Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Амурский государственный университет»

Кафедра общей математики и информатики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ
МАТЕМАТИКА

Основной образовательной программы по направлению подготовки
080300.62 – Коммерция

2012 г.

УМКД разработан старшим преподавателем кафедры ОМиИ Гришкиной Татьяной Евгеньевной

Рассмотрен на заседании кафедры ОМиИ

Протокол заседания кафедры от «_14_»___сентября___2012 г. № _1_

Заведующий кафедрой __________________ Г. В. Литовка

УТВЕРЖДЕН

Протокол заседания УМС направления подготовки__080300.62 – Коммерция

от«___»_____________20___ г. № ______

Председатель УМС_________________/_______________________________

СОДЕРЖАНИЕ

I РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель дисциплины: получение фундаментального образования, соответствующего развитию личности; формирование у студентов практических навыков использования необходимого математического аппарата, позволяющего моделировать, решать и анализировать прикладные экономические задачи.

Задачи дисциплины:

– развитие логического и алгоритмического мышления студента;
– выработка умения моделировать реальные экономические процессы;
– освоение приемов решения и исследования математически формализованных задач.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП ВПО

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но так же элементом общей культуры. Изучение студентами экономических специальностей математики формирует у них научное мировоззрение, расширяет кругозор, повышает общую культуру.

Современная экономическая наука немыслима без построения экономико-математических моделей. Данные модели включают комплекс из многих сотен уравнений и тождеств: они могут быть линейными и нелинейными, непрерывными и дискретными, детерминированными и вероятностными. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую в системе фундаментальной подготовки современного экономиста.

Предлагаемая дисциплина относится к базовой части математического и естественнонаучного цикла ООП.

Для успешного освоения данной дисциплины необходимы базовые знания курса «Математика» в объеме средней общеобразовательной школы.

Дисциплина занимает важное место в программе подготовки бакалавра, так как обеспечивает базовую математическую подготовку студентов, необходимую для решения и анализа профессиональных задач.

3. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 358 часов.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)			Формы текущего контроля успеваемости (*по неделям семестра*) Форма промежуточной аттестации (*по семестрам*)
				Лекции	Практические работы	Самостоятельная работа	
1	Введение в анализ с элементами аналитической геометрии	1	1-10	20	20	20	контрольная работа, расчетно-графическая работа, коллоквиум
2	Дифференциальное исчисление функции одной переменной	1	11-15	10	10	20	контрольная работа, расчетно-графическая работа

3	Функции нескольких переменных	1	16-18	6	6	10	контрольная работа, расчетно-графическая работа
	Подготовка к экзамену					10	итоговый тест
	ИТОГО	1		36	36	60	экзамен
4	Линейная алгебра	2	1-7	14	8	20	контрольная работа, расчетно-графическая работа
5	Интегральное исчисление	2	8-13	12	6	15	контрольная работа, расчетно-графическая работа
6	Дифференциальные уравнения	2	14-18	10	4	15	контрольная работа, расчетно-графическая работа, коллоквиум
	Подготовка к экзамену					10	итоговый тест
	ИТОГО	2		36	18	60	экзамен
7	Теория вероятностей: случайные события	3	1-5	10	6	20	контрольная работа, расчетно-графическая работа, коллоквиум
8	Теория вероятностей: случайные величины	3	6-12	14	6	15	контрольная работа, расчетно-графическая работа
9	Математическая статистика	3	13-18	12	6	13	контрольная работа
	Подготовка к экзамену					10	итоговый тест
	ИТОГО	3		36	18	58	экзамен

4. СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ И ТЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Государственный стандарт курса учебной дисциплины «Математика»

Аналитическая геометрия и линейная алгебра; дифференциальное и интегральное исчисления; дифференциальные уравнения; элементы теории вероятностей и статистики.

4.1. Лекции

Темы дисциплины и их содержание

Раздел 1. Введение в математический анализ с элементами аналитической геометрии.

Тема 1. Числа. Переменные. Множества. Отображения. Действительные и комплексные числа. Переменные и постоянные величины. Конечные и бесконечные множества.

Тема 2. Функциональная зависимость.

Понятие функции. Область определения функции. Способы её задания. Классификация функций, их графики. Понятие обратной функции. Основные элементарные функции, их графики. Сложная функция. Понятие обратной функции. Основные элементарные функции и их графики. Преобразование графиков функции.

Тема 3. Элементы аналитической геометрии.

Уравнение линии на плоскости и в пространстве. Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Угол между прямыми. Уравнение плоскости. Кривые и поверхности второго порядка.

Тема 4. Пределы и их свойства.

Понятия о числовых последовательностях. Предел последовательности. Предел функции. Бесконечно малые и бесконечно большие величины и их основные свойства. Основные теоремы о пределах. Признаки существования предела. Два замечательных предела. Раскрытие неопределённости различного вида.

Тема 5. Непрерывность функции.

Непрерывные функции. Переход к пределу под знаком непрерывной функции. Теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций. Непрерывность сложной функции. Непрерывность элементарных функций. Свойства функции, непрерывных на отрезке.

Раздел 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Тема 1. Производная функции.

Понятие производной. Дифференцируемость функции в точке и на множестве. Механический и геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции. Непрерывность дифференцируемых функций.

Тема 2. Правила дифференцирования.

Основные правила и формулы дифференцирования функций. Производные высших порядков.

Тема 3. Дифференциал функции.

Дифференциал функции, его свойства. Связь дифференциала и производной.

Тема 4. Основные теоремы дифференциального исчисления.

Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя.

Тема 5. Приложения производной к исследованию функций.

Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции. Выпуклость и вогнутость. Точки перегиба. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке. Схема исследования поведения функции с помощью первой и второй производных. Применение производной к приближённому решению уравнений. Интерполирование функций. Логарифмическая производная, связь с банковским процентом. Эластичность функции, экономические приложения.

Раздел 3. Функции нескольких переменных

Тема 1. Понятие о метрическом пространстве. Окрестность точки. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Понятие о функции многих переменных. Поверхности второго порядка. Предел и непрерывность функции многих переменных.

Тема 2. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных.

Частные производные и полный дифференциал функции многих переменных. Производная сложной функции. Производная высших порядков. Перестановочность частных производных по разным переменным. Понятие условного экстремума. Метод неопределённых множителей Лагранжа.

Раздел 4. Линейная алгебра

Тема 1. Матрицы.

Матрицы и операции над ними. Основные свойства операции над матрицами.

Тема 2. Определители.

Определители квадратных матриц: определения и основные свойства. Вычисление определителя.

Тема 3. Системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений: определение, примеры. Свойства систем уравнений: совместимость, несовместимость, определённость. Частные и общие решения. Эквивалентность систем; элементарные преобразования, сохраняющие эквивалентность систем. Однородные неоднородные системы линейных уравнений. Свойства множеств решений однородных и неоднородных систем. Структура общего решения неоднородной системы.

Тема 4. Методы решения систем линейных уравнений.

Решение систем методом Гаусса, по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы.

Тема 5. Векторное пространство и линейные преобразования.

Векторное пространство: определение и примеры. Линейно зависимые системы векторов и их свойства. Базис линейного пространства. Теорема о ранге и её следствия. Размерность линейного пространства. Подпространства. Теорема Кронекера-Капелли. Теорема о структуре общего решения однородной системы линейных уравнений. Формула для общего решения неоднородной системы линейных уравнений. Собственные векторы и собственные значения матрицы.

Тема 6. Применение элементов линейной алгебры в экономике.

Использование алгебры матриц. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики. Линейная модель торговли.

Раздел 5. Интегральное исчисление

Тема 1. Первообразная функция и неопределённый интеграл. Первообразная: определения, примеры. Теорема об общем виде всех первообразной данной функции. Неопределённый интеграл и его свойства. Таблица неопределённых интегралов. Методы интегрирования по частям и заменой переменных. Методы интегрирования некоторых классов элементарных функций. Примеры интегралов, не выражающихся через элементарные функции.

Тема 2. Определённый интеграл.

Понятие об определённом интеграле. Свойства определённого интеграла. Теорема о существовании определённого интеграла. Формула Ньютона – Лейбница. Замена переменной. Интегрирование по частям. Несобственный интеграл. Приближённое вычисление определённых интегралов.

Раздел 6. Дифференциальные уравнения

Тема 1. Основные понятия.

Примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.

Тема 2. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Различные виды дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения: уравнения с разделяющимися переменными, однородные линейные уравнения.

Тема 3. Дифференциальные уравнения высших порядков.

Уравнения второго порядка, решаемые понижением порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Приложение к описанию линейных моделей в экономике.

Раздел 7. Теория вероятностей: случайные события

Тема 1. Предмет теории вероятностей. Основные понятия.

Предмет теории вероятностей, первоначальные понятия и определения, основные формулы комбинаторики, классическое определение вероятностей.

Тема 2. Сложение и умножение вероятностей.

Теорема сложения вероятностей, условные вероятности, теорема умножения вероятностей, независимые события и их свойства. Вероятность появления хотя бы одного события.

Тема 3. Формулы полной вероятности и Байеса. Схема Бернулли.

Формула полной вероятности, формула Байеса, схема повторных испытаний Бернулли, формула Бернулли. Локальная и интегральная теорема Муавра – Лапласа, формула Пуассона.

Раздел 8. Теория вероятностей: случайные величины

Тема 1. Случайные величины.

Случайная величина. Примеры случайных величин. Виды случайных величин (конечные, дискретные, непрерывные). Закон и таблица распределения конечных и дискретных случайных величин. Функция распределения случайной величины и её свойства. Плотность распределения непрерывной случайной величины и её свойства. Эффект нулевой вероятности. Математическое ожидание как среднее значение случайной величины. Определение математического ожидания для различных видов случайных величин. Определение суммы и произведения случайных величин. Свойства математического ожидания. Дисперсия случайной величины и её свойства. Среднее квадратичное отклонение.

Тема 2. Основные законы распределения случайных величин.

Биноминальное распределение и его характеристики. Распределение Пуассона и его характеристики. Теорема Пуассона. Нормальное распределение и его характеристики. Локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа. Показательное распределение и его характеристики. Равномерное распределение и его характеристики.

Тема 3. Закон больших чисел.

Неравенство Чебышева. Теоремы Чебышева и Бернулли.

Раздел 9. Математическая статистика

Тема 1. Выборочный метод

Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма.

Тема 2. Статистические оценки параметров распределения.

Точечные оценки. Интервальные оценки

Тема 3. Проверка статистических гипотез.

Постановка задачи проверки гипотез. Критерий оценки и его мощность. Критическая область и область принятия гипотезы. Проверка гипотез о значениях параметров нормального распределения. Проверка гипотез в виде распределения. Критерий Пирсона.

Тема 4. Корреляционный и регрессионный анализ.

Функциональные и корреляционные зависимости случайных величин. Линейная и нелинейная регрессия. Составление уравнений прямых регрессий, метод наименьших квадратов. Статистическая оценка коэффициента корреляции и её свойства. Построение доверительных интервалов для параметров линейной регрессии. Проверка статистической значимости регрессии и адекватности модели регрессии результатам наблюдений.

№ п/п	**Темы лекций**
Семестр I .	
Раздел 1. Введение в анализ с элементами аналитической геометрии.	
1	Основные понятия теории множеств.
2	Функциональная зависимость.
3	Функции в экономике.
4	Уравнение прямой на плоскости.
5	Кривые второго порядка.
6	Аналитическая геометрия в пространстве.
7	Числовая последовательность. Предел числовой последовательности.
8	Предел функции. Основные теоремы о пределах.
9	Бесконечно малые функции.
10	Непрерывность функции. Классификация точек разрыва.
Раздел 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.	
11	Производная функции, ее геометрический и физический смысл.
12	Дифференциал функции.
13	Основные теоремы дифференциального исчисления.
14	Исследование функций с помощью производных.
15	Приложения производной в экономике.
Раздел 3. Функции нескольких переменных.	
16	Функции нескольких переменных. Основные понятия.
17	Экстремум функции нескольких переменных.
18	Приложения к решению экономических задач.
Семестр II .	
Раздел 4. Линейная алгебра.	
1	Матрицы.

2	Определители.
3	Системы линейных уравнений.
4	Методы решения систем линейных уравнений.
5	Векторное пространство и линейные преобразования.
6	Теорема Кронекера-Капелли. Системы линейных однородных уравнений.
7	Применение элементов линейной алгебры в экономике.
Раздел 5. Интегральное исчисление.	
8	Первообразная функция и неопределённый интеграл.
9	Основные методы интегрирования.
10	Интегрирование рациональных дробей.
11	Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций.
12	Определённый интеграл.
13	Приложения определённого интеграла.
Раздел 6. Дифференциальные уравнения.	
14	Основные понятия.
15	Дифференциальные уравнения первого порядка.
16	Дифференциальные уравнения высших порядков, решаемые понижением порядка.
17	Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков.
18	Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков.
Семестр III.	
Раздел 7. Теория вероятностей: случайные события.	
1	Предмет теории вероятностей. Основные понятия.
2	Теоремы сложения и умножения вероятностей.
3	Формулы полной вероятности и Байеса.
4	Повторные независимые испытания.
5	Интегральная теорема Лапласа.
Раздел 8. Теория вероятностей: случайные величины.	
6	Случайные величины. Числовые характеристики случайных величин.
7	Основные законы распределения дискретных случайных величин.
8	Основные законы распределения непрерывных случайных величин.
9	Основные законы распределения непрерывных случайных величин.
10	Закон больших чисел.
11	Система случайных величин.
12	Система случайных величин.
Раздел 9. Математическая статистика.	
13	Элементы математической статистики. Выборочный метод.
14	Статистические оценки параметров распределения.
15	Проверка статистических гипотез.
16	Проверка статистических гипотез.
17	Корреляционный и регрессионный анализ.
18	Корреляционный и регрессионный анализ.

4.2. Практические занятия

№ п/п	**Темы практических занятий**
Семестр I .	
Раздел 1. Введение в анализ с элементами аналитической геометрии.	
1	Комплексные числа. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы.
2	Действия над комплексными числами.
3	Уравнение прямой на плоскости.

3	Кривые второго порядка: окружность, эллипс.
4	Кривые второго порядка: гипербола, парабола.
5	Уравнение плоскости в пространстве.
6	Уравнение прямой в пространстве.
7	Понятие функции.
8	Вычисление пределов функций.
9	Замечательные пределы.
10	Непрерывность функции. Точки разрыва.
	Раздел 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.
11	Производная явно заданной функции.
12	Дифференцирование функций заданных неявно, параметрически. Производная степенно-показательной функции.
13	Интервалы монотонности и экстремумы функции. Интервалы выпуклости функции. Точки перегиба. Асимптоты.
14	Исследование функций с помощью производных.
15	Приложения производной в экономике.
	Раздел 3. Функции нескольких переменных.
16	Функции нескольких переменных. Частные производные.
17	Экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум.
18	Приложения функций нескольких переменных к решению экономических задач.
	Семестр II .
	Раздел 4. Линейная алгебра.
1	Матрицы и действия над ними.
2	Вычисление определителей.
3	Методы решения систем линейных уравнений.
4	Применение элементов линейной алгебры в экономике.
	Раздел 5. Интегральное исчисление.
5	Непосредственное интегрирование. Замена переменной. Интегрирование по частям.
6	Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций.
7	Приложения определённого интеграла.
	Раздел 6. Дифференциальные уравнения.
8	Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные.
9	Дифференциальные уравнения высших порядков.
	Семестр III .
	Раздел 7. Теория вероятностей: случайные события.
1	Элементы комбинаторики. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
2	Формулы полной вероятности и Байеса. Повторные независимые испытания.
3	Повторные независимые испытания.
	Раздел 8. Теория вероятностей: случайные величины.
4	Случайные величины. Числовые характеристики случайных величин.
5	Основные законы распределения дискретных и непрерывных случайных величин.
6	Закон больших чисел.
	Раздел 9. Математическая статистика.
7	Статистические оценки параметров распределения.
8	Проверка статистических гипотез.
9	Корреляционный и регрессионный анализ.

5. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

№ п/п	№ раздела (темы) дисциплины	Форма (вид) самостоятельной работы	Трудоемкость в часах
1	1	Выполнение индивидуальной расчётно-графической работы №1. Выполнение домашних заданий.	20
2	2	Выполнение индивидуальной расчётно-графической работы №2. Выполнение домашних заданий.	20
3	3	Выполнение индивидуальной расчётно-графической работы №3. Выполнение домашних заданий.	10
4	1,2,3	Подготовка к экзамену	10
5	4	Выполнение индивидуальной расчётно-графической работы №4. Выполнение домашних заданий.	20
6	5	Выполнение индивидуальной расчётно-графической работы №5. Выполнение домашних заданий.	15
7	6	Выполнение индивидуальной расчётно-графической работы №6. Выполнение домашних заданий.	15
8	4,5,6	Подготовка к экзамену	10
9	7	Выполнение индивидуальной расчётно-графической работы №7. Выполнение домашних заданий.	20
10	8	Выполнение индивидуальной расчётно-графической работы №8. Выполнение домашних заданий.	15
11	9	Выполнение домашних заданий.	13
12	7, 8, 9	Подготовка к экзамену	10
Итого			178

6. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ФОРМЫ

Интегральную модель образовательного процесса по дисциплине формируют технологии методологического уровня: модульно-рейтинговое обучение, технология поэтапного формирования умственных действий, технология развивающего обучения, элементы технологии развития критического мышления.

Образовательный процесс по дисциплине строится на основе комбинации следующих методов обучения:

1. Неимитационные методы обучения

Проблемная лекция начинается с вопросов, с постановки проблемы, которую в ходе изложения материала необходимо решить. Лекция строится таким образом, что деятельность студента по ее усвоению приближается к поисковой, исследовательской. Обязателен диалог преподавателя и студентов.

Лекция-визуализация учит студента преобразовывать устную и письменную информацию в визуальной форме; используются схемы, рисунки, чертежи и т.п., к подготовке которых привлекаются обучающиеся. Хорошо использовать на этапе введения в новый раздел, тему, дисциплину.

Лекция с заранее запланированными ошибками. Ошибки должны обнаружить студенты и занести их в конспект. Список ошибок передается студентам лишь в конце лекции и проводится их обсуждение.

2. Неигровые имитационные методы обучения

Контекстное обучение направлено на формирование целостной модели будущей профессиональной деятельности студента. Знания, умения, навыки даются не как предмет для запоминания, а в качестве средства решения профессиональных задач.

Тренинг – специальная систематическая тренировка, обучение по заранее отработанной методике, сконцентрированной на формировании и совершенствовании ограниченного набора конкретных компетенций.

3. Игровые имитационные методы

Мозговой штурм – наиболее свободная форма дискуссии, позволяющей быстро включить в работу всех членов учебной группы. Используется там, где требуется генерация разнообразных идей, их отбор и критическая оценка. Этапы продуцирования идей и их анализа намеренно разделены: во время выдвижения идей запрещается их критика. Внешне одобряются и принимаются все высказанные идеи. Больше ценится количество выдвинутых идей, чем их качество. Идеи могут высказываться без обоснования.

7. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Результативность работы обеспечивается системой контроля, которая включает опрос студентов на практических занятиях, проверку выполнения текущих заданий, контрольные работы, тесты, выполнение и защита типовых расчётов (РГР), проведение коллоквиумов, экзаменов. Рубежный контроль осуществляется контрольными работами и тестами. Контроль за выполнением индивидуального задания осуществляется в два этапа: проверка письменных отчётов; защита задания в устной или письменной форме.

Для самостоятельной работы используется учебно-методическое обеспечение на бумажных и электронных носителях. Тематика самостоятельной работы соответствует содержанию разделов дисциплины и теме домашнего задания.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля выбираются из содержания разделов дисциплины. Выполнение домашнего задания обеспечивает непрерывный контроль за процессом освоения учебного материала каждого обучающегося, своевременное выявление и устранение отставаний и ошибок.

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины: экзамен (1, 2, 3 сем.).

Вопросы к экзамену (1 семестр)

Раздел 1. Введение в анализ с элементами аналитической геометрии.

1. Комплексные числа.
2. Действия с комплексными числами.
3. Понятие множества.
4. Операции над множествами.
5. Числовые множества.
6. Постоянные и переменные величины.
7. Функция как одно из понятий математики.
8. Область определения и множество значений функции.
9. Способы задания функции.
10. Классификация функций.
11. Понятие об обратной функции.
12. Основные элементарные функции и их графики.
13. Понятие об уравнении линии.
14. Уравнение прямой на плоскости.
15. Уравнение плоскости.
16. Уравнение прямой в пространстве.
17. Угол между прямыми.
18. Кривые второго порядка на плоскости.
19. Поверхности второго порядка.
20. Пределы: числовых последовательностей, переменных, функций.

21. Основные теоремы о пределах.
22. Виды и раскрытие неопределенностей при нахождении пределов.
23. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
24. Сравнение функций. Эквивалентные бесконечно малые.
25. Асимптоты графика функций одной переменной.
26. Понятие неопределенности функции в точке.
27. Свойства функций, непрерывных в точках.
28. Свойства функций, непрерывных на множестве.
29. Непрерывность сложной функции.
30. Односторонняя непрерывность.
31. Непрерывность обратной функции.
32. Точка разрыва функции и их классификации.

Раздел 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

1. Производная функции.
2. Дифференцируемость и дифференциал функции.
3. Геометрический смысл производной и дифференциала.
4. Физический смысл производной и дифференциала.
5. Приложение производной в экономике. Эластичность функции.
6. Правила вычисления производной и дифференциала.
7. Производная и дифференциал сложной функции.
8. Логарифмическое дифференцирование.
9. Производные и дифференциалы высших порядков.
10. Производная обратной функции.
11. Производная параметрически заданной функции.
12. Производная неявно заданной функции.
13. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций
14. Формула Тейлора.
15. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.
16. Признаки монотонности функции.
17. Экстремум функции.
18. Наибольшее и наименьшее значение функции на множестве.
19. Направление выпуклости графика функции.
20. Точки перегиба графика функции.
21. Общая схема исследования функции.

Раздел 3. Функции нескольких переменных.

1. Функция нескольких переменных. Основные понятия.
2. Частные производные функции нескольких переменных.
3. Полное приращение функции нескольких переменных.
4. Дифференцируемость функции нескольких переменных.
5. Дифференциал функции нескольких переменных.
6. Градиент функции нескольких переменных.
7. Частные производные высших порядков.
8. Экстремумы функции нескольких переменных.
9. Наименьшее и наибольшее значение функции нескольких переменных.
10. Системы функциональных уравнений и неравенств.
11. Особые точки множеств.
12. Условные экстремумы функций нескольких переменных.
13. Наименьшее и наибольшее значение функции на множестве решений системы уравнений и неравенств.
14. Приложение функций нескольких переменных к решению экономических задач.

Вопросы к экзамену (2 семестр)

Раздел 4. Линейная алгебра.

1. Определение матрицы.
2. Сложение и вычитание матриц, свойства.
3. Умножение матриц на число, свойства.
4. Умножение матриц.
5. Равенство матриц.
6. Транспонирование матриц.
7. Определитель, его определение, порядок.
8. Основные свойства определителей.
9. Обратная матрица (определение).
10. Нахождение обратной матрицы.
11. Решение матричных уравнений.
12. Минор матрицы.
13. Ранг матрицы.
14. Элементарные преобразование матриц.
15. Эквивалентные матрицы.
16. Общий вид систем линейных неоднородных уравнений.
17. Общий вид систем линейных однородных уравнений.
18. Определение решения систем линейных уравнений.
19. Совместные и несовместные системы уравнений.
20. Матричная запись систем линейных уравнений.
21. Методы решения систем линейных уравнений.
22. Методы Гаусса решения систем линейных уравнений.
23. Теорема Кронекера – Капелли.
24. Условия единственности решения систем линейных уравнений.
25. Общее и частное решения систем линейных уравнений, свободные и базисные неизвестные.
26. Решение систем линейных уравнений, когда число уравнений и неизвестных не совпадают.
27. N-мерные векторы. Действия с n-мерными векторами.
28. Скалярное произведение n-мерных векторов. Свойства скалярного произведения.
29. Длина вектора. Угол между n-мерными векторами.
30. Линейные комбинации векторов.
31. Линейная зависимость векторов.
32. Базис и размерность линейного пространства.
33. Ортогональные системы векторов.
34. Ортонормированная система векторов. Декартова система координат.
35. Модель Леонтьева.
36. Матрица затрат.
37. Модель равновесных цен.
38. Линейная модель торговли.

Раздел 5. Интегральное исчисление.

1. Неопределенный интеграл, его определение геометрическая интерпретация.
2. Методы и правила интегрирования.
3. Определенный интеграл, определение и геометрическая интерпретация.
4. Методы интегрирования определенных интегралов.
5. Несобственные интегралы.
6. Приложения определённого интеграла.

Раздел 6 . Дифференциальные уравнения.

1. Понятие о дифференциальном уравнении и его решении.
2. Порядок дифференциального уравнения.

3. Классификация дифференциальных уравнений: линейные, нелинейные, однородные, неоднородные, с постоянными и функциональными коэффициентами, без и правой частью.
4. Методы решения дифференциальных уравнений.

Вопросы к экзамену (3 семестр)

Раздел 7 . Теория вероятностей: случайные события.

