для каждого из заемщиков. Составить таблицу закона распределения количества заемщиков, не вернувших кредит по окончании срока кредитования.
2. Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого имеет показательное распределение $F_1(t)=1-e^{-0,02t}$, второго $F_2(t)=1-e^{-0,05t}$. Найдите вероятность того, что за время t=6ч. один элемент откажет.
3. Книга издана тиражом 100 тысяч экземпляров. Вероятность брака в книге равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.
4. Размер мужских сорочек является случайной величиной с нормальным законом распределения, математическим ожиданием 39 и дисперсией 9. Какой процент от общего объема заказа следует предусмотреть магазину для сорочек 40-го размера воротничка при условии, что этот размер находится в интервале (39,5; 40,5)?
5. Ребро куба x измерено приближенно в интервале *(a, b).* Найти математическое ожидание и дисперсию объема куба, если его ребро рассматривать как случайную величину X с равномерным распределением на указанном интервале.

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

Практическое занятие № 12 «Закон больших чисел»

Основные вопросы

1. Закон больших чисел.
2. Неравенства Чебышева.
3. Теорема Чебышева.
4. Теорема Бернулли.

Типовые задания

1. Вероятность всхожести некоторой культуры равна 0,75. Оценить вероятность того, что из посеянных 1000 семян число взошедших окажется от 700 до 800 включительно.
2. В целях контроля из партии в 100 ящиков взяли по одной детали из каждого ящика и измерили их длину. Оцените вероятность того, что вычисленная по данным выборки средняя длина детали отличается от средней длины детали во всей партии не более чем на 0,3мм, если известно, что среднее квадратическое отклонение не превышает 0,8мм.
3. Оценить вероятность того, что абсолютная величина отклонения среднего роста 1000 мужчин от математического ожидания случайной величины, выражающей рост каж-

дого мужчины, не превзойдёт 0, 5 см, полагая, что среднее квадратичное отклонение каждой из этих случайных величин не превышает 2,5 см.

4. В среднем 10% работоспособного населения некоторого города- безработные. Оцените вероятность того, что уровень безработицы среди обследованных 10000 работоспособных жителей города будет в пределах от 9% до 11%(включительно).
5. Игральный кубик подбрасывают 10000 раз. Оценить вероятность отклонения частоты появления шести очков от вероятности появления того же числа очков меньше чем на 0,01.

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.
2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

Практические занятия № 13,14 «Статистические оценки параметров распределения»

Основные вопросы

1. Постановка задачи проверки гипотез.
2. Критерий оценки и его мощность.
3. Критическая область и область принятия гипотезы.
4. Проверка гипотез о значениях параметров нормального распределения.
5. Статистические оценки параметров распределения.

Типовые задания

1. Найти несмещенные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии, если по результатам выборочных наблюдений получено следующее распределение

x_i - x_{i+1}	0 – 8	8 – 16	16 – 24	24 – 32	32 – 40
n_i	5	15	20	10	7

2. Найти интервальную оценку с доверительной вероятностью 0,95 для неизвестного математического ожидания нормально распределенной случайной величины X, если известны: генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=4$; выборочная средняя $\overline{x}_{\hat{A}}$ = 30; объем выборки n = 25.

3. В банке в течение двух дней проводилось исследование времени обслуживания клиентов. Известно, что m_x =17,8, m_y =17,6, $n_1=n_2$ =55. Можно ли считать одинаковыми отклонения от среднего времени обслуживания клиентов банка в 1-й и во 2-й дни при α = 0,01?

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.
2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

Практические занятия № 15, 16 «Проверка статистических гипотез»

Основные вопросы

1. Критерий Пирсона.
2. Критерий Колмогорова.

Типовые задания

1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,01, установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами n_i и теоретическими частотами n_i' , вычисленными исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокуп-

ности X:

n_i	8	16	40	72	36	18	10
n'_i	6	18	36	76	39	18	7

2. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05, проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности X, если выборочное распределение из этой совокупности имеет следующий вид;

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

Указание: при определении выборочной средней и выборочного среднего квадратического отклонения использовать метод произведений.

3. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05, проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности X, если выборочное распределение из этой совокупности имеет следующий вид;

x_i - x_{i+1}	(–20) – (–10)	(–10) – 0	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
n_i	20	47	80	89	40	16	8

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

Практические занятия № 17,18 «Корреляционный и регрессионный анализ»

Основные вопросы

1. Функциональные и корреляционные зависимости случайных величин.
2. Линейная и нелинейная регрессия. Составление уравнений прямых регрессий.
3. Статистическая оценка коэффициента корреляции и ее свойства.

Типовые задания

1. В результате анкетного обследования для выявления важнейших видов оборудования, используемого судоводителями во время вахты, получены два ряда ранговых оценок: «по важности» оборудования и «по частоте» его использования.

Важность	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Частота	1	4	2	6	3	5	12	9	15	7	11	8	10	14	17	13	16	18	19

Взаимосвязаны ли эти ряды?

2. Зависимость между величинами выражается в виде экспериментально полученной таблицы. Определить уравнение регрессии. Сделать выводы.

X	0,5	1	1,5	2	2,5	3
У	0,01	0,11	0,35	0,6	1,58	2,31

Литература

1. . Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Креме-

ра.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

5 семестр

Практическое занятие № 1 «Элементы теории случайных процессов»

Основные вопросы

1. Простейший поток и его свойства.
2. Система дифференциальных уравнений для потока и её решение.
3. Системы массового обслуживания с Марковскими потоками состояний.

Типовые задания

1. Поток машин, идущих по шоссе в одном направлении, представляет собой простейший поток с интенсивностью 2 машины в минуту. Человек выходит на шоссе, чтобы остановить первую попавшуюся машину, идущую в данном направлении. Найти закон распределения времени Т, в течение которого ему придётся ждать машину; определить математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение.

2. По заданной матрице перехода построить граф состояний.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0 & 0,7 \\ 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

3. Задана матрица Λ интенсивностей переходов непрерывной цепи Маркова. Составить размеченный граф состояний, соответствующий матрице Λ; составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний; найти предельное распределение вероятностей.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

Практические занятия № 2, 3 « Простейшие системы массового обслуживания»

Основные вопросы

1. СМО с отказами.
2. СМО с неограниченным ожиданием.
3. СМО с ожиданием и с ограниченной длиной очереди.

Типовые задания

1. На вокзале в мастерской бытового обслуживания работают три мастера. Если клиент заходит в мастерскую, когда все мастера заняты, то он уходит из мастерской, не ожидая обслуживания. Среднее число клиентов, обращающихся в мастерскую за 1 ч, равно 20. Среднее время, которое затрачивает мастер на обслуживание одного клиента, равно 6 мин.

