Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Амурский государственный университет»

Кафедра общей математики и информатики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

для специальности 080401.65 – Товароведение и экспертиза товаров (по отраслям применения)

Составитель: Н.Н. Двоерядкина, к.п.н., доцент

Благовещенск, 2012

Двоерядкина Н.Н.

Учебно-методический комплекс дисциплины «Математическая экономика» для специальности 080401.65 – Товароведение и экспертиза товаров (по отраслям применения) – Благовещенск: АмГУ, 2012.

1. Рабочая программа дисциплины.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Программа предназначена для подготовки дипломированных специалистов по специальности «Товароведение и экспертиза товаров». Это накладывает на нее определенные особенности, заключающиеся в том, что выпускник должен получить высшее образование, способствующее дальнейшему развитию личности. В этой программе делается особый акцент на будущую профессиональную деятельность и создается общее видение мировоззренческого характера.

Математика является мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки. Целью математического образования студентов является:

1) воспитание достаточно высокой математической культуры,

2) привитие навыков современных видов математического мышления,

3) привитие навыков использования математических методов и основ математического моделирования в практической деятельности бухгалтера.

Дисциплина «Математическая экономика» является логическим продолжением курса высшей математики, связующим звеном между общими и профессиональными дисциплинами данной специальности. Поэтому, в рамках данной дисциплины необходимо продемонстрировать широкий спектр применимости фундаментальных математических понятий при решении прикладных экономических задач.

Основной <u>целью</u> данной <u>дисциплины</u>, в связи с постоянно усложняющимися экономическими процессами, требующими создания и совершенствования особых методов изучения и анализа, является обучение студентов практическим навыкам составления математических моделей.

Для достижения поставленной цели в рамках дисциплины решаются следующие <u>задачи</u>:

1) Анализ известных экономических моделей с позиций их устойчивости к незначительным изменениям окружающей действительности.

2) Сбор и обработка «сырой» информации, необходимой для количественной и качественной оценки экономических процессов.

3) Построение моделей путем анализа первичной информации и нахождение параметров модели с использованием математических компьютерных пакетов.

Специальные компьютерные пакеты позволяют за небольшой промежуток времени выполнить громоздкие вычисления, а основное внимание уделить экономическому анализу решения задач. Это особенно важно для развития творческого мышления студентов, которые могут всесторонне исследовать новые объекты, выделять закономерности и формулировать утверждения на основе собственных наблюдений.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП ВПО

Дисциплина «Математическая экономика» относится к циклу ЕН, является дисциплиной по выбору, изучается в 5 семестре. Индекс дисциплины ЕН.В1. Дисциплина позволяет увидеть тесную связь математики и экономики и изучается после освоения студентами:

- высшей математики;
- теории вероятностей и математической статистики;
- экономико-математических методов;
- эконометрики.

3. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 90 часов

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)			Формы текущего контроля успеваемости (*по неделям семестра*) Форма промежуточной аттестации (*по семестрам*)
				Лекции	Лабораторные работы	Самостоятельная работа	
1	Многомерные статистические методы исследования в экономике	5	1-8	16	22	4	контрольная работа, расчетно-графическая работа
2	Теоретико-вероятностные основы математического моделирования	5	9-12	8	8	4	контрольная работа
3	Анализ основных моделей экономики	5	13-18	12	6	4	контрольная работа
	Подготовка к зачёту					6	
	ИТОГО			36	36	18	зачёт

4. СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ И ТЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Лекции

Раздел 1. Многомерные статистические методы исследования в экономике (16 ч).

Многомерный анализ как один из наиболее действенных количественных инструментов исследования социально-экономических процессов, описываемых большим числом характеристик.

Кластерный анализ: постановка задачи, построение дендрограммы, иерархические и неиерархические структуры, агломеративные и дивизитивные иерархические методы.

Факторный анализ, и его использование в исследовании связи, выделение латентных переменных (факторов), интерпретация факторных нагрузок и факторных весов, моделирование значений наблюдаемых переменных на основе выделенных латентных факторов.

Многомерное шкалирование, построение геометрического образа экономического пространства, метрические и неметрические методы шкалирования, показатель «стресса».

Раздел 2. Теоретико-вероятностные основы математического моделирования (8 ч).

Вероятностное моделирование как основа принятия решений в условиях неопределенности. Элементы теории стратегических игр, основные критерии выбора лучшей стратегии при управлении, теоретико-игровой подход к анализу данных.

Временные ряды при изучении динамики экономических явлений, тренд, сезонность.

Раздел 3. Анализ основных моделей экономики (12 ч).

Модель торговли, модель экспорта и импорта, модели спроса и потребления, модели управления запасами, модель выравнивания цен, модель Вольтера-Лотка, модель Холлинга-Тэннера и др. Анализ устойчивости моделей к изменениям внутри системы и внешней среды.

4.2. Лабораторные работы

1. Многомерные статистические методы исследования в экономике.

Этапы построения моделей, определение вида модели и метода решения задачи на основе математической модели (2 ч).

Кластерный анализ: меры сходства (расстояния), вычисление расстояний, меры объединения или связи, построение дендрограммы, агломеративные и дивизитивные иерархические методы (денограммы), последовательный кластерный анализ, метод к – средних (4 ч).

Факторный анализ: нахождение корреляционной матрицы, определение оптимального количества собственных чисел матрицы (количества факторов), критерий Кайзера, критерий факторной осыпи, выделение латентных переменных (факторов), нахождение и интерпретация матрицы факторных нагрузок и факторных весов, моделирование значений наблюдаемых переменных на основе выделенных латентных факторов (6 ч).

Многомерное шкалирование, построение геометрического образа экономического пространства, метрические и неметрические методы шкалирования, показатель «стресса» (6 ч).

Дискриминантный анализ: построение дискриминантных функций, оценка их качества, классификация объектов с помощью дискриминантных функций (4 ч).

2. Теоретико-вероятностные основы математического моделирования.

Принятие решений в условиях неопределенности. Элементы теории стратегических игр, основные критерии выбора лучшей стратегии при управлении, теоретико-игровой подход к анализу данных (4 ч).

Временные ряды при изучении динамики экономических явлений, тренд, сезонность, построение моделей с аддитивной и мультипликативной сезонностью (4 ч).

3. Анализ основных моделей экономики.

Модель торговли, модель экспорта и импорта, модели спроса и потребления, модели управления запасами, модель выравнивания цен, модель Вольтера-Лотка, модель Холлинга-Тэннера и др. Анализ устойчивости моделей к изменениям внутри системы и внешней среды (6 ч).

5. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Студентам необходимо самостоятельно повторять ранее изученные понятия по математике и эконометрике из следующих разделов:

- линейная алгебра;
- линейное программирование;
- классические методы оптимизации;
- дисперсионный анализ;
- регрессионный анализ;
- дифференциальные уравнения и их системы и др.

Кроме того, во время изучения дисциплины «Математическая экономика» каждый студент выполняет следующие самостоятельные задания:

1. **Расчетно-графическая работа**: работа рассчитана на 7-8 недель. По выполнению студент защищает свою работу в индивидуальной беседе с преподавателем.

2. **Индивидуальное домашнее задание**: время выполнения задания 2 недели. Выбор варианта осуществляется согласно порядковому номеру студента в группе.

Кроме того, время, выделенное на самостоятельную работу, распределяется также на выполнение общих домашних заданий и подготовку к контрольным работам. Домашнее задание задается после каждого практического занятия и проверяется в начале следующего занятия.

№ п/п	№ раздела (темы) дисц-ны	Форма (вид) самостоятельной работы	Трудоемкость в часах
1	1	Выполнение расчетно-графической работы. Выполнение домашних заданий.	4
2	2	Выполнение индивидуального домашнего задания.	4
3	3	Выполнение домашних заданий.	4
4	1-3	Подготовка к зачёту	6
	Итого		18

6. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ФОРМЫ

Интегральную модель образовательного процесса по дисциплине формируют технологии методологического уровня: технология поэтапного формирования умственных действий, технология развивающего обучения, элементы технологии развития критического мышления.

Образовательный процесс по дисциплине строится на основе комбинации следующих методов обучения:

1. Неимитационные методы обучения.

Проблемная лекция начинается с вопросов, с постановки проблемы, которую в ходе изложения материала необходимо решить. Лекция строится таким образом, что деятельность студента по ее усвоению приближается к поисковой, исследовательской. Обязателен диалог преподавателя и студентов.