1. Случайные события и их классификация.
2. Элементы комбинаторики.
3. Различные подходы к введению вероятности. Практически невозможные и практически достоверные события. Практической уверенности.
4. Теорема сложения вероятностей несовместимых событий.
5. Теорема умножения вероятностей.
6. Теорема сложения вероятностей, совместимых событий.
7. Формула полной вероятности.
8. Теорема Бейеса.
9. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число наступления события.
10. Теоремы Лапласа.
11. Вероятность отклонения частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.

Раздел 8 . Теория вероятностей: случайные величины.

1. Случайные величины. Закон распределения дискретных случайных величин.
2. Функция распределения и ее свойства.
3. Плотность распределения и ее свойства.
4. Функция случайной величины и ее распределение.
5. Математическое ожидание случайной величины, свойство
6. математического ожидания.
7. Дисперсия случайной величины, свойства дисперсии.
8. Биноминальное распределение.
9. Распределение Пуассона.
10. Равномерное распределение.
11. Нормальное распределение.
12. Вероятность попадания нормального распределенной величины на заданный участок. Правило трех сигм.
13. Понятие о теореме Ляпунова.
14. Оценка отклонения распределения случайной величины от нормального.
15. Эксцесс и асимметрия.
16. Показательное распределение.
17. Неравенство Чебышева.
18. Теорема Чебышева.
19. Теорема Бернулли.
20. Понятие о системе случайных величин. Закон распределения системы случайных величин, таблица распределения.
21. Функция распределения системы случайных величин, ее свойства.
22. Плотность распределения системы случайных величин, ее свойства.
23. Плотность распределения отдельных величин, входящих в систему. Условные законы распределения.
24. Зависимые и независимые случайные величины.
25. Числовые характеристики системы случайных величин.

Раздел 9. **Математическая статистика**.

1. Понятие выборки случайных величин.
2. Понятие о выборочном методе.
3. Понятие генеральной совокупности (генеральной выборки).

4. Понятие регрессии, регрессионные зависимости.
5. Регрессионная зависимость как “ослабленная” функциональная зависимость.
6. Виды регрессионной зависимости.
7. Метод наименьших квадратов как метод аналитического сглаживания и определения параметров регрессионной зависимости.
8. Множественная регрессия.
9. Корреляционная зависимость между случайными величинами.
10. Ковариация. Коэффициент корреляции.
11. Различия между регрессионной и корреляционной зависимостями.
12. Основные задачи математической статистики.
13. Статистическая функция распределения.
14. Статистический ряд. Гистограмма.
15. Числовые характеристики статистического распределения.
16. Выравнивание статистических рядов, метод наибольшего правдоподобия.
17. Свойства точечных оценок.
18. Доверительный интервал. Доверительная вероятность.
19. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения.
20. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.
21. Статистические гипотезы.
22. Статистический критерий проверки нулевой гипотезы. Наблюдаемое значение критерия.
23. Критическая область. Критические точки и их нахождение.
24. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей.
25. Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых известны. Понятие о критериях согласия.

Примерные варианты контрольных работ

1. Комплексные числа.

Задание 1: Вычислить: a) $\frac{1+3i}{-2+i}\cdot(-2i)+1$; b) $\left(\sin(\frac{\pi}{3})+i\cdot\cos(\frac{\pi}{3})\right)\cdot\left(-4-3i\right)$;

c) $\left(\frac{i^{16}+3}{i^{6}+3}\right)^{5}$; d) $\frac{1+i}{(\sqrt{3}+i)(1+i\sqrt{3})}$

Задание 2: Найти модуль и аргумент комплексного числа:

a) $z=(-5+i)(-5-i)$; b) $z=\left(\frac{4+3i}{5}\right)^{10}$

Задание 3: Решить уравнение: a) $z^2-8iz-15=0$; b) $z^3+8i=0$.

Задание 4: Составить приведенное квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее корень: z=1+i

2. Аналитическая геометрия.

1. Даны вершины треугольника: A(2, 3), B(6, 1), C(2, -2).

Найти:

1. Длину стороны AB.
2. Уравнения сторон AB, BC, AC.
3. Уравнение высоты из вершины A.
4. Уравнение медианы из вершины B.
5. Расстояние от точки C до прямой AB.

2. Построить кривые:

1. $y=\sqrt{4-x^2}$.
2. $2x^2+3y=9$.

3. Построить плоскость $4x + 2y + 3z = 12$.

3. Введение в анализ. Приложение производной.

1. Вычислите y'

$$y = \frac{2 - \arcsin 2x}{\cos(1 - 3x)}$$

2. Вычислите y''

$$y = \sqrt{1 - x^2} + 4x$$

3. Найти предел функции

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}$$

4. Исследовать функцию на непрерывность

$$y = \begin{cases} 2x + 3, x \le 0 \\ 3 + 4x, x > 0 \end{cases}$$

5. Решить задачу.

Производитель реализует свою продукцию по цене p за единицу, а издержки при этом задаются функцией $C(x) = 9x + 0{,}2x^2$, где x - объем выпускаемой продукции в условных единицах (x >0) Найти оптимальный для производителя объем выпуска продукции и соответствующую ему прибыль, если p=49 ден. ед.

4. Функции нескольких переменных.

1. Найти все частные производные второго порядка

$$z = yx^2 - e^{xy}.$$

2. Фирма производит продукцию на двух заводах; x и y – соответственно объёмы этой продукции за месяц. Сколько продукции ежемесячно следует выпускать на каждом заводе при наименьших суммарных затратах, если функция издержек заводов имеет вид:

$$C = x^2 + y^2 - 10x - 40y + 5500.$$

3. Задана производственная функция:

$Q = 10\sqrt{L}\sqrt{K} + 15\sqrt{K}$. Вычислить предельный продукт труда и предельный продукт капитала при L=100, K=2500.

5. Элементы линейной алгебры.

1. Задана матрица $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Требуется найти:

транспонированную матрицу A^T;

ранг матрицы A;

произведение матриц $A^T \cdot A$ и $A \cdot A^T$;

обратную матрицу A^{-1}.

2. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

1)методом обратной матрицы;

2)по формулам Крамера;
3)методом Гаусса.

6. Неопределённый интеграл.

1. $\int \frac{ctg^3 x}{\sin^2 x} dx$;
2. $\int \sqrt[5]{3x-2} dx$;
3. $\int \frac{xdx}{1+x^2}$;
4. $\int x\cos 3x dx$;
5. $\int \frac{dx}{x^2+3x+5}$;
6. $\int \arcsin 2x dx$;
7. $\int \frac{xdx}{x+6}$;
8. $\int \cos 3x \sin 7x dx$;
9. $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+4)}$;
10. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

7. Определенный интеграл

Задание 1: Вычислить определенный интеграл:

1) $\int_1^2 (x^2+1)dx$; 2) $\int_0^3 e^{-\frac{x}{3}} dx$; 3) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$; 4) $\int_1^e \ln x dx$; 5) $\int_{1/2}^1 x^2 \cdot (2x-1)^8 dx$

Задание 2: Вычислить несобственный интеграл:

1) $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$; 2) $\int_3^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+4} dx$

Задание 3: Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1) $y = x^2,\ y = 2 - x^2$; 2) $y = x(3-x),\ y = x-3$.

8. Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

1. $\frac{y'}{e^{2x-1}} = tgy \quad y(0) = 0$;
2. $y'\sqrt{1-x} = \frac{1}{\sqrt{1-y}}$;
3. $y' - \frac{y}{x-2} = x+2$;
4. $y''' + 2y'' + 5y' = 0$;
5. $y'' + y' - 2y = 3e^x$.

9. Теория вероятностей: случайные события.

1. Студент знает 45 из 60 вопросов программы. Каждый Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Найти вероятность того, что: а) студент знает все три вопроса, содержащиеся в билете; б) студент знает только два вопроса; в) студент знает только один вопрос своего экзаменационного билета.
2. В ящике имеется 15 деталей, из которых 10 стандартных. Сборщик наугад берёт 3 детали. Найти вероятность того, что все взятые детали будут стандартными.
3. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,3. Производится 5 выстрелов. Чему равна вероятность того, что цель будет поражена?
4. Вероятность того, что клиент банка не вернёт заём в период экономического роста, равна 0,04, а в период экономического кризиса – 0,13. Предположим, что вероятность того, что начнётся период экономического роста, равна 0,65. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернёт полученный кредит?

6. Вероятность того что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа равна 0,01.Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 4 абонента?
7. В партии деталей двух сходных форматов число крупных деталей вдвое больше числа мелких. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу 10 деталей окажется 6 крупных?
8. Вероятность допущения дефекта при производстве механизмов равна 0,4. Случайным образом отбирается 500 механизмов. Установить величину наибольшего отклонения частости изготовленных механизмов с дефектами от вероятности 0,4, которую можно гарантировать с вероятностью 0,9973.

10. Теория вероятностей: случайные величины.

1. Производится 4 выстрела по некоторой цели. Вероятность попадания в цель от выстрела к выстрелу не меняется и остаётся равной 0,4. Требуется для С. В. X –числа попаданий составить ряд распределения и построить многоугольник распределения.
2. Детали, выпускаемые цехом по размеру диаметра распределяются по нормальному закону с параметрами: a=5 см, и σ =0,9. найдите границы в которых следует ожидать размер диаметра детали, чтобы вероятность невыхода за эти границы была равна 0,95
3. СВ X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ x^2 & при \quad 0<x\le 1\\ 1 & при \quad x>1.\end{cases}$$

Найдите плотность вероятности, M(X), D(X).

4. Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого имеет показательное распределение $F_1(t)=1-e^{-0,02t}$, второго $F_2(t)=1-e^{-0,05t}$. Найдите вероятность того, что за время t=6ч хотя бы один элемент откажет.
5. Найти числовые характеристики СВ X, распределённой равномерно в промежутке [6, 10].
6. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,05. Оценить вероятность того что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом отказов за время T окажется меньше 2.
7. Вероятность вынуть из урны белый шар 1/3. Вынули (с возвращением)300 шаров. Оценить вероятность того, что отклонение частости появления белых шаров от вероятности будет менее 1/15.

11. Математическая статистика.

1. Предположим, что на некотором предприятии собраны данные о числе дней, пропущенных работником по болезни:

Число дней, пропущен. в данном мес.	0	1	2	3	4
Число работников	10	17	25	28	24

Постройте полигон распределения частот. Найдите среднее число пропущенных дней, стандартное отклонение, коэффициент вариации. Объясните полученные результаты.

2. Аудиторская фирма хочет проконтролировать состояние счетов одного из коммерческих банков. Для этого случайно отбираются 50 счетов. По 20 счетам из 50 отобранных имело место движение денежных средств в течение месяца. Постройте 99%-й доверительный интервал, оценивающий долю счетов в генеральной совокупности, по которым имело место движение денежных средств в течение месяца.

3. Компания занимающаяся консультированием в области инвестиций заявляет, что среднегодовой процент по акциям определённой отрасли промышленности составляет 11,5% . Инвестор, желая проверить истинность этого утверждения на основе случайной выборки 50 акций выявил, что среднегодовой процент по ним составил 10,8% с исправленным средним квадратическим отклонением s=3,4%. На основе имеющейся информации определите, имеет ли инвестор достаточно оснований, чтобы опровергнуть заявление компании? Принять уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

8. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

а) основная литература:

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -2-е изд., перераб. и доп.. – М.: Банки и биржи: ЮНИТИ, 2003, 2004.- 472с.

3. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

б) дополнительная литература:

1. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

2. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.

3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

5. Математика в экономике: В 2 ч.: учеб.: рек. Мин.обр.РФ/ А.С. Солодовников [и др.]. -2-е изд., перераб и доп.. –М.: Финансы и статистика. – 2003, 2005. Ч.1 .-2003.-2005.-384 с.

6. Математика в экономике: В 2 ч.: учеб.: рек. Мин.обр.РФ/ А.С. Солодовников [и др.]. -2-е изд., перераб и доп.. –М.: Финансы и статистика. – 2003, 2005. Ч.2 .-2003.-2005.-560 с.

7. Математика: энцикл. / гл. ред. Ю. В. Прохоров. - репр. изд. "Математического энциклопедического словаря" 1988 г. - М. : Большая Рос. энцикл., 2003. - 848 с.

в)программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

№	Наименование ресурса	Краткая характеристика
1	http://www.iqlib.ru	Интернет-библиотека образовательных изданий, в которой собраны электронные учебники, справочные и учебные пособия. Удобный поиск по ключевым словам отдельным темам и отраслям знаний
2	http://elibrary.ru	Научная электронная библиотека журналов

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Лекционная аудитория с мультимедийным оборудованием.

Рейтинг-план дисциплины

МАТЕМАТИКА

1семестр

		Модуль 1	**Модуль 2**	**Модуль 3**	**Модуль 4**	**Модуль 5**		
	Вид работы	Комплексные числа	Аналитическая геометрия	Введение в анализ	Приложение производной	Функции нескольких переменных	Итоговая работа за семестр	
1.	Контрольная работа	5	5	5	5	5		
2.	Тест						5	
3.	Расчётно-графическая работа		5		5	5		
4.	Коллоквиум			5				
5.	Домашние задания	1	1	1	1	1		
6.	Экспресс тестирование на лекциях	1	1	1	1	1		
	$\sum$	7	12	12	12	12	5	**60**
	Экзамен							**40**

Расчётно-графическая работа:
Сдача в срок -2 балла
Защита: «3»-1балл
«4»-2балла
«5»-3 балла

Коллоквиум:
«5»-5 баллов
«4»-4 балла
«3»-3 балла

Контрольная работа:
«5»-5 баллов
«4»-4 балла
«3»-3 балла

Рейтинг-план дисциплины
МАТЕМАТИКА
2 семестр

		Модуль 1	**Модуль 2**	**Модуль 3**		
	Вид работы	Матричная алгебра	Интегральное исчисление	Дифференциальные уравнения	Итоговая работа за семестр	
1.	Контрольная работа	5/5	5/5	5		
2.	Тест				5	
3.	Расчётно-графическая работа	5	5	5		
4.	Коллоквиум			5		
5.	Домашние задания	2	1	1		
6.	Экспресс тестирование на лекциях	2	2	2		
	$\sum$	19	18	18	5	**60**
	Экзамен					**40**

Расчётно-графическая работа:
Сдача в срок -2 балла
Защита: «3»-1 балл
«4»-2 балла
«5»-3 балла

Коллоквиум:
«5»-5 баллов
«4»-4 балла
«3»-3 балла

Контрольная работа:
«5»-5 баллов
«4»-4 балла
«3»-3 балла

Тест 25 заданий:
7-12 –1 балл
13-19 –3 балла
20-22 –4 балла
23-25 –5 баллов

Рейтинг-план дисциплины
МАТЕМАТИКА
3 семестр

		Модуль 1	**Модуль 2**	**Модуль 3**		
	Вид работы	Случайные события	Случайные величины	Математическая статистика	Итоговая работа за семестр	
1.	Контрольная работа	5/5	5/5	5/5		
2.	Тест				5	
3.	Расчётно-графическая работа	5	5			
4.	Коллоквиум	5				
5.	Домашние задания	2	2	1		
6.	Экспресс тестирование на лекциях	2	2	1		
	$\sum$	24	19	12	5	**60**
	Экзамен					**40**

Расчётно-графическая работа:
Сдача в срок -2 балла
Защита: «3»-1 балл
«4»-2 балла
«5»-3 балла

Коллоквиум:
«5»-5 баллов
«4»-4 балла
«3»-3 балла

Контрольная работа:
«5»-5 баллов
«4»-4 балла
«3»-3 балла

Тест 25 заданий:
7-12 –1 балл
13-19 –3 балла
20-22 –4 балла
23-25 –5 баллов

II КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ПРОГРАММНОГО МАТЕРИАЛА

1. Семестр I

Лекция 1.

Тема: Введение в анализ. Основные понятия

План

1. Числа. Переменные. Множества. Отображения.
2. Действительные и комплексные числа. Переменные и постоянные величины.
3. Конечные и бесконечные множества, операции над ними.

Цель: дать студентам представление о теоретических основах данной темы.

Задачи:

– сформировать представления, первичные знания по теме;
– формировать направленность, интерес;
– привить необходимую математическую культуру.

Ключевые вопросы

1. Под множеством понимается совокупность (собрание, набор) некоторых объектов. Объекты, которые образуют множества называются элементами, или точками, этого множества.

2. Комплексным числом z называется выражение $z = a + ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением: $i^2 = -1$; $i = \sqrt{-1}$.

При этом число a называется действительной частью числа z (a = $Re\ z$), а b- мнимой частью (b = $Im\ z$).

3. Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Объединение двух множеств А и В называется множество С, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств, т.е. С=AUB.

Например, если А= {а, в, d, e}; В= {a, e, f, c, к}, то С =AUB = {а, в, d, e, f, c, к}

Пересечением двух множеств А и В называется множество Д, состоящее из всех элементов, принадлежащих каждому из данных множеств А и В, т.е. Д = А∩В.

Разностью множеств А и В называется множество Е, состоящее из всех элементов множества А, которые не принадлежат множеству В, т.е. Е = А \ В.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 2.

Тема: Введение в анализ. Функциональная зависимость

План

1. Понятие функции. Область определения функции. Способы её задания.
2. Классификация функций, их графики.
3. Понятие обратной функции.
4. Основные элементарные функции, их графики.
5. Сложная функция.
6. Преобразование графиков функции.

Цель: раскрыть понятие функии и функциональной зависимости.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Рассмотрим два множества Х и У, элементами которых могут быть любые объекты. Предложим, что каждому элементу х множества Х по некоторому закону или способу поставлен в соответствие определенный элемент у множества У, то говорят что на множестве Х задана функция у = f(х), (или отображение множества Х во множество У). Множество Х называется областью определения функции f, а элементы у = f(х) образуют множество значений функции – У. х – независимая переменная (аргумент).

y – зависимая переменная, f – закон соответствия, знак функции.

2. Элементарные функции делятся на два класса:

1 класс алгебраических функций:

а) $y = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$, это многочлен (полином) n – степени или целая алгебраическая функция, где $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ – вещественные числа, коэффициенты многочлена;

б) $y = (A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n)/(B_0x^m + B_1x^{m-1} + \ldots + B_m)$, это дробно – рациональная функция, она представляет собой отношения двух многочленов;

в) Иррациональная функция, например, $y = \sqrt{x-1} + x^2$.

2 класс трансценденных функций.

а) $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, показательная функция,

б) $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, логарифмическая функция,

в) все тригонометрические функции,

г) все обратные тригонометрические функции,

д) функции вида $y = x^L$, где L – иррациональное число.

3. Все функции, с которыми встречаемся в школьном курсе, элементарные. Перечислим их:

1. $y = x^n$, $y = x^{-n}$ $y = x^{m/n}$, где $n \in N$, $m \in Z$. Эти функции называются степенными.
2. Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a>0$, $a \neq 1$
4. Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$.
5. Обратные тригонометрические функции $y = \mathrm{argsin}\, x$, $y = \arccos x$,

$y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$.

4. Пусть функция $y = f(u)$ есть функция от переменной u, определенная на множестве U с областью значений – У, а переменная $u = \varphi(x)$ функция от переменной x, определенной на множестве X с областью значения U. Тогда заданная на множестве X функция $y = f(\varphi(x))$ называется сложной функцией (функцией от функций).

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 3.
Тема: Функции в экономике
План

1. Функции спроса, потребления и предложения. Функции Торнквиста.
2. Производственная функция.
3. Функция прибыли.
4. Функция полезности.
5. Функция национального дохода.

Цель: рассмотреть наиболее часто используемые в экономике функции.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Рассмотрим какой-нибудь товар. При цене p за единицу товара обозначим D число единиц товара, которые покупатели на рынке желают купить. Функция $D=D(p)$ называется функцией спроса на товар. Она убывающая, т.к. при увеличении цены спрос на товар падает. Рассмотрим функцию $S=S(p)$ - число единиц товара, который предлагают производители для продажи. Эта функция называется функцией предложения товара. Она возрастающая, т.к. с увеличением цены на одну единицу товара предложение товара увеличивается.

2. Производственная функция есть экономико-математическое уравнение, связывающее ресурсы (факторы производства) и выпуск продукции. К ресурсам относятся: земля, капитал (основные фонды), труд, предпринимательская способность. Рассмотрим однофакторные про-

изводственные функции Q , зависящие от капитала K, либо от труда L, которые будем записывать: $Q=f(K)$ и $Q=f(L)$.

3. Прибыль одно из важнейших понятий в экономике, позволяющее оценить деятельность любого предприятия или фирмы. В наиболее общем виде прибыль можно определить как разницу между полным доходом (выручкой) от реализации продукции или услуг и полными издержками (затратами).Обозначим прибыль через букву П, полный доход R и полные затраты C, тогда: $П = R-C$.

4. Основным понятием теории потребления является функция полезности $U=U(x)$, где x - количество товара X. Данная функция – субъективная числовая оценка данным индивидом полезности $U(x)$ для него количества x товара X.

5. Рассмотрим простую двухсекторную модель национального дохода, состоящую из двух секторов — производителей и потребителей. Деньги, получаемые потребителями, т.е. их доход $У$, можно разделить на две части: приобретение товаров и услуг, называемое потреблением С(у), и сбережение (инвестиция) $S(y)$. Следовательно, имеем равенство $Y = C(y) + S(y)$.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 4.
Тема: Уравнения прямой на плоскости
План

1. Общее уравнение прямой.
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
3. Уравнение прямой проходящей через 2 точки.
4. Уравнение прямой проходящей через данную точку в данном направлении.
5. Уравнение прямой в отрезках.
6. Уравнение прямой проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
7. Основные задачи: угол между двумя прямыми, расстояние от точки до прямой.

Цель: рассмотреть различные виды уравнения прямой на плоскости, основные задачи по теме.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка $Ax + By + C = 0$, причем постоянные A, B не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют общим уравнением прямой.

2. Если общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ привести к виду: $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$ и обозначить $-\dfrac{A}{B} = k;\quad -\dfrac{C}{B} = b;\quad т.е.\quad y = kx + b$, то полученное уравнение называется уравнением прямой с угловым коэффициентом k.

3. Пусть на плоскости заданы две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

4. Выше записанное уравнение прямой можно упростить: $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если $x_1 = x_2$. Дробь $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ = k называется угловым коэффициентом прямой. $y - y_1 = \kappa(x - x_1)$ -уравнение прямой проходящей через данную точку в данном направлении.

5. Если в общем уравнении прямой Ах + Ву + С = 0 С $\neq$ 0, то, разделив на –С, получим: $-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y=1$ или $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, где $a=-\frac{C}{A}$; $b=-\frac{C}{B}$.

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент *а* является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а *b* – координатой точки пересечения прямой с осью Оу.

6. Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как $tg\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$.

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.

Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 5.
Тема: Кривые второго порядка
План

1. Общее уравнение кривых второго порядка.
2. Окружность.
3. Эллипс.
4. Гипербола.
5. Парабола.

Цель: сформировать знания о кривых второго порядка, исследовать форму кривых по их уравнениям.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Кривая второго порядка может быть задана уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Существует система координат (не обязательно декартова прямоугольная), в которой данное уравнение может быть представлено в одном из видов, приведенных ниже.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - уравнение эллипса.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ - уравнение “мнимого” эллипса.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - уравнение гиперболы.

$a^2x^2 – c^2y^2 = 0$ – уравнение двух пересекающихся прямых.

$y^2 = 2px$ – уравнение параболы.

$y^2 – a^2 = 0$ – уравнение двух параллельных прямых.

$y^2 + a^2 = 0$ – уравнение двух “мнимых” параллельных прямых.

$y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых.

$(x – a)^2 + (y – b)^2 = R^2$ – уравнение окружности.

2. Окружностью радиуса R с центром в точке M_0 называется множество всех точек М плоскости удовлетворяющих условию $M_0M=R$.

3. Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами есть величина постоянная, большая чем расстояние между фокусами.

4. Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.

5. Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 6.
Тема: Аналитическая геометрия в пространстве
План

1. Уравнение плоскости.
2. Плоскость. Основные задачи: угол между двумя плоскостями, расстояние от точки до плоскости.
3. Уравнение прямой в пространстве.
4. Прямая в пространстве. Основные задачи.
5. Прямая и плоскость в пространстве.
6. Поверхности второго порядка.

Цель: сформировать знания о плоскости, прямой в пространстве, поверхностях второго порядка, рассмотреть основные задачи по теме.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Уравнением данной поверхности в прямоугольной системе координат $OXYZ$ называется такое уравнение $F(x, y, z) = 0$ с тремя переменными x, y, z, которому удовлетворяет координаты каждой точки лежащей на поверхности и не удовлетворяют координаты точки не лежащие на этой поверхности.

Простейшей поверхностью является плоскость.

Общее уравнение плоскости имеет вид: $Ax + By + Cz + D = 0$.

2. Угол между плоскостями находится по формуле:

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Выбор знака косинуса зависит от того, какой угол между плоскостями следует найти – острый, или смежный с ним тупой.

3. Возьмем произвольную прямую и вектор $\vec{S}$ (m, n, p), параллельный данной прямой. Вектор $\vec{S}$ называется направляющим вектором прямой. На прямой возьмем две произвольные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и M(x, y, z). Обозначим радиус- векторы этих точек как $\overrightarrow{r_0}$ и $\vec{r}$, очевидно, что $\vec{r}$ - $\overrightarrow{r_0}$ = $\overrightarrow{M_0M}$. Т.к. векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{S}$ коллинеарны, то верно соотношение $\overrightarrow{M_0M}$ = $\vec{S}$t, где t – некоторый параметр.