2. В порту имеется один причал для разгрузки судов. Интенсивность потока судов равна 0,4 (судов в сутки). Среднее время разгрузки одного судна составляет 2 суток. Предполагается, что очередь может быть неограниченной длины. Найти показатели эффективности работы причала, а также вероятность того, что ожидают разгрузки не более чем два судна.

3. По условию предыдущей задачи найти показатели эффективности работы причала. Известно, что приходящее судно покидает причал (без разгрузки), если в очереди на разгрузку стоит более 3 судов.

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/

М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

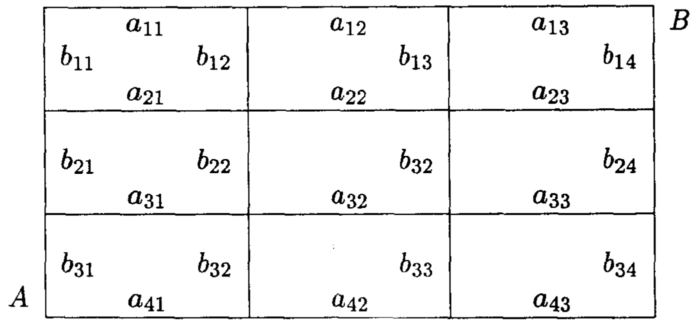
Практическое занятие № 4 «Динамическое программирование»

Основные вопросы

1. Нахождение рациональных затрат при строительстве трубопроводов и транспортных артерий.

Типовые задания

1. Требуется проложить трубопровод на дачном массиве между двумя пунктами *A* и *B* таким образом, чтобы затраты на проведение работ (в тыс. р.) были минимальные.



Значения коэффициентов условия задачи

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{41}	a_{42}	a_{43}
7	6	5	7	3	2	4	6	1	4	8	2

b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{24}	b_{31}	b_{32}	b_{33}	b_{34}
8	2	5	6	3	5	9	4	3	9	2	5

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

Практическое занятие № 5 «Динамическое программирование»

Основные вопросы

1. Оптимальное распределение ресурсов.
2. Минимизация затрат на строительство и эксплуатацию предприятий.

Типовые задания

1. Совет директоров фирмы рассматривает предложения по наращиванию производственных мощностей для увеличения выпуска однородной продукции на четырех предприятиях, принадлежащих фирме.

Для модернизации предприятий совет директоров инвестирует средства в объеме 250 млн р. с дискретностью 50 млн р. Прирост выпуска продукции зависит от выделенной суммы, его значения представлены предприятиями и содержатся в таблице.

Найти распределение инвестиций между предприятиями, обеспечивающее фирме максимальный прирост выпуска продукции, причем на одно предприятие можно осуществить только одну инвестицию.

Инвестиции, млн. р.	Прирост выпуска продукции, млн р.			
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3	Предприятие 4
50	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
100	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
150	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
200	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
250	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}

Значения коэффициентов условия задачи

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
5	7	6	4	9	10	8	11	21	20	21	19	33	34	32	35

a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}
38	39	40	41

2. . В трех районах города предприниматель планирует строительство пользующихся спросом одинаковых по площади мини-магазинов "Продукты". Известны места, в которых их можно построить. Подсчитаны затраты на их строительство и эксплуатацию.

Необходимо так разместить мини-магазины, чтобы затраты на их строительство и эксплуатацию были минимальные.

x	1	2	3	4
$g_1(x)$	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
$g_2(x)$	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
$g_3(x)$	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}

Значения коэффициентов условия задачи

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
5	9	16	21	6	11	17	20	4	8	15	19

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

Практическое занятие № 6 « Элементы теории игр»

Основные вопросы

1. Оптимальность в антагонистических играх.
2. Принцип максимина. Нижнее значение игры. Принцип минимакса. Верхнее значение игры.
3. Ситуация равновесия в чистых стратегиях. Седловая точка. Значение игры.
4. Смешанные стратегии.
5. Решение игры “2*2”, графический метод решения игры “2*2”.
6. Графоаналитический метод решение игр “2*n”, “m*2”.
7. Способы редуцирования игр “m*n”.
8. Доминирование стратегий.

Типовые задания

1. Найти седловую точку и значение игры для каждой из двух следующих игр с платежными матрицами:

$$A=\begin{pmatrix}8&6&2&8\\8&9&4&5\\7&5&3&5\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}10&3&7&4\\13&15&9&16\\14&13&6&4\\9&10&8&7\end{pmatrix}.$$

2. Определите области значений x, для которых стратегии A_2, B_2 будут оптимальными в играх с платёжными матрицами:

$$A=\begin{pmatrix}1&4&6\\5&x&9\\7&3&4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2&4&5\\10&x&6\\4&8&3\end{pmatrix}.$$

3. Определите, будут ли значения следующих игр больше, меньше или равны нулю:

$$A=\begin{pmatrix}2&10&5&0\\3&4&9&6\\-5&3&-2&-4\\8&5&-3&-5\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}4&8&-2&-3\\5&9&1&0\\5&-8&-3&5\end{pmatrix}.$$

4. Найти решение игры заданной матрицей:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}5&6&4&3\\4&5&3&7\end{pmatrix};\ 2)\ B=\begin{pmatrix}6&4\\5&3\\1&7\\2&3\end{pmatrix}.$$

5. Решите игру с платёжной матрицей:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2&1&3\\4&-1&-2\\1&0&-3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3&1&2\\2&4&-1\\5&7&6\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}5&4&7&7\\5&4&5&6\\6&8&9&9\\10&7&8&10\end{pmatrix}.$$

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

Практическое занятие № 7 « Элементы теории игр»

Основные вопросы

1. Игры с природой.
2. Критерии выбора оптимальной стратегии Лапласа, Вальда, Гурвица, Сэвиджа.

Типовые задания

1. Фирма производит пользующиеся спросом детские платья и костюмы, реализация которых зависит от состояния погоды. Затраты фирмы в течение апреля- мая на единицу продукции составят: платья −12 ден. ед. костюмы −23 ден. ед. Цена реализации составит 18 ден. ед. и 29 ден. ед. соответственно. По данным наблюдений за несколько предыдущих лет, фирма может реализовать в условиях теплой погоды 1550 шт. платьев и 440шт. костюмов, при холодной погоде 620 шт. платьев и 990 шт. костюмов.