Лекция-визуализация учит студента преобразовывать устную и письменную информацию в визуальной форме; используются схемы, рисунки, чертежи и т.п., к подготовке которых привлекаются обучающиеся. Хорошо использовать на этапе введения в новый раздел, тему, дисциплину.

Лекция с заранее запланированными ошибками. Ошибки должны обнаружить студенты и занести их в конспект. Список ошибок передается студентам лишь в конце лекции и проводится их обсуждение.

2. Неигровые имитационные методы обучения.

Контекстное обучение направлено на формирование целостной модели будущей профессиональной деятельности студента. Знания, умения, навыки даются не как предмет для запоминания, а в качестве средства решения профессиональных задач.

Тренинг – специальная систематическая тренировка, обучение по заранее отработанной методике, сконцентрированной на формировании и совершенствовании ограниченного набора конкретных компетенций.

В процессе обучения студенты участвуют в построении математических моделей практических задач, выявлении устойчивых алгоритмов решения задач.

7. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Результативность работы обеспечивается системой контроля, которая включает опрос студентов на практических занятиях, проверку выполнения текущих заданий, контрольные работы, расчетно-графическая работа, зачёт. Рубежный контроль осуществляется контрольными работами. Контроль за выполнением комплексного индивидуального задания осуществляется в два этапа: проверка письменных отчётов; защита задания в устной или письменной форме.

Для самостоятельной работы используется учебно-методическое обеспечение на бумажных и электронных носителях. Тематика самостоятельной работы соответствует содержанию разделов дисциплины и теме домашнего задания.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля выбираются из содержания разделов дисциплины. Выполнение домашнего задания обеспечивает непрерывный контроль за процессом освоения учебного материала каждого обучающегося, своевременное выявление и устранение отставаний и ошибок.

Итоговая аттестация по результатам освоения дисциплины: зачёт.

Критерии оценки на зачете

Оценка **«зачтено»** выставляется студенту, который прочно усвоил предусмотренный программный материал; правильно, аргументировано ответил на вопросы, с приведением примеров; показал глубокие систематизированные знания, владеет приемами рассуждения и сопоставляет материал: теорию связывает с практикой, другими темами курса, других изучаемых предметов; без ошибок выполнил практическое задание.

Дополнительным условием получения оценки «зачтено» могут стать хорошие успехи при выполнении самостоятельной и контрольной работ, систематическая активная работа на практических и лабораторных занятиях.

Оценка **«не зачтено»** выставляется студенту, который не справился с 50% вопросов и заданий билета, в ответах на другие вопросы допустил существенные ошибки. Не может ответить на дополнительные вопросы, предложенные преподавателем. Целостного представления о программных темах курса у студента нет.

Вопросы к зачёту

1. Понятие о многомерных статистических методах исследования.
2. Границы применимости многомерных статистических методов.
3. Классификация многомерных статистических методов.
4. Примеры задач, решаемых с помощью многомерных статистических методов исследования.
5. Построение математических моделей различных экономических задач, основные этапы.
6. Постановка задачи кластерного анализа.
7. Меры сходства в кластерном анализе, способы их вычисления.
8. Меры объединения или связи.
9. Построение дендрограммы, агломеративные и дивизитивные иерархические денограммы.

10. Последовательный кластерный анализ, метод к - средних.
11. Постановка задачи факторного анализа.
12. Стандартизация данных.
13. Корреляционные матрицы для исходных и стандартизированных данных, связь между ними.
14. Определение оптимального количества факторов на основании собственных чисел матрицы, критерий Кайзера, критерий факторной осыпи.
15. Выделение латентных переменных.
16. Понятие, методы нахождения и интерпретация матрицы факторных нагрузок и факторных весов.
17. Моделирование значений наблюдаемых переменных на основе выделенных латентных факторов.
18. Постановка задачи многомерного шкалирования.
19. Построение геометрического образа экономического пространства.
20. Метрические и неметрические методы шкалирования, показатель «стресса».
21. Постановка задачи дискриминантного анализа.
22. Понятие о дискриминантных функциях.
23. Определение оптимального количества дискриминантных функций.
24. Оценка параметров дискриминантных функций и их качества.
25. Классификация объектов и наблюдений при помощи дискриминантных функций.
26. Построение классифицирующих функций.
27. Классификация объектов и наблюдений при помощи классифицирующих функций.
28. Вычисление расстояний Махаланобиса, апостериорных расстояний и классификация объектов с их помощью.
29. Понятие классификационной матрицы, ее анализ.
30. Определение игры, хода, стратегии, цены игры.
31. Классификация игр.
32. Примеры решения матричных игр в задачах реальной экономики.
33. Методы решения матричных игр.
34. Критерии принятия решений в условиях неопределенности.
35. Коэффициент пессимизма.
36. Матрица рисков.
37. Примеры решения стратегических игр в условиях реальной экономики.
38. Временные ряды при изучении динамики экономических явлений.
39. Понятие тренда, сезонности.
40. Аддитивная и мультипликативная сезонность.
41. Примеры временных рядов с аддитивной и мультипликативной сезонностью.
42. Анализ модели торговли.
43. Модель экспорта и импорта и ее анализ.
44. Модели спроса и потребления и их анализ.
45. Модели управления запасами.
46. Модель выравнивания цен.
47. Модели Вольтера-Лотка и Холлинга-Тэннера.
48. Анализ устойчивости моделей к изменениям внутри системы и внешней среды.

Задания для практических и домашних работ

1) Используя не менее двух методов кластер – процедур провести классификацию и построить дендограммы для данных точек.

Точки / Варианты	A	B	C	D	E
1	(3; 4)	(-3; 8)	(-2;-6)	(5; 7)	(6; 0)
2	(8; 4)	(-3; 9)	(2;-6)	(5; -7)	(5; 0)
3	(-4; 4)	(-3; 0)	(5;-6)	(3; -7)	(7; 0)
4	(-5; 4)	(0; 8)	(-9;-6)	(-2; 7)	(6; 5)

2) Объединить 8 Амурских фирм, занимающихся производством и установкой окон в несколько схожих совокупностей.

фирма	возраст фирмы	кол-во сотруд-ников	количество установлен-ных окон за месяц	средняя цена окна (тыс.руб)	Количество филиалов по области	Скид-ки (%)	попу-ляр-ность (0-нет, 1д -а)
Home master	11	200	30	17	20	25	1
Уют	3	14	12	13,2	2	33	1
РосОкна	3	50	8	14,8	5	30	1
Ремикс	5	80	14	15	10	10	1
Ванда	8	35	17	14,2	12	15	1
Ремстрой	2	10	5	11,5	1	5	0
СМУ-17	7	20	3	13,5	1	0	0
Оникс	3	20	1	12,9	1	0	0

Индивидуальное домашнее задание: время выполнения задания 2 недели. Выбор варианта осуществляется согласно порядковому номеру студента в группе.

Задание 1. Два предприятия производят продукцию и поставляют её на рынок региона. Они являются единственными поставщиками продукции в регион, поэтому полностью определяют рынок данной продукции в регионе. Каждое из предприятий имеет возможность производить продукцию с применением одной из пяти различных технологий. В зависимости от качества продукции, произведенной по каждой технологии, предприятия могут установить цену реализации единицы продукции на уровне 10, 8, 6, 4 и 2 денежных единиц соответственно. При этом предприятия имеют различные затраты на производство единицы продукции.

В результате маркетингового исследования рынка продукции региона была определена функция спроса на продукцию Y=8 - 0.3-X, где, Y - количество продукции, которое приобретёт население региона (тыс.ед.), а X-средняя цена продукции предприятий, д.е.

Значения долей продукции предприятия 1, приобретенной населением, зависят от соотношения цен на продукцию предприятия 1 и предприятия 2. В результате маркетингового исследования эта зависимость установлена и значения вычислены

1.Существует ли в данной задаче ситуация равновесия при выборе технологий производства продукции обоими предприятиями?

2. Существуют ли технологии, которые предприятия заведомо не будут выбирать вследствие невыгодности?

3. Сколько продукции будет реализовано в ситуации равновесия? Какое предприятие окажется в выигрышном положении? Дайте краткую экономическую интерпретацию результатов решения задачи.