Итого, можно записать: $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{S}t$.

Т.к. этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки прямой, то полученное уравнение – параметрическое уравнение прямой.

Это векторное уравнение может быть представлено в координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

Преобразовав эту систему и приравняв значения параметра t, получаем канонические уравнения прямой в пространстве:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

4. Угол между двумя прямыми в пространстве вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi=\pm\frac{\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}}{\left|\overrightarrow{S_1}\right|\left|\overrightarrow{S_2}\right|}=\pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

5. Угол между прямой и плоскостью в пространстве вычисляется по формуле:

$$\sin\varphi=\pm\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 7.
Тема: Числовая последовательность. Предел числовой последовательности
План

1. Числовая последовательность.
2. Предел последовательности.
3. Геометрический смысл предела последовательности.

Цель: расширить представление о числовой последовательности, сформировать знания о пределе числовой последовательности.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана последовательность: $x_1, x_2, \ldots, x_n = \{x_n\}$. Общий элемент последовательности является функцией от n: $x_n = f(n)$.

2. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется условие: $|a-x_n|<\varepsilon$. Это записывается: $\lim x_n = a$.

3. Определение предела последовательности геометрически можно сформулировать так: число a предел последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε-окрестности точки a найдётся натуральное число N, такое что все значения $\{x_n\}$ для которых $n > N$ попадут в ε-окрестности точки a.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 8.
Тема: Предел функции. Основные теоремы о пределах
План

1. Предел функции.
2. Односторонние пределы.
3. Основные теоремы о пределах.

Цель: сформировать знания о пределе функции, рассмотреть основные теоремы о пределах.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Число A называется пределом функции f(x) при x→a, если для любого ε>0 существует такое число Δ>0, что для всех x таких, что $0 < |x - a| < \Delta$ верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

2. Если $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ только при x < a, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A_1$ - называется пределом функции f(x) в точке x = a слева, а если $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ только при x > a, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A_2$ называется пределом функции f(x) в точке x = a справа.

3. Теорема 1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при x→a.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Теорема 5. Если f(x)>0 вблизи точки x = a и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то A>0.

Теорема 6. Если $g(x) \le f(x) \le u(x)$ вблизи точки x = a и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$, то и $\lim\limits_{x\to a} = A$.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 9.

Тема: Бесконечно малые и бесконечно большие функции

План

1. Определение бесконечно большой и бесконечно малой функции.
2. Свойства бесконечно большой и бесконечно малой функции.
3. Эквивалентные бесконечно малые функции и их применение.

Цель: сформировать знания о бесконечно большой и бесконечно малой функциях, их свойствах.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Функция называется бесконечно большой при x→a, где a – чосли или одна из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, где A – число или одна из величин ∞, +∞ или -∞.

Функция f(x) называется бесконечно малой при x→a, где a может быть числом или одной из величин ∞, +∞ или -∞, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

2. <u>Свойства бесконечно малых функций:</u>

1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при x→a тоже бесконечно малая функция при x→a.

2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при x→a тоже бесконечно малая функция при x→a.

3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки x = a является бесконечно малой функцией при x→a.

4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю, есть величина бесконечно малая.

3. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$, то функция α называется бесконечно малой более высокого порядка, чем функция β.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=A, \quad A\neq 0, \quad A=const$, то α и β называются бесконечно малыми одного порядка.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$, то функции α и β называются эквивалентными бесконечно малыми. Записывают $\alpha \sim \beta$.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 10.

Тема: Непрерывность функции. Классификация точек разрыва

1. Основные понятия. Непрерывность функции в точке и в интервале.
2. Основные теоремы о непрерывных функциях.
3. Точки разрыва функции и их классификация.

Цель: сформировать знания о непрерывности функции, точках разрыва.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Функция f(x), определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется непрерывной в точке x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

2. Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.

Частное двух непрерывных функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что g(x) не равна нулю в точке x_0.

Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:

Если u = f(x), v = g(x) – непрерывные функции в точке x = x_0, то функция v = g(f(x)) – тоже непрерывная функция в этой точке.

3. Точка x_0 называется точкой разрыва функции f(x), если f(x) не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

Точка x_0 называется точкой разрыва 1- го рода, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)\neq \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке x = x_0, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Точка x_0 называется точкой разрыва 2 – го рода, если в этой точке функция f(x) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 11.

Тема: Производная функции, ее геометрический и физический смысл

План

1. Задачи, приводящие к понятию производной.
2. Определение производной. Геометрический и физический смысл производной.
3. Уравнения касательной и нормали.

4. Правила дифференцирования. Таблица производных.
5. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций.
6. Производные высших порядков.

Цель: расширить представление о производной, рассмотреть правила дифференцирования.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1.Производной функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

2.Уравнение касательной к кривой: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали к кривой: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

3.Обозначим $f(x) = u$, $g(x) = v$- функции, дифференцируемые в точке x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$
3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$.

4.Пусть $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $t_0 \le t \le T$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$- производная функции, заданной параметрически.

5.Пусть функция f(x)- дифференцируема на некотором интервале.
Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную функции f′(x), получим вторую производную функции f(x). $y'' = f''(x) = \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$ т.е. y′′ = (y′)′ или $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 12.
Тема: Дифференциал функции
План

1. Понятие дифференциала функции.
2. Основные теоремы о дифференциале.
3. Применение дифференциала к приближённым вычислениям.

Цель: сформировать знания о дифференциале, его свойствах и применении.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;

– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Дифференциалом функции f(x) в точке x называется главня линейная часть приращения функции. Обозначается dy или df(x).

Из определения следует, что dy = f′(x)Δx или *dy = f′(x)dx*. Можно также записать: $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

2. Если *u = f(x)* и *v = g(x)*- функции, дифференцируемые в точке x, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

d(u ± v) = (u ± v)′dx = u′dx ± v′dx = du ± dv;

d(uv) = (uv)′dx = (u′v + v′u)dx = vdu + udv;

d(Cu) = Cdu;

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

3. Формула, для вычисления приближенных значений функции:

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 13.
Тема: Основные теоремы дифференциального исчисления
План

1. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши.
2. Правило Лопиталя.

Цель: сформулировать и доказать основные теоремы дифференциального исчисления, рассмотреть правило Лопиталя.

Задачи:
– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Теорема Роля. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], дифференцируема на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны f(a) = f(b), то на интервале (a, b) существует точка ε, a < ε < b, в которой производная функция f(x) равная нулю, f′(ε) = 0.

Теорема Лагранжа. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b), то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка ε a < ε < b, такая, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\varepsilon)$.

Теорема Коши. Если функции f(x) и g(x) непрерывны на отрезке [a, b] и дифференцируемы на интервале (a, b) и g′(x) ≠ 0 на интервале (a, b), то существует по крайней мере одна точка ε, a < ε < b, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.$$

2. Теорема (правило Лопиталя). Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы в вблизи точки a, непрерывны в точке a, g′(x) отлична от нуля вблизи a и f(a) = g(a) = 0, то предел отношения функций при x→a равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 14.

Тема: Исследование функций с помощью производных

1. Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции.
2. Выпуклость и вогнутость. Точки перегиба.
3. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.
4. Схема исследования поведения функции с помощью первой и второй производных.

Цель: сформировать знания о приложении производной к исследованию функций.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на промежутке (a, b), причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке [a, b].

Если $f'(x)<0$ в промежутке (a, b), то f(x) убывает на отрезке [a, b].

Функция f(x) имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Функция f(x) имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 +\Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

2. Кривая обращена выпуклостью вверх на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется выпуклой, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется вогнутой.

Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется точкой перегиба.

3. План нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

1) Найти критические точки функции.
2) Найти значения функции в критических точках.
3) Найти значения функции на концах отрезка.
4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

4. Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

1) Область существования функции.

Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.

2) Точки разрыва. (Если они имеются).
3) Интервалы возрастания и убывания.
4) Точки максимума и минимума.
5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.
6) Области выпуклости и вогнутости.
7) Точки перегиба. (Если они имеются).
8) Асимптоты. (Если они имеются).
9) Построение графика.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 15.

Тема: Приложения производной в экономике

План

1. Предельные величины.
2. Издержки производства.
3. Производительность труда.
4. Эластичность функции.

Цель: сформировать знания о приложении производной в экономике.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;

– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Предельные величины характеризуют процесс изменения экономического объекта. Таким образом, производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого исследуемого фактора.

2. Пусть зависимость издержек производства от объема выпускаемой продукции выражается формулой $C = C(Q)$.Функция средних издержек на единицу продукции определяется по формуле $\overline{C} = \dfrac{C}{Q}$.

Предельные издержки определяются по формуле $C_{пр} = C'$.

3. Производительность труда есть производная от объема произведенной продукции по времени $Z = Q'(t)$.

4. Эластичностью функции $y= f(x)$ называется предел отношения относительного приращения функции $\dfrac{\Delta y}{y}$ к относительному приращению независимой переменной $\dfrac{\Delta x}{x}$ при $\Delta x \to 0$ и записывается

$$\varepsilon_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} \div \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}y'.$$

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 16.

Тема: Функции нескольких переменных. Основные понятия

План

1. Понятие о метрическом пространстве. Окрестность точки. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве.
2. Понятие о функции многих переменных.
3. Предел и непрерывность функции многих переменных.

Цель: сформировать первоначальные знания о функции нескольких переменных.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ радиуса r называется совокупность всех точек (x, y), которые удовлетворяют условию $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$.

2. Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому - либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z, то переменная z называется функцией двух переменных z = f(x, y).

Если паре чисел (x, y) соответствует одно значение z, то функция называется однозначной, а если более одного, то – многозначной.

Областью определения функции z называется совокупность пар (x, y), при которых функция z существует.

3. Число A называется пределом функции f(x, y) при стремлении точки M(x, y) к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r > 0$, что для любой точки M(x, y), для которых верно условие: $MM_0 < r$,также верно и условие $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Записывают: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$.

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции f(x, y). Тогда функция z = f(x, y) называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, причем точка M(x, y) стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 17

Тема: Экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум

План

1. Частные производные и полный дифференциал функции нескольких переменных функции.
2. Производная высших порядков.
3. Экстремум функции нескольких переменных.Понятие условного экстремума. Метод неопределённых множителей Лагранжа.

Цель: сформировать знания об экстремуме функции нескольких переменных.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;

– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;

– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Пусть в некоторой области задана функция z = f(x, y). Возьмем произвольную точку M(x, y) и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z$ = f(x + Δx, y) – f(x, y) называется частным приращением функции по x.

Можно записать $\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$.

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется частной производной функции z = f(x, y) по x.

Обозначение: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$; $f'_x(x, y)$.

Полным дифференциалом функции z = f(x, y) называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y)

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

2. Если функция f(x, y) определена в некоторой области D, то ее частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ тоже будут определены в той же области или ее части. Будем называть эти производные частными производными первого порядка.

Производные этих функций будут частными производными второго порядка.

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

Частные производные вида $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$ и т.д. называются смешанными производными.

3. Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$f(x_0, y_0) > f(x, y)$,то точка M_0 называется точкой максимума.

Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство $f(x_0, y_0) < f(x, y)$,то точка M_0 называется точкой минимума.

Условный экстремум находится, когда переменные x и y, входящие в функцию u = f(x, y), не являются независимыми, т.е. существует некоторое соотношение φ(x, y) = 0, которое называется уравнением связи.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 18.

Тема: Приложения функций нескольких переменных к решению экономических задач

План

1. Эластичность функции нескольких переменных.
2. Полезность. Предельная полезность.
3. Производственная функция.
4. Кривые безразличия производства.

Цель: рассмотреть применение частных производных в экономических задачах.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Спрос на отдельный товар *D* при прочих равных условиях зависит от уровня цен всех товаров. Практически наибольший интерес представляет изучение влияния цены одного альтернативного товара p_A. Кроме того, спрос на товар зависит от цены данного товара *p* и доходов потребителя *y*, т.е. спрос-это функция трёх переменных $D = f(p,\ p_A,\ y)$.

Эластичность спроса от цены (собственной) : $\varepsilon_P = \dfrac{p}{D} \cdot D'_p$.

Эластичность спроса от цены альтернативного товара (перекрёстная эластичность): $\varepsilon_A = \dfrac{p_A}{D} \cdot D_{P_A}$. Эластичность спроса от дохода: $\varepsilon_Y = \dfrac{y}{D} \cdot D'_Y$.

2. Основным понятием теории потребления является функция полезности $U = f(x,\ y)$. Эта функция выражает меру полезности набора *(x,y)*, где *x*- количество товара *X*, а *y*- количество товара *У*. Чувствительность набора *(x,y)* к незначительному изменению *x* при фиксированном *y* называется предельной полезностью *x* и определяется как частная производная U'_x. Аналогично, предельная полезность *y* определяется как U'_y. Изменение полезности приближённо определяется формулой $\Delta U = \dfrac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial U}{\partial y}\Delta y,$ когда *x* и *y* изменяются одновременно.

3. Производственная функция есть экономико-математическое уравнение, связывающее ресурсы (факторы производства) и выпуск продукции. К ресурсам относятся: земля, капитал (основные фонды), труд, предпринимательская способность. Ограничимся двумя ресурсами: капиталом *K* и трудом *L*, тогда производственная функция примет вид: $Q = f(K,\ L)$.

Предельным продуктом фактора производства называется добавочный продукт, полученный в результате добавления одной единицы данного фактора (ресурса) при неизменной величине остальных факторов производства. Иными словами, это частная производная от производственной функции по соответствующей переменной (ресурсу).

Функция $Q = f(K,\ L)$ имеет две частные производные: предельный продукт капитала Q'_K и предельную производительность труда Q'_L.

4. Линия, в каждой точке которой различные сочетания факторов производства (капитал Л и труд L) дают одно и то же количество выпускаемой продукции Q, называется изоквантой, или кривой безразличия производства.

Величина углового коэффициента касательной к кривой безразличия, взятая с обратным знаком, определяет коэффициент заменяемости ресурсов $R = -\dfrac{dK}{dL}$.

Литература: [1], [2], [3].

2. Семестр II
Лекция 1
Тема: Матрицы
План

1. Определение матрицы. Примеры.
2. Виды матриц. Равенство матриц. Транспонирование.
3. Сложение матриц. Свойства операции сложения.
4. Умножение матрицы на число. Свойства операции умножения матрицы на число.
5. Умножение матриц. Свойства операции умножения матриц.

Цель: сформировать первоначальные знания о матрицах, операциях над матрицами и основных свойствах операций над матрицами.

Задачи:

– актуализировать представления о матрицах как о аппарате представления данных в сфере торгового дела;

– сообщить теоретический материал по данной теме;

– привести примеры по выполнению действий над матрицами.

Ключевые вопросы

1. Прямоугольная таблица чисел

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

расположенных в m строк и n столбцов, называется матрицей размера $m\times n$.

Числа a11, a12, …, amn называются ее элементами.

2. Если число строк матрицы равно числу ее столбцов m = n, то матрица называется квадратной порядка n. Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют главную диагональ, а элементы a_{1n}, $a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ – побочную диагональ квадратной матрицы. Квадратная матрица называется диагональной, если все ее элементы, не лежащие на главной диагонали, равны нулю. Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице. Матрица любого размера называется нулевой, если все ее элементы равны нулю. Матрица, состоящая из одной строки, называется матрицей-строкой**,** а из одного столбца – матрицей-столбцом.

Транспонированием матрицы называется замена ее столбцов (строк) на строки (столбцы) с сохранением их порядка.

Матрицы $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одного размера называются равными, если все их соответствующие элементы равны, т.е. A=B, если $a_{ij} = b_{ij}$ для всех i и j.

3. Суммой двух матриц A и B одного размера $m\times n$ называется матрица C= A+B, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для i= 1,2,…,m; j=1,2,…,n.

4**.** Произведением матрицы A на число α называется матрица, элементы которой получены умножением всех элементов матрицы A на число α, т. е. $\alpha A = A\alpha = (\alpha a_{ij})$.

5. Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. В этом случае матрицы называются согласованными.

Произведением матриц $\underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B}$ называется такая матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B: $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ik} b_{kj}$.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 2
Тема: Определители
План

1. Определение определителя второго порядка. Его вычисление.

2. Определение определителя третьего порядка. Правило «треугольников» вычисления определителей третьего порядка.

3. Определитель порядка *n*.

4. Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя.

5. Свойства определителей.

6. Методы вычисления определителей.

Цель: Сформировать знания об определителях их основных свойствах и способах вычисления определителей.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры по вычислению определителей;
- провести рефлексию.

Ключевые вопросы

1. Определитель второго порядка $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum\limits_j (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2}$, $j=(j_1, j_2)$ –перестановки из чисел 1, 2; t – число инверсий в перестановке вторых индексов произведения $a_{1j_1} a_{2j_2}$, суммирование ведется по всем перестановкам (j_1, j_2).

2. Определитель третьего порядка $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum\limits_j (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$, $j=(j_1, j_2, j_3)$ – все возможные перестановки вторых индексов в произведении $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$, суммирование ведется по всем перестановкам.

3. Определитель порядка n: $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum\limits_j (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$, суммирование ведется по всем перестановкам $j=(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ из чисел 1, 2, …, n; t – число инверсий в перестановке вторых индексов произведения $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$.

4. Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя Δ порядка n называется определитель порядка n-1, который получается из Δ вычеркиванием i – строки и j – столбца. Число $A_{ij}=(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя.

5. К свойствам определителя относятся следующие: величина определителя не меняется при транспонировании; определитель меняет знак, если поменять местами две строки (два столбца); определитель, у которого две строки (два столбца) одинаковы, равен 0; общий множитель элементов какой-нибудь строки (столбца) можно выносить за знак определителя; определитель равен произведению элементов главной диагонали, если все элементы определителя, находящиеся ниже (выше) главной диагонали, равны 0; определитель не изменится, если элементам какой-нибудь строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же произвольное число, не равное нулю; определитель равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на их алгебраические дополнения: $\Delta=a_{i1}A_{i1}+ a_{i2}A_{i2}+\ldots+ a_{in}A_{in}\ (i=\overline{1,n})$, $\Delta=a_{1j}A_{1j}+ a_{2j}A_{2j}+\ldots+ a_{nj}A_{nj}\ (j=\overline{1,n})$.

6. К методам вычисления определителя относят метод разложения по элементам строки (столбца), метод накопления нулей ниже главной диагонали и комбинированный.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 3
Тема: Системы линейных уравнений
План

1. Определение системы линейных уравнений. Однородные и неоднородные системы линейных уравнений.

2. Свойства систем уравнений: совместимость, несовместимость, определённость.

3. Эквивалентность систем; элементарные преобразования, сохраняющие эквивалентность систем.

4. Общее и частное решение системы линейных уравнений.

Цель: сформировать знания о видах и свойствах систем линейных уравнений, а также структурировать полученные знания о частном и общем решении систем.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– привести примеры по исследованию систем линейных уравнений;
– закрепить полученную информацию.

Ключевые вопросы

В общем виде система m линейных уравнений с n неизвестными (переменными) x_1, x_2, …, x_n имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Здесь a_{ij} и b_j – произвольные числа (i = 1,2, …, m; j = 1,2, …, n), которые называются соответственно коэффициентами при неизвестных и свободными членами уравнений.

Решением системы уравнений называется набор n чисел $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, ... , $x_n=a_n$, при подстановке которых каждое из уравнение системы обращается в тождество.

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение; и несовместной, если система не имеет решений. Совместная система уравнений имеет либо одно решение - и в таком случае называется определенной, либо больше одного решения и тогда она называется неопределенной.

Системы уравнений называются эквивалентными, если имеют одно и то же множество решений. Элементарные преобразования системы на практике заменяют соответствующими преобразованиями расширенной матрицы системы, содержащей коэффициенты при неизвестных и свободные члены.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 4
Тема: Методы решения систем линейных уравнений
План

1. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

2. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

3. Обратная матрица.

4. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Цель: расширить первоначальные представления студентов р методах решения систем линейных уравнений.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– привести примеры по решению систем линейных уравнений;
– закрепить полученную информацию.

Ключевые вопросы

1. Метод Гаусса − метод последовательного исключения переменных −заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к эквивалентной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная

с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Элементарными преобразованиями системы являются: умножение уравнения на число отличное от нуля; сложение уравнения умноженного на любое число, с другим уравнением; перестановка уравнений; отбрасывание уравнений вида 0 = 0. Элементарные преобразования системы на практике заменяют соответствующими преобразованиями расширенной матрицы системы, содержащей коэффициенты при неизвестных и свободные члены.

2. Пусть Δ -определитель матрицы системы, а Δj -определитель, полученный из определителя Δ заменой j-го столбца свободных членов B. Тогда, если $\Delta \neq 0$, система линейных уравнений имеет единственное решение, определяемое по формулам $x_j = \dfrac{\Delta_{x_j}}{\Delta}$, j = 1,2, **...** , n. Данные формулы называются формулами Крамера.

3. Матрица A^{-1} называется обратной квадратной матрице *A*, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E -единичная матрица.

Обратная матрица $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\tilde{A}^T = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, где – $\tilde{A}^T$ присоединенная транспонированная матрица, элементы которой являются алгебраическими дополнениями элементов матрицы *A*.

4. Система уравнений в матричной форме примет вид AX = B. Пусть матрица системы A является невырожденной, т.е. существует обратная матрица A^{-1}. Умножив обе части этого уравнения слева на A^{-1}, получаем решение системы уравнений. $X = A^{-1}B$, где A^{-1} обратная матрица.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 5

Тема: Векторное пространство и линейные преобразования

План

1. Вектор. Длина вектора.
2. Линейные операции над векторами.
3. Свойства векторов.
4. Базис. Линейная зависимость векторов.

Цель: сформировать знания о векторном пространстве и линейных преобразованиях.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и нулевой вектор, начало и конец которого совпадают.

Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right|$$

Векторы называются коллинеарными, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Векторы называются компланарными, если существует плоскость, которой они параллельны.

Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Векторы называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

2. Линейными операциями над векторами называется сложение и умножение на число.

Суммой векторов является вектор - $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Произведение - $\vec{b} = \alpha\,\vec{a}$; $\left|\vec{b}\right| = \alpha\left|\vec{a}\right|$, при этом $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), если $\alpha > 0$.

Вектор $\vec{a}$ противоположно направлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$), если $\alpha < 0$.

3. Свойства векторов.

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - коммутативность.

2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$

5) $(\alpha\cdot\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ – ассоциативность

6) $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ - дистрибутивность

7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

8) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$

4. 1) Базисом в пространстве называются любые 3 некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

2) Базисом на плоскости называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.

3)Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор.

Если $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ - базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2} + \gamma\,\overrightarrow{e_3}$, то числа α, β и γ - называются компонентами или координатами вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

Векторы $\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_n}$ называются линейно зависимыми, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$, при не равных нулю одновременно α_i , т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0$.

Если же только при $\alpha_i = 0$ выполняется $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$, то векторы называются линейно независимыми.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 6

Тема: Теорема Кронекера -Капелли. Системы линейных однородных уравнений.

План

1. Теорема Кронекера-Капелли.
2. Общее и частное решение системы линейных уравнений.
3. Системы линейных однородных уравнений

Цель: сформулировать теорему Кронекера Капели а также структурировать полученные знания о частном и общем решении систем.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры по исследованию систем линейных уравнений;
- закрепить полученную информацию.

Ключевые вопросы

Рангом матрицы А называется наивысший порядок минора матрицы А, отличного от нуля. Обозначается ранг матрицы А символами: $rangA$ или $r(A)$. Из определения следует, что если $r(A)=k$, то существует минор порядка k матрицы А, отличный от нуля, а все миноры порядка (k+1) равны нулю или не существуют.

Чтобы система была совместной, необходимо и достаточно, чтобы $r(A)=r(B)$, при этом: а) если $r(A)=r(B)$=n – система имеет единственное решение, б) если $r(A)=r(B)$<n система имеет множество решений, в которой r независимых уравнений, r базисных переменных и n-r свободных переменных.

Система, у которой все свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$), называется однородной. Однородная система всегда совместна, так как набор из *n* нулей удовлетворяет любому уравнению такой системы.

Литература: [1], [2], [3].

Лекция 7
Тема: Применение элементов линейной алгебры в экономике
План

1. Собственные векторы и собственные значения матрицы.
2. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики.
3. Линейная модель торговли.

Цель: дать первоначальные понятия о применении матричных моделей в экономике и развить умения использования методов линейной алгебры

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;

– привести примеры по использования методов линейной алгебры в экономических задачах;

– осуществить рефлексию.

Ключевые вопросы

1. Ненулевой вектор $\vec{x}$ называется собственным вектором матрицы А, соответствующий собственному значению λ, если имеет место равенство: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

2. В. Леонтьев на основании анализа экономики США в предвоенный период установил важный факт: в течение длительного времени величины $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ остаются практически неизменными и могут рассматриваться как постоянные числа, где x_i – общий объем продукции i-й отрасли (ее валовый выпуск); x_{ij}– объем продукции i-й отрасли, потребляемый j-й отраслью при производстве объема продукции x_j.