2. Определите тип электростанции, которую необходимо построить для удовлетворения энергетических потребностей комплекса крупных промышленных предприятий. Множество

возможных стратегий в задаче включает следующие параметры:

R_1 - сооружается гидростанция;

R_2 - сооружается теплостанция;

R_3 - сооружается атомная станция.

Экономическая эффективность сооружения электростанции зависит от влияния случайных факторов, образующих множество состояний природы S_i (i= 1,5).

Результаты расчета экономической эффективности приведены в следующей таблице:

Вариант 1.

Тип станции	Состояние природы				
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
R_1	40	60	30	25	45
R_2	55	50	65	60	30
R_3	50	30	40	35	60

Вариант 2.

Тип станции	Состояние природы				
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
R_1	40	40	60	25	45
R_2	20	50	45	20	30
R_3	50	30	40	35	50

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

Практическое занятие № 8 « Сетевые модели»

Основные вопросы

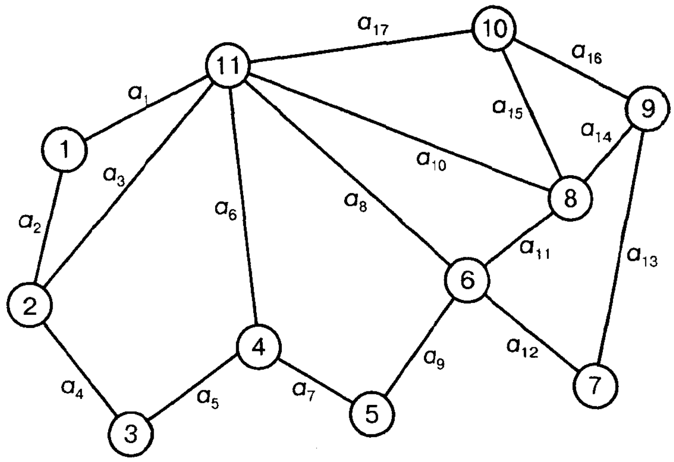
1. Построение сетевой модели.

Типовые задания

1. Районной администрацией принято решение о газификации одного из небольших сел района, имеющего 10 жилых домов.

Расположение домов указано на рис. Числа в кружках обозначают условный номер дома. Узел 11 является газопонижающей станцией.

Разработать такой план газификации села, чтобы общая длина трубопроводов была наименьшей.



Значения коэффициентов условия задачи

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}
240	40	300	180	110	370	90	400	160	470	190	40	110	40	50	50	610

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Креме-

ра.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

3. Математика в экономике: В 2 ч.: учеб.: рек. Мин.обр.РФ/ А.С. Солодовников [и др.]. - 2-е изд., перераб и доп.. –М.: Финансы и статистика. – 2003, 2005. Ч.1 .-2003.-2005.-384 с.

Практическое занятие № 9 « Сетевые модели»

Основные вопросы

1. Составление сетевых графиков.
2. Расчет временных параметров событий.
3. Вычисление временных параметров работ.

Типовые задания

1. Составить сетевой график выполнения работ и рассчитать временные параметры по данным, представленным в таблице.

Содержание работы	Обозначение	Предыдущая работа	Продолжительность, дн.
Исходные данные на изделие	a_1		t_1
Заказ комплектующих деталей	a_2	a_1	t_2
Выпуск документации	a_3	a_1	t_3
Изготовление деталей	a_4	a_3	t_4
Поставка комплектующих деталей	a_5	a_2	t_5
Сборка изделия	a_6	a_4, a_5	t_6
Выпуск документации на испытание	a_7	a_3	t_7
Испытание и приемка изделия	a_8	a_6, a_7	t_8

Значения коэффициентов условия задачи

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
30	7	15	35	25	13	12	14

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учеб-но-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

3. Математика в экономике: В 2 ч.: учеб.: рек. Мин.обр.РФ/ А.С. Солодовников [и др.]. - 2-е изд., перераб и доп.. –М.: Финансы и статистика. – 2003, 2005. Ч.1 .-2003.-2005.-384 с.

4. Методические указания по самостоятельной работе студентов

Самостоятельная работа студентов предназначена для углубления сформированных знаний, умений, навыков. Самостоятельная работа развивает мышление, позволяет выявить причинно-следственные связи в изученном материале, решить теоретические и практические задачи. Самостоятельная работа студентов проводится с целью: систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов; углубления и расширения теоретических знаний; формирования умений использовать справочную документацию и специальную литературу; развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;-формированию самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;- развития исследовательских умений. Роль самостоятельной работы возрастает, т.к. перед учебным заведением стоит задача в т. ч. и по формированию у студента потребности к самообразованию и самостоятельной познавательной деятельности

1. Виды и формы самостоятельных работ по дисциплине «Математика».

Студентами практикуется два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию. В этом случае студенты обеспечиваются преподавателем необходимой учебной литературой, дидактическим материалом, в т. ч. методическими пособиями и методическими разработками.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия. Видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы могут быть: - для овладения знаниями: чтение текста (учебника, методической литературы); составления плана текста; графическое изображение структуры текста, графическое изображение последовательности выполнения графической работы, выполнение графических работ; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочниками; ознакомление с нормативными документами; учебно-исследовательская работа; использование компьютерной техники, интернета и др.; для закрепления систематизации знаний: работа с конспектом лекции (обработки текста); повторная работа над учебным материалом (учебника, первоисточника, дополнительной литературы); составление плана выполнения работы в соответствие с планом, предложенным преподавателем; изучение ГОСТов; ответы на контрольные вопросы; тестирование, выполнение упражнений и графических работ; для формирования умений: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; выполнение чертежей, схем.

Общая схема самостоятельной работы представлена в пункте 6 рабочей программы.

Основное содержание самостоятельной работы составляет выполнение домашних заданий, расчетно-графических работ и подготовку к экзамену (зачету).

Прежде чем приступать к выполнению РГР, необходимо ознакомиться с содержанием теоретических вопросов по представленному списку литературы и по лекциям.

Работа пишется на стандартных листах писчей бумаги. Все листы заполняются только с одной стороны. Оформление расчетно-графической работы осуществляется в соответствии со стандартом. Каждая РГР начинается с титульного листа, который служит обложкой работы. Сверху на нем указывается принадлежность студента к учебному заведению, факультету, специализации или кафедре. В середине листа указывается название изучаемой темы или раздела и название учебного задания, номер варианта. Ниже и справа указывается фамилия и инициалы студента, номер академической группы, фамилия и инициалы преподавателя. Внизу титульного листа отмечают год выполнения работы.

Эта страница служит также для отметок преподавателя о выполнении учебного задания и замечаний по поводу подготовленного студентом отчета.