Задание 2. Решить задачу 1, изменив исходные данные. Затраты на единицу продукции, произведенной на предприятиях региона (д.е.) и функцию спроса на продукцию: Y=8-(0.3 + 0.1-(N-l))-X

Задание 3. Намечается крупномасштабное производство легковых автомобилей. Имеются четыре варианта проекта автомобиля. Определена экономическая эффективность каждого проекта в зависимости от рентабельности производства. По истечении трех сроков рассматриваются как некоторые состояния среды (природы). Значения экономической эффективности для различных проектов и состояний природы приведены. Требуется выбрать лучший проект легкового автомобиля для производства, используя критерии Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица. Сравните решение и сделайте выводы.

8. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

а) основная литература:

1. Прасолов А.В. Математические методы экономической динамики: учеб. пособие / А.В. Прасолов. - СПб. : Лань, 2008. - 350 с.

2. Малышев Б.С. Лекции по математической экономике: учеб. пособие: рек. ДВ РУМЦ / Б. С. Малышев, П. Б. Казакова, М. В. Романова ; АмГУ, Эк. ф. - Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2001. - 220 с.

б) дополнительная литература:

1. Дубов А.М. Многомерные статистические методы: учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ А.М. Дубов, В.С. Мхитарян, Л.И. Трошин. -М: Финансы и статистика, 2000, 2003. - 352 с.

2. Красс М.С. Математика для экономистов: учеб. пособие: рек. УМО / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. - СПб. : Питер, 2008, 2009. - 464 с.

3. Диденко Н.И. Мировая экономика: методы анализа экономических процессов: учеб. пособие : рек. УМО / Н. И. Диденко. - М. : Высш. шк., 2008. - 783 с.

4. Торопчина Г.Н. Элементы кластерного анализа: учеб. пособие /Г.Н. Торопчина, Н. Н. Двоерядкина, Г. П. Вохминцева ; АмГУ, ФМиИ. - Благовещенск : Изд-во Амур. гос. ун-та, 2006.

Периодические издания:

Экономика и математические методы.

Российский экономический журнал.

Аудит и финансовый анализ.

Вестник Московского университета. Серия Экономика.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

№	Наименование ресурса	Краткая характеристика
1	http://www.iqlib.ru	Интернет-библиотека образовательных изданий, в которой собраны электронные учебники, справочные и учебные пособия. Удобный поиск по ключевым словам отдельным темам и отраслям знаний
2	http://elibrary.ru	Научная электронная библиотека журналов
3	http://www.biblioclub.ru	Университетская электронная библиотека on-line

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Лекционная аудитория с мультимедийным оборудованием. Класс ПЭВМ на базе процессора Intel Pentium.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И УКАЗАНИЯ.

2.1. Методические рекомендации по проведению лекций

Для математики важна не природа рассматриваемых объектов, а лишь существующие между ними соотношения, в то время как бухгалтер работает в основном с реальными данными.

Курс призван размыть грань между формализмом математики и реальными происходящими в обществе процессами, интересующими экономиста.

Значение лекционных занятий по данному курсу обусловлено следующими причинами:

- отсутствием единого учебника, в котором изложены всевозможные математические методы, используемые в экономике;
- необходимостью адаптировать лектором некоторые математические методы для нужд экономиста;
- невозможностью студента самостоятельно представить экономический смысл полученных им знаний по математике.

Каждая лекция сопровождается высоким научным стилем изложения и достаточным количеством примеров профессионального характера, которые разрешают противоречие между желанием поскорее приобщиться к профессии и необходимостью терпеливого изучения фундаментальных дисциплин.

Лекция 1 носит вводный и обзорно-повторительный характер. На ней происходит знакомство студентов с целью, назначением и местом курса в системе учебных дисциплин, повторение материала, необходимого для осознанного восприятия понятийного аппарата курса, общий анализ многомерных методов исследования и их классификация.

Один из самых простых многомерных методов является кластерный анализ. Его изложению отводится 2 лекция, на которой рассматривается: постановка задачи кластерного анализа, меры сходства и связи, построение агломеративных и дивизитивных иерархических дендрограмм, последовательный кластерный анализ, метод к-средних.

Лекция 3 посвящена изложению такого метода факторного анализа, как метод главных факторов. Необходимо указать математическую модель, используемую в данном методе, определить матрицы факторных нагрузок и факторных весов, понятие латентного фактора. Указать способы определения оптимального количества факторов и необходимость факторного вращения.

Метрическим и неметрическим методам многомерного шкалирования отводится 4 лекция курса. На ней рекомендуется указать сходства и различия данных методов, охарактеризовать показатель стресса и рассмотреть построение геометрического образа экономического пространства.

Лекция 5 отводится на изучение основ дискриминантного анализа. Вводится понятие дискриминантных функций и осуществляется классификация объектов с помощью этих функций.

Основная цель лекций 6 показать, что основой принятия решений в условиях неопределенности является вероятностное моделирование. Охарактеризовать основные критерии выбора лучшей стратегии при управлении.

На лекции 7 рассматриваются те модели экономики, которые не являются стационарными и динамичны с течением времени.

8 и 9 лекции посвящены изучению и анализу устойчивости конкретных моделей экономики, в частности, модели торговли, экспорта и импорта, спроса и потребления, управления запасами, выравнивания цен, Вольтера-Лотка, Холлинга-Тэннера и др.

Краткий конспект лекций по каждой теме приводится в п.3.1.

2.2. Методические рекомендации к практическим занятиям.

Лекционный курс дисциплины сопровождается практическими занятиями. Теоретические знания, представления, образы должны быть прожиты. Афоризм одного из известных физиков М. Лауэ: знание есть то, что остается, когда все выученное уже забыто, характеризует важную роль практики.

Практические занятия должны проводиться в логичном единстве с теоретическим курсом, подкрепляя и уточняя понятийный аппарат, путем решения задач профессиональной направленности.

Каждый практическое занятие начинается с теоретического опроса необходимого материала и проверки домашнего задания. Далее на конкретных примерах из разных областей экономики рассматриваются пути и способы применения тех математических методов, которые не требуют использования электронных вычислительных машин. При этом выявляются особенности каждой из сформулированных задач, выясняется возможность применения для их решения других известных методов. При этом необходимо активизировать самостоятельную работу студентов. Задания и методические указания к ним выдаются студентам, каждый из которых выбирает оптимальный для себя темп работы. Преподавателю отводится роль консультанта и помощника. Задания, вызвавшие трудности у большинства студентов, разбираются на доске.

При работе студенты должны опираться на систему базовых математических знаний, приобретенных при изучении высшей математики, теории вероятностей и математической статистики, и понимать качественный смысл тех количественных преобразований в области экономики, которые они осуществляют с помощью математических методов.

В конце занятия выдается домашнее задание, состоящее из теоретических вопросов, уяснение которых необходимо для следующего занятия и практических заданий по пройденному материалу.

2.3. Методические рекомендации к лабораторным занятиям.

Задачи, решаемые на лабораторных занятиях практически невозможно решить без использования компьютерных программ либо их решение связано с большим объемом вычислений. На лабораторном занятии основной упор необходимо делать не на нахождении решения задачи, а на анализе уже полученных результатов. Для этого необходимо владеть основами работы на компьютере, основными теоретическими сведениями по теме и практическими навыками решения предложенных задач. В этой связи лекционные, практические и лабораторные занятия необходимо проводить в единстве.

2.4. Методические указания по выполнению домашних заданий.

При выполнении домашнего задания решать задачи удобнее поэтапно, в той последовательности, в какой эти задания сформулированы. В этом случае при возникновении трудностей будет легче обратиться к анализу тех тем, которые изложены в лекции и задач, разобранных на практическом занятии.

Следует иметь в виду, что решение задач направлено на выработку навыков распознания возможности применения тех или иных математических методов. Поэтому при выполнении заданий контрольной работы требуется абстрагироваться от содержательного анализа предлагаемых задач и формально применить необходимый метод.

При выполнении заданий ответы должны быть аргументированными, то есть недостаточно просто привести ответ, необходимо указать путь, каким Вы пришли к данному ответу, и те основания, которыми Вы руководствовались. При этом следует обратить внимание на то, что ряд заданий предусматривает несколько последовательных шагов или операций для ответа на вопрос. При получении ответа в задаче необходимо правильно интерпретировать его, согласно условию, даже если на Ваш взгляд, данный результат не соответствует действительности.

В случае затруднения с определением алгоритма, необходимого для решения конкретных задач, а также типового оформления ответа на задание, рекомендуется обратиться к образцам выполнения типичных задач, которые представлены на практическом занятии.