Уравнение $\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}$ называются экономико-математической моделью межотраслевого баланса или вместе с интерпретацией матрицы А и векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ ($\vec{x}$ – вектор валового выпуска; $\vec{y}$ – вектор конечного потребления; А – матрица прямых затрат.) – моделью Леонтьева или моделью «затраты - выпуск».

3. Пусть бюджеты *n* стран, которые обозначим $x_1, x_2, \ldots, x_n$, расходуются на покупку товаров; a_{ij} – доля бюджета x_j, которую *j*-я страна тратит на закупку товаров у i-й страны.

Тогда, если весь бюджет идет на закупки внутри страны и вне ее (это можно трактовать как торговый бюджет), справедливо равенство: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\ \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22}\ \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, a_{n2}\ \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$, в этом случае, называется структурной матрицей торговли. Общая выручка от внутренней и внешней торговли для i-й страны выражается равенством $p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$.

Вектор бюджетов стран бездефицитной международной торговли есть собственный вектор структурной матрицы торговли, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 8

Тема: Первообразная функция и неопределённый интеграл

План

1. Первообразная функция
2. Определение неопределенного интеграла
3. Свойства неопределенного интеграла
4. Таблица основных элементарных функций

Цель: углубить представления студентов о первообразной функции и сформировать знания о неопределенном интеграле.

Задачи:

– актуализировать представления о первообразной функции;

– сообщить теоретический материал по данной теме;

– привести примеры по использованию таблицы и свойств неопределенного интеграла.

Ключевые вопросы

1. Функция *F(x)* называется первообразной для функции *f(x)* на некотором промежутке *X*, если для всех значений *x* из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

2. Если функция *F(x)* – первообразная для функции *f(x)* на промежутке *X*, то множество функций *F(x) + C*, где *C* – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции *f(x)* на этом промежутке и обозначается символом $\int f(x)dx = F(x) + C$.

3. Неопределенный интеграл обладает следующими его свойствами:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) $d\int f(x)dx = f(x)dx$;

3) $\int dF(x) = F(x) + C$;

4) $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)\,dx, \quad \kappa = const \neq 0$;

5) $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)\,dx$;

6) $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$;

7) $\int f(u)du = F(u) + C$.

4. Таблица неопределенных интегралов, где $u = \varphi(x)$

1. $\int du = u + C.$

2. $\int\limits_{n\neq -1} u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C.$

3. $\int\limits_{u\neq 0} \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C.$

4. $\int\limits_{a\neq 1,\, a>0} a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C.$

5. $\int e^u du = e^u + C.$

6. $\int \sin u du = -\cos u + C.$

7. $\int \cos u du = \sin u + C.$

8. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tgu + C.$

9. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C.$ 10. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C.$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$ 12. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C.$

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 9

Тема: Основные методы интегрирования

План

1. Метод подстановки
2. Интегрирование по частям

Цель: сформировать знания о методах интегрирования.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– привести примеры по вычислению интегралов различными методами;
– закрепить полученную информацию.

Ключевые вопросы

1. Метод подстановки или метод замены переменной основан на формуле $\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{matrix} \right| = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$. Данная формула называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

2. Метод интегрирования по частям основан на использовании формулы $\int udv = uv - \int vdu$. Эта формула позволяет свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться более простым.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 10

Тема: Интегрирование рациональных дробей

План

1. Интегрирование простейших дробей.
2. Разложение правильной дроби на сумму простейших дробей.

Цель: сформировать знания об интегрировании рациональных дробей.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– привести примеры интегрирования рациональных дробей;
– закрепить полученную информацию.

Ключевые вопросы

1. Рациональные дроби I. $\frac{A}{x-a}$, II. $\frac{A}{(x-a)^n}$, III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, IV. $\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}$, где A, a, p, q, M, N, $(n \geq 2)$ – действительные числа, n – натуральное число, а $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней, относятся к простейшим рациональным дробям.

Интегралы I и II берутся с помощью подстановки $x - a = t$, а III сводится к табличному подстановкой $z = \frac{1}{2}(x^2 + px + q)' = x + \frac{p}{2}$.

2. Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде суммы конечного числа простейших рациональных дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-\alpha)^{\kappa}}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^{\kappa-1}}+\dots+\frac{A_{\kappa}}{x-\alpha}+\frac{B_1}{(x-\beta)^{\ell}}+\frac{B_2}{(x-\beta)^{\ell-1}}+\dots+\frac{B_{\ell}}{x-\beta}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+g)^S}+$$
$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+g)^{s-1}}+\dots+\frac{M_sx+N_s}{x^2+px+g}+\frac{K_1x+\lambda_1}{(x^2+ux+v)^r}+\frac{K_2x+\lambda_2}{(x^2+ux+v)^{r-1}}+\dots+\frac{K_rx+\lambda_r}{x^2+ux+v}+\dots,$$

где $A_1, A_2, \dots, A_{\kappa}, B_1, B_2, \dots, B_{\ell}, M_1, N_1, \dots, M_s, N_s, K_1, \lambda_1, \dots, K_r, \lambda_r$ – некоторые вещественные числа, подлежащие определению, $\alpha, \beta, \dots$ - действительные корни многочлена Q(x) кратностей $\kappa, \ell, \dots$ соответственно; $p, g, u, v, \dots$ - действительные числа; x^2+px+g, $x^2+ux+v, \dots$ имеет комплексные сопряженные корни; число $\kappa+\ell+\dots+s+r+\dots$ равно степени многочлена Q(x).

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 11

Тема: Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций

План

1. Интегрирование тригонометрических функций.
2. Интегрирование иррациональных функций.

Цель: сформировать знания об интегрировании тригонометрических и иррациональных функий.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– привести примеры интегрирования тригонометрических и иррациональных функций;
– закрепить полученную информацию.

Ключевые вопросы

1. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Здесь R – обозначение некоторой рациональной функции от переменных sinx и cosx.

Интегралы этого вида вычисляются с помощью подстановки $t = tg\frac{x}{2}$. Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную.

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad x=2arctgt; \qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2};$$

Таким образом: $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int r(t)dt.$

Описанное выше преобразование называется универсальной тригонометрической подстановкой.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ если функция R является нечетной относительно cosx. Тогда $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\sin x)\cos x dx = \int r(t)dt.$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ если функция R является нечетной относительно sinx. Тогда $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\cos x)\sin x dx = -\int r(t)dt.$

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ функция R четная относительно sinx и cosx.
Для преобразования функции R в рациональную используется подстановка t = tgx.
Тогда $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(t)dt$.

2. Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ где n- натуральное число.

С помощью подстановки $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ функция рационализируется.

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n; \qquad x = \frac{t^n - b}{a - ct^n}; \qquad dx = \left(\frac{t^n - b}{a - ct^n}\right)' dt;$$

Тогда $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{t^n - b}{a - ct^n}, t\right)\left(\frac{t^n - b}{a - ct^n}\right)' dt = \int r(t)dt.$

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 12
Тема: Определенный интеграл
План

1. Определение определенного интеграла и его свойства
2. Условие интегрируемости функций
3. Формула Ньютона – Лейбница
4. Вычисление определенного интеграла по частям
5. Вычисление определенного интеграла методом подстановки
6. Несобственные интегралы

Цель: расширить представления студентов об определенном интеграле и методах его вычисления, дать первоначальное понятие о несобственных интегралах.

Задачи:

– актуализировать представления об определенном интеграле;
– сообщить теоретический материал по данной теме;
– привести примеры по вычислению определенных и несобственных интегралах.

Ключевые вопросы

1. Если существует конечный предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$, то этот предел называется определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [*a*,b]:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \ .$$

Сама функция f(x) на отрезке [a,b] называется интегрируемой подынтегральной функцией, *a* – верхний предел интегрирования, b – нижний предел интегрирования, а *x* – переменная интегрирования.

2. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b], то она интегрируема на этом отрезке.

3. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и функция F(x) является ее некоторой первообразной на этом отрезке, то имеет место формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

4. Пусть u=u(x) и v=v(x) – непрерывные и дифференцируемые (т.е. имеют непрерывные производные) функции на отрезке [a,b], тогда $\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu$.

5. Пусть выполняются следующие условия: функция f(x) непрерывна на отрезке [*a*,b]; функция x=φ(t) непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке [α, β]; *a*=φ(α),

b=φ(β). Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

6. Пусть функция $y = f(x)$ задана на луче $[a,\infty)$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a,b]$, где $a<b<\infty$. Если существует предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то он называется несобственным интегралом I рода от функции $f(x)$ на промежутке $[a,\infty)$ и обозначается символом: $\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$

Если функция $y = f(x)$ непрерывна при $a < x \le b$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x=a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx, \quad (\varepsilon > 0)$.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 13

Тема: Приложения определенного интеграла

План

1. Геометрические приложения определённого интеграла

1.1 Вычисление площади фигуры

1.2. Вычисление длины дуги

1.3. Вычисление объема тела вращения

2. Физические приложения определённого интеграла

3. Экономические приложения определённого интеграла

Цель: расширить представления студентов о приложениях определенного интеграла в геометрических задачах и сформировать знания о его физических и экономических приложениях.

Задачи:

– актуализировать представления о геометрических приложениях определенном интеграле;

– сообщить теоретический материал по данной теме;

– привести примеры по вычислению определенных и несобственных интегралах.

Ключевые вопросы

1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a,b]$. В силу геометрического смысла определенного интеграла площадь криволинейной трапеции численно равна интегралу от данной функции по данному отрезку, т.е. $S = \int\limits_a^b f(x)dx$. Длина L дуги кривой, заданной уравнением y=f(x), a ≤ x ≤ b вычисляется по формуле: $L = \int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx$.

Объем тела вращения определяется формулой $V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

2. Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью v=v(t). Путь S, пройденный точкой за промежуток времени от t_1 до t_2 вычисляется по формуле: $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.

3. Если запас товара на складе есть функция времени $f(t)$, то издержки хранения

за время от a до b равны: $C=\int_a^b pf(t)dt$. По известной функции производительности труда объем произведенной продукции $Q=\int_0^T f(t)dt$, где $f(t)$ - производительность труда в момент времени t, $[0,T]$- рассматриваемый промежуток времени. Пусть известна функция $t=t(x)$, описывающая изменение затрат времени t на изготовление изделия, в зависимости от степени освоения производства, где x - порядковый номер изделия в партии. Тогда среднее время t_{cp}, затраченное на изготовление одного изделия в период освоения от x_1 до x_2 изделий вычисляется по теореме о среднем: $t_{cp}=\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} t(x)dx$.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 14

Тема: Дифференциальные уравнения. Основные понятия

План

1. Определение дифференциального уравнения
2. Общее и частное решения дифференциального уравнения

Цель: сформировать первоначальные представления о дифференциальных уравнениях, решении дифференциального уравнения.

Задачи:

– актуализировать понятие о дифференциальных уравнениях как о способе моделирования различных процессов;

– сообщить теоретический материал по данной теме;

Ключевые вопросы

1. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется обыкновенным дифференциальным уравнением, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением в частных производных.

Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

2. Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция y = φ(x, C), которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Свойства общего решения.

1) Т.к. постоянная С – произвольная величина, то вообще говоря дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких- либо начальных условиях $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ существует такое значение $C = C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция $y = \varphi(x, C_0)$.

Решение вида $y = \varphi(x, C_0)$ называется частным решением дифференциального уравнения.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 15

Тема: Дифференциальные уравнения первого порядка

План

1. Уравнения с разделяющимися переменными
2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка
3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Цель: сформировать первоначальные представления о дифференциальных уравнениях первого порядка, дать знания о видах и методах решения дифференциальных уравнений первого порядка.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– привести примеры решения дифференциальных уравнений первого порядка;
– закрепить полученную информацию.

Ключевые вопросы

1. Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнения вида: $F(x,y,y')= 0$, $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, $y' = f(x)$. Решением дифференциального уравнения первого порядка называется дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение, обращает его в тождество. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x,y)$ в некоторой области Д называется функция $y = \varphi(x,c)$, обладающая следующими свойствами: функция $\varphi(x,c)$ является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной С, принадлежащих некоторому множеству; для любого начального условия $y(x_0)=y_0$ такого, что $(x_0, y_0)\in Д$, существует единственное значение $C=C_0$, при котором решение $y=\varphi(x,c_0)$ удовлетворяет начальному условию. Всякое решение $y = \varphi(x,c_0)$, получающееся из общего решения $y = \varphi(x,c)$ при конкретном значении $C = C_0$, называется частным решением.

2. Уравнение вида $f_1(x)f_2(y)dx - \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0$ называется уравнением с разделяющимися переменными.

3. Уравнение первого порядка $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ или $y'=f(x,y)$ называется однородным, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$- однородные функции одной степени однородности или $f(x,y)$- однородная функция нулевой степени однородности. Функция $P(x,y)$ называется однородной степени k, если $P(\lambda x,\lambda y)=\lambda^k\cdot P(x,y)$. Однородное уравнение может быть приведено к виду $y'=\varphi(\frac{y}{x})$.

4. Уравнение вида $y'+P(x)y = Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$- непрерывные функции аргумента x , называется линейным уравнением первого порядка.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 16

Тема: Дифференциальные уравнения высших порядков, решаемые понижением порядка

План

1. Уравнения, решаемые последовательным интегрированием.
2. Уравнения, не содержащие явно функцию.
3. Уравнения, не содержащие явно аргумента.
4. Примеры задач на составление и решение дифференциальных уравнений.

Цель: сформировать знания о видах и методах решения дифференциальных уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– привести примеры решения дифференциальных уравнений;
– закрепить полученную информацию посредством решения прикладных задач.

Ключевые вопросы

1. Уравнение вида $y^{(n)}=f(x)$ решается последовательным интегрированием обеих частей уравнения n раз. Общий интеграл уравнения содержит n произвольных постоянных.

2. Уравнение 2-го порядка $F(x,y',y'')=0$, не содержащее явно функцию y, преобразуется в уравнение 1-го порядка посредством подстановки $y'=p$, $y''=p$, где $p = p(x)$−функция от x.

3. Уравнение 2-го порядка $F(y,y',y'')=0$, не содержащее явно аргумент x, преобразуется

в уравнение 1-го порядка посредством подстановки $y' = p,\ y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, где p = p(y).

4. Необходимым этапом решения любой прикладной задачи является построение математической модели изучаемого объекта или процесса. Обыкновенные дифференциальные уравнения составляют основу сравнительно простых, но весьма распространенных математических моделей, применяемых в самых разных областях науки. Наиболее распространенными задачами на составление и решение дифференциальных уравнений являются: а) на плоскости xOy найти кривую, проходящую через (x_0,y_0), у которой угловой коэффициент касательной в любой точке кривой пропорционален абсциссе (ординате) точки касания; б) задача о радиоактивном распаде; в) задача о размножении популяции; г) задача о скорости химической реакции; д) задача о законе охлаждения тела и др.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 17

Тема: Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков

План

1. Определение линейных однородных уравнений *n*-го порядка.
2. Теоремы о решениях линейного однородного дифференциального уравнения *n*-го порядка.
3. Определение фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения *n*-го порядка.
4. Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения.
5. Вид общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от корней характеристического уравнения

Цель: сформировать знания о линейных однородных дифференциальных уравнениях высших порядков.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры решения дифференциальных уравнений;
- закрепить полученную информацию посредством решения примеров.

Ключевые вопросы

1. Линейным однородным уравнением *n*-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида $y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+a_2 y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1} y'+a_n y=0.$

2. Общее решение линейного однородного уравнения *n*-го порядка (1) имеет вид $y=C_1 y_1(x)+C_2 y_2(x)+\ldots+C_n y_n(x)$, где $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – линейно независимые частные решения этого уравнения.

3. Для нахождения общего решения уравнения составляют характеристическое уравнение $k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} +\ldots+ a_{n-1}k + a_n = 0.$

В зависимости от корней характеристического уравнения возможны случаи: если все корни характеристического уравнения $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – действительные и различные, то общее решение имеет вид: $y=C_1e^{k1x} + C_2e^{k2x} + \ldots+C_ne^{knx}$; если среди корней характеристического уравнения $k_1, k_2,\ldots, k_n$ имеются кратные ($k_1=k_2=\ldots=k_n=k$), а остальные различные, то общее решение примет вид $y=e^{kx}(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_mx^{m-1})+C_{m+1}e^{km+1\cdot x}+\ldots+C_ne^{km-n\cdot x}$, где *m*- кратность корня; если среди корней характеристического уравнения имеется пара комплексных корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то общее решение примет вид y= $e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 18

Тема: Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков

План

1. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков
2. Приложение дифференциальных уравнений к описанию линейных моделей в эко-

номике.

Цель: сформировать знания о линейных неоднородных дифференциальных уравнениях высших порядков и углубить представления об использовании дифференциальных уравнений к описанию линейных моделей в экономике.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры решения дифференциальных уравнений;
- закрепить полученную информацию посредством решения прикладных задач.

Ключевые вопросы

1. Линейным неоднородным уравнением называется уравнение первой степени относительно искомой функции и всех ее производных $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$, где f(x) непрерывная функция непрерывная. Общее решение такого уравнения $y=y^*+\bar{y}$, где y^* - общее решение соответствующего однородного уравнения, $\bar{y}$ - какое-либо частное решение неоднородного уравнения. Частное решения $\bar{y}$ можно найти методом подбора. Если $f(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]$, то $\bar{y}=e^{\alpha x}[M_S(x)\cos\beta x+N_S(x)\sin\beta x]\cdot x^r$, где $M_S(x)$ и $N_S(x)$ – многочлены степени $S=max\{n,m\}$, а r – кратность корня $\alpha+\beta i$ характеристического уравнения.

2. Чистые инвестиции равны производной от капитала по времени, уровень производства на момент времени t пропорционален приросту выпуска оборудования за промежуток времени t,

Литература: [1], [2], [3]

3. Семестр III

Лекция 1.

Тема: Предмет теории вероятностей. Основные понятия

План

1. Предмет теории вероятностей
2. Различные подходы к определению вероятности события
3. Основные формулы комбинаторики

Цель: сформировать знания о предмете теории вероятностей, определении вероятности события и ее свойствах, основах комбинаторики.

Задачи:

- привести примеры решения задач с использованием различных походов к определению вероятности;
- осуществить рефлексию.

Ключевые вопросы

1. Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений.

2. Классической вероятностью $P(A)$ события A называется отношение числа благоприятствующих этому событию исходов (т.е. таких, при которых событие А обязательно произойдет) к общему числу несовместных единственно возможных и равновозможных исходов. Геометрической вероятностью события A называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события А, к мере пространства элементарных исходов. Статистической вероятностью события А называется число, около которого колеблются частости W(A) появления этого события во многих сериях выборочных испытаний больших объемов, проводимых в одинаковых условиях.

3. К основным типам комбинаторных задач относятся отыскание числа перестановок, размещений, сочетаний, перестановок с повторениями, размещений с повторениями, сочетаний с повторениями.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 2.
Тема: Сложение и умножение вероятностей
План лекции

1. Алгебра событий.
2. Теорема сложения вероятностей несовместных и совместных событий.
3. Теорема умножения вероятностей независимых и независимых событий.
4. Вероятность появления хотя бы одного из событий.

Цель: ознакомить с теоремами сложения и умножения вероятностей; выработать навыки решения задач по данной теме.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Объединением (или суммой) нескольких случайных событий называется событие, состоящее в осуществлении, по крайней мере, одного из данных событий.

Совмещением (или произведением) двух событий А и В называется событие, состоящее в одновременном осуществлении обеих событий.

2. Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A)_2 + ... + P(A_n)$.

Вероятность суммы совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

3. Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий: $P(A_1, A_2, ..., A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) ... P(A_n)$.

Вероятность совместного появления нескольких зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятности каждого последующего события вычисляются в предположении, что все предыдущие события произошли: $P(A_1, A_2, ..., A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) ... P_{A_1 A_2 ... A_{n-1}}(A_n)$.

4. Если в результате испытания может появиться *n* событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 ... q_n$$

Здесь событие А обозначает наступление хотя бы одного из событий A_i, а q_i – вероятность противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$.

Литература: [1], [2], [3].

Лекции 3-5.
Тема: Формулы полной вероятности и Байеса. Повторные независимые испытания. Интегральная теорема Лапласа
План

1. Формулы полной вероятности и Байеса
2. Формула Бернулли
3. Локальная теорема Лапласа
4. Формула Пуассона
5. Интегральная теорема Лапласа

Цель: сформировать знания о применении формул полной вероятности и Байеса, различных вариантах решения задач на повторные независимые испытания.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– привести примеры решения задач;
– осуществить рефлексию.

Ключевые вопросы

1. Вероятность события А, которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий, образующих полную группу событий, равна сумме произведений вероятности каждого из событий на соответствующую условную вероятность события А: $P(A) = P(H_1)P_{H_2}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n)P_{H_n}(A)$.

Условные вероятности гипотез определяются по формулам Байеса: $P_A(H_i) = \dfrac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_n)P_{H_n}(A)}$.

2. Вероятность появления события А m раз в n независимых испытания, в каждом из которых вероятность этого события постоянна и равна p, находится по формуле Бернулли: $P_n(m)= C_n^m\, p^m q^{\,n-m}$. Если число испытаний n велико, то применение формулы Бернулли приводит к очень громоздким вычислениям. В таких случаях пользуются приближенными формулами, основанными на теоремах Лапласа и Пуассона.

3. Локальная теорема Лапласа: Вероятность Pn (m) того, что в n испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, событие наступит ровно m раз приближённо равна $P_n(m) \approx \dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$, где $x = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

4. Формула Пуассона: Если вероятность p наступления события постоянна и мала, а число испытаний n велико, то Pn (m) $\approx \dfrac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}$, где λ = n p.

5. Интегральная теорема Лапласа: Если вероятность p наступления некоторого события в каждом испытании постоянна (0 < p <1), а число испытаний n достаточно велико, то вероятность того, что это событие наступит не менее a раз и не более b приближенно равна $P(a \le m \le b) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$, где $\alpha = \dfrac{a-np}{\sqrt{npq}}$, $\beta = \dfrac{b-np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа.

Литература: [1], [2], [3]

Лекция 6.

Тема: Случайные величины. Числовые характеристики случайных величин

План

1. Определение случайной величины. Определение дискретной и непрерывной случайных величин

2. Закон распределения случайной величины. Способы задания закона распределения дискретной случайной величины.

3. Способы задания закона распределения непрерывной случайной величины.

4. Числовые характеристики случайных величин.

Цель: дать первоначальное понятие о случайных величинах, сформировать знания о законах распределения и способах их описания, научить вычислять и интерпретировать числовые характеристики случайных величин.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры решения задач;
- осуществить рефлексию.

Ключевые вопросы

1. Случайная величина X – это некоторая функция элементарного события ω: $X = \varphi(\omega)$, где $\omega \in U$. Значение этой функции зависит от того, какое элементарное

событие ω появилось в результате опыта. Случайные величины часто обозначают большими буквами, а их значения малыми. Случайная величина называется дискретной, если ее возможные значения могут быть пронумерованы числами натурального ряда. Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

2. Законом распределения случайной величины называется любое правило, позволяющее находить вероятность возможных событий (значений), связанных со случайной величиной. Закон распределения дискретных случайных величин может быть задан в форме ряда, многоугольника и функции (интегрального закона) распределения.

3. Непрерывную случайную величину можно задать функцией распределения F(x) действительной переменной x, определяемой формулой F(x) = P (X < x) и функцией, которая называется плотностью распределения или дифференциальной функций и определяется формулой f(x) = F'(x).

4. Основные числовые характеристики и формулы приведены в таблице:

Характеристика	Обозначение	Случайная величина	
		Дискретная	Непрерывная
Математическое ожидание	M(X)	$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$	$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$
Дисперсия	D(X)	$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X))^2 \cdot p_i$	$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2 \cdot f(x)dx$
		$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$	
Среднее квадратичное отклонение (стандарт)	σ_x	$\sigma_x=\sqrt{D(X)}$	

Литература: [1], [2], [3]

Лекции 7-10.

Тема: Основные законы распределения случайных величин

План

1. Биномиальный закон распределения
2. Распределение Пауссона
3. Геометрическое распределение
4. Нормальный закон распределения
5. Равномерное распределение
6. Показательное распределение
7. Законы больших чисел

Цель: сформировать знания об основных законах распределения случайных величин, развивать умения анализировать случайные величины.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры решения задач;
- осуществить рефлексию.

Ключевые вопросы

1. Дискретная случайная величина X имеет биномиальный закон распределения, если она принимает значения 0, 1, 2, …, m, …, n с вероятностями $P_n(m)=C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, где 0 < p < 1, q=1-p, m=0, 1, …, n.

2. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения Пуассона, если она принимает значения 0, 1, 2, …, m, … (бесконечное, но счетное множество значений) с веро-

ятностями $P_n(m)=\dfrac{\lambda^m\cdot e^{-\lambda}}{m!}$, $\lambda=n\cdot p$.

3. Дискретная случайная величина X имеет геометрическое распределение, если она принимает значения 0, 1, 2, …, m, … (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями $P_n(m)=p\cdot q^{m-1}$, где $0<p<1,\ q=1-p,\ m=1,2,\dots$.