При оформлении работы необходимо соблюдать нумерацию заданий. Задание переписывается полностью и ниже оформляется решение. Работа должна быть сдана на кафедру к назначенному преподавателем сроку.

Каждый учебный семестр заканчивается аттестационными испытаниями: зачетно - экзаменационной сессией.

Подготовка к экзаменационной сессии и сдача зачетов и экзаменов является ответственейшим периодом в работе студента. Серьезно подготовиться к сессии и успешно сдать все экзамены - долг каждого студента. Рекомендуется так организовать свою учебу, чтобы перед первым днем начала сессии были сданы и защищены все лабораторные работы, сданы все зачеты, выполнены другие работы, предусмотренные графиком учебного процесса.

Основное в подготовке к сессии - это повторение всего материала, курса или предмета, по которому необходимо сдавать экзамен. Только тот успевает, кто хорошо усвоил учебный материал.

Если студент плохо работал в семестре, пропускал лекции, слушал их невнимательно, не конспектировал, не изучал рекомендованную литературу, то в процессе подготовки к сессии ему придется не повторять уже знакомое, а заново в короткий срок изучать весь материал. А это зачастую, оказывается, невозможно сделать из-за нехватки времени. Для такого студента подготовка к экзаменам будет трудным, а иногда и непосильным делом, а финиш - отчисление из учебного заведения.

В дни подготовки к экзаменам избегай чрезмерной перегрузки умственной работой, чередуй труд и отдых.

IV КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

1. Текущий контроль знаний

При подготовке к контрольным мероприятиям по освоению модуля рекомендуется использовать примерные варианты контрольных работ, приведённые в рабочей программе (пункт 9). Примерные варианты расчетно-графических работ приведены ниже.

I семестр

РГР №1 «Аналитическая геометрия с элементами анализа».

Задание №1. Найти множества значений x, удовлетворяющих следующим условиям. Изобразить эти множества геометрически:

1) $|x| \geq 3$; 2) $|x-2| \leq 3$; 3) $|x-4| = |x+4|$.

Задание №2. Найти область определения функции и изобразить ее на чертеже.

1) $f(x) = \log_3(3x-4) + \lg(3-x)$; 2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+12-x^2}}{x^2-9} + \lg(x-2)$.

Задание №3. Построить графики функций и сформулировать их основные свойства.

1) 2^x; 2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$; 3) $\log_3 x$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} x$; 5) x^3.

Задание №4. С помощью преобразования графика подходящей элементарной функции построить график функции $f(x)$.

1) $\dfrac{1}{|x|}$; 2) $\dfrac{2x-4}{x+3}$; 3) $2x^2+3x+4$.

Задание №5. Построить линии. 1) $y = \sqrt{9-x^2}$; 2) $y = -3 - \dfrac{1}{3}\sqrt{8+2x-x^2}$;

3) $y = \dfrac{3}{4}\sqrt{x^2-16}$; 4) $x - 4y^2 - 8 = 0$.

Задание №6. Построить графики зависимостей величины спроса $\boldsymbol{X}$ от дохода $\boldsymbol{J}$ (функции Торнквиста) на:

а) товары первой необходимости $X = \dfrac{a_1 J}{J + c_1}$, где $J \geq 0$;

б) товары второй необходимости $X = \dfrac{a_2(J-b_2)}{J+c_2}$, где $J \geq b_2$;

в) товары роскоши $X = \dfrac{a_3 J(J-b_3)}{J+c_3}$, где $J \geq b_3$.

a_1	c_1	a_2	b_2	c_2	a_3	b_3	c_3
2	2	3	4	2	2	6	2

Задание №7. Построить графики функций, описывающих зависимости:

а) спроса от цены товара $D = KP^a + C$;

б) предложения от цены товара $S = P^b + d$;

в) охарактеризовать эти графики.

K	a	c	b	d
2	$-\dfrac{1}{2}$	1	$\dfrac{9}{5}$	0,5

Задание №8. Издержки перевозки двумя видами транспорта выражаются функциями $y_1 = a_1 x + b_1$; $y_2 = a_2 x + b_2$, где x - расстояние в сотнях километров, y_1, y_2 - соответствующие транспортные расходы.

Необходимо: построить графики функций; произвести экономический анализ; рассчитать транспортные расходы при $x = x_0$.

a_1	b_1	a_2	b_2	x_0
40	120	35	140	600

Задание №9. Даны вершины треугольника АВС.

Найти: длину стороны BC; уравнение высоты из вершины A и ее длину; уравнение медианы из вершины A; записать уравнение прямой, проходящей через вершину A; построить чертеж.

A(-2;10); B(5;8); C(4;0).

Задание №10. Для функций спроса D(p) и предложения S(P) найти равновесную цену, если $D(p)=3\cdot 2^{-p}$ *и* $S(p)=2^{p}+2$

Задание №11.Построить поверхности:

1) $2x-3y-z=0$; 2) $2x-3y-z=0$; 3) $y^2-4z-5=0$;

4) $y^2-4z^2+8x^2+8=0$; 5) $y^2+4z^2-x^2=0$.

Задание №12. Построить тело, ограниченное поверхностями:

1) $z=x^2+y^2+1$, *x=3, y=3, x=0, y=0, z=0.*

2) *z=0, z=0, y=0, y=4,* $x=\sqrt{25-y^2}$.

3) $z=y^2$, *2x+y=6, x=0, z=0.*

Задание №13. Найти пределы числовых последовательностей с заданным общим числом: а) $\frac{2n-3}{n^2+1}$; б) $\frac{n}{\sqrt{n^2+4}}$; в) $\left(\frac{n^3}{n^2+1}-\frac{3n^2}{3n-1}\right)$; г) $\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+1}\right)$.Задание №14. Найти пределы функции:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$.

Задание №15. Первоначальный вклад, положенный в банк под ***P%*** годовых, составил ***a*** млн. рублей. Найти размер вклада через ***b*** лет при начислении процентов:

а) ежегодном; б) поквартальном; в) ежемесячном г) непрерывно

P=3; a=4; b=2

Задание №16. Доказать непрерывность функции и построить её график:

а) $y=2^{x-2}$; б) $y=\begin{cases}2x+3, & x\le 0,\\ 5-5x, & x>0.\end{cases}$ в) $y=\left|4x-x^2\right|$.

Задание №17. Найти точки разрыва функций и определить их тип. Построить чертёж.