После выполнения практической части задания следует найти ответы на теоретические вопросы, заданные преподавателем и таким образом подготовится к осознанному восприятию следующего материала.

Активная, регулярная самостоятельная работа над домашним заданием – путь к успешному усвоению дисциплины.

2.5. Методические указания по выполнению контрольных работ.

По курсу предусмотрена одна контрольная работа. Целью контрольной работы является выявление уровня знаний студентов по теме «Кластерный анализ» и умений определять виды задач, к которым применимы многомерные методы.

Написание контрольной работы формирует у студентов способность абстрагироваться от фабулы задачи, строить формализованную математическую модель предложенных явлений, выделять общие закономерности и особенности многомерных методов исследования.

При подготовке к контрольной работе студенту необходимо изучить и систематизировать теоретический материал по теме. Разобрать конкретные примеры. Решить достаточное количество задач и упражнений, во время аудиторной и самостоятельной домашней работы.

2.6. Методические указания по организации контроля знаний студентов.

Основной целью учебного процесса в вузе является подготовка высококвалифицированных специалистов, способных творчески решать профессиональные задачи. Контроль и оценка знаний умений и навыков является одним из важных аспектов обучения, который существенно влияет на его качество.

Контролю знаний присущи определенные дидактические правила: объективность, действенность, систематичность, индивидуальность, единство требований.

Отчет по материалу курса только на экзамене не может обеспечить полноту его усвоения студентами. Поэтому в течение семестра предусмотрены и другие виды контроля. При преподавании дисциплины «Математика в экономике» используются три основных вида контроля знаний студентов – текущий, тематический и итоговый.

При текущем контроле оценивается уровень участия студентов в аудиторной работе, степень усвоения ими учебного материала и выявляются недочеты по подготовке студентов в целях дальнейшего совершенствования методики преподавания данной дисциплины, активизации работы студентов в ходе занятия и оказания им индивидуальной помощи.

Текущий контроль проводится непосредственно на лекциях, лабораторных и практических занятиях. В процессе чтения лекций преподаватель работает с аудиторией и по ее реакции оценивает степень усвоения материала. В ходе или в конце лекции студентам задается несколько вопросов по изложенной теме, что способствует закреплению полученных знаний. На практических и лабораторных занятиях текущий контроль проводится индивидуально. Полученные знания и степень усвоения материала проверяются в устной или письменной форме.

Тематический контроль проводится после прохождения крупных тем или разделов и осуществляется в следующих формах: контрольная работа, защита расчетно-графической работы, защита индивидуальных домашних заданий.

Итоговым контролем является зачет. Успешная сдача зачета обусловлена знанием теории, умением решать практические задачи и применять для решения задач различные компьютерные пакеты.

3. КОМПЛЕКТЫ ЗАДАНИЙ К ЗАНЯТИЯМ

3.1. Краткий конспект лекций.

Лекция 1,2. Многомерный анализ для исследования социально-экономических процессов. Классификация многомерных методов.

Социально-экономические процессы и явления зависят от большого числа параметров, их характеризующих, что обусловливает трудности, связанные с выявлением структуры взаимосвязей этих параметров. В подобных ситуациях, т. е. когда решения принимаются на основании анализа стохастической, неполной информации, использование методов многомерного статистического анализа является не только оправданным, но и существенно необходимым.

Многомерные статистические методы среди множества возможных вероятностно-статистических моделей позволяют обоснованно выбрать ту, которая наилучшим образом соответствует исходным статистическим данным, характеризующий реальное поведение исследуемой совокупности объектов, оценить надежность и точность выводов, сделанных на основании ограниченного статистического материала.

К области приложения многомерных статистических методов могут быть отнесены задачи, связанные с исследованием поведения индивидуума, семьи или другой социально-экономической или производственной единицы, как представителя большой совокупности объектов.

Выделяют три центральные задачи, решаемые с помощью многомерных методов.

1. Статистическое исследование структуры и характера взаимосвязей, существующих между анализируемыми количественными переменными. При этом под переменными понимаются как регистрируемые на объектах признаки, так и время t.

2. Разработка статистических методов классификации объектов и признаков.

3. Снижение размерности исследуемого признакового пространства с целью лаконичного объяснения природы анализируемых многомерных данных. Возможность лаконичного описания анализируемых многомерных данных основана на априорном допущении, в соответствии с которым существует небольшое число признаков с помощью которых могут быть достаточно точно описаны как сами наблюдаемые переменные анализируемых объектов, так и определяемые этими переменными свойства

(характеристики) анализируемой совокупности. При этом упомянутые признаки могут находиться среди исходных признаков, а могут быть латентными, т.е. непосредственно статистически не наблюдаемыми, но восстанавливаемыми по исходным данным.

Эти задачи не исчерпывают всех возможностей многомерных статистических методов, но в настоящий момент являются наиболее распространенными.В соответствии с задачами в структуре многомерных статистических методов выделяют методы снижения размерности, методы исследования зависимостей, методы классификации.

Классификацию многомерных методов представим на схеме:

Работая с многомерными статистическими методами важно, чтобы переменные изменялись в сравнимых шкалах. Из неоднородности единиц измерения вытекает невозможность обоснованного выражения значений различных показателей в одном масштабе. Чтобы устранить неоднородность измерения исходных данных, все их значения предварительно нормируются, т.е. выражаются через отношение этих значений к некоторой величине, отражающей определенные свойства данного показателя. Нормирование исходных данных иногда проводится посредством деления исходных величин на среднеквадратичное отклонение соответствующих показателей. Другой способ сводится к вычислению, так называемого, стандартизованного вклада. Его еще называют *Z*-вкладом.

Z - вклад показывает, сколько стандартных отклонений отделяет данное наблюдение от среднего значения:

$Z_i = \dfrac{x_i - \bar{x}}{\sigma_i}$, где x_i - значение данного наблюдения, $\bar{x}$ - среднее, σ_i -стандартное отклонение.

Среднее для *Z*-вкладов является нулевым и стандартное отклонение равно 1.

Стандартизация позволяет сравнивать наблюдения из различных распределений.

Заметим, что методы нормирования означают признание всех признаков равноценными с точки зрения выяснения сходства рассматриваемых объектов. Признание равноценности различных показателей кажется оправданным отнюдь не всегда. Было бы желательным наряду с нормированием придать каждому из показателей вес, отражающий его значимость в ходе установления сходств и различий объектов.

В этой ситуации приходится прибегать к способу определения весов отдельных показателей – опросу экспертов.

Экспертные оценки дают известное основание для определения важности индикаторов, входящих в ту или иную группу показателей.

Довольно часто при решении подобных задач используют не один, а два расчета: первый, в котором все признаки считаются равнозначными, второй, где им придаются различные веса в соответствии со средними значениями экспертных оценок.

Лекция 3,4. Элементы кластерного анализа.

Классификация является основой умозрительной человеческой деятельности и фундаментальным процессом научной практики. В ходе исследований, развития науки и техники накоплено значительное количество материалов, которые необходимо систематизировать с целью выявления законов общественного развития, изучения эволюций и совершенствования технологий. Эта работа требует от исследователя детального изучения данных и их обобщения, в ходе которого отдельные факты складываются в закономерности, а закономерности в теории. Общий вопрос, задаваемый исследователями во многих областях, состоит в том, как организовать наблюдаемые данные в наглядные структуры. В настоящее время существует множество подходов к классификации объектов.

Среди них кластерный анализ - наиболее действенный количественный инструмент исследования социально - экономических процессов, описываемых большим числом характеристик.

Кластерный анализ наиболее ярко отражает черты многомерного анализа в классификации. Термин кластерный анализ включает в себя набор различных алгоритмов классификации.

Главное назначение кластерного анализа - разбиение множества исследуемых объектов и признаков на однородные в соответствующем понимании группы или кластеры. Это означает, что решается задача классификации данных и выявления соответствующей структуры в ней.

Методы кластерного анализа позволяют решать следующие задачи:

1. Проведение классификации объектов с учетом признаков, отражающих сущность, природу объектов. Решение такой задачи, как правило, приводит к углублению знаний о совокупности классифицируемых объектов;

2. Проверка выдвигаемых предположений о наличии некоторой структуры в изучаемой совокупности объектов, т. е. поиск существующей структуры;

3. Построение новых классификаций для слабоизученных явлений, когда необходимо установить наличие связей внутри совокупности и попытаться привнести в нее структуру.