4. Распределение вероятностей называют нормальным, если оно описывается дифференциальной функцией $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

5. Равномерным распределением называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, дифференциальная функция f (x) которой сохраняет постоянное значение на сегменте [a; b] и равна нулю вне этого сегмента, т. е. $f(x)=\begin{cases}0 & при\quad x<a,\\ \dfrac{1}{b-a} & при\quad a\le x\le b,\\ 0 & при\quad x>b.\end{cases}$

6. Непрерывная случайная величина x распределена по показательному закону, если ее плотность вероятности имеет вид: $f(x)=\begin{cases}0 & при\, x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & при\, x\ge 0. \quad где\ \lambda>0.\end{cases}$

Литература: [1], [2], [3]

Лекции 11,12.
Тема: Система случайных величин
План

1. Случайные векторные величины.
2. Функция и плотность распределения случайной двумерной величины.
3. Корреляционный момент связи двух случайных величин.
4. Коэффициент корреляции.

Цель: сформировать знания о случайной двумерной величине и ее характеристиках, рассмотреть основные задачи по теме.

Задачи:
- сообщить теоретический материал по данной теме;
- ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
- осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Если на пространстве событий $\Omega=\{\omega\}$ заданы две случайные функции $X=\phi(\omega)$ и $Y=\psi(\omega)$, то говорят, что задана двумерная случайная величина (X, Y).

2. Интегральной функцией распределения двумерной случайной величины (X, Y) называется вероятность совместного выполнения двух неравенств: $X<x$ и $Y<y$:

$$F(x, y)=P\{X<x, Y<y\}$$

и геометрически определяет вероятность попадания случайной точки (X, Y) в бесконечный квадрат с вершиной в точке (x,y), лежащей левее и ниже ее.

Закон распределения дискретной двумерной с.в. (X, Y) может быть задан с помощью таблицы

X/Y	y_1	y_2	$\dots$	y_m	$\dots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}	$\dots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$		$\dots$	
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$		$\dots$	

где $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1.$

Для двумерной с.в. (X, Y) дискретного и непрерывного типов интегральные функции распределения соответственно равны

$$F(x,y) = \sum_{x_i<x} \sum_{y_i<y} p_{ij} \quad F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv,$$

где, f(x, y) плотность вероятности величины (X, Y).

Свойства функции плотности вероятности: $f(x,y) \geq 0,$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1,$$

$$f(x,y) = F''_{xy}(x,y), \qquad P\{(X,Y) \in D\} = \iint_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

3. Случайная величина описывается двумя числовыми характеристиками: математическим ожиданием и дисперсией. Чтобы описать систему из двух случайных величин кроме «основных» характеристик используют так же корреляционный момент и коэффициент корреляции. Корреляционным моментом $\boldsymbol{\mu_{xy}}$ случайных величин X и У называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин:

μ_{xy} = M { [X - M(X)] [Y - M(Y)] }

Для нахождения корреляционного момента дискретных величин используют формулу:

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [x_i - M(X)][y_j - M(Y)]\,p(x_i, y_j)$$

,

а для непрерывных величин — формулу :

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)][y - M(Y)]\,f(x,y)\,dx\,dy$$

Коэффициентом корреляции r_{xy} случайных величин Х и У называют отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин: $r_{xy}= \mu_{xy}/\sigma_x\sigma_y$

Абсолютная величина коэффициента корреляции не превышает единицы: $|\, r_{xy}\, | \le 1$.

Литература: [1], [2], [3].

Лекции 13,14.

Элементы математической статистики. Выборочный метод. Статистические оценки параметров распределения

План

1. Предмет и задачи математической статистики
2. Генеральная и выборочная совокупность
3. Построение вариационного или сгруппированного статистического ряда
4. Полигон и гистограмма
5. Эмпирическая функция распределения. Числовые характеристики вариационных рядов
6. Точечные оценки параметров распределения и их свойства
7. Доверительный интервал. Интервальные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии

Цель: дать первоначальное понятие о предмете математической статистики, выборочном методе анализа данных, научить способам описания выборочных совокупностей и вычислению их числовых характеристик; сформировать знания о методах точечного и интервального оценивания основных характеристик генеральной совокупности.

Задачи:

- сообщить теоретический материал по данной теме;
- привести примеры решения задач;
- осуществить рефлексию.

Ключевые вопросы

1. Математическая статистика – это направление математики, которое опирается на теорию вероятностей, позволяющую оценить надёжность и точность выводов, делаемых на основании ограниченного статистического материала.

2. Выборкой или выборочной совокупностью называется совокупность случайно отобранных объектов. Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

3. Вариационным рядом называется ряд значений исследуемого признака с указанием соответствующих весов (частот или относительных частот). Выделяют дискретные и вариационные ряды.

4. Гистограммой частот сгруппированной выборки называется кусочно-постоянная функция, постоянная на интервалах группировки и принимающая на каждом из них соответственно значения $\frac{n_i}{\Delta x_i}$, i = 1,2, …, k. Площадь ступенчатой фигуры под графиком гистограммы равна объему выборки n. Полигоном частот называется ломаная с вершинами в точках $(x_i, \frac{n_i}{\Delta x_i})$, i – 1,2 ,…, k, где k – число интервалов вариационного ряда.

5. Эмпирической функцией распределения случайной величины Х называется функция $F_n(x) = \frac{n_x}{n}$, где n – объем выборки; n_x – число значений x_i из выборки, удовлетворяющих неравенству $x_i < x$.

Выборочная средняя вычисляется по формуле: $\bar{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}$. Выборочная дисперсия вычисляется по формуле: $D_в(x)=\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x}_в)^2 n_i}{n}$. Выборочные начальные моменты вычисляются по формулам: $\overline{m}_к(x)=\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i)^к n_i}{n}$. Выборочные центральные моменты вычисляются по формулам: $\mu_к(x)=\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x}_b)^к n_i}{n}$. Эксцесс: $E_x=\frac{\mu_4}{S^4}-3$. Асимметрия: $a_x=\frac{\mu_3}{S^3}$.

6. Точечной оценкой параметра называется оценка, определяемая одним числом.

Оценка $\tilde{\Theta}=\tilde{\Theta}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$−должна приближаться к оцениваемому параметру Θ по мере увеличения объема выборки. Если оценка стремится по вероятности к оцениваемому параметру, то она называется состоятельной.

Оценка параметра $\tilde{\Theta}$ называется несмещенной, если она при любом объеме выборки имеет математическое ожидание, совпадающее с оцениваемым параметром, т.е. $M(\tilde{\Theta})=\Theta$.

Несмещенная оценка $\tilde{\Theta}$ параметра Θ называется эффективной, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок параметра Θ, вычисленных по выборкам одного и того же объема n.

7. Доверительным интервалом для параметра θ называется интервал (θ_1,θ_2), содержащий (покрывающий) истинное значение θ с заданной вероятностью $\gamma=1-\alpha$. Число $\gamma=1-\alpha$ называется доверительной вероятностью, а значение γ− уровнем значимости, границы θ_1 и θ_2 являющимися случайными величинами − соответственно нижней и верхней границами доверительного интервала.

Величина $\alpha=1-\gamma$ указывает на то, что те значения параметра θ, для которых $|\theta-\tilde{\theta}|>\varepsilon$ нужно признать противоречащими опытным данным.

Доверительный интервал для оценки математического ожидания *a* при неизвестном σ: $\left(\bar{x}_в-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x}_в+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ с надежностью γ покрывает неизвестный параметр a; точность оценки $\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

Доверительный интервал для оценки математического ожидания *a* при неизвестном σ для заданной доверительной вероятности γ вычисляется по формуле: $\bar{x}_в-t_\gamma S/\sqrt{n}<a<\bar{x}_в+t_\gamma S/\sqrt{n}$, где $\bar{x}_в=\frac{\sum_{i-1}^{n}x_i}{n}$, $S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_в)^2 n_i}{n-1}$.

Доверительный интервал для дисперсии записан скобках: $P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}}\le\sigma^2\le\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}}\right)=\gamma$

Литература: [1], [2], [3]

Лекции 15,16.
Тема: Проверка статистических гипотез
План

1. Постановка задачи проверки гипотез.
2. Критерий оценки и его мощность.
3. Критическая область и область принятия гипотезы.

4. Проверка гипотез о значениях параметров нормального распределения.
5. Проверка гипотез о виде распределения.
6. Критерий Пирсона.

Цель: сформировать знания о методах проверки статистических гипотез о параметрах и законах распределения.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Статистической гипотезой называют гипотезу о виде неизвестного распределения генеральной совокупности или о параметрах известных распределений.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0. Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение, сложной – гипотезу, состоящую из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

В результате проверки правильности выдвинутой нулевой гипотезы (такая проверка называется статистической, так как производится с применением методов математической статистики) возможны ошибки двух видов: ошибка первого рода, состоящая в том, что будет отвергнута правильная нулевая гипотеза, и ошибка второго рода, заключающаяся в том, что будет принята неверная гипотеза.

Вероятность ошибки первого рода называется уровнем значимости α.

Основной прием проверки статистических гипотез заключается в том, что по имеющейся выборке вычисляется значение некоторой случайной величины, имеющей известный закон распределения.

Статистическим критерием называется случайная величина K с известным законом распределения, служащая для проверки нулевой гипотезы.

Критической областью называют область значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают, областью принятия гипотезы – область значений критерия, при которых гипотезу принимают.

2. Критерий для проверки гипотезы о математическом ожидании.

Пусть генеральная совокупность X имеет нормальное распределение, и требуется проверить предположение о том, что ее математическое ожидание равно некоторому числу a_0.

Пусть известна дисперсия σ^2 генеральной совокупности. Тогда по выборке объема n найдем выборочное среднее $\bar{x}_B$ и проверим нулевую гипотезу

$$H_0\text{: } M(X) = a_0.$$

Учитывая, что выборочное среднее $\bar{X}$ является несмещенной оценкой $M(X)$, то есть $M(\bar{X}) = M(X)$, можно записать нулевую гипотезу так:

$M(\bar{X}) = a_0$. Для ее проверки выберем критерий

$$U = \frac{\bar{X} - a_0}{\sigma(\bar{X})} = \frac{(\bar{X} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}.$$

Это случайная величина, имеющая нормальное распределение, причем, если нулевая гипотеза справедлива, то $M(U) = 0$, $\sigma(U) = 1$.

Выберем критическую область в зависимости от вида конкурирующей гипотезы:

- если H_1: $M(\bar{X}) \neq a_0$, то $u_{кр}$: $\Phi(u_{кр}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$, критическая область двусторонняя, $U_{набл} = \dfrac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}$, и, если $|U_{набл}| < u_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается; если $|U_{набл}| > u_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается.

- если H_1: $M(\overline{X}) > a_0$, то $u_{кр}$: $\Phi(u_{кр}) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$, критическая область правосторонняя, и, если $U_{набл} < u_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается; если $U_{набл} > u_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается.

- если H_1: $M(\overline{X}) < a_0$, то $u_{кр}$: $\Phi(u_{кр}) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$, критическая область левосторонняя, и, если $U_{набл} > -u_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается; если $U_{набл} < -u_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается.

3. Достоинством критерия Пирсона является его универсальность: с его помощью можно проверять гипотезы о различных законах распределения.

1. Проверка гипотезы о нормальном распределении.

Пусть получена выборка достаточно большого объема n с большим количеством различных значений вариант. Для удобства ее обработки разделим интервал от наименьшего до наибольшего из значений вариант на s равных частей и будем считать, что значения вариант, попавших в каждый интервал, приближенно равны числу, задающему середину интервала. Подсчитав число вариант, попавших в каждый интервал, составим так называемую сгруппированную выборку:

варианты………..x_1 x_2 … x_s
частоты………….n_1 n_2 … n_s ,

где x_i – значения середин интервалов, а n_i – число вариант, попавших в i-й интервал (эмпирические частоты).

По полученным данным можно вычислить выборочное среднее $\bar{x}_B$ и выборочное среднее квадратическое отклонение σ_B. Проверим предположение, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону с параметрами $M(X) = \bar{x}_B$, $D(X) = \sigma_B^2$. Тогда можно найти количество чисел из выборки объема n, которое должно оказаться в каждом интервале при этом предположении (то есть теоретические частоты). Для этого по таблице значений функции Лапласа найдем вероятность попадания в i-й интервал:

$$p_i = \Phi\left(\frac{b_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}\right) - \Phi\left(\frac{a_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}\right),$$

где a_i и b_i - границы i-го интервала. Умножив полученные вероятности на объем выборки п, найдем теоретические частоты: $n_i = n \cdot p_i$. Наша цель – сравнить эмпирические и теоретические частоты, которые, конечно, отличаются друг от друга, и выяснить, являются ли эти различия несущественными, не опровергающими гипотезу о нормальном распределении исследуемой случайной величины, или они настолько велики, что противоречат этой гипотезе. Для этого используется критерий в виде случайной величины

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} .$$

Для выбранного критерия строится правосторонняя критическая область, определяемая условием

$$p(\chi^2 > \chi^2_{kp}(\alpha, k)) = \alpha,$$

где α – уровень значимости. Следовательно, критическая область задается неравенством $\chi^2 > \chi^2_{kp}(\alpha, k)$, а область принятия гипотезы - $\chi^2 < \chi^2_{kp}(\alpha, k)$.

Итак, для проверки нулевой гипотезы H_0: генеральная совокупность распределена нормально – нужно вычислить по выборке наблюдаемое значение критерия:

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} ,$$

а по таблице критических точек распределения χ^2 найти критическую точку $\chi^2_{кр}(\alpha, k)$, используя известные значения α и $k = s - 3$. Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{kp}$ - нулевую гипотезу принимают, при $\chi^2_{набл} > \chi^2_{kp}$ ее отвергают.

Литература: [1], [2], [3].

Лекции 17,18.

Тема: Корреляционный и регрессионный анализ

План

1. Функциональные и корреляционные зависимости случайных величин.
2. Линейная и нелинейная регрессия.
3. Составление уравнений прямых регрессий, метод наименьших квадратов.
4. Статистическая оценка коэффициента корреляции и её свойства. Построение доверительных интервалов для параметров линейной регрессии. Проверка статистической значимости регрессии и адекватности модели регрессии результатам наблюдений.

Цель: сформировать знания о корреляционном и регрессионном анализе.

Задачи:

– сообщить теоретический материал по данной теме;
– ознакомить с основными понятиями, привести примеры;
– осуществить контроль за освоением изложенного материала.

Ключевые вопросы

1. Пусть составляющие *X* и *Y* двумерной случайной величины (*X*, *Y*) зависимы. Будем считать, что одну из них можно приближенно представить как линейную функцию другой, например

$$Y \approx g(X) = \alpha + \beta X,$$

и определим параметры α и β с помощью метода наименьших квадратов.

Определение. Коэффициент $\beta = r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ называется коэффициентом регрессии *Y* на *X*, а прямая

$$y - m_y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x) -$$

- прямой среднеквадратической регрессии *Y* на *X*.

Аналогично можно получить прямую среднеквадратической регрессии *X* на *Y*:

$$x - m_x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - m_y).$$

2. Рассмотрим выборку объема *n*, извлеченную из нормально распределенной двумерной генеральной совокупности (*X*, *Y*). Вычислим выборочный коэффициент корреляции r_B. Пусть он оказался не равным нулю. Это еще не означает, что и коэффициент корреляции генеральной совокупности не равен нулю. Поэтому при заданном уровне значимости α возникает необходимость проверки нулевой гипотезы H_0: $r_г = 0$ о равенстве нулю гене-рального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе H_1: $r_г \neq 0$. Таким образом, при принятии нулевой гипотезы *X* и *Y* некоррелированы, то есть не связаны линейной зависимостью, а при отклонении H_0 они коррелированы.

В качестве критерия примем случайную величину

$$T = \frac{r_B\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_B^2}},$$

которая при справедливости нулевой гипотезы имеет распределение Стьюдента (см. лекцию 12) с $k = n - 2$ степенями свободы. Из вида конкурирующей гипотезы следует, что критическая область двусторонняя с границами ± $t_{кр}$, где значение $t_{кр}(\alpha, k)$ находится из таблиц для двусторонней критической области.

Вычислив наблюдаемое значение критерия

$$T_{набл} = \frac{r_B\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_B^2}}$$

и сравнив его с $t_{кр}$, делаем вывод:

- если $|T_{набл}| < t_{кр}$ – нулевая гипотеза принимается (корреляции нет);
- если $|T_{набл}| > t_{кр}$ – нулевая гипотеза отвергается (корреляция есть).

3. Пусть изучается двумерная случайная величина (X, Y), и получена выборка из n пар чисел (x_1, y_1), (x_2, y_2),…, (x_n, y_n). Будем искать параметры прямой линии среднеквадратической регрессии Y на X вида

$$Y = \rho_{yx}x + b\ ,$$

Подбирая параметры ρ_{yx} и b так, чтобы точки на плоскости с координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) лежали как можно ближе к прямой . Используем для этого метод наименьших квадратов и найдем минимум функции

$$F(\rho, b) = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\rho x_i + b - y_i)^2\ .$$

Приравняем нулю соответствующие частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \rho} &= 2\sum_{i=1}^{n}(\rho x_i + b - y_i)x_i = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b} &= 2\sum_{i=1}^{n}(\rho x_i + b - y_i) = 0 \end{aligned}\ .$$

В результате получим систему двух линейных уравнений относительно ρ и b:

$$\begin{cases} \left(\sum x^2\right)\rho + \left(\sum x\right)b = \sum xy \\ \left(\sum x\right)\rho + nb = \sum y \end{cases}\ .$$

Ее решение позволяет найти искомые параметры в виде:

$$\rho_{xy} = \frac{n\sum xy - \sum x\cdot\sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2};\ \ b = \frac{\sum x^2\cdot\sum y - \sum x\cdot\sum xy}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}\ .$$

Литература: [1], [2], [3].

III МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И РЕКОМЕНДАЦИИ

1. Методические рекомендации для преподавателей

В качестве средств обучения могут быть использованы учебники, учебные пособия, электронные ресурсы, приведенные в рабочей программе.

В процессе обучения рекомендуем преподавателям использовать основные методы обучения, применяемые в высшей школе.

1. Информационно-рецептивный метод. Обучаемые усваивают знания в готовом виде, сообщенные преподавателем, почерпнутые из книжных источников или электронных ресурсов. Подобная деятельность необходима, так как она позволяет в сжатые сроки вооружать студента основными математическими определениями, теоремами, формулами и образцами способов деятельности.

2. Репродуктивный метод (метод организации воспроизведения способов деятельности). К этому методу относятся: решение типовых задач, ответы на теоретические вопросы.

3. Метод проблемного обучения. Преподаватель не просто излагает материал, а ставит проблему, формулирует познавательную задачу, показывает с помощью студентов логический путь решения проблемы. Здесь обучаемый становится соучастником поиска.

4. Эвристический (частично-поисковый) метод. После ознакомления обучаемых с материалом (определениями, математическими моделями, теоремами) перед ними ставится по-

знавательная поисковая задача (лучше, если студенты сами ее выдвинут). Путем соответствующих заданий обучаемые подводятся к самостоятельным выводам. Таким образом, организуются активный учебный поиск, связанный с переходом к творческому, продуктивному мышлению.

5. Исследовательский метод. После постановки проблемы, формулирования задач, обучаемые самостоятельно работают над литературой, выдвигают гипотезу, ищут пути ее решения.

Рекомендуем использовать некоторые частно-дидактические методы обучения.

1. Мотивационное обеспечение учебной деятельности. Применение этого метода предполагает создание условий, при которых студентом осознается важность изучаемого материала для своей последующей деятельности. При этом полезны задачи прикладного содержания, соответствующие приобретаемой профессии.

2. Выделение базисного материала, концентрация учебного материала вокруг базисного. Применение этого метода облегчает процесс усвоения и запоминания, освобождает от необходимости изучать некоторые частные, второстепенные вопросы, способствует формированию обобщенных знаний.

3. Пропедевтика вводимых понятий, новых теорем, формул. Перед изучением материала ограничиваются наглядными соображениями, не строгими рассуждениями, интуитивными представлениями о понятиях. Использование догадок, интуиции в обучении развивает мышление, интерес, улучшает запоминание.

4. Выбор методически обоснованного, с учетом знаний студентов и их умения мыслить, уровня строгости изучаемого материала. При обучении студентов естественнонаучного направления следует иметь в виду, что излишняя формализация материала препятствует полноценному его усвоению, развитию интуиции и может привести к потере интереса к предмету.

5. Создание проблемных ситуаций, возможностей для студентов самим делать обобщения, выводы, открытия.

6. Составление и применение алгоритмов. Алгоритмы организуют познавательный процесс, являются средством достижения результата, формируют у студента четкий стиль мышления. Их применение способствует более прочному усвоению материала.

7. Математическое моделирование. Математическая модель есть приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. Анализ математической модели позволяет проникнуть в сущность изучаемых явлений. При построении математических моделей необходимо выделять основные этапы:

- формализацию;
- решение задачи внутри построенной модели на языке той теории, в рамках которой находится модель;
- интерпретации полученного результата к исходной задаче.

В математических курсах модели различного вида встречаются очень часто: функциональном, графическом, знаковом и других выражениях. Особенно наглядны задачи практического содержания, в которых отчетливо выделяются все указанные три этапа математического моделирования.

8. Обучение с использованием информационных технологий. Размещение сотрудниками кафедры своих учебных материалов в сети Интернет позволяет студенту осваивать материал в соответствии с требованиями преподавателя в любое удобное для него время.

Любой способ учебной деятельности целесообразно представить как цепь управляемых ситуаций, направленных на стимулирование и развитие познавательной и практической активности студента.

Методика чтения лекций, организации практических занятий и самостоятельной работы должна содействовать развитию познавательной активности студентов, формированию необходимых компетенции. В практике необходимы лекции, предусматривающие как продуктивную, так и репродуктивную деятельность студента. При применении активных методов обучения доминирующими видами деятельности являются частично-поисковые, творческие, исследовательские. Важными моментами таких лекций являются:

- постановка проблемы;
- определение базовых знаний, необходимых для ее решения;
- создание атмосферы частично-поисковой деятельности;
- организация исследовательской деятельности;
- сравнение результатов исследования с точным результатом;
- корректировка определений, выводов, полученных студентами;
- самостоятельная работа студентов по специальным заданиям. Система задач и упражнений на практических и лабораторных занятиях должна давать целостное представление о функциях задач;
- обучающей (формирование у студентов системы математических знаний, умений, компетенции);
- развивающей (развитие математического мышления);
- воспитывающей (формирование познавательного интереса);
- контролирующей (проверка качества усвоения изучаемого материала). Задания для самостоятельной работы включают в себя задачи и упражнения:

1) тренировочного типа (в форме домашних заданий к практическим занятиям; самостоятельная работа над книгой или конспектом лекции по отбору и систематизации учебного материала);

2) реконструктивно-вариативного типа (при выполнении этих заданий студенты применяют правила, теоремы в различных ситуациях; реконструируют известный учебный материал или способы решения задач с целью их приложения к решению заданной задачи с измененными условиями).

2. Методические указания по изучению дисциплины

Успешное освоение дисциплины предполагает активное, творческое участие студента путем ежедневной планомерной работы. Изучение дисциплины следует начинать с проработки рабочей программы, особое внимание, уделяя целям и задачам, структуре и содержанию курса.

На лекциях студенты получают самые необходимые данные, во многом дополняющие учебники (иногда даже их заменяющие с последними достижениями науки. Умение сосредоточенно слушать лекции, активно, творчески воспринимать излагаемые сведения является непременным условием их глубокого и прочного усвоения, а также развития умственных способностей.

Слушание и запись лекций - сложные виды вузовской работы. Внимательное слушание и конспектирование лекций предполагает интенсивную умственную деятельность студента. Слушая лекции, надо отвлечься при этом от посторонних мыслей и думать только о том, что излагает преподаватель. Краткие записи лекций, конспектирование их помогает усвоить материал.

Внимание человека неустойчиво. Требуются волевые усилия, чтобы оно было сосредоточенным. Конспект является полезным тогда, когда записано самое существенное, основное. Это должно быть сделано самим студентом. Не надо стремиться записать дословно всю лекцию. Такое "конспектирование" приносит больше вреда, чем пользы. Некоторые студенты просят иногда лектора "читать помедленнее". Но лекция не может превратиться в лекцию-диктовку. Это очень вредная тенденция, ибо в этом случае студент механически записывает большое количество услышанных сведений, не размышляя над ними.

Запись лекций рекомендуется вести по возможности собственными формулировками. Желательно запись осуществлять на одной странице, а следующую оставлять для проработки учебного материала самостоятельно в домашних условиях. Конспект лучше подразделять на пункты, параграфы, соблюдая красную строку. Принципиальные места, определения, формулы следует сопровождать замечаниями: «важно», «особо важно», «хорошо запомнить» и т.п. Целесообразно разработать собственную «маркографию» (значки, символы), сокращения слов. Не лишним будет и изучение основ стенографии. Работая над конспектом лекций, всегда используй не только учебник, но и ту литературу, которую дополнительно рекомендовал лектор. Именно такая серьезная, кропотливая работа с лекционным материалом позволит глубоко овладеть знаниями. Конспект лекции рекомендуется просмотреть сразу после занятий. Отметьте материал конспекта лекций, который вызывает затруднения для понимания. Попытайтесь найти ответы на затруднительные вопросы, используя рекомендованную литературу. Если самостоятельно не удалось разобраться в материале, сформулируйте вопросы и обратитесь к преподавателю за консультацией.