а) $y=\frac{x+3}{x-4}$; б) $y=3^{\frac{1}{x-1}}$; в) $y=\frac{9x^2-16}{3x+4}$; г) $y=\begin{cases}x+1, & x\le 0,\\ -x-1, & x>0.\end{cases}$

РГР №2 «Приложение производной функции одной переменной»

Задание 1. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой, *f*(x)=$\frac{-x^3}{6}+x^2-2x-3$; параллельно прямой $3x+6y-2=0$

Задание 2. Зависимость издержек производства *C* от объема выпускаемой продукции *q* выражается формулой $C=40q+0{,}02q^3$, где *A* и *B* – известные величины. Определить средние и предельные издержки производства при объеме продукции 10.

Задание 3. Зависимость между себестоимостью продукции *C* и объемом ее производства *q* выражается формулой $\tilde{N}=40-0{,}2q$. Требуется определить коэффициент эластичности при выпуске продукции 20 (ден. ед.). (Вычислять либо в обыкновенных дробях, либо с точностью до 0,1.)

Задание 4. Зависимость спроса *q* от цены *p* описывается формулой

$q = 20e^{-0.02p^2}$. Найти, при каких значениях цены спрос будет эластичным.

Задание 5. Опытным путем установлены функции спроса $q = \frac{P+11}{P+4}$ и предложения $S = P + 0{,}5$, где q и S - количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, P - цена товара. Найти:1) равновесную цену; 2) эластичность спроса и предложения;

3) изменение дохода при изменении цены на 5 %.

Задание 6. Объём продукции *q*, произведённый бригадой рабочих, может быть описан уравнением $q = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 90t + 50$ (ед.), $0 \le t \le 8$ где *t* – рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп её изменения через *1* часов после начала смены и за *2* часов до её окончания.

Задание 7. Пусть функция дохода $R(q) = 24q - 2q^2$, а функция затрат $C(q) = q^2 - 3$. Каким должен быть налог *t* с единицы выпускаемой продукции, чтобы величина суммарного налога *T* со всей продукции была наибольшей?

Задание 8. Определить изменение ставки процента *r=r(t)*, если дана величина вклада в момент времени *t*: $K(t) = K_0(t+1)^{r_0}$, где *t* – число лет от открытия вклада, K_0 – величина вклада в начальный момент времени *t=0*, r_0 (%) – номинальная ставка за год. Найти сумму процента через t_1 и t_2 лет.

K_0	r_0	t_1	t_2
10000	15	2	5

Задание 9. Капитал в *1* миллионов ден. ед. может быть размещён в банке под *30* % годовых или инвестирован в производство, причём эффективность вложения в размере *100* %, а издержки задаются квадратичной зависимостью $c = ax^2$. Прибыль облагается налогом в *p* %. При каких значениях *p* вложение в производство является более эффективным, чем размещение в банке.

Задание 10. Найти пределы функции, используя правило Лопиталя.

$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$,	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{3x}+5}{6x^2+1}$,
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-2}{x^2-x}$,	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{4x}-2}{\sin x}$,
$\lim\limits_{x\to 0} x\,ctg 2x$,	$\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$,
$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2} - ctg^2 x)$,	$\lim\limits_{x\to 0}(1-6x)^{\frac{1}{x}}$.

Задание 11. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $9\sqrt{2}$. Каковы должны быть катеты, чтобы периметр был наибольшим?

Задание 12. Исследовать функции и построить их графики.

$y = x^3 + 3x + 2$	$y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$	$y = ln(x^2 + x - 2)$

Задание 13. Известно, что зависимость издержек и дохода от объёма производства определяется функциями: $C(q) = 18q - 8q^2 + q^3$ и $R(q) = 8q - q^2$ где q – объём производства,

$C(q)$ - издержки, $R(q)$ - доход. Найти зависимость прибыли $\Pi(q)$ от объёма производства.

1. Построить графики функций прибыли производства.
2. Найти объёмы производства при которых:

а) прибыль равна нулю;б) прибыль максимальна;в) убытки максимальны

3. Найти значения максимальных убытков и прибыли.
4. Найти средние значения прибыли при объёме производства q = 1,5 ед.
5. Найти предельные значения прибыли при объёме производства q = 2,5 ед.

При необходимости результат округлить до 0,01

II семестр
РГР № 1 «Линейная алгебра»

1. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ -1 & 2 & -4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$. Найти матрицу D = (3A - 4B)C.

2. Вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 7 & 1\\ 4 & 1 & 2 & -1\\ -3 & 0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 3\end{vmatrix}$.

3. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}2 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}6 & 10\\ 7 & 21\end{pmatrix}$.

4. Найти такие значения параметров p и q, если они существуют, при которых ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -4 & 3\\ 1 & -3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & p & -1\\ 0 & -5 & 6 & q\end{pmatrix}$ равен двум.

5. Относительно канонического базиса в R_3 дано четыре вектора $\vec{f}_1$ =(l,-l,-l), $\vec{f}_2$ =(1,1,-1), $\vec{f}_3$ =(1,1,1), $\vec{x}$ =(4,0,-2). Доказать, что векторы $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ можно принять за новый базис в R_3. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в новом базисе.

6. Доказать, что система $\begin{cases}x_1+x_2-7x_3-x_4=6,\\ 4x_1+x_2+2x_3-x_4=0,\\ 3x_1-4x_3-x_4=6,\\ x_1+x_2+3x_4=3\end{cases}$ имеет единственное решение. Неизвестное x_4 найти по формулам Крамера. Решить систему методом Гаусса.

7. Дана система линейных уравнений $\begin{cases}x_1+5x_2-x_3+x_4+x_5=-3,\\ 3x_1+x_2+3x_3+3x_4-3x_5=-3,\\ -x_1+x_3-x_4+3x_5=2,\\ -x_1+2x_2-2x_3-x_4+2x_5=0.\end{cases}$

Доказать, что система совместна. Найти её общее решение. Найти частное решение, если x_4 = -8, x_5 = -4.

8. Линейный оператор A действует в $R_3 \to R_3$ по закону $A\vec{x}$ = ($4x_1 - 5x_2 + 2x_3$, $5x_1 - 7x_2 + 3x_3$, $6x_1 - 9x_2 + 4x_3$). Найти матрицу A этого оператора в каноническом базисе. Доказать, что

вектор $\vec{x}$ =(1,1,1) является собственным для матрицы A. Найти собственное число λ_o, соответствующее вектору $\vec{x}$. Найти другие собственные числа, отличные от λ_o. Найти все собственные векторы матрицы A.