Большое достоинство кластерного анализа в том, что он позволяет производить разбиение объектов не по одному параметру, а по целому набору признаков. Кроме того, кластерный анализ в отличие от большинства математико-статистических методов не накладывает никаких ограничений на вид рассматриваемых объектов, и позволяет рассматривать множество исходных данных практически произвольной природы. Это имеет большое значение, например, для прогнозирования конъюнктуры, когда показатели имеют разнообразный вид, затрудняющий применение традиционных эконометрических подходов.

Кластерный анализ позволяет рассматривать достаточно большой объем информации и резко сокращать, сжимать большие массивы информации, делать их компактными и наглядными.

Важное значение кластерный анализ имеет применительно к совокупностям временных рядов, характеризующих экономическое развитие. Здесь можно выделять периоды, когда значения соответствующих показателей были достаточно близкими, а также определять группы временных рядов, динамика которых наиболее схожа.

Кластерный анализ можно использовать циклически. В этом случае исследование производится до тех пор, пока не будут достигнуты необходимые результаты. При этом каждый цикл может давать информацию, которая способна сильно изменить направленность и подходы дальнейшего применения кластерного анализа. Этот процесс можно представить системой с обратной связью.

В задачах социально-экономического прогнозирования весьма перспективно сочетание кластерного анализа с другими количественными методами (например, с регрессионным анализом).

Как и любой другой метод, кластерный анализ имеет определенные недостатки и ограничения. В частности, состав и количество кластеров зависит от выбираемых критериев разбиения. При сведении исходного массива данных к более компактному виду могут возникать определенные искажения, а также могут теряться индивидуальные черты отдельных объектов за счет замены их характеристиками обобщенных значений параметров кластера. При проведении классификации объектов игнорируется очень часто возможность отсутствия в рассматриваемой совокупности каких-либо значений кластеров.

Поэтому необходимо сделать несколько предостережений общего характера.

1) Многие методы кластерного анализа - довольно простые эвристические процедуры, которые, как правило, не имеют достаточного статистического обоснования.

2) Разные кластерные методы могут порождать и порождают различные решения для одних и тех же данных. Это обычное явление в большинстве прикладных исследований.

3) Цель кластерного анализа заключается в поиске существующих структур. В то же время его действие состоит в привнесении структуры в анализируемые данные, т. е. методы кластеризации могут приводить к порождению артефактов.

Исследования, использующие кластерный анализ, характеризуют следующие пять основных шагов: 1) отбор выборки для кластеризации; 2) определение множества признаков, по которым будут оцениваться объекты в выборке, и способа их стандартизации; 3) вычисление значений той или иной меры сходства между объектами; 4) применение метода кластерного анализа для создания групп сходных объектов; 5) проверка достоверности результатов кластерного решения.

В кластерном анализе считается, что:

а) выбранные характеристики допускают в принципе желательное разбиение на кластеры;

б) единицы измерения (масштаб) выбраны правильно.

Задача кластерного анализа заключается в том, чтобы на основании данных, содержащихся во множестве *X,* разбить множество объектов *G* на *m* (*m* - целое) кластеров (подмножеств) $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, так, чтобы каждый объект G_j принадлежал одному и только одному подмножеству разбиения и чтобы объекты, принадлежащие одному и тому же кластеру, были сходными, в то время, как объекты, принадлежащие разным кластерам были разнородными.

Иерархические кластерные структуры.

Решением задачи кластерного анализа являются разбиения, удовлетворяющие некоторому критерию оптимальности. Этот критерий может представлять собой некоторый функционал, выражающий уровни желательности различных разбиений и группировок, который называют целевой функцией. Например, в качестве целевой функции может быть взята внутригрупповая сумма квадратов отклонений:

$$W = \sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \frac{1}{n}(\sum_{j=1}^{n} x_j)^2$$

где x_j - представляет собой измерения j - го объекта.

Наиболее трудным в задаче классификации является определение меры однородности объектов.

Понятно, что объекты *i*-ый и *j*-ый попадали бы в один кластер, когда расстояние (отдаленность) между точками X_i и X_j было бы достаточно маленьким и попадали бы в разные кластеры, когда это расстояние было бы достаточно большим. Таким образом, попадание в один или разные кластеры объектов определяется понятием расстояния между X_i и X_j из E_p, где E_p p - мерное евклидово пространство.

Неотрицательная функция $\rho(X_i, X_j)$ называется функцией расстояния (метрикой), если:

а) $\rho(X_i, X_j) \geq 0$, для всех X_i и X_j из E_p

б) $\rho(X_i, X_j) = 0$, тогда и только тогда, когда $X_i = X_j$

в) $\rho(X_i, X_j) = \rho(X_j, X_i)$

г) $\rho(X_i, X_j) \leq \rho(X_i, X_k) + \rho(X_k, X_j)$, где X_i; X_j и X_k - любые три вектора из E_p.

Значение $\rho(X_i, X_j)$ для X_i и X_j называется расстоянием между X_i и X_j и эквивалентно расстоянию между G_i и G_j соответственно выбранным характеристикам $(F_1, F_2, F_3, \ldots, F_p)$.

Наиболее часто употребляются следующие функции расстояний:

$\rho = \sqrt{\sum(x-y)^2}$ – евклидово расстояние, наиболее общий тип расстояния. Оно является геометрическим расстоянием в многомерном пространстве;

$\rho = \sum(x-y)^2$ – квадрат евклидова расстояния используется для того, чтобы придать большие веса более отдаленным друг от друга объектам;

$\rho = \sum |x-y|$ – расстояние городских кварталов (манхэттенское расстояние) для этой меры влияние отдельных больших разностей (выбросов) уменьшается;

$\rho = \max(x-y)$ – расстояние Чебышева полезно, когда желают определить два объекта как «различные», если они различаются по какой-либо одной координате (каким-либо одним измерением);

$\rho = \left(\sum |x-y|^p\right)^{\frac{1}{k}}$ степенное расстояние используют, когда хотят увеличить или уменьшить вес, относящийся к размерности, для которой соответствующие объекты сильно отличаются. Параметры r и p определяются пользователем Параметр p ответственен за постепенное взвешивание разностей по отдельным координатам, параметр r ответственен за прогрессивное взвешивание больших расстояний между объектами;

$\rho = \dfrac{\text{количество } x_i \neq y_i}{i}$ – процент несогласия используется в тех случаях, когда данные являются категориальными.

Пусть *n* измерений $X_1, X_2, ..., X_n$ представлены в виде матрицы данных размером $p \times n$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & ..x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & ..x_{2n} \\ x_{p1} & x_{p2} & ..x_{pn} \end{pmatrix} = (X_1, X_2, ..., X_n)$$

Тогда расстояние между парами векторов $\rho(X_i, X_j)$ могут быть представлены в виде симметричной матрицы расстояний:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 0 & \cdots & \rho_n \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Понятием, противоположным расстоянию, является понятие сходства между объектами G_l и G_j. Неотрицательная вещественная функция $S(X_i; X_j) = s_{ij}$ называется мерой сходства, если:

1) $0 \le S(X_i, X_j) < 1$ для $X_l \neq X_j$
2) $S(X_i, X_i) = 1$
3) $S(X_i, X_j) = S(X_j, X_i)$

Пары значений мер сходства можно объединить в матрицу сходства:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & 1 & \cdots & s_{2n} \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Величину s_{ij} называют коэффициентом сходства.

Естественной мерой сходства характеристик объектов во многих задачах является коэффициент корреляции между ними

$$r_{ij} = \frac{\sum_{h=1}^{N} (x_{hi} - m_i)(x_{hj} - m_j)}{\sigma_i \cdot \sigma_j}$$

, где $m_i, m_j, \sigma_i, \sigma_j$ - соответственно средние и среднеквадратичные отклонения для характеристик *i* и *j*. Мерой различия между характеристиками может служить величина *1-r*.

На первом шаге, когда каждый объект представляет собой отдельный кластер, расстояния между этими объектами определяются выбранной мерой. Однако когда связываются вместе несколько объектов необходимо правило объединения или связи для двух кластеров. Существует множество методов объединения кластеров, перечислим наиболее распространенные:

Одиночная связь (метод ближайшего соседа) – расстояние между двумя кластерами определяется расстоянием между двумя наиболее близкими объектами.

Полная связь (метод наиболее удаленных соседей) – расстояния между кластерами определяются наибольшим расстоянием между любыми двумя объектами в различных кластерах.