Регулярно отводите время для повторения теоретического и практического материала, проверяя свои знания, умения и навыки по контрольным вопросам.

При подготовке к практическим занятиям целесообразно пользоваться планом, представленным в пункте 5.2 данного учебно-методического комплекса. Тщательно проработать лекционный материал и соответствующие учебные пособия по теме каждого практического занятия. Прорешать типовые задачи домашнего задания.

Практические занятия по данной дисциплине способствуют развитию аналитических и вычислительных способностей и формированию соответствующих навыков; – привитию навыков составления и анализа математических моделей простых реальных задач и развитию математической интуиции; – выработке умений решать прикладные задачи, связанные с будущей специальностью студента, требующие отбора данных и предварительного вывода аналитических зависимостей. Поэтому основным требованием преподавателя к студентам является обязательное присутствие студентов на всех практических занятиях, а также выполнение всех заданий преподавателя, как текущих, так и контрольных.

3. Краткие учебно-методические материалы к практическим занятиям

1 семестр

Практическое занятие № 1 «Комплексные числа Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы»

Основные вопросы

1. Понятие комплексного числа.
2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

Типовые задания

1. Перевести в тригонометрическую и показательную формы комплексные числа:

а) $z = -\sqrt{3} + i$; б) $z = 2i$; в) $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$

2. Перевести в алгебраическую форму комплексные числа:

а) $z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$; б) $z = e^{-i120^0}$; в) $z = 6e^{i210^0}$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 2 «Действия над комплексными числами»

Основные вопросы

1. Сложение и вычитание.
2. Умножение и деление.
3. Возведение в степень.
4. Извлечение корня.

Типовые задания

1. Выполнить действие: $\frac{i-4}{1-i}+(2+2i)(-1-4i)$.
2. Возвести в степень: $\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)^{10}$.
3. Найти корни: $\sqrt[3]{-1-i}$.
4. Решить уравнения: а) $x^4+16=0$; б) $x^3-27=0$; в) $z^3+\frac{2\sqrt{2}}{1+i}=0$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 3 «Уравнение прямой на плоскости»

Основные вопросы

1. Общее уравнение прямой.
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
3. Уравнение прямой проходящей через 2 точки.
4. Уравнение прямой проходящей через данную точку в данном направлении.
5. Уравнение прямой в отрезках.
6. Уравнение прямой проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
7. Основные задачи: угол между двумя прямыми, расстояние от точки до прямой.

Типовые задания

1. Даны вершины треугольника: A(2, 3), B(6, 1), C(2, -2). Найти:
1. Длину стороны АВ.
2. Уравнения сторон АВ, ВС, АС.
3. Уравнение высоты из вершины А.
4. Уравнение медианы из вершины В.
5. Расстояние от точки С до прямой АВ.
2. Составить уравнение прямой проходящей через точку $M(-2;-5)$, параллельно прямой $3x+4y+2=0$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 4 «Кривые второго порядка»

Основные вопросы

1. Окружность.
2. Эллипс.
3. Гипербола.

4. Парабола.

Типовые задания

8. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M\left(\frac{5}{2};\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$, $N\left(-2;\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$.
9. Построить линии:

1) $y=\sqrt{9-x^2}$; 2) $x-4y^2-12=0$; 3) $x^2-y^2+2x+2=0$;

4) $36x^2+4y^2+144x-40y+100=0$; 5) $x^2-4y^2-4x-8y+8=0$; 6) $2x+y-4=0$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 5 «Уравнение плоскости в пространстве»

Основные вопросы

1. Уравнение плоскости.
2. Плоскость. Основные задачи: угол между двумя плоскостями, расстояние от точки до плоскости.
3. Построение плоскостей.

Типовые задания

1. Найти расстояние от точки A до плоскости, проходящей через точки B, C, D.

$A(1,-6,-5), B(-1,2,-3), C(4,-1,0), D(2,1,-2)$.

2. Найти угол между плоскостями: $4x-5y+3z-1=0, x-4y-z+9=0$.

10. Построить плоскости:

1) $y=4$; 2) $x-4y-12=0$; 3) $x-y+2x+2=0$;

4) $x-3y+2z=6$; 5) $2x+z-3=0$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 6 «Уравнение прямой в пространстве»

Основные вопросы

6. Уравнение прямой в пространстве.
7. Прямая в пространстве. Основные задачи.
8. Прямая и плоскость в пространстве.

Типовые задания

1. Написать уравнение прямой, проходящей через точки: $A(3,-2,-1)$ и $B(1,3,1)$.

2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,4,-3)$ и параллельно вектору $\vec{s}=\{1;-2;6\}$.
3. Данные прямые параллельны или перпендикулярны?
$\frac{x+4}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-5}{-8}$, $\frac{x}{-1}=\frac{y+8}{-1}=\frac{z-6}{4}$.
4. При каком значении k данные прямые перпендикулярны?
$\frac{x+4}{-5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$, $\frac{x+7}{k}=\frac{y}{4}=\frac{z-3}{3}$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 7 «Понятие функции»

Основные вопросы

1. Область определения функции.
2. Чётность, нечётность функции.
3. Построение графиков функции.

Типовые задания

1. Найти область определения функций:

1) $f(x)=\log_3(3x-2)+\lg(3-x)$; 2) $f(x)=\frac{\sqrt{x+12-x^2}}{x^2-9}+\lg(x-3)$.

2. Выяснить четность(нечётность) функций:

1) $y=\frac{\cos 3x}{x^2}$; 2) $y=-\lg|2x|\cdot tgx$; 3) $y=5^{x+1}-x^2$.

3. Построить графики функций:

1) $y=3^{|x|}$; 2) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+3)$; 3) $y=\frac{2x+1}{4x+5}$;

4) $y=3\cos(2x-1)$; 5) $y=3x^2+9x+11$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 8 «Вычисление пределов функций»

Основные вопросы

7. Понятие предела.
8. Основные теоремы о пределах.
9. Раскрытие неопределённостей различных типов.
10. Использование эквивалентных бесконечно малых функций.

Типовые задания

1. Вычислить пределы функций:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^2-1};\quad \lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right);\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-3x^3+5}{3x^4-5x^2+1}\ ;\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\ln(1+x)};\quad \lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\pi-2x};$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x};\quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+x-1}{x^4+2x};\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{2x+1}\right)^{x+1};\quad \lim_{x\to0}\frac{tgx}{\sin 2x},\ \lim_{x\to-2}\frac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2};$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}\ ;\ \lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{(x-1)^2};\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^5-7x+1}{3x^2+x+3};\ \lim_{x\to0}\frac{tgx-\sin x}{x^3};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-1}{x+4}\right)^{2x+1},\ \lim_{x\to\infty}\frac{3^x-4\cdot5^x}{5^x+3^x},\quad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right),\quad \lim_{n\to\infty}\frac{5n\cdot(n-1)!}{n!+(n+1)!}.$$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 9 «Замечательные пределы»

Основные вопросы

1. Первый замечательный предел.
2. Второй замечательный предел.

Типовые задания

1. Вычислить пределы функций:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x};\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{x+1};\quad \lim_{x\to0}\frac{tgx}{\sin 2x};\quad \lim_{x\to0}\frac{tgx-\sin x}{x^3};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+4}\right)^{2x+1};\ \lim_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}};\quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x};\ \lim_{x\to+\infty}(2x+1)[\ln(x+3)-\ln(x)]\ .$$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 10 «Непрерывность функции. Точки разрыва»

Основные вопросы

1. Непрерывность функции в точке.
2. Основные теоремы о непрерывных функциях.
3. Точки разрыва функции и их классификация.

Типовые задания

1. Исследовать функции на непрерывность и сделать чертёж.

1) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0;\\ x^2+1, & 0<x<1;\\ x, & x\ge 1.\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{4x+2}{x-1}$.

2. Найти точки разрыва функций и определить их тип:

1) y=$5^{\frac{2x}{x-1}}$; 2) y=$\dfrac{4x^2-25}{2x-5}$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 11 «Производная явно заданной функции»

Основные вопросы

1. Понятие производной.
2. Правила дифференцирования. Таблица производных.
3. Производная сложной функции.

Типовые задания

1. Вычислить производные:

1) $y=\dfrac{\cos x}{1+2\sin x}$; 2) $y=\ln\dfrac{x^2}{1-x^2}$; 3) $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$; 4) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$;

5) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; 6) $y=tg(x)\cdot\sin^2(3x)$; 7) $y=\ln\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)$; 8) $y=tg^3x-3tgx+3x$;

9) $y=arctg\dfrac{x+3}{x-3}$;10) $y=10^{3-\sin^3 2x}$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 12 «Дифференцирование функций заданных неявно, параметрически. Производная степенно-показательной функции»

Основные вопросы

1. Дифференцирование функций заданных неявно, параметрически.
2. Логарифмическое дифференцирование.
3. Производная степенно-показательной функции.

4. Производные высших порядков.

Типовые задания

1. Найти производную функции:

$$1)\ x^2 + y^2 - xy + 3 = 0;\ \ 2)\ y_x = ?,\ если \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases};\ 3)\ f(x) = (x^2 + 3x)^{x\cos x}.$$

2. Вычислите y'', если $y = \ln(x^2 + 1)$.

3. Найти производную n-го порядка:

$y = 2^x + 2^{-x}$, $y^{(n)} = ?$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 13 «Интервалы монотонности и экстремумы функции. Интервалы выпуклости функции. Точки перегиба. Асимптоты»

Основные вопросы

1. Интервалы монотонности и экстремумы функции.
2. Интервалы выпуклости функции. Точки перегиба.
3. Асимптоты.

Типовые задания

1. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$.
2. Исследовать функцию на экстремум $y = 5x^3 - 15x^2 + 4$.
3. Найти интервалы вогнутости и точки перегиба графиков функций:

$y = x^4 + 3x^3$

4. Определить асимптоты кривой $y = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 14 «Исследование функций с помощью производных»

Основные вопросы

1. Область существования функции.
2. Точки разрыва. Интервалы возрастания и убывания.
3. Точки максимума и минимума.
4. Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.

5. Области выпуклости и вогнутости.
6. Точки перегиба.
7. Асимптоты.
8. Построение графика.

Типовые задания

1. Провести полное исследование функций и построить их графики:

1) $y = 2x^3 - 12x^2 + 18x$; 2) $y = \dfrac{x}{x^2 - 16}$; 3) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$; 4) $y = x\sin x$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 15 «Приложения производной в экономике»

Основные вопросы

1. Предельные величины.
2. Издержки производства.
3. Производительность труда.
4. Эластичность функции.

Типовые задания

1. Зависимость издержек производства C от объема выпускаемой продукции q выражается формулой $C = 40q + 0{,}02q^3$, где A и B – известные величины. Определить средние и предельные издержки производства при объеме продукции 10.
2. Производитель реализует свою продукцию по цене p за единицу, а издержки при этом задаются функцией $C(x)= 9x + 0{,}2x^2$, где x - объем выпускаемой продукции в условных единицах (x >0) Найти оптимальный для производителя объем выпуска продукции и соответствующую ему прибыль, если р=49 ден. ед.
3. Объем продукции Q, произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением $Q = (-5/6)t^3 + (15/2)t^2 + 100t + 50$ (ед.), $t \in [1;8]$, где t - рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения через час после начала работы и за час до ее окончания.
4. Опытным путем установлены функции спроса q = (p + 8)/(p + 2) и предложения s = p + 0,5 , где q и s - количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p - цена товара. Найти: а) равновесную цену, т.е. цену, при которой спрос и предложение уравновешиваются; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода при увеличении цены на 5% от равновесной.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.

4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 16 «Функции нескольких переменных. Частные производные»

Основные вопросы

1. Область определения функции нескольких переменных.
2. Частные производные первого порядка и полный дифференциал функции нескольких переменных функции.
3. Производные высших порядков.

Типовые задания

1. Найти частные производные I порядка:

1) $z = x^3 + 5x^2y^2 - y^3$; 2) $z = c\os(x + 4y)$; 3) $z = arcctg\,\dfrac{y}{x}$; 4) $z = \ln(x + yx)$;

5) $z = xe^{xy}$; 6) $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2. Найти полный дифференциал: $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.
3. Найти частные производные II порядка:

1) $z = \dfrac{x^2}{1 + 2y^2}$; 2) $z = \ln\left(x + e^{xy}\right)$; 3) $z = arctgxy$.

4. Показать что функция $z = \ln(x^2 + y^2 + 2y + 1)$ удовлетворяет условию $Z''_{xx} + Z''_{yy} = 0$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 17 «Экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум»

Основные вопросы

1. Экстремум функции нескольких переменных.
2. Понятие условного экстремума. Метод подстановки. Метод неопределённых множителей Лагранжа.

Типовые задания

1. Исследовать функцию z = $y^4 - 2xy^2 + x^2 + 2y + y^2$ на экстремум.
2. Найти экстремум функции f(x, y) = xy, если уравнение связи: 2x + 3y – 5 = 0.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

Практическое занятие № 18 «Приложения функций нескольких переменных к решению экономических задач»

Основные вопросы

1. Эластичность функции нескольких переменных.
2. Полезность. Предельная полезность.
3. Производственная функция.
4. Кривые безразличия производства.

Типовые задания

1. Функция спроса имеет вид $D = f(p, p_A, y) = 15 - 4p + 3p_A + 0{,}02y$,где D-спрос на товар Q, p-цена товара Q, p_A-цена альтернативного товара, y-доход потребителей. Вычислить коэффициенты эластичности $\varepsilon_p, \varepsilon_A, \varepsilon_y$ и пояснить их экономический смысл при $p = 12,\ p_A = 18,\ y = 1000$.
2. Задана функция полезности $U = 4x^{1/4}y^{3/4}$, где x - количество товара X и y - количество товара Y. Требуется оценить изменение полезности, когда x уменьшается от 100 до 99, а y увеличивается от 200 до 201.
3. Найти предельные полезности и предельную норму замещения товара x на товар y для функции полезности $U = \ln x + \ln y + \ln(x+y)$ в точке А (2;10).
4. Производственная функция задана формулой $Q = 100\sqrt{L}\cdot\sqrt{K} - 20L$. Вычислить предельную производительность труда и предельный продукт труда при $L = 100{,}400{,}2500,\ K = 100$ у. е.
5. Задана производственная функция $Q = KL^2 + 9$, где Q - количество произведённых товаров или услуг, K и L- ресурсы. Построить кривую безразличия при $Q_0 = 10$, вычислить коэффициент заменяемости ресурсов R_A, пояснить экономический смысл решения, если А (1,1).

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009.-464с.
3. Высшая математика для экономических специальностей : учеб. и практикум : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- 3-е изд., перераб. и доп..- М: Юрайт: Высшее образование, 2010.-910 с.
4. Математика: практикум/ АмГУ, ФМиИ; сост. Г.П. Вохминцева, Г.Н. Торопчина, И.Н. Шевченко Ч.1. 2008.-116с.

2 семестр

Практическое занятие № 1 «Матрицы и действия над ними»

Основные вопросы

1. Понятие матрицы. Виды матриц.
2. Равенство матриц.
3. Транспонирование матриц.
4. Операция сложение матриц и ее свойства.
5. Операция умножения матрицы на действительное число и ее свойства.
6. Операция умножения матриц и ее свойства.

Типовые задания

1.Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 5 & -6 & 3 \end{pmatrix}$. Найти C=2A-3B.

2.Найти $-A+2B-\frac{1}{3}C$, если $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-3 & 3 & 6\\ 0 & -3 & -9\end{pmatrix}$.

3.Найти $A+A^{\mathrm{T}}$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 5 & 4 & -9\\ 3 & 0 & 7\end{pmatrix}$.

4.Матрицы A и B равны, $A=\begin{pmatrix}y+2 & -4 & 2\\ 2x-3 & 0 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & z+1 & 2\\ 3 & 0 & -t\end{pmatrix}$. Найти x, y, z, t.

5.Дано матричное равенство $2A+B-A^T\cdot B^T=\Theta+C$, где $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & a\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3a & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Найти a.

6.Дано произведение матриц $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4 & 5\\ 3 & -1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}$. Указать значения x_2, x_3, y_1.

7. Перемножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix}4 & 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 1 & 4\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ -2 & 1 & 7\\ 6 & 0 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 3\\ -2\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix}7 & 1 & -3 & 2\\ 2 & 0 & -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 4 & 3 & 0\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб. : рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 2 «Вычисление определителей»

Основные вопросы

1.Понятие определителя второго порядка и его вычисление.

2.Понятие определителя третьего порядка и его вычисление.

3.Понятие определителя порядка n.

4. Понятие алгебраического дополнения элемента определителя.

5. Обратная матрица.

Типовые задания

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -7\end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -5 & 2\end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix}1+\sqrt{3} & 2-\sqrt{2}\\ 2+\sqrt{2} & 1-\sqrt{3}\end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix}a+в & a-в\\ a-в & a+в\end{vmatrix}$, д) $\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ \sin\beta & \cos\beta\end{vmatrix}$.

2. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 3\\ 2 & 0 & -2\end{vmatrix}$.

4. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$.

5. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

6. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$ тремя способами:

1) по правилу «треугольников»;
2) путем разложения по элементам первой строки;
3) путем накопления нулей ниже главной диагонали.

7. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

7. Найти A^{-1}:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 3 «Методы решения систем линейных уравнений»

Основные вопросы

1. Теорема Кронекера-Капелли.
2. Метод Крамера решения систем линейных уравнений.
3. Решение систем уравнений матричным методом.
4. Метод Гаусса решения системы линейных уравнений.

Типовые задания

1. Показать, что система имеет единственное решение. Найти решение методом Крамера.

а) $\begin{cases} 2x - 5y = 1, \\ 3x + y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 7, \\ 2x_1 - 5x_2 = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

2. Исследовать и решить систему. Найти общее решение и одно из частных решений в случае совместности неопределенной системы.

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

3. Затраты трех видов сырья на производство каждого из трех типов продукции заданы векторами $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$, $\vec{q}_3$. Запасы каждого вида сырья заданы вектором $\vec{S}$. Определить план производства, обеспечивающий использование всего сырья. Составить математическую модель задачи и решить ее, используя матричный метод и формулы Крамера.

а) $\vec{q}_1$ =(1, 2, 2), $\vec{q}_2$ =(3, 2, 5), $\vec{q}_3$ =(2, 4, 1), $\vec{S}$ =(80, 120, 90);

б) $\vec{q}_1$ =(2, 5, 1), $\vec{q}_2$ =(4, 3, 2), $\vec{q}_3$ =(3, 2, 5), $\vec{S}$ =(168, 173, 191).

4. Решить систему матричным способом:

а) $\begin{cases} 3x + 7y + 4z - 3 = 0, \\ x + 2y + 2z - 3 = 0, \\ 2x + 3y + 5z - 10 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 = -1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

2. Показать, что система имеет единственное решение. Найти решение методом Гаусса.

а) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -8, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + y - z = -6, \\ 4x - 3y - 4z = 4, \\ -2x + 2y + 3z = -2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14. \end{cases}$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 4 «Применение элементов линейной алгебры в экономике»

Основные вопросы

1. Экономический смысл элементов матрицы прямых затрат.
2. Уравнение линейного межотраслевого баланса.
3. Понятие «продуктивность матрицы прямых затрат».
4. Понятие «запаса продуктивности».
5. Критерии продуктивности матрицы прямых затрат.
6. Нормы добавленной стоимости.
7. Структурной матрицы торговли.
8. Условие бездефицитной торговли.

Типовые задания

1. Дана матрица прямых материальных затрат $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$.Зная конечный продукт первой отрасли $y_1 = 80$ и валовой выпуск второй отрасли $x_2 = 100$, найти конечный продукт второй и валовой выпуск первой отрасли.

2. Рассматривается экономическая система, состоящая из двух отраслей– промышленности и сельского хозяйства. $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$ – матрица прямых затрат, $\vec{V} = \begin{pmatrix} 8 & 9 \end{pmatrix}$– вектор норм добавленной стоимости. Определить: равновесные цены; равновесные цены при увеличении

норм добавленной стоимости на a=2, b=3 соответственно.

3. $A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,4 & 0,3\\ 0,4 & 0,3 & 0,2\\ 0,4 & 0,3 & 0,5\end{pmatrix}$ торговли трех стран. Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие бездефицитной торговле, при условии, что сумма бюджетов равна 15000.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 5 «Непосредственное интегрирование. Замена переменной. Интегрирование по частям»

Основные вопросы

1. Первообразная
2. Неопределенный интеграл, его определение и свойства
3. Геометрическая интерпретация неопределенного интеграла
4. Таблица интегралов основных элементарных функций.
5. Замена переменной.
6. Интегрирование по частям

Типовые задания

$\int(4\sin x+2\sqrt{x}-\frac{3}{x}+5^x)dx.$ $\int(\frac{3}{\sin^2 x}+e^x+3x^3-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}})dx.$ $\int\frac{cos2x}{\cos x-\sin x}dx.$

$\int(\frac{1}{1+x^2}+2^{3x}+\frac{1}{2x}+e^x)dx.$ $\int\frac{dx}{1+4x^2}.$ $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}.$ $\int\frac{dx}{x^2+2x-10}.$

$\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}.$ $\int\cos^2 4xdx.$ $\int\frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ $\int\frac{arctg^5 x}{1+x^2}dx.$ $\int\cos^5 x\sin 2xdx.$

$\int\frac{\cos xdx}{\sin^2 x+1}.$ $\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ $\int\frac{3x+4}{x^2+9}dx.$ $\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx.$ $\int\frac{\sqrt{tgx+3}}{\cos^2 x}dx.$ $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$ $\int\frac{\sin(arctgx)}{1+x^2}dx.$

$\int\sin^3 xdx.$ $\int(x+2)\sin xdx.$ $\int x^2\ln xdx.$ $\int\arcsin 2xdx.$ $\int x^2\ell^{4x}dx.$ $\int\sin(\ln x)dx.$ $\int e^{3x}\sin xdx.$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 6 «Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций»

Основные вопросы

1. Разложение правильной дроби на простейшие
2. Интегрирование рациональных функций.
3. Интегрирование иррациональных функций.
4. Интегрирование тригонометрических функций.

Типовые задания

$\int\frac{dx}{(x+1)(x-2)}$ $\int\frac{dx}{(x-1)^2x}.$ $\int\frac{xdx}{(x-3)(x^2+25)}.$ $\int\frac{x^5-2x^3+4}{x^3-4x}dx$ $\int\frac{2x+3}{x^2+6x+13}dx.$ $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$

$\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{x+1}}$. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{(x-1)^3}$. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}} dx$. $\int \cos^3 x \sin^4 x dx$. $\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin^4 x} dx$

$\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 7\cos^2 x}$. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$ $\int (2+ctgx)^3 dx$. $\int \frac{tgx}{1-ctg2x} dx$ $\int \frac{\sin^7 x}{\sqrt{\cos^4 x}} dx$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 7 «Приложения определённого интеграла»

Основные вопросы

1. Вычисление площади криволинейной трапеции.
2. Вычисление длины дуги.
3. Вычисление объем тела вращения.
4. Экономический смысл определенного интеграла.

Типовые задания

1. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

1) $y = 2x - x^2$; $y = 0$; 2) $y = x^2$; $y = 1$;

3) $y = \ell^{x}$; $y = \ell^{-x}$; $x = 1$; 4) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

2. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной данными кривыми.

1) $y = \sqrt{x}$; $y = 0$; $x = 4$. 2) $y = \sin 2x$; $y = 0$; $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Определить величину вклада через 2 года, если начальный капитал 10000 ден. ед., а проценты начисляются непрерывно по ставке 5 %.

4. Найти объем произведенной продукции за время t=5 час, если производительность труда задана функцией $f(t)=-t^2+10t$ (ед./час)

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 8 «Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные»

Основные вопросы

1. Определение дифференциального уравнения.
2. Понятие общего и частного решений дифференциального уравнения.
3. Геометрический смысл общего и частного решений дифференциального уравнения
4. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка.
5. Определение и метод решения дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
6. Определение и метод решения однородного дифференциального уравнения первого порядка.
7. Определение линейного дифференциального уравнения первого порядка.
8. Метод Бернулли решения линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Типовые задания

$(3x-1)dy+y^2dx=0$; $y'=\frac{\ell^y}{x}$, $y(1)=0$; $xy'=2\sqrt{y}$, $y(1)=0$;

$xy'=\sqrt{x^2+y^2}+y$; $y'=\frac{y^2}{xy-x^2}$; $y'=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$, $y(1)=0$. $y'-\frac{y}{x}=2x$; $y'+2xy=2xe^{-x^2}$;

$y'+2xy=e^{-x2}, y(0)=0.$

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

Практическое занятие № 9 «Дифференциальные уравнения высших порядков»

Основные вопросы

1. Решение дифференциального уравнения вида $y^{(n)}=f(x)$.
2. Решение дифференциального уравнения вида $F(x,y',y'')=0$.
3. Решение дифференциального уравнения вида $F(y,y',y'')=0$.
4. Решение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.
5. Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.

Типовые задания

1. $y'''=6x+1$; 2. $y'''=4\cos 2x$, если $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=1$; 3. $xy''=y'$;

4. $y''+\frac{y}{x}=0$; 5. $yy''=(y')^2$. $y''+4y'=0$;

$y''-4y'+4y=0$; $y^V-y'''=0$; $y''-4y'+13y=0$.