РГР № 2 «Интегральное исчисление»

1) Вычислить неопределенные интегралы:

$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$	$\int \ell^{2x^2+3} x dx$	$\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$
$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x+5}}{x}dx$	$\int x\sin x^2 dx$	$\int \frac{4x^5 dx}{\sqrt{x^6}+7}$
$\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx$	$\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$	$\int \frac{x^3}{4+5x^4}dx$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$	$\int \ell^{4x}\sin \ell^{4x}dx$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+tgx}}$
$\int \frac{x^3}{x-4}dx$	$\int \frac{x-2}{x+1}dx$	$\int \frac{dx}{2x^2+4x+6}$
$\int \arcsin 2x dx$	$\int x\ln x dx$	$\int x\cos x dx$
$\int (x^2+3)\ell^{3x}dx$	$\int arctgx dx$	$\int \frac{x}{\ell^{2x}}dx$
$\int \frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}-1}dx$	$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-9}dx$	$\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x}}dx$
$\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+4)}$	$\int \frac{x^2-1}{x^3-4x}dx$	$\int \frac{dx}{(x^2+x)(x-2)}$
$\int \sin^2 x\cos^3 x dx$	$\int \sin^2 (x+\frac{3}{4}\pi)dx$	$\int \cos 2x\cos 4x dx$
$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}dx$	$\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$	$\int \cos^4 x dx$

2) Вычислить определенные интегралы

1. $\int\limits_0^1 (2x+1)e^x dx$; 2. $\int\limits_1^e x^2\ln x dx$; 3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx$;

4. $\int\limits_1^2 \ln x dx$; 5. $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$; 6. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sin^5 x}$; 7. $\int\limits_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$; 8. $\int\limits_0^1 \left(e^x+4\right)^2 e^x dx$

3) Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а. $y = x^2 - 2x + 2$; $y = 2 + 4x - x^2$.

б. $y = x^2$; $y = 2 - x$; $y = 0$.

4) Определить объем выпуска продукции за первые пять часов работы при производительности $f(t) = 12e^{-0,4t}$, где t − время в часах.

5). Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $p = 134 - x^2$.

Найти выигрыш потребителей, если равновесная цена равна 70.

6). Найти выигрыш потребителей и поставщиков товара, если законы спроса и предложения имеют вид: $p = 250 - x^2$, $p = 20 + \frac{1}{3}x$.

7). Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения одного изделия в период освоения от $x_1 = 100$ до $x_2 = 121$ изделий, полагая, что функция изменения затрат $t(x) = 600x^{-\frac{1}{2}}$.

8) Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+1}$; 2. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{4+x}$; 3. $\int\limits_1^{3} \frac{dx}{(x-2)^2}$; 4. $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$

III семестр

РГР № 1 «Случайные события»

На шести одинаковых карточках написаны буквы “а”, “а”, “а”, “з”,“д”, “ч”. Вынимают наудачу по одной карточке и прикладывают друг к другу. Какова вероятность того, что получится слово “задача”?

2. Из 75 лотерейных билетов, среди которых 5 выигрышных, наудачу берётся 5 билетов. Какова вероятность того, что все они выигрышные?

3. Три одинаковые монеты радиуса 3см. расположены внутри круга радиуса 10см, в котором наудачу бросается точка. Определить вероятность того, что эта точка упадёт на одну из монет, если монеты не пересекаются.

4. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определённого продукта по каждому из 3 центральных телевизионных каналов, равна 0,05. Предполагается, что эти события независимы в совокупности. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит рекламу: 1)по всем 3 каналам; 2)хотя бы по одному из этих каналов?

5. Стандарт заполнения счетов, установленный фирмой, предполагает, что не более 5% счетов будут заполняться с ошибками. Время от времени компания проводит случайную выборку счетов для проверки правильности их заполнения. Исходя из того что допустимый уровень ошибок - 5%, и 10 счетов отобраны в случайном порядке, чему равна вероятность того, что среди них окажется один с ошибкой.

6. Агент по недвижимости пытается продать участок земли под застройку. Он полагает, что участок будет продан в течение ближайших 6 месяцев с вероятностью 0,9 ,если экономическая ситуация в регионе не ухудшится. Если же экономическая ситуация будет ухудшаться, то вероятность продать участок составит 0,5 . Экономист, консультирующий агента, полагает, что с вероятностью равной 0,7 экономическая ситуация в регионе в течение следующих 6 месяцев будет ухудшаться. Чему равна вероятность того, что участок будет продан?

7. На склад магазина поступают изделия, из которых 80% оказываются высшего сорта. Найти вероятность того, что из 100 взятых наудачу изделий не менее 85 окажутся высшего сорта?

8. При штамповке 80% деталей выходят первым сортом. Случайно отобрано 400 дета-

лей. С какой вероятностью доля первосортных деталей отличается от соответствующей вероятности не более чем на 0,05?

9. В первом ящике 15 белых, 20 чёрных и 10 красных. Во втором ящике 12 белых, 16 чёрных и 12 красных шаров. Не глядя, вынимаем по одному шару из каждого ящика. Какова вероятность того, что будет вынуто два шара одинакового цвета.

10. Четыре кандидата участвуют в выборах на четыре различные должности в разных городах. Шансы, оказаться избранными, для каждого из них равны 1:2:3:2 соответственно. Какова вероятность того, что будет избран, по крайней мере, один из них?

РГР № 2 «Случайные величины»

1. В городе 4 коммерческих банка. У каждого риск банкротства в течение года составляет 10%. Составьте ряд распределения числа банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года; постройте его график. Найдите числовые характеристики этого распределения. Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте её график. Чему равна вероятность того, что в течение года обанкротятся не более 2 банков?

2. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью f(x), причём

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0 \\ a(3x-x^2) & \text{при} \quad 0\le x\le 3 \\ 0 & \text{при} \quad x>3 \end{cases}.$$

Требуется:

1) Найти коэффициент a;

2)построить график распределения плотности y=f(x);

3) найти вероятность попадания X в промежуток (1,2).

3. Время t расформирования состава через горку – случайная величина, подчинённая показательному закону. Пусть $\lambda=5$ – среднее число поездов, которые горка может расформировать за 1 час. Определить вероятность того, что время расформирования состава: 1)меньше 30 минут; 2) больше 6 минут, но меньше 24 минут.

4. Средняя дальность полёта снаряда равна 1200 м. Предполагая, что дальность полёта Н распределена по нормальному закону со средним квадратическим отклонением 40 м, найти, какой процент выпускаемых снарядов даст перелёт от 60 до 80 м.

5. НСВ X задана дифференциальной функцией $f(x)=\frac{2}{3}\sin 3x$ в интервале (0, $\frac{\pi}{3}$); вне этого интервала f(x)=0. Найдите вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу($\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}$).

6. Среднее число ошибок, которые делает оператор в течение часа работы, равно 2. Найдите вероятность того, что за 3 часа работы оператор сделает одну ошибку.

7. Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого имеет показательное распределение $F_1(t)=1-e^{-0,02t}$, второго $F_2(t)=1-e^{-0,05t}$. Найдите вероятность того, что за время t=6ч. ни один элемент не откажет; откажет только один элемент.

8. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 10 минут. Найти вероятность того, то пассажир будет ожидать автобус менее 2 минут, более 5 минут.

9. Оценить вероятность того, что абсолютная величина отклонения среднего роста 1000 мужчин от математического ожидания случайной величины, выражающей рост каждого мужчины, не превзойдёт 0, 5 см, полагая, что среднее квадратичное отклонение каждой из этих случайных величин не превышает 2,5 см.

10. Испытание готовых часов выявляет в среднем 2% неотрегулированных. Оценить вероятность того, что отклонение частости появления точных часов от вероятности не превысит 0,01; если предоставлено для проверки 400 часов.

2. Итоговый контроль знаний

Вопросы к экзамену приведены в рабочей программе (пункт 9). Примерный экзаменационный билет и тестовые задания приведены ниже.

Тест 1 (1 семестр)

1. Произведение числа $z = 3 - 5i$ на сопряжённое равно…

1) 34 2)0 3)9-25i 4)28

2. Число $z = 1 - i$ представлено в тригонометрической форме:

1) $2(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} i)$ 2) $\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4} i)$ 3) $\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{4} i)$

4) $(\cos\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4} i)$

3. Действительная часть комплексного числа $(1+5i)^2$ равна…

1)1 2) 10 3)-24 4)0

4. Сумма корней квадратного уравнения $5x^2 + 2x + 2 = 0$ равна…

1)0 2)-0,4 3)5 4)2+i

5. Число $z = 2e^{\frac{\pi}{2} i}$ представлено в алгебраической форме:

1)2i 2) -2i 3)1+2i 4)1-2i

6.Угловой коэффициент прямой 5x+8y=7 равен…

1)5 2)-5 3)$\frac{5}{8}$ 4)$-\frac{5}{8}$

7. Длина отрезка, отсекаемого прямой $2x+3y-6=0$ на оси Ox, равна…

1) 3 2)5 3) 4 4)2

8. Уравнение эллипса с полуосями a=2, b=4 и центром в точке(2; 1) имеет вид:

1)$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ 2)$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$ 3) $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ 4) $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

9. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, если ее действительная полуось b=3, а расстояние между фокусами $2c = 8$:

1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 2) $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{9} = 1$ 3) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$ 4) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$

10. Радиус окружности $x^2 + y^2 + 4x = 0$ равен…

1)0 2) 4 3)2 4) 1

11.Уравнение плоскости проходящей через точку A(3,1,-2) перпендикулярно вектору $\vec{n}$ (4,-5,1) имеет вид:

1) $4x - 5y + z - 5 = 0$ 2) $3x + 5y - 2z = 0$ 3) $4x - 5y + z - 2 = 0$

4) $12x - 5y - 2z - 5 = 0$

12. Уравнение прямой проходящей через точки $A(4;-2;3)$ и $B(5;-4;2)$ имеет вид:

1)$\frac{x-5}{-4} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-2}{5}$ 2) $x - 4 = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-3}{2}$ 3) $x - 4 = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{-1}$

4) $\frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-5}$

13. Определить, при каком A прямая $\frac{x+3}{2} = \frac{y}{A} = \frac{z-1}{7}$ параллельна плоскости $Ax + 5y + 3z - 6 = 0$:

1)1 2)-3 3)-7 4)2

14. Определить, при каких α и β параллельны прямые $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z+1}{\alpha}$ и

$\dfrac{x+1}{6}=\dfrac{y-3}{\beta}=\dfrac{z+5}{2}$:

1) $\alpha=10,\ \beta=1$ 2) $\alpha=10,\ \beta=-1$ 3) $\alpha=-10,\ \beta=1$ 4) $\alpha=1,\ \beta=-10$

15. Уравнение $y=x^2$ описывает поверхность:

1) эллиптический цилиндр 2)конус 3)параболический цилиндр
4)гиперболический параболоид

16. Область определения функции $y=\sqrt{x-x^2}$

1) $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ 2) $(0,1)$ 3) $[1,+\infty)$ 4) $[0,1]$

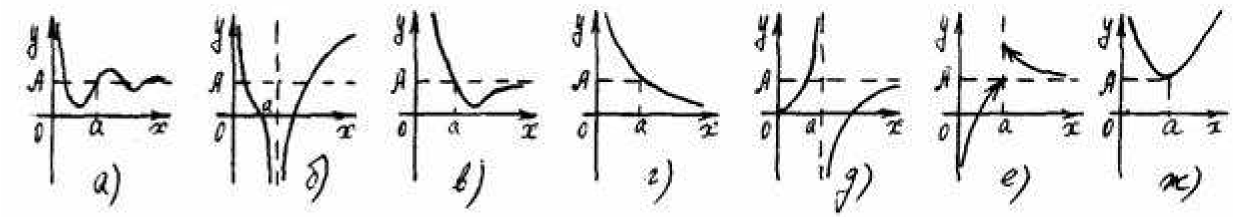
17. Предел $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$ равен…

1) 0 2) ∞ 3) 6 4) $\dfrac{1}{6}$

18. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x+5}{x+8x^3}$ равен…

1) 0 2) $\dfrac{1}{8}$ 3) ∞ 4) 1

19. Среди графиков, приведенных на рис. указать ВСЕ, соответствующие формуле $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$



20. Укажите, в каком случае в точке c функция $f(x)$ имеет устранимый разрыв:

1) $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=-5$; $\lim\limits_{x\to c+0} f(x)=-5$; $f(c)=0$; 2) $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=-5$; $\lim\limits_{x\to c+0} f(x)=5$; $f(c)=5$;

3) $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=-5$; $\lim\limits_{x\to c+0} f(x)=-\infty$; 4) $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=-5$; $\lim\limits_{x\to c+0} f(x)=-5$; $f(c)=-5$.