Невзвешенное попарное среднее – расстояние между двумя различными кластерами вычисляется как среднее расстояние между всеми парами объектов в них.

Взвешенное попарное среднее – идентично методу невзвешенного попарного среднего, за исключением того, что при вычислениях размер соответствующих кластеров (т.е. число объектов, содержащихся в них) используется в качестве весового коэффициента.

Невзвешенный центроидный метод – расстояние между двумя кластерами определяется как расстояние между их центрами тяжести.

Взвешенный центроидный метод (медиана) – идентичен предыдущему, за исключением того, что при вычислениях используются веса для учёта разницы между размерами кластеров (т.е. числами объектов в них)

Метод Варда. – отличается от всех других методов, поскольку он использует методы дисперсионного анализа для оценки расстояний между кластерами. Метод минимизирует сумму квадратов (SS) для любых двух кластеров, которые могут быть сформированы на каждом шаге. В целом метод представляется очень эффективным, однако он стремится создавать кластеры малого размера.

Число алгоритмов методов кластерного анализа слишком велико. Все их можно подразделить на иерархические и неиерархические.

Иерархические алгоритмы связаны с построением дендограмм и делятся на:

а) агломеративные, характеризуемые последовательным объединением исходных элементов и соответствующим уменьшением числа кластеров;

б) дивизимные (делимые), в которых число кластеров возрастает, начиная с одного, в результате чего образуется последовательность расщепляющих групп.

Иерархические агломеративные методы – многошаговые методы, работающие в такой последовательности: на нулевом шаге за разбиение принимается исходная совокупность n элементарных кластеров, матрица расстояний между которыми $\left\{\rho_{ij}\right\}_{n\times n} = \left\{l_{ij}\right\}_{n\times n}$; на каждом следующем шаге происходит объединение двух кластеров K_s и K_t, сформированных на предыдущем шаге, в один кластер $K_s \cup K_t$ (будем его обозначать $K_{s\oplus t}$, при этом размерность матрицы расстояний уменьшается, по сравнению с размерностью матрицы предыдущего шага, на единицу.

Наиболее известный метод представления матрицы расстояний или сходства основан на идее дендрограммы или диаграммы дерева. Дендрограмму можно определить как графическое изображение результатов процесса последовательной кластеризации, которая осуществляется в терминах матрицы расстояний. С помощью дендрограммы можно графически или геометрически изобразить процедуру кластеризации при условии, что эта процедура оперирует только с элементами матрицы расстояний или сходства.

Существует много способов построения дендрограмм. В дендрограмме объекты располагаются вертикально слева, результаты кластеризации - справа. Значения расстояний или сходства, отвечающие строению новых кластеров, изображаются по горизонтальной прямой поверх дендрограмм.

Вид дендрограммы зависит от выбора меры сходства или расстояния между объектом и кластером и метода кластеризации.

<u>Метод к-средних.</u>

Иерархические методы используются обычно в задачах классификации небольшого числа объектов (порядка нескольких десятков), где больший интерес представляет не число кластеров, а анализ структуры множества этих объектов и наглядная интерпретация проведенного анализа в виде дендрограммы. Если же число кластеров заранее задано или подлежит определению, то для классификации чаще всего используют *параллельные* кластер-процедуры – это итерационные алгоритмы, на каждом шаге которых *используется* одновременно (параллельно) все наблюдения. Так как эти алгоритмы на каждом шаге работают со всеми наблюдениями, то основной целью их конструирования является нахождение способов сокращения числа перебора вариантов (даже при числе наблюдений порядка нескольких десятков), что приводит зачастую лишь к приближенному, но не слишком трудоемкому решению задач. В параллельных кластер-процедурах реализуется обычно идея оптимизации разбиения в соответствии с некоторым функционалом качества.

Наиболее распространенными являются при заданном числе k кластеров следующие функционалы качества разбиения:

- сумма внутрикластерных дисперсий $f(R)=\sum_{p=1}^{k}\sum_{i\in K_p} l^2\left(x_i,\bar{x}_{K_p}\right)$,
- сумма попарных внутрикластерных расстояний $f(R)=\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{n_p}\sum_{i,j\in K_p} l^2\left(x_i,x_j\right)$,

а при неизвестном числе кластеров функционалы

$$f(R)=\alpha f_1(R)+\beta f_2(R) \quad \text{или} \quad f(R)=\left[f_1(R)\right]^{\alpha}\left[f_2(R)\right]^{\beta}$$

где $f_1(R)$ - некоторая не возрастающая функция числа классов, характеризующая средний внутриклассовый разброс наблюдений, $f_2(R)$ - некоторая неубывающая функция числа классов, характеризующая взаимную удаленность классов или меру «концентрации» наблюдений.

Схема работы алгоритмов, связанная с функционалами качества, такая: для некоторого начального разбиения R_0 вычисляют значение $f(R_0)$; затем каждую из точек x_i, поочередно перемещают во все кластеры и оставляют в том положении, которое соответствует наилучшему значению функционала качества. Работу заканчивают, когда перемещение точек не дает улучшения качества. Часто описанный алгоритм применяют несколько раз, начиная с разных начальных разбиений R_0, и выбирают наилучший вариант разбиения.

Очень важным вопросом является проблема выбора необходимого числа кластеров. Иногда можно число кластеров выбирать априорно. Однако в общем случае это число определяется в процессе разбиения множества на кластеры.

Проводились исследования Фортьером и Соломоном, и было установлено, что число кластеров должно быть принято для достижения вероятности a того, что найдено наилучшее разбиение. Таким образом, оптимальное число разбиений является функцией заданной доли β наилучших или в некотором смысле допустимых разбиений во множестве всех возможных. Общее рассеяние будет тем больше, чем выше доля β допустимых разбиений. Фортьер и Соломон разработали таблицу, по которой можно найти число необходимых разбиений $S(\alpha,\beta)$ в зависимости от α и β (где α - вероятность того, что найдено наилучшее разбиение, β - доля наилучших разбиений в общем числе разбиений) Причем в качестве меры разнородности используется не мера рассеяния, а мера принадлежности, введенная Хользенгером и Харманом. Таблица значении $S(\alpha,\beta)$ приводится ниже.

β \ α	0.20	0.10	0.05	0.01	0.001	0.0001
0.20	8	11	14	21	31	42
0.10	16	22	29	44	66	88
0.05	32	45	59	90	135	180
0.01	161	230	299	459	689	918
0.001	1626	2326	3026	4652	6977	9303
0.0001	17475	25000	32526	55000	75000	100000

Довольно часто критерием объединения (числа кластеров) становится изменение соответствующей функции. Например, суммы квадратов отклонений:

$$E_j=\sum_{i=1}^{n} r_{ij}^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} r_{ij}\right)^2$$

Процессу группировки должно соответствовать здесь последовательное минимальное возрастание значения критерия E. Наличие резкого скачка в значении E можно интерпретировать как характеристику числа кластеров, объективно существующих в исследуемой совокупности.

Итак, второй способ определения наилучшего числа кластеров сводится к выявлению скачков, определяемых фазовым переходом от сильно связанного к слабосвязанному состоянию объектов.

Иерархические и параллельные кластер-процедуры практически реализуемы лишь в задачах классификации не более нескольких десятков наблюдений. К решению задач с большим числом наблюдений применяют *последовательные* кластер-процедуры - это итерационные алгоритмы, на каждом шаге которых используется одно наблюдение (или небольшая часть исходных наблюдений) и результаты разбиения на предыдущем шаге. Идею этих процедур поясним на представленном в ППП «STASTICA» *методе К-средних* («*K* – Means Clusyering») с заранее заданным числом k классов.

На нулевом шаге за центры искомых k кластеров принимают случайно выбранные k наблюдений – точки $x_1, x_2, \dots x_k$; каждому кластеру присваивают единичный вес. На первом шаге находят расстояния точки x_{k+1} до центров кластеров и точку x_{k+1} относят к кластеру, расстояние до которого минимально; рассчитывают новый центр тяжести (как взвешенное среднее по каждому показателю) этого кластера и вес кластера увеличивают на единицу; все остальные кластеры остаются неизмененными (с прежними центрами и весами). На втором шаге аналогичную процедуру выполняют для точки x_{k+2} и т. д. При достаточно большом числе n классифицируемых объектов или достаточно большом числе итерации пересчет центров тяжести практически не приводит к их изменению.