$y''+y'-2y=3xe^{-x}$; $y''+4y'+5y=x^2-1$; $y''-4y'+4y=\sin 3x$.

Литература

1. Высшая математика для экономистов : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера -3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2008.-480 с.

2. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб пособие: рек. Мин. Обр. РФ/ под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002,2003,2004.-424с.

3 семестр

Практическое занятие № 1 «Элементы комбинаторики. Теоремы сложения и умножения вероятностей»

Основные вопросы

1. Элементы комбинаторики.
2. Классическая вероятность.
3. Геометрическая вероятность.
4. Теоремы сложения вероятностей.
5. Теоремы умножения вероятностей.
6. Вероятность появления хотя бы одного события.

Типовые задания

1. Сколько различных пятизначных цифр можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6

а) цифры могут повторяться;

б) цифры не повторяются?

2. На окружности выбрано 7 точек, сколько можно построить треугольников с вершинами в этих точках?
3. Из 10 различных книг выбирают 4 для посылки. Сколькими способами это можно сделать?

4. Сколько различных восьмибуквенных «слов» можно получить переставляя буквы в слове ПАРАГРАФ?
5. В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить в нём 12 открыток?
6. Монета подброшена 2 раза. Какова вероятность того, что оба раза выпадет герб?
7. В некоторой точке С провода длиной 20 м. произошёл разрыв. Определить вероятность того, что С удалена от левого кон6ца на расстояние не меньшее 4 м.
8. Точка взята наудачу внутри круга с радиусом 50 см. Найти вероятность того, что эта точка окажется от центра на расстоянии меньшем 20 см.
9. Студент разыскивает нужную ему формулу в 3 справочниках. Вероятность того, что формула содержится в 1,2 и 3 справочнике соответственно равна 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что формула содержится : а) только в 1 справочнике; б) только в 2 справочниках; в) во всех 3 справочниках; г) ни в одном справочнике.
10. В электрическую цепь параллельно включены 2 элемента. Вероятности отказов первого и второго из них соответственно равны: p_1=0,3 ;p_2=0,6. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.
11. Вероятность для компании занимающейся строительством терминалов для аэропортов, получить контракт в стране А равна 0,4 , в стране В 0,3 . Чему равна вероятность того, что компания получит контракт хотя бы в одной стране?
12. Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из центрального круга и двух концентрических колец. Вероятности попадания в круг и в кольца соответственно равны 0.2, 0.15 и 0.1. Найти вероятность попадания в мишень.
13. В мешочке смешаны нити, среди которых 30 % белых, а остальные красные. Найти вероятность того, что вынутые наудачу две нити будут: а) одного цвета; б) разных цветов?

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

Практические занятия № 2,3 «Формулы полной вероятности и Байеса. Повторные независимые испытания»

Основные вопросы

1. Формула полной вероятности.
2. Формула Байеса.
3. Повторные независимые испытания.
4. Интегральная теорема теорема Муавра-Лапласа.

Типовые задания

1. В двух урнах находятся белые и красные шары: в первой — 4 белых и 5 красных, во второй — 7 белых и 3 красных. Из второй урны наудачу взяли шар и переложили его в первую урну. Найти вероятность того, что наудачу взятый после этого из первой урны шар будет белым.
2. В двух ящиках находятся детали: в первом — 10 штук и из них 3 нестандартные, а во втором — 20 штук и из них 8 нестандартных. Из каждого ящика наудачу вынуто по одной детали, а потом из этих двух деталей наудачу взята одна. Найти вероятность того, что эта деталь окажется стандартной.
3. Вероятность изготовления изделия с браком равна 0,08. После изготовления все изделия подвергаются проверке, в результате которой изделия без брака признаются годными с вероятностью 0,95, а изделия с браком — с вероятностью 0,06. Найти долю изделий, выпущенных после проверки, а также вероятность того, что выпущенное после проверки изделие окажется без брака.

4. В среднем из каждых 100 клиентов отделения банка 60 обслуживаются первым операционистом и 40 — вторым операционистом. Вероятность того, что клиент будет обслужен без помощи заведующего отделением, только самим операционистом, составляет 0,9 и 0,75 соответственно для первого и второго служащих банка. Найти вероятность полного обслуживания клиента первым операционистом.
5. Монету бросают 6 раз. Найти вероятности того, что герб выпадет: 1) 2 раза, 2) не менее двух раз.
6. Вероятность выпуска бракованного изделия равна 0,3. Найти вероятность того, что среди 100 выпущенных изделий будет ровно 60 изделий без брака.
7. Вероятность выпуска бракованных деталей равна 0,3. Найти вероятность того, что среди 100 выпущенных деталей будет не менее 75 стандартных.

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

Практическое занятие № 4 «Случайные величины. Числовые характеристики случайных величин»

Основные вопросы

1. Случайные величины.
2. Функция распределения.
3. Числовые характеристики случайных величин.

Типовые задания

1. В денежной лотерее на 100 билетов разыгрывается один выигрыш в 20 р., два выигрыша по 10 р. и 10 выигрышей по 1 р. Найти закон распределения случайной величины X возможного выигрыша на один билет.
2. Партия из 8 изделий содержит 5 стандартных. Наудачу отбираются 3 изделия. Составить таблицу закона распределения числа стандартных изделий среди отобранных.
3. Вероятностный прогноз для величины X — процентного изменения стоимости акций по отношению к их текущему курсу в течение шести месяцев — дан в виде закона распределения:

X	5	10	15	20	25	30
P	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1.

   Найти вероятность того, что покупка акций будет более выгодна, чем помещение денег на банковский депозит под 36% годовых.

4. Пусть ежедневные расходы на обслуживание и рекламу автомобилей в некотором автосалоне составляют в среднем 100 тыс. р., а число продаж X автомашин в течение дня подчиняется следующему закону распределения:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	0,25	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,025	0,025.

Найти математическое ожидание ежедневной прибыли при цене на машину 150 тыс. р.

5. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной следующим распределением:

X	-5	2	3	4	6
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1.

6. Законы распределения независимых случайных величин X и Y приведены соответственно в таблицах:

X	-2	0	1	3	4
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1;

Y	2	4	6	8
p	0,2	0,4	0,3	0,1.

Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z = 2X + 3Y$.

7. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ \sin x, & 0 < x \leqslant \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения X.

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

Практическое занятие № 5 «Основные законы распределения случайных величин»

Основные вопросы

1. Биноминальное распределение и его характеристики.
2. Распределение Пуассона и его характеристики.
3. Нормальное распределение и его характеристики.
4. Показательное распределение и его характеристики.
5. Равномерное распределение и его характеристики.

Типовые задания

1. Банк выдает 5 кредитов. Вероятность невозврата кредита равна 0,2 для каждого из заемщиков. Составить таблицу закона распределения количества заемщиков, не вернувших кредит по окончании срока кредитования.
2. Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого имеет показательное распределение $F_1(t) = 1 - e^{-0,02t}$, второго $F_2(t) = 1 - e^{-0,05t}$. Найдите вероятность того, что за время t=6ч. один элемент откажет.
3. Книга издана тиражом 100 тысяч экземпляров. Вероятность брака в книге равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.
4. Размер мужских сорочек является случайной величиной с нормальным законом распределения, математическим ожиданием 39 и дисперсией 9. Какой процент от общего объема заказа следует предусмотреть магазину для сорочек 40-го размера воротничка при условии, что этот размер находится в интервале (39,5; 40,5)?
5. Ребро куба x измерено приближенно в интервале (a, b). Найти математическое ожидание и дисперсию объема куба, если его ребро рассматривать как случайную величину X с равномерным распределением на указанном интервале.

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

Практическое занятие № 6 «Закон больших чисел»

Основные вопросы

1. Закон больших чисел.
2. Неравенства Чебышева.
3. Теорема Чебышева.
4. Теорема Бернулли.

Типовые задания

1. Вероятность всхожести некоторой культуры равна 0,75. Оценить вероятность того, что из посеянных 1000 семян число взошедших окажется от 700 до 800 включительно.
2. В целях контроля из партии в 100 ящиков взяли по одной детали из каждого ящика и измерили их длину. Оцените вероятность того, что вычисленная по данным выборки средняя длина детали отличается от средней длины детали во всей партии не более чем на 0,3мм, если известно, что среднее квадратическое отклонение не превышает 0,8мм.
3. Оценить вероятность того, что абсолютная величина отклонения среднего роста 1000 мужчин от математического ожидания случайной величины, выражающей рост каждого мужчины, не превзойдёт 0, 5 см, полагая, что среднее квадратичное отклонение каждой из этих случайных величин не превышает 2,5 см.
4. В среднем 10% работоспособного населения некоторого города- безработные. Оцените вероятность того, что уровень безработицы среди обследованных 10000 работоспособных жителей города будет в пределах от 9% до 11%(включительно).
5. Игральный кубик подбрасывают 10000 раз. Оценить вероятность отклонения частоты появления шести очков от вероятности появления того же числа очков меньше чем на 0,01.

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

Практическое занятие № 7 «Статистические оценки параметров распределения»

Основные вопросы

1. Постановка задачи проверки гипотез.
2. Критерий оценки и его мощность.
3. Критическая область и область принятия гипотезы.
4. Проверка гипотез о значениях параметров нормального распределения.
5. Статистические оценки параметров распределения.

Типовые задания

1. Найти несмещенные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии, если по результатам выборочных наблюдений получено следующее распределение

x_i - x_{i+1}	0 – 8	8 – 16	16 – 24	24 – 32	32 – 40
n_i	5	15	20	10	7

9. Найти интервальную оценку с доверительной вероятностью 0,95 для неизвестного математического ожидания нормально распределенной случайной величины X, если известны: генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=4$; выборочная средняя $\overline{x}_{\hat{A}}$ = 30; объем выборки n = 25.
10. В банке в течение двух дней проводилось исследование времени обслуживания клиентов. Известно, что m_x=17,8, m_y=17,6, $n_1=n_2$=55. Можно ли считать одинаковыми отклонения от среднего времени обслуживания клиентов банка в 1-й и во 2-й дни при α = 0,01?

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

Практическое занятие № 8 «Проверка статистических гипотез»

Основные вопросы

1. Критерий Пирсона.
2. Критерий Колмогорова.

Типовые задания

1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,01, установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами n_i и теоретическими частотами n'_i, вычисленными исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X:

n_i	8	16	40	72	36	18	10
n'_i	6	18	36	76	39	18	7

2. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05, проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности X, если выборочное распределение из этой совокупности имеет следующий вид;

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

Указание: при определении выборочной средней и выборочного среднего квадратического отклонения использовать метод произведений.

3. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05, проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности X, если выборочное распределение из этой совокупности имеет следующий вид;

x_i - x_{i+1}	(–20) – (–10)	(–10) – 0	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
n_i	20	47	80	89	40	16	8

Литература

1. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.
2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

Практическое занятие № 9 «Корреляционный и регрессионный анализ»

Основные вопросы

1. Функциональные и корреляционные зависимости случайных величин.
2. Линейная и нелинейная регрессия. Составление уравнений прямых регрессий.
3. Статистическая оценка коэффициента корреляции и ее свойства.

Типовые задания

1. В результате анкетного обследования для выявления важнейших видов оборудования, используемого судоводителями во время вахты, получены два ряда ранговых оценок: «по важности» оборудования и «по частоте» его использования.

Важность	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Частота	1	4	2	6	3	5	12	9	15	7	11	8	10	14	17	13	16	18	19

Взаимосвязаны ли эти ряды?

2. Зависимость между величинами выражается в виде экспериментально полученной таблицы. Определить уравнение регрессии. Сделать выводы.

Х	0,5	1	1,5	2	2,5	3
У	0,01	0,11	0,35	0,6	1,58	2,31

Литература

1. . Красс М.С. Математика для экономистов: учеб пособие: рек. УМО вузов/ М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-СПб.:Питер, 2008, 2009, 2010.-464с.

2. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учебно-справ. пособие: рек. УМО/ Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред Н.Ш. Кремера.-М: Высшее образование, 2009.-646 с.

4. Методические указания по самостоятельной работе студентов

Самостоятельная работа студентов предназначена для углубления сформированных знаний, умений, навыков. Самостоятельная работа развивает мышление, позволяет выявить причинно-следственные связи в изученном материале, решить теоретические и практические задачи. Самостоятельная работа студентов проводится с целью: систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов; углубления и расширения теоретических знаний; формирования умений использовать справочную документацию и специальную литературу; развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;-формированию самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;- развития исследовательских умений. Роль самостоятельной работы возрастает, т.к. перед учебным заведением стоит задача в т. ч. и по формированию у студента потребности к самообразованию и самостоятельной познавательной деятельности

1. Виды и формы самостоятельных работ по дисциплине «Математика».

Студентами практикуется два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию. В этом случае студенты обеспечиваются преподавателем необходимой учебной литературой, дидактическим материалом, в т. ч. методическими пособиями и методическими разработками.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия. Видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы могут быть: - для овладения знаниями: чтение текста (учебника, методической литературы); составления плана текста; графическое изображение структуры текста, графическое изображение последовательности выполнения графической работы, выполнение графических работ; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочниками; ознакомление с нормативными документами; учебно-исследовательская работа; использование компьютерной техники, интернета и др.; для закрепления систематизации знаний: работа с конспектом лекции (обработки текста); повторная работа над учебным материалом (учебника, первоисточника, дополнительной литературы); составление плана выполнения работы в соответствие с планом, предложенным преподавателем; изучение ГОСТов; ответы на контрольные вопросы; тестирование, выполнение упражнений и графических работ; для формирования умений: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; выполнение чертежей, схем.

Общая схема самостоятельной работы представлена в пункте 6 рабочей программы.

Основное содержание самостоятельной работы составляет выполнение домашних заданий, расчетно-графических работ и подготовку к экзамену (зачету).

Прежде чем приступать к выполнению РГР, необходимо ознакомиться с содержанием теоретических вопросов по представленному списку литературы и по лекциям.

Работа пишется на стандартных листах писчей бумаги. Все листы заполняются только с одной стороны. Оформление расчетно-графической работы осуществляется в соответствии со стандартом. Каждая РГР начинается с титульного листа, который служит обложкой работы. Сверху на нем указывается принадлежность студента к учебному заведению, факультету, специализации или кафедре. В середине листа указывается название изучаемой темы или раздела и название учебного задания, номер варианта. Ниже и справа указывается фамилия и инициалы студента, номер академической группы, фамилия и инициалы преподавателя. Внизу титульного листа отмечают год выполнения работы.

Эта страница служит также для отметок преподавателя о выполнении учебного задания и замечаний по поводу подготовленного студентом отчета.

При оформлении работы необходимо соблюдать нумерацию заданий. Задание переписывается полностью и ниже оформляется решение. Работа должна быть сдана на кафедру к назначенному преподавателем сроку.

Каждый учебный семестр заканчивается аттестационными испытаниями: зачетно - экзаменационной сессией.

Подготовка к экзаменационной сессии и сдача зачетов и экзаменов является ответственейшим периодом в работе студента. Серьезно подготовиться к сессии и успешно сдать все экзамены - долг каждого студента. Рекомендуется так организовать свою учебу, чтобы перед первым днем начала сессии были сданы и защищены все лабораторные работы, сданы все зачеты, выполнены другие работы, предусмотренные графиком учебного процесса.

Основное в подготовке к сессии - это повторение всего материала, курса или предмета, по которому необходимо сдавать экзамен. Только тот успевает, кто хорошо усвоил учебный материал.

Если студент плохо работал в семестре, пропускал лекции, слушал их невнимательно, не конспектировал, не изучал рекомендованную литературу, то в процессе подготовки к сессии ему придется не повторять уже знакомое, а заново в короткий срок изучать весь материал. А это зачастую, оказывается, невозможно сделать из-за нехватки времени. Для такого студента подготовка к экзаменам будет трудным, а иногда и непосильным делом, а финиш - отчисление из учебного заведения.

В дни подготовки к экзаменам избегай чрезмерной перегрузки умственной работой, чередуй труд и отдых.

IV КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

1. Текущий контроль знаний

При подготовке к контрольным мероприятиям по освоению модуля рекомендуется использовать примерные варианты контрольных работ, приведённые в рабочей программе (пункт 9). Примерные варианты расчетно-графических работ приведены ниже.

I семестр

РГР №1 «Аналитическая геометрия с элементами анализа».

Задание №1. Найти множества значений x, удовлетворяющих следующим условиям. Изобразить эти множества геометрически:

1) $|x| \geq 3$; 2) $|x-2| \leq 3$; 3) $|x-4| = |x+4|$.

Задание №2. Найти область определения функции и изобразить ее на чертеже.

1) $f(x) = \log_3(3x-4) + \lg(3-x)$; 2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+12-x^2}}{x^2-9} + \lg(x-2)$.

Задание №3. Построить графики функций и сформулировать их основные свойства.

1) 2^x; 2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$; 3) $\log_3 x$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} x$; 5) x^3.

Задание №4. С помощью преобразования графика подходящей элементарной функции построить график функции $f(x)$.

1) $\dfrac{1}{|x|}$; 2) $\dfrac{2x-4}{x+3}$; 3) $2x^2+3x+4$.

Задание №5. Построить линии. 1) $y = \sqrt{9-x^2}$; 2) $y = -3 - \dfrac{1}{3}\sqrt{8+2x-x^2}$;

3) $y = \dfrac{3}{4}\sqrt{x^2-16}$; 4) $x - 4y^2 - 8 = 0$.

Задание №6. Построить графики зависимостей величины спроса $\boldsymbol{X}$ от дохода $\boldsymbol{J}$ (функции Торнквиста) на:

а) товары первой необходимости $X = \frac{a_1 J}{J + c_1}$, где $J \geq 0$;

б) товары второй необходимости $X = \frac{a_2(J - b_2)}{J + c_2}$, где $J \geq b_2$;

в) товары роскоши $X = \frac{a_3 J(J - b_3)}{J + c_3}$, где $J \geq b_3$.

a_1	c_1	a_2	b_2	c_2	a_3	b_3	c_3
2	2	3	4	2	2	6	2

Задание №7. Построить графики функций, описывающих зависимости:

а) спроса от цены товара $D = KP^a + C$;

б) предложения от цены товара $S = P^b + d$;

в) охарактеризовать эти графики.

K	a	c	b	d
2	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{9}{5}$	0,5

Задание №8. Издержки перевозки двумя видами транспорта выражаются функциями $y_1 = a_1 x + b_1$; $y_2 = a_2 x + b_2$, где x - расстояние в сотнях километров, y_1, y_2 - соответствующие транспортные расходы.

Необходимо: построить графики функций; произвести экономический анализ; рассчитать транспортные расходы при $x = x_0$.

a_1	b_1	a_2	b_2	x_0
40	120	35	140	600

Задание №9. Даны вершины треугольника АВС.

Найти: длину стороны ВС; уравнение высоты из вершины А и ее длину; уравнение медианы из вершины А; записать уравнение прямой, проходящей через вершину А; построить чертеж.

А(-2;10); В(5;8); С(4;0).

Задание №10. Для функций спроса D(p) и предложения S(P) найти равновесную цену, если $D(p) = 3 \cdot 2^{-p}$ *и* $S(p) = 2^p + 2$

Задание №11.Построить поверхности:

1) $2x - 3y - z = 0$; 2) $2x - 3y - z = 0$; 3) $y^2 - 4z - 5 = 0$;

4) $y^2 - 4z^2 + 8x^2 + 8 = 0$; 5) $y^2 + 4z^2 - x^2 = 0$.

Задание №12. Построить тело, ограниченное поверхностями:

1) $z = x^2 + y^2 + 1$, *x=3, y=3, x=0, y=0, z=0.*

2) *z=0, z=0, y=0, y=4,* $x = \sqrt{25 - y^2}$.

3) $z = y^2$, *2x+y=6, x=0, z=0.*

Задание №13. Найти пределы числовых последовательностей с заданным общим членом: а) $\frac{2n-3}{n^2+1}$; б) $\frac{n}{\sqrt{n^2+4}}$; в) $\left(\frac{n^3}{n^2+1} - \frac{3n^2}{3n-1}\right)$; г) $\left(\sqrt{2n+3} - \sqrt{n+1}\right)$.Задание №14. Найти пределы функции:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$.

Задание №15. Первоначальный вклад, положенный в банк под ***P%*** годовых, составил ***a*** млн. рублей. Найти размер вклада через ***b*** лет при начислении процентов:

а) ежегодном; б) поквартальном; в) ежемесячном г) непрерывно

P=3; a=4; b=2

Задание №16. Доказать непрерывность функции и построить её график:

а) $y=2^{x-2}$; б) $y=\begin{cases}2x+3, & x\le 0,\\ 5-5x, & x>0.\end{cases}$ в) $y=\left|4x-x^2\right|$.

Задание №17. Найти точки разрыва функций и определить их тип. Построить чертёж.

а) $y=\frac{x+3}{x-4}$; б) $y=3^{\frac{1}{x-1}}$; в) $y=\frac{9x^2-16}{3x+4}$; г) $y=\begin{cases}x+1, & x\le 0,\\ -x-1, & x>0.\end{cases}$

РГР №2 «Приложение производной функции одной переменной»

Задание 1. Составить уравнение касательной, проведенной к кривой, $f(x)=\frac{-x^3}{6}+x^2-2x-3$; параллельно прямой $3x+6y-2=0$

Задание 2. Зависимость издержек производства *C* от объема выпускаемой продукции *q* выражается формулой $C=40q+0{,}02q^3$, где *A* и *B* – известные величины. Определить средние и предельные издержки производства при объеме продукции 10.

Задание 3. Зависимость между себестоимостью продукции *C* и объемом ее производства *q* выражается формулой $\tilde{N}=40-0{,}2q$. Требуется определить коэффициент эластичности при выпуске продукции 20 (ден. ед.). (Вычислять либо в обыкновенных дробях, либо с точностью до 0,1.)

Задание 4. Зависимость спроса *q* от цены *p* описывается формулой $q=20e^{-0.02p^2}$. Найти, при каких значениях цены спрос будет эластичным.

Задание 5. Опытным путем установлены функции спроса $q=\frac{P+11}{P+4}$ и предложения $S=P+0{,}5$, где *q* и *S* - количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, *P* - цена товара. Найти:1) равновесную цену; 2) эластичность спроса и предложения;

3) изменение дохода при изменении цены на 5 %.

Задание 6. Объём продукции *q*, произведённый бригадой рабочих, может быть описан уравнением $q=-\frac{1}{6}t^3+\frac{15}{2}t^2+90t+50$ (ед.), $0\le t\le 8$ где *t* – рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп её изменения через *1* часов после начала смены и за *2* часов до её окончания.

Задание 7. Пусть функция дохода $R(q)=24q-2q^2$, а функция затрат $C(q)=q^2-3$. Каким должен быть налог *t* с единицы выпускаемой продукции, чтобы величина суммарного налога *T* со всей продукции была наибольшей?

Задание 8. Определить изменение ставки процента *r=r(t)*, если дана величина вклада в момент времени *t*: $K(t)=K_0(t+1)^{r_0}$, где *t* – число лет от открытия вклада, K_0 – величина вклада в начальный момент времени *t=0*, r_0 (%) – номинальная ставка за год. Найти сумму процента через t_1 и t_2 лет.

K_0	r_0	t_1	t_2
10000	15	2	5

Задание 9. Капитал в *1* миллионов ден. ед. может быть размещён в банке под *30* % годовых или инвестирован в производство, причём эффективность вложения в размере *100* %, а издержки задаются квадратичной зависимостью $c = ax^2$. Прибыль облагается налогом в *p* %. При каких значениях *p* вложение в производство является более эффективным, чем размещение в банке.

Задание 10. Найти пределы функции, используя правило Лопиталя.

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$,	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x}+5}{6x^2+1}$,
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2}{x^2-x}$,	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{4x}-2}{\sin x}$,
$\lim\limits_{x\to 0} x\,ctg 2x$,	$\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$,
$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2 x\right)$,	$\lim\limits_{x\to 0}(1-6x)^{\frac{1}{x}}$.

Задание 11. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $9\sqrt{2}$. Каковы должны быть катеты, чтобы периметр был наибольшим?

Задание 12. Исследовать функции и построить их графики.

$y = x^3 + 3x + 2$	$y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$	$y = ln(x^2 + x - 2)$

Задание 13. Известно, что зависимость издержек и дохода от объёма производства определяется функциями: $C(q) = 18q - 8q^2 + q^3$ и $R(q) = 8q - q^2$ где q – объём производства, $C(q)$ - издержки, $R(q)$ - доход. Найти зависимость прибыли $\Pi(q)$ от объёма производства.

1. Построить графики функций прибыли производства.
2. Найти объёмы производства при которых:

а) прибыль равна нулю;б) прибыль максимальна;в) убытки максимальны

3. Найти значения максимальных убытков и прибыли.
4. Найти средние значения прибыли при объёме производства *q* = 1,5 ед.
5. Найти предельные значения прибыли при объёме производства *q* = 2,5 ед.

При необходимости результат округлить до 0,01

II семестр

РГР № 1 «Линейная алгебра»

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу D = (3A - 4B)C.

2. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$.

4. Найти такие значения параметров p и q, если они существуют, при которых ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & p & -1 \\ 0 & -5 & 6 & q \end{pmatrix}$ равен двум.