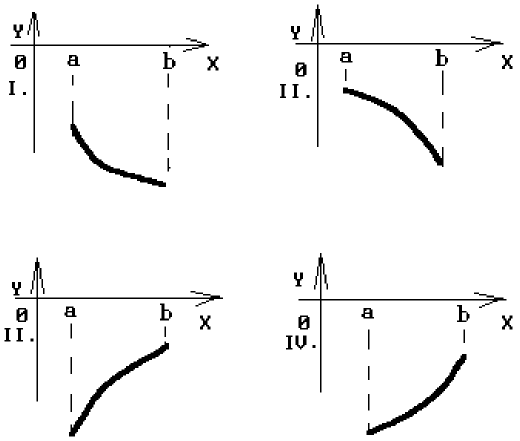
21.Закон движения материальной точки имеет вид $x(t)=5+6t^2$, где $x(t)$ – координата точки в момент времени t. Тогда скорость точки при $t=1$ равна …

1)12 2)17 3)7 4)20

22. Производная функции $y=\sin(\ln(3x-5))$ равна…

23. Точки перегиба функции $y=30x^3-x^5$ равны…

24. График какой функции на всем отрезке $[a,b]$ одновременно удовлетворяет трем условиям: $y<0$; $y'<0$; $y''>0$?



25. Опытным путём установлена функция спроса $D = 15 - 0{,}1p$ эластичность спроса, при цене p=10 за единицу продукции, равна…

1) 14 2) $\frac{1}{10}$ 3) $-\frac{1}{14}$ 4) 15

Экзаменационный билет N 1 (2 семестр)

Теоретическая часть

1. Матрицы. Основные понятия. Разновидности матриц.
2. Интегрирование тригонометрических функций.
3. Двойственные задачи.

Практическая часть

1. Решить систему матричным методом:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 8 \\ 2x + y + z = 1 \\ -3x + 4y + 2z = -9 \end{cases}.$$

2. Отрасль состоит из 4 предприятий, матрица прямых затрат имеет вид:
$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}$. Требуется рассчитать вектор конечного продукта непроизводственного потребления $\vec{V}$, если известен вектор валового выпуска продукции $\vec{X} = (100, 180, 150, 120)$.
3. Вычислить интегралы:
а) $\int \frac{\sqrt{arctgx}}{x^2 + 1} dx$, б) $\int x \cdot e^x dx$.
4. Найти объём тела образованного вращением вокруг оси Ox фигуры ограниченной линиями: $y = 4 - x^2, y = 0, x = 0,$ где $x \ge 0$.
5. Решить задачу линейного программирования:

$$F = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le -2 \\ x_1 - 2x_2 \ge -13 \\ 3x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Экзаменационный билет N 1 (3 семестр)

Теоретическая часть

1. Классическое определение вероятности.
2. Биномиальное распределение.
3. Корреляционный анализ. Задачи корреляционного анализа.

Практическая часть

1. С помощью семи карточек, на которых написано по одной букве, составлено слово «теорема». Карточки перемешиваются, а затем наугад извлекаются по одной. Какова вероятность того, что в порядке поступления букв образуется слово «теорема».
2. Модельер, разрабатывающий новую коллекцию одежды к весеннему сезону, создает модели в зеленой, черной и красной цветовой гамме. Вероятность того, что зеленый цвет будет в моде весной, модельер оценивает в 0,3, что черный – в 0,2, а вероятность того, что будет моден красный цвет – в 0,15. Предполагая, что цвета выбираются независимо друг от друга, найдите вероятность того, что цветовое решение коллекции будет удачным хотя бы по одному из выбранных цветов.
3. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа двух и не менее двух электроэлементов в год?
4. В осветительную сеть параллельно включено 30 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет включена, равна 0,8. Оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом включённых ламп за время T окажется меньше 4.
5. Клиенты банка, не связанные друг с другом не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составить закон распределения числа возвращённых в срок кредитов из 4 выданных. Найти: M(X), D(X), M_o.

V ИНТЕРАКТИВНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ

Образовательный процесс по дисциплине строится на основе комбинации следующих методов обучения:

1. Неимитационные методы обучения

Проблемная лекция начинается с вопросов, с постановки проблемы, которую в ходе изложения материала необходимо решить. Лекция строится таким образом, что деятельность студента по ее усвоению приближается к поисковой, исследовательской. Обязателен диалог преподавателя и студентов.

Лекция-визуализация учит студента преобразовывать устную и письменную информацию в визуальной форме; используются схемы, рисунки, чертежи и т.п., к подготовке которых привлекаются обучающиеся. Хорошо использовать на этапе введения в новый раздел, тему, дисциплину.

Лекция вдвоем. Учебный материал проблемного содержания дается студентам в диалоговом общении двух преподавателей между собой. Моделируются профессиональные дискуссии разными специалистами (теоретиком и практиком, сторонником и противником определенной концепции). Студенты вовлекаются в общение, высказывают собственную позицию.

Лекция с заранее запланированными ошибками. Ошибки должны обнаружить студенты и занести их в конспект. Список ошибок передается студентам лишь в конце лекции и проводится их обсуждение.

2. Неигровые имитационные методы обучения

Контекстное обучение направлено на формирование целостной модели будущей профессиональной деятельности студента. Знания, умения, навыки даются не как предмет для запоминания, а в качестве средства решения профессиональных задач.

Тренинг – специальная систематическая тренировка, обучение по заранее отработанной методике, сконцентрированной на формировании и совершенствовании ограниченного набора конкретных компетенций.

3. Игровые имитационные методы

Мозговой штурм – наиболее свободная форма дискуссии, позволяющей быстро включить в работу всех членов учебной группы. Используется там, где требуется генерация разнообразных идей, их отбор и критическая оценка. Этапы продуцирования идей и их анализа намеренно разделены: во время выдвижения идей запрещается их критика.

Круглый стол — это метод активного обучения, одна из организационных форм познавательной деятельности учащихся, позволяющая закрепить полученные ранее знания, восполнить недостающую информацию, сформировать умения решать проблемы, укрепить позиции, научить культуре ведения дискуссии.

Дискуссия (от лат. discussio — исследование, рассмотрение) — это всестороннее обсуждение спорного вопроса в публичном собрании, в частной беседе, споре.

Деловая игра – форма воссоздания предметного и социального содержания профессиональной деятельности, моделирования систем отношений, разнообразных условий профессиональной деятельности, характерных для данного вида практики.

Метод анализа конкретной ситуации (ситуационный анализ, анализ конкретных ситуаций, case-study) – это педагогическая технология, основанная на моделировании ситуации или использования реальной ситуации в целях анализа данного случая, выявления проблем, поиска альтернативных решений и принятия оптимального решения проблем.

Мастер–класс – это главное средство передачи концептуальной новой идеи своей (авторской) педагогической системы. Преподаватель как профессионал на протяжении ряда лет вырабатывает индивидуальную (авторскую) методическую систему, включающую целеполагание, проектирование, использование последовательности ряда известных дидактических и воспитательных методик, занятий, мероприятий, собственные «ноу-хау», учитывает реальные условия работы с различными категориями учащихся и т.п.