Если в какой-то точке не удается, прогнав все $x_{k+(n-1)}$ точек, достичь практически не изменяющихся центров тяжести, то либо используя получившееся разбиение n точек на k кластеров в качестве начального применяют изложенную процедуру к точкам x_1, x_2 и т. д.; либо в качестве начального разбиения принимают различные комбинации k точек из исходных n точек и в качестве окончательного берут наиболее часто встречающееся финальное разбиение.

Кластерный анализ методом к-средних дополняет и уточняет картину, полученную с помощью иерархического кластерного анализа. Однако конфигурация кластеров не поддается представлению в графическом виде.

Лекция 5,6. Факторный анализ, и его использование в исследовании связи.

Факторный анализ – статистический метод, который используется при обработке больших массивов экспериментальных данных. Задачами факторного анализа являются: сокращение числа переменных (редукция данных) и определение структуры взаимосвязей между переменными, т.е. классификация переменных, поэтому факторный анализ используется как метод сокращения данных или как метод структурной классификации.

В современной статистике под *факторным анализом* понимают совокупность методов, которые на основе реально существующих связей признаков (или объектов) позволяют выявлять латентные обобщающие характеристики организационной структуры и механизма развития изучаемых явлений и процессов.

Понятие латентности в определении ключевое. Оно означает неявность характеристик, раскрываемых при помощи методов факторного анализа. Вначале мы имеем дело с набором элементарных признаков Xj, их взаимодействие предполагает наличие определенных причин, особенных условий, т.е. существование которых скрытых факторов. Последние устанавливаются в результате обобщения элементарных признаков и выступают как интегрированные характеристики, или признаки, но более высокого уровня. Естественно, что коррелировать могут не только тривиальные признаки X_j, но и сами наблюдаемые объекты N_i, Поэтому поиск латентных факторов теоретически возможен как по признаковым, так и по объектным данным.

Идея метода состоит в сжатии матрицы признаков в матрицу с меньшим числом переменных, сохраняющую почти ту же самую информацию, что и исходная матрица, т.е. сконцентрировать исходную информацию, выражая большое число рассматриваемых признаков через меньшее число более емких внутренних характеристик явления, которые, однако, не поддаются непосредственному измерению.

Предположим, n наблюдаемых объектов (автомобилей) оценивается в двумерном признаковом пространстве R^2 с координатными осями: X_1 – стоимость автомобиля и X_2 – длительность рабочего ресурса мотора. При условии коррелированности X_1 и X_2 в системе координат появляется направленное и достаточно плотное скопление точек, формально отображаемое новыми осями (F_1 и F_2). Характерная особенность F_1 и F_2 заключается в том, что они проходят через плотные скопления точек и в свою очередь коррелируют с X_1 и X_2. Максимальное число новых осей F_r будет равно числу элементарных признаков.

Допуская линейную зависимость F_r *от* X_{jt} можем записать:

$F_1 = a_{11} x_1 + a_{21} x_2$ и $F_2 = a_{12} x + a_{22} x_2$.

Интерпретируем оси пусть F_1 – экономичность автомобиля, F_2 – его надежность в эксплуатации. Суждение об F_1, и F_2 базируется на оценке структуры латентных факторов, т.е. оценке весов X_1 и X_2 в F_r .

Если объекты характеризуются достаточно большим числом элементарных признаков *(m* > 3), то логично и другое предположение – о существовании плотных скоплений точек (признаков) в пространстве *n* объектов. При этом новые оси обобщают уже не признаки X_{jt} а объекты, соответственно и латентные факторы *F,* будут распознаны по составу наблюдаемых объектов.

Материалом для факторного анализа служат корреляционные связи, а точнее – коэффициенты корреляции Пирсона, которые вычисляются между переменными, включенными в обследование.

В зависимости от того, какой тип корреляционной связи – элементарных признаков или наблюдаемых объектов – исследуется в факторном анализе, различают *R* и *Q* – технические приемы обработки данных.

Название *R*-техники носит объемный анализ данных по *m* признакам, в результате него получают *r* линейных комбинаций (групп) признаков $(F_r=f(Xj);$ r = l,n). Анализ по данным о близости (связи) *n* наблюдаемых объектов называется Q-техникой и позволяет определять *r* линейных комбинаций (групп) объектов:

В настоящее время на практике более 90% задач решается при помощи *R*-техники.

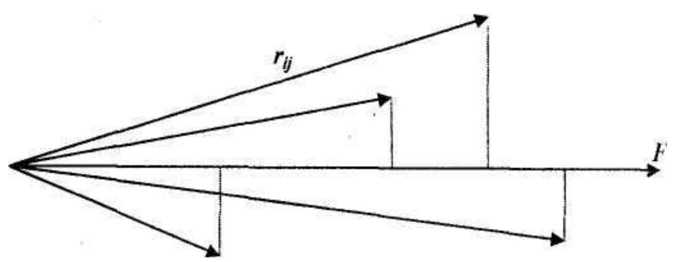
Методы факторного анализа целесообразно разделить на два класса: упрощенные и современные аппроксимирующие методы.

Простые методы факторного анализа в основном связаны с начальными теоретическими разработками. Они имеют ограниченные возможности в выделении латентных факторов и аппроксимации факторных решений. В числе этих методов следует назвать:

однофакторную модель Ч. Спирмена. Она позволяет выделить только один генеральный латентный и один характерный факторы. Для возможно существующих других латентных факторов делается предположение об их незначимости;

бифакторную модель Г. Хользингера. Допускает влияние на вариацию элементарных признаков не одного, а нескольких латентных факторов (обычно двух) и одного характерного фактора;

центроидный метод Л. Тэрстоуна. В нем корреляции между переменными рассматриваются как пучок векторов, а латентный фактор геометрически представляется как уравновешивающий вектор, проходящий через центр этого пучка Метод позволяет выделять несколько латентных и характерные факторы, впервые появляется возможность соотносить факторное решение с исходными данными, т.е. простейшем виде решать задачу аппроксимации.



Современные аппроксимирующие методы часто предполагают, что первое, приближенное решение уже найдено каким-либо из способов, последующими шагами это решение оптимизируется. Методы отличаются сложностью вычислений. К этим методам относятся:

• *групповой метод* Л. Гуттмана и П. Хорста. Решение базируется на предварительно отобранных каким-либо образомгруппах элементарных признаков;

• *метод главных факторов* Г. Томсона. Наиболее близок методу главных компонент, отличие заключается в предположении о существовании характерностей;

• *метод максимального правдоподобия* (Д. Лоули), *минимальных остатков* (Г. Харман), *а-факторного анализа* (Г. Кайзери И. Кэффри,), *канонического факторного анализа* (К. Рао),все *оптимизирующие.* Позволяют последовательно улучшить предварительно найденные решения на основе использования статистических приемов оценивания случайной величины или статистических критериев, предполагают большой объем трудоемких вычислений. Наиболее перспективным и удобным для работы в этой группе признается метод максимального правдоподобия.

Основной задачей, которую решают разнообразными методами факторного анализа, является сжатие информации, переход от множества значений по m элементарным признакам с объемом информации $n \times m$ к ограниченному множеству элементов матрицы факторного отображения $(m \times r)$ или матрицы значений латентных факторов для каждого наблюдаемого объекта размерностью $n \times r$, причем обычно $r < m$.

Методы факторного анализа позволяют также визуализировать структуру изучаемых явлений и процессов, а это значит определять их состояние и прогнозировать развитие. Наконец, данные факторного анализа дают основания для идентификации объекта, т.е. решения задачи распознавания образа.

Методы факторного анализа обладают свойствами, весьма привлекательными для их использования в составе других статистических методов, наиболее часто в корреляционно-регрессионном анализе, кластерном анализе, многомерном шкалировании и др.

Главное понятие факторного анализа – фактор. Это искусственный статистический показатель, возникающий в результате специальных преобразований коэффициентов корреляции между изучаемыми признаками – латентная переменная.

Независимо от выбранного метода факторного анализа основные его результаты выражаются в наборах факторных нагрузок и факторных весов.

Факторные нагрузки - это значения коэффициентов корреляции каждого из исходных признаков с каждым из выявленных факторов. Чем теснее связь данного признака с рассматриваемым фактором, тем выше значение факторной нагрузки. Положительный знак факторной нагрузки указывает на прямую (а отрицательный знак - на обратную) связь данного признака с фактором. Таблица факторных нагрузок содержит m строк (по числу признаков) и k столбцов (по числу факторов).