5. Относительно канонического базиса в R_3 дано четыре вектора $\vec{f_1}$ =(1,-1,-1), $\vec{f_2}$ =(1,1,-1), $\vec{f_3}$ =(1,1,1), $\vec{x}$ =(4,0,-2). Доказать, что векторы $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, $\vec{f_3}$ можно принять за новый базис в R_3. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в новом базисе.

6. Доказать, что система $\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 - x_4 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 4x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 3 \end{cases}$ имеет единственное решение. Неизвестное x_4 найти по формулам Крамера. Решить систему методом Гаусса.

7. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -3, \\ -x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

Доказать, что система совместна. Найти её общее решение. Найти частное решение, если x_4 = -8, x_5 = -4.

8. Линейный оператор A действует в $R_3 \to R_3$ по закону $A\vec{x}$ = ($4x_1 - 5x_2 + 2x_3$, $5x_1 - 7x_2 + 3x_3$, $6x_1 - 9x_2 + 4x_3$). Найти матрицу A этого оператора в каноническом базисе. Доказать, что вектор $\vec{x}$ =(1,1,1) является собственным для матрицы A. Найти собственное число λ_o, соответствующее вектору $\vec{x}$. Найти другие собственные числа, отличные от λ_o. Найти все собственные векторы матрицы A.

РГР № 2 «Интегральное исчисление»

1) Вычислить неопределенные интегралы:

$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$	$\int \ell^{2x^2+3} x dx$	$\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$
$\int \frac{\sqrt[3]{\ln x + 5}}{x} dx$	$\int x \sin x^2 dx$	$\int \frac{4x^5 dx}{\sqrt{x^6} + 7}$
$\int \frac{arctgx}{1+x^2} dx$	$\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx$	$\int \frac{x^3}{4+5x^4} dx$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}$	$\int \ell^{4x} \sin \ell^{4x} dx$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1+tgx}}$
$\int \frac{x^3}{x-4} dx$	$\int \frac{x-2}{x+1} dx$	$\int \frac{dx}{2x^2+4x+6}$

$\int \arcsin 2x dx$	$\int x \ln x dx$	$\int x \cos x dx$
$\int (x^2+3)\ell^{3x} dx$	$\int arctgx dx$	$\int \frac{x}{\ell^{2x}} dx$
$\int \frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}-1} dx$	$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-9} dx$	$\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x}} dx$
$\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+4)}$	$\int \frac{x^2-1}{x^3-4x} dx$	$\int \frac{dx}{(x^2+x)(x-2)}$
$\int \sin^2 x \cos^3 x dx$	$\int \sin^2 (x+\frac{3}{4}\pi) dx$	$\int \cos 2x \cos 4x dx$
$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} dx$	$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$	$\int \cos^4 x dx$

2) Вычислить определенные интегралы

1. $\int_0^1 (2x+1)e^x dx$; 2. $\int_1^e x^2 \ln x dx$; 3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx$;

4. $\int_1^2 \ln x dx$; 5. $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$; 6. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sin^5 x}$; 7. $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$; 8. $\int_0^1 \left(e^x+4\right)^2 e^x dx$

3) Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а. $y = x^2 - 2x + 2$; $y = 2 + 4x - x^2$.

б. $y = x^2$; $y = 2 - x$; $y = 0$.

4) Определить объем выпуска продукции за первые пять часов работы при производительности $f(t) = 12e^{-0,4t}$, где t − время в часах.

5). Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $p = 134 - x^2$.

Найти выигрыш потребителей, если равновесная цена равна 70.

6). Найти выигрыш потребителей и поставщиков товара, если законы спроса и предложения имеют вид: $p = 250 - x^2$, $p = 20 + \frac{1}{3}x$.

7). Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения одного изделия в период освоения от $x_1 = 100$ до $x_2 = 121$ изделий, полагая, что функция изменения затрат $t(x) = 600x^{-\frac{1}{2}}$.

8) Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость

1. $\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+1}$; 2. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{4+x}$; 3. $\int_1^{3} \frac{dx}{(x-2)^2}$; 4. $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$

РГР № 3 «Дифференциальные уравнения»

1. Решить дифференциальное уравнение.

1. $yy' - x = 0$

2. $y' = (y+1)ctgx, y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$

3. $y^2 - 4xy + 4x^2 y' = 0$

4. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$

5. $y''' = \cos\frac{x}{2} - 1$

6. $y''' + y' = 0$

7. $xy'' + 2y' = x$

8. $y^{IV} - 4y''' + 13y'' = 0$

9. $y'' + 4y = 2\sin x$

10. $y'' + 2y' + 10y = -x^2 + 3x - 1$

11. $y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$

12. $y'' + y = 2e^x, y(0) = 2, y'(0) = -3$

III семестр

РГР № 1 «Случайные события»

На шести одинаковых карточках написаны буквы "а", "а", "а", "з","д", "ч". Вынимают наудачу по одной карточке и прикладывают друг к другу. Какова вероятность того, что получится слово "задача"?

2. Из 75 лотерейных билетов, среди которых 5 выигрышных, наудачу берётся 5 билетов. Какова вероятность того, что все они выигрышные?

3. Три одинаковые монеты радиуса 3см. расположены внутри круга радиуса 10см, в котором наудачу бросается точка. Определить вероятность того, что эта точка упадёт на одну из монет, если монеты не пересекаются.

4. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определённого продукта по каждому из 3 центральных телевизионных каналов, равна 0,05. Предполагается, что эти события независимы в совокупности. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит рекламу: 1)по всем 3 каналам; 2)хотя бы по одному из этих каналов?

5. Стандарт заполнения счетов, установленный фирмой, предполагает, что не более 5% счетов будут заполняться с ошибками. Время от времени компания проводит случайную выборку счетов для проверки правильности их заполнения. Исходя из того что допустимый уровень ошибок - 5%, и 10 счетов отобраны в случайном порядке, чему равна вероятность того, что среди них окажется один с ошибкой.

6. Агент по недвижимости пытается продать участок земли под застройку. Он полагает, что участок будет продан в течение ближайших 6 месяцев с вероятностью 0,9 ,если экономическая ситуация в регионе не ухудшится. Если же экономическая ситуация будет ухудшаться, то вероятность продать участок составит 0,5 . Экономист, консультирующий агента, полагает, что с вероятностью равной 0,7 экономическая ситуация в регионе в течение следующих 6 месяцев будет ухудшаться. Чему равна вероятность того, что участок будет продан?

7. На склад магазина поступают изделия, из которых 80% оказываются высшего сор-

та. Найти вероятность того, что из 100 взятых наудачу изделий не менее 85 окажутся высшего сорта?

8. При штамповке 80% деталей выходят первым сортом. Случайно отобрано 400 деталей. С какой вероятностью доля первосортных деталей отличается от соответствующей вероятности не более чем на 0,05?

9. В первом ящике 15 белых, 20 чёрных и 10 красных. Во втором ящике 12 белых, 16 чёрных и 12 красных шаров. Не глядя, вынимаем по одному шару из каждого ящика. Какова вероятность того, что будет вынуто два шара одинакового цвета.

10. Четыре кандидата участвуют в выборах на четыре различные должности в разных городах. Шансы, оказаться избранными, для каждого из них равны 1:2:3:2 соответственно. Какова вероятность того, что будет избран, по крайней мере, один из них?

РГР № 2 «Случайные величины»

1. В городе 4 коммерческих банка. У каждого риск банкротства в течение года составляет 10%. Составьте ряд распределения числа банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года; постройте его график. Найдите числовые характеристики этого распределения. Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте её график. Чему равна вероятность того, что в течение года обанкротятся не более 2 банков?

2. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью f(x), причём

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<0 \\ a(3x-x^2) & при \quad 0\le x\le 3 \\ 0 & при \quad x>3 \end{cases}.$$

Требуется:

1) Найти коэффициент a;

2)построить график распределения   плотности y=f(x);

3) найти вероятность попадания X в промежуток (1,2).

3. Время t расформирования состава через горку – случайная величина, подчинённая показательному закону. Пусть λ=5 – среднее число поездов, которые горка может расформировать за 1 час. Определить вероятность того, что время расформирования состава: 1)меньше 30 минут; 2) больше 6 минут, но меньше 24 минут.

4. Средняя дальность полёта снаряда равна 1200 м. Предполагая, что дальность полёта H распределена по нормальному закону со средним квадратическим отклонением 40 м, найти, какой процент выпускаемых снарядов даст перелёт от 60 до 80 м.

5. НСВ X задана дифференциальной функцией $f(x)=\frac{2}{3}\sin 3x$ в интервале   (0, $\frac{\pi}{3}$); вне этого интервала f(x)=0. Найдите вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу($\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}$).

6. Среднее число ошибок, которые делает оператор в течение часа работы, равно 2. Найдите вероятность того, что за 3 часа работы оператор сделает одну ошибку.

7. Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого имеет показательное распределение $F_1(t)=1-e^{-0,02t}$, второго $F_2(t)=1-e^{-0,05t}$. Найдите вероятность того, что за время t=6ч. ни один элемент не откажет; откажет только один элемент.

8. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 10 минут. Найти вероятность того, то пассажир будет ожидать автобус менее 2 минут, более 5 минут.

9. Оценить вероятность того, что абсолютная величина отклонения среднего роста 1000 мужчин от математического ожидания случайной величины, выражающей рост каждого мужчины, не превзойдёт 0, 5 см, полагая, что среднее квадратичное отклонение каждой из этих случайных величин не превышает 2,5 см.

10. Испытание готовых часов выявляет в среднем 2% неотрегулированных. Оценить вероятность того, что отклонение частости появления точных часов от вероятности не превысит 0,01; если предоставлено для проверки 400 часов.

2. Итоговый контроль знаний

Вопросы к экзамену приведены в рабочей программе (пункт 9). Примерный экзаменационный билет и тестовые задания приведены ниже.

Тест 1

1. Произведение числа $z = 3 - 5i$ на сопряжённое равно…

1) 34 2)0 3)9-25i 4)28

2. Число $z = 1 - i$ представлено в тригонометрической форме:

1) $2(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} i)$ 2) $\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4} i)$ 3) $\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{4} i)$

4) $(\cos\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4} i)$

3. Действительная часть комплексного числа $(1+5i)^2$ равна…

1)1 2) 10 3)-24 4)0

4. Сумма корней квадратного уравнения $5x^2 + 2x + 2 = 0$ равна…

1)0 2)-0,4 3)5 4)2+i

5. Число $z = 2e^{\frac{\pi}{2} i}$ представлено в алгебраической форме:

1)2i 2) -2i 3)1+2i 4)1-2i

6.Угловой коэффициент прямой 5x+8y=7 равен…

1)5 2)-5 3)$\frac{5}{8}$ 4)$-\frac{5}{8}$

7. Длина отрезка, отсекаемого прямой $2x+3y-6=0$ на оси Ox, равна…

1) 3 2)5 3) 4 4)2

8. Уравнение эллипса с полуосями a=2, b=4 и центром в точке(2; 1) имеет вид:

1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ 2) $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$ 3) $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ 4) $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

9. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, если ее действительная полуось b=3, а расстояние между фокусами $2c = 8$:

1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 2) $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{9} = 1$ 3) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$ 4) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$

10. Радиус окружности $x^2 + y^2 + 4x = 0$ равен…

1)0 2) 4 3)2 4) 1

11.Уравнение плоскости проходящей через точку A(3,1,-2) перпендикулярно вектору $\vec{n}\,(4,-5,1)$ имеет вид:

1) $4x - 5y + z - 5 = 0$ 2) $3x + 5y - 2z = 0$ 3) $4x - 5y + z - 2 = 0$

4) $12x - 5y - 2z - 5 = 0$

12. Уравнение прямой проходящей через точки $A(4;-2;3)$ и $B(5;-4;2)$ имеет вид:

1) $\frac{x-5}{-4} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-2}{5}$ 2) $x - 4 = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-3}{2}$ 3) $x - 4 = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{-1}$

4) $\frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-5}$

13. Определить, при каком A прямая $\frac{x+3}{2} = \frac{y}{A} = \frac{z-1}{7}$ параллельна плоскости

$Ax+5y+3z-6=0$:

1)1 2)-3 3)-7 4)2

14. Определить, при каких α и β параллельны прямые $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-5}=\frac{z+1}{\alpha}$ и $\frac{x+1}{6}=\frac{y-3}{\beta}=\frac{z+5}{2}$:

1) $\alpha=10,\ \beta=1$ 2) $\alpha=10,\ \beta=-1$ 3) $\alpha=-10,\ \beta=1$ 4) $\alpha=1,\ \beta=-10$

15. Уравнение $y=x^2$ описывает поверхность:

1) эллиптический цилиндр 2)конус 3)параболический цилиндр 4)гиперболический параболоид

16. Область определения функции $y=\sqrt{x-x^2}$

1) $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ 2) $(0,1)$ 3) $[1,+\infty)$ 4) $[0,1]$

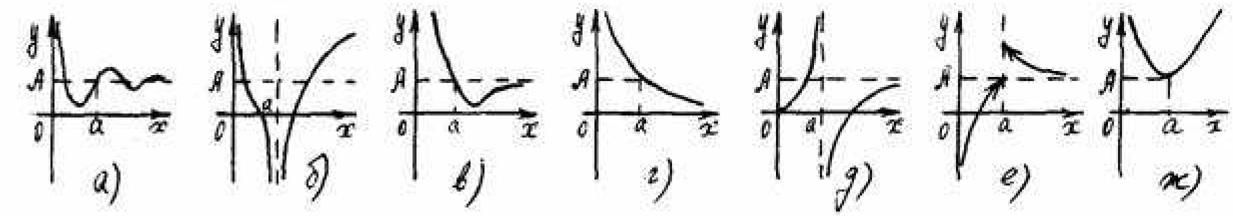
17. Предел $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-9}$ равен…

1) 0 2) ∞ 3) 6 4) $\frac{1}{6}$

18. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x+5}{x+8x^3}$ равен…

1) 0 2) $\frac{1}{8}$ 3) ∞ 4) 1

19. Среди графиков, приведенных на рис. указать ВСЕ, соответствующие формуле $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$



20. Укажите, в каком случае в точке c функция $f(x)$ имеет устранимый разрыв:

1) $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=-5$; $\lim\limits_{x\to c+0} f(x)=-5$; $f(c)=0$; 2) $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=-5$; $\lim\limits_{x\to c+0} f(x)=5$; $f(c)=5$;

3) $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=-5$; $\lim\limits_{x\to c+0} f(x)=-\infty$; 4) $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=-5$; $\lim\limits_{x\to c+0} f(x)=-5$; $f(c)=-5$.

21.Закон движения материальной точки имеет вид $x(t)=5+6t^2$, где $x(t)$ – координата точки в момент времени t. Тогда скорость точки при $t=1$ равна …

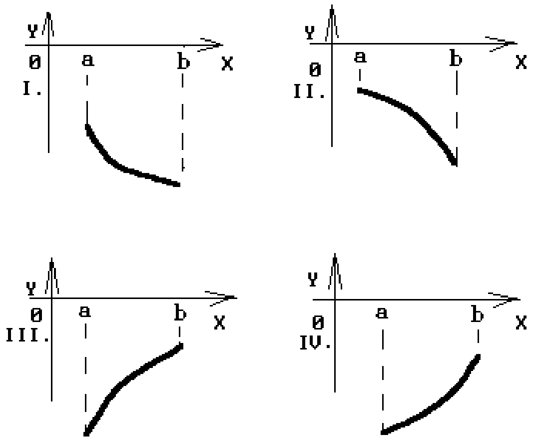
1)12 2)17 3)7 4)20

22. Производная функции $y=\sin(\ln(3x-5))$ равна…

23. Точки перегиба функции $y=30x^3-x^5$ равны…

24. График какой функции на всем отрезке $[a,b]$ одновременно удовлетворяет трем

условиям: $y<0$; $y'<0$; $y''>0$?



25. Опытным путём установлена функция спроса $D=15-0{,}1p$ эластичность спроса, при цене p=10 за единицу продукции, равна…

1) 14 2) $\frac{1}{10}$ 3) $-\frac{1}{14}$ 4) 15

Тест 2.

1. Укажите размеры матрицы *A*, если известно, что $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$

1) 1*2; 2) 3*4; 3) 3*2; 4) 1*4.

2. Найти матрицу, обратную матрице $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & -7\end{pmatrix}$ и записать в ответ сумму всех её элементов:

1) -7; 2) -3; 3) 0; 4) 1.

3. В утверждении вставьте пропущенные слова, делающее его верным:

система линейных уравнений имеет … решение … ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.

1)	ровно одно	только тогда, когда
2)	хотя бы одно	тогда и только тогда, когда
3)	бесконечное множество решений	если
4)	нулевое решение	только тогда, когда

4. Укажите верные свойства определителя:
   1) если к строке определителя прибавить другую строку этого определителя, умноженную на два, то определитель увеличится в два раза;
   2) определитель с двумя пропорциональными столбцами равен нулю;
   3) если все элементы столбца определителя увеличить в два раза, то и определитель увеличится в два раза;
   4) если матрицу определителя транспонировать, то получившийся определитель транспонированной матрицы будет равен нулю.

5. Решите неравенство $\begin{vmatrix}6-x & 5-x\\ 3 & 2\end{vmatrix}<0$:

1) x<6; 2)x>1; 3) x>3 ; 4)x<3.

6. Определитель $\begin{vmatrix}1 & 4 & -2\\ 2 & 0 & 1\\ -3 & -12 & 6\end{vmatrix}$ равен:

1) 4 ; 2) 10 ; 3)0 ; 4) 1.

7. Собственные значения матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ равны:

1) 1 ;4 2) 2; 5 3) 1; 2 4) -2; -3.

8. Интеграл $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$ равен:

1) $-ctgx + C$; 2) $\frac{1}{\sin^3 x}+C$; 3) $-\frac{1}{\sin x}+C$; 4) $\cos^2 x + C$.

9. Укажите верные свойства неопределённого интеграла:

1) $\int C\cdot f(x)dx = C\cdot\int f(x)dx;$ 2) $\int dF(x) = f(x)+C;$ 3) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$

4) $\int (u+v-w)dx = \int udx - \int vdx + \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x.

10. Интеграл $\int e^{(8-\frac{1}{3}x)}dx$ равен:

1) $e^{(8-\frac{1}{3}x)}$+C; 2) $\frac{1}{3}e^{(8-\frac{1}{3}x)}$+C; 3) -3$e^{(8-\frac{1}{3}x)}$+C; 4) $-3e^{x}$ +C.

11. Выберите среди перечисленных ниже вариантов ответа на поставленный вопрос правильный вариант. “Значение определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$ зависит от …”:

1) … подынтегральной функции;
2) … длины частичных отрезков Δx_i;
3) … выбора точек c_i в каждом отрезке;
4) … способа разбиения отрезка $[a;b]$.

12. Каков геометрический смысл определённого интеграла от функции y=f(x) в интервале [a, b] в системе декартовых координат:
   1) алгебраическая площадь фигуры, ограниченной линией y = f(x) в интервале [a,b];
   2) длина линии y = f(x) в интервале [a,b];
   3) среднее значение функции y = f(x) в интервале [a,b];
   4) максимальное значение функции y = f(x) в интервале [a,b].

13. Не производя вычислений, укажите интегралы, равные нулю:

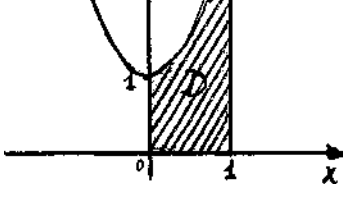
1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx$; 2) $\int_{-a}^{a}x^4 e^{x^2}dx$; 3) $\int_{-1}^{1}(x^3+x)dx$; 4) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3 x\cos^2 x\,dx$.

14. Чему равен интеграл $\int_1^{\infty}2^{5x}dx$:

1) 1/5 ; 2)0; 3) ln(2)-1; 4)∞.

15. Площадь криволинейной трапеции ***D***

$y = 2x^2 + 1$



равна:

1) $\frac{5}{3}$; 2) $\frac{4}{3}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4)2.

16. Какие из уравнений не являются дифференциальными (y функция от x):

    1) $y=x^2+x+C$; 2) $f'(x)=C$; 3) $y'+ye^x=tg3x$; 4) $dx=x$.

17. Какие из уравнений не являются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными:

    1) $x(y+1)dx-(x^2+1)ydy=0$; 2) $y'+p(x)y=q(x)$ 3) $y'+y+x=0$; 4) $dy/y=ctgxdx$.

18. Общее решение уравнения $y''-5y'+4y=0$ имеет вид:

    1) $xC_1+C_2e^{2x}$; 2) $C_1e^{4x}+C_2e^x$; 3) $C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$; 4) $(C_1e^x+C_2x)e^x$.

19. Общее решение уравнения $y''+4y=0$ имеет вид:

    1) C_1e^{-2x}; 2) $e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$; 3) $(C_1e^x+C_2x)e^x$; 4) $C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

20. Частное решение уравнения $y''+2y'=4\sin x$ имеет вид:

    1) $\bar{y}=A\sin x$; 2) $\bar{y}=e^x(A\sin x)$; 3) $\bar{y}=A\sin x+B\cos x$; 4) $\bar{y}=Ae^x$.

Экзаменационный билет N 1 (2 семестр)

Теоретическая часть

1. Матрицы. Основные понятия. Разновидности матриц.
2. Интегрирование тригонометрических функций
3. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка.

Практическая часть

1. Решить систему матричным методом:

$$\begin{cases} x-2y+3z=8 \\ 2x+y+z=1 \\ -3x+4y+2z=-9 \end{cases}.$$

2. Отрасль состоит из 4 предприятий, матрица прямых затрат имеет вид:
$A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$. Требуется рассчитать вектор конечного продукта непроизводственного потребления $\vec{Y}$, если известен вектор валового выпуска продукции $\vec{X}=(170,180,150,120)$.

3. Вычислить интегралы:

    а) $\int \frac{arctg^3 x}{x^2+1}dx$, б) $\int_0^1 x\cdot e^x dx$.

4. Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от $x_1=100$, до $x_2=121$ изделий, полагая функцию изменения затрат времени на изготовление изделий $t=600x^{-\frac{1}{2}}$.

5. Решить дифференциальные уравнения:

    а) $(1+y^2)dx+xydy=0$; б) $y''+6y'+10y=0$.

V ИНТЕРАКТИВНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ

Образовательный процесс по дисциплине строится на основе комбинации следующих методов обучения:

1. Неимитационные методы обучения

Проблемная лекция начинается с вопросов, с постановки проблемы, которую в ходе изложения материала необходимо решить. Лекция строится таким образом, что деятельность студента по ее усвоению приближается к поисковой, исследовательской. Обязателен диалог преподавателя и студентов.

Лекция-визуализация учит студента преобразовывать устную и письменную информацию в визуальной форме; используются схемы, рисунки, чертежи и т.п., к подготовке которых привлекаются обучающиеся. Хорошо использовать на этапе введения в новый раздел, тему, дисциплину.

Лекция вдвоем. Учебный материал проблемного содержания дается студентам в диалоговом общении двух преподавателей между собой. Моделируются профессиональные дискуссии разными специалистами (теоретиком и практиком, сторонником и противником определенной концепции). Студенты вовлекаются в общение, высказывают собственную позицию.

Лекция с заранее запланированными ошибками. Ошибки должны обнаружить студенты и занести их в конспект. Список ошибок передается студентам лишь в конце лекции и проводится их обсуждение.

2. Неигровые имитационные методы обучения

Контекстное обучение направлено на формирование целостной модели будущей профессиональной деятельности студента. Знания, умения, навыки даются не как предмет для запоминания, а в качестве средства решения профессиональных задач.

Тренинг – специальная систематическая тренировка, обучение по заранее отработанной методике, сконцентрированной на формировании и совершенствовании ограниченного набора конкретных компетенций.

3. Игровые имитационные методы

Мозговой штурм – наиболее свободная форма дискуссии, позволяющей быстро включить в работу всех членов учебной группы. Используется там, где требуется генерация разнообразных идей, их отбор и критическая оценка. Этапы продуцирования идей и их анализа намеренно разделены: во время выдвижения идей запрещается их критика.

Круглый стол — это метод активного обучения, одна из организационных форм познавательной деятельности учащихся, позволяющая закрепить полученные ранее знания, восполнить недостающую информацию, сформировать умения решать проблемы, укрепить позиции, научить культуре ведения дискуссии.

Дискуссия (от лат. discussio — исследование, рассмотрение) — это всестороннее обсуждение спорного вопроса в публичном собрании, в частной беседе, споре.

Деловая игра – форма воссоздания предметного и социального содержания профессиональной деятельности, моделирования систем отношений, разнообразных условий профессиональной деятельности, характерных для данного вида практики.

Метод анализа конкретной ситуации (ситуационный анализ, анализ конкретных ситуаций, case-study) – это педагогическая технология, основанная на моделировании ситуации или использования реальной ситуации в целях анализа данного случая, выявления проблем, поиска альтернативных решений и принятия оптимального решения проблем.

Мастер–класс – это главное средство передачи концептуальной новой идеи своей (авторской) педагогической системы. Преподаватель как профессионал на протяжении ряда лет вырабатывает индивидуальную (авторскую) методическую систему, включающую целеполагание, проектирование, использование последовательности ряда известных дидактических и воспитательных методик, занятий, мероприятий, собственные «ноу-хау», учитывает реальные условия работы с различными категориями учащихся и т.п.