Факторными весами называют количественные значения выделенных факторов для каждого из n. имеющихся объектов. Объекту с большим значением факторного веса присуща большая степень проявления свойств, определяемых данным фактором.

Поэтому положительные факторные веса соответствуют тем объектам, которые обладают степенью проявления свойств больше средней, а отрицательные факторные веса соответствуют тем объектам, для которых степень проявления свойств меньше средней. Таблица факторных весов содержит n строк (по числу объектов) и k столбцов (по числу факторов).

Таким образом, данные о факторных нагрузках позволяют сформулировать выводы о наборе исходных признаков, отражающих тот или иной фактор, и об относительном весе отдельного признака в структуре каждого фактора. В свою очередь, данные о факторных весах определяют ранжировку объектов по каждому фактору.

В основе каждого метода факторного анализа лежит математическая модель, описывающая соотношения между исходными признаками и обобщенными латентными факторами.

Изучение факторных воздействий предполагает выявление взаимосвязей характерных признаков. Для многомерных объектов показателями связи являются оценки дисперсии и коэффициенты ковариации, которые обобщаются в матрице ковариаций (по выборочным данным – матрица S). Когда исходные значения признаков нормированы, матрица ковариаций, переходит в матрицу парных корреляций R.

$$S = R = \frac{1}{n} Z^T Z$$

Симметрическая матрица R имеет собственную систему координат в пространстве R^m, где m – число анализируемых признаков. Допуская преобразования координатной системы в систему пространства латентных факторов, можно записать Z в виде линейной комбинации новых координат в матричной форме: $Z = AF$.

Воспользуемся возможностью подстановки в уравнение для R вместо Z произведения матриц AF и получим:

$$R = \frac{1}{n} AF\left(AF\right)^T = \frac{1}{n} AFF^T A^T$$

Изменив место расположения скаляра 1/n, выделим произведение $\frac{1}{n}FF^T$, результат произведения интерпретируется как матрица корреляций С, определяемая для латентных факторов F_r После замены 1/n FF на С запишем: $R = ACA^T$.

В предположении, что факторы F_r некоррелированы, т.е. $C = E$, где E – единичная матрица, приходим к равенству: $R = AA'$.

Л.Л. Тэрстоуном равенства типа: $R = ACA'$ и $R - AA'$ названы *фундаментальной факторной теоремой, A* – здесь матрица факторного отображения, а ее элементы a – величины факторных нагрузок. Суть теоремы – в возможности воспроизведения исходной корреляционной матрицы R через матрицу факторного отображения A. При С = E связь матричных элементов г и a записывается в виде уравнения:

$$r_{ij} = a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \ldots + a_{ir}a_{jr}$$

Другими словами, корреляция пары характерных признаков опосредуется корреляцией каждого из признаков с некоторыми латентными факторами F_r. Латентные факторы определяют само существование связи i-го и j-го коррелирующих признаков.

Равенства Тэрстоуна допускаются гипотетически. Реально AA' и ACA' будут далеко не всегда в точности воспроизводить R. По крайней мере, это объясняется двумя причинами. Во-первых, в факторном анализе, позволяющем эффективно объяснять общую дисперсию данных, r – число латентных (обобщенных) признаков, как правило, значительно меньше числа исходных признаков m. И, во-вторых, в матрице A объединяются теоретические оценки факторных нагрузок. С учетом различий математических методов и специфичности вычислительных процедур следует допустить, что они не абсолютно истинны.

Таким образом, можно ожидать, что воспроизведенная из AA' или ACA' матрица корреляций R^+ будет отлична от R. Как следствие, на главной диагонали R^+ располагаются величины, обычно не равные, а меньшие единицы. На практике значения r^+_{ij} принимают за общности h_j, т.е. характеристики части дисперсии, поддавшейся объяснению через латентные факторы F_r, а $1 - a^+_{ij}$ – специфичность, т.е. необъясненная часть дисперсии. По степени расхождения R^+ и R судят о достаточности числа выделенных латентных факторов и адекватности аналитических выводов.

Матрица корреляций с общностями на главной диагонали называется редуцированной. Она является исходной для нахождения матрицы факторных нагрузок.

Существуют достаточно простые методы поиска общностей h_j:

метод наибольшей корреляции. На главной диагонали с положительным знаком записывается наибольший по величине коэффициент корреляции;

метод Барта. По каждому столбцу матрицы R вначале находят среднее значение коэффициентов корреляции $\overline{r_j}$, затем, если $\overline{r_j}$, сравнительно велико, за общность принимается значение, которое несколько выше наибольшего в столбце коэффициента корреляции и, если $\overline{r_j}$ – сравнительно малое значение, общность будет несколько меньше наибольшего в столбце коэффициента корреляции;

метод триад. Общности для каждого j -го столбца R вычисляют по формуле:

$$h_j^2 = \frac{r_{ik}r_{il}}{r_{kl}}$$

где r_{ik} r_{il} – коэффициенты корреляции, наибольшие в столбце;

метод малого центроида. Для каждой переменной j строится корреляционная матрица размерности 4x4. Включая саму переменную в эту матрицу, записывают оценки корреляции трех других переменных, особенно тесно связанных с первой. По данным малой матрицы корреляций и рассчитывают общности:

$$h_j^2 = \frac{\left(\sum r_{i1}\right)^2}{\sum r_{ij}}$$

где $\sum r_{i1}$ – сумма элементов первого столбца; $\sum r_{ij}$ – сумма всех элементов матрицы 4x4.

После определения редуцированной матрицы находят матрицу факторных нагрузок и по ее данным интерпретируют латентные факторы. Наилучшие решения находят при помощи современных методов факторного анализа: главных факторов, максимального правдоподобия и др. В общем случае выделенные факторы не обязательно ортогональны и тогда векторы (столбцы) матрицы факторных нагрузок будут линейно-зависимыми.

Методы факторного анализа при всем их многообразии имеют общий алгоритм решения. Начинаясь построением матрицы исходных данных X, этот алгоритм завершается получением матриц факторного отображения (факторных нагрузок) и значений факторов (факторных весов) – A и F. С учетом принятых обозначении где n – число наблюдений, m – число аналитических признаков X, r – число значимых обобщенных признаков (латентных факторов), на схеме показана размерность матриц данных для каждого алгоритмического шага.

Первые шаги алгоритма 1–3 не вызывают каких-либо затруднений. Переход от матрицы исходных данных X к матрице стандартизованных данных Z осуществляется после пересчета всех элементов.

На следующем шаге простым перемножением скаляра 1/n и матриц Z^T и Z получаем матрицу парных корреляций: $R = 1/nZ^T Z$.

Шаг 2 может быть опущен и тогда последующее факторное решение находят не по матрице корреляций, а по матрице ковариаций, но тогда анализируемые признаки должны иметь одни и те же единицы измерения.

Выполнение четвертого шага алгоритма обуславливается решением первой проблемы – построения редуцированной матрицы корреляций с общностями на главной диагонали.

Вторая проблема возникает на этапе построения матрицы факторных нагрузок A и заключается в выборе оптимального метода для поиска весовых коэффициентов a элементов матрицы A.

Выполнение шага 6 алгоритма и решение проблемы вращения пространства общих факторов не обязательно.

На последнем этапе алгоритма необходимо получить значения каждого из выделенных факторов для каждого индивидуального объекта исследования, т.е. матрицу факторных весов.

На основе исходных данных в матрице значений Y и матрицы A возможно получить оценки элементов матрицы F. В зависимости от решаемой задачи по этим оценкам можно судить о каждом объекте исследования по m общим факторам.

Для уяснения методики приступим к оценке F в методе главных компонент $Y=AF$.

Y имеет размерность (nxN); порядок A равен n, а F - (nxN). Поскольку при извлечении всех главных компонент матрица A квадратная, то задача получения матрицы F не вызывает затруднений, если матрица R имеет ранг, равный n. Умножим обе части равенства слева на A^{-1}, получим $F = A^{-1}Y$

По этой формуле получаются точно и однозначно индивидуальные значения главных компонент для каждого объекта исследования.

Чаще всего извлекаются не все главные компоненты, а только (m<n), поэтому матрица А не квадратная, а значит не имеет обратной матрицы. В этом случае для нахождения матрицы факторных весов необходимо в первоначальном равенстве обе части слева умножить на $(A^TA)^{-1}A^T$, получим

$\left(A^TA\right)^{-1}A^TY=\left(A^TA\right)^{-1}A^TAF=A^{-1}\left(A^T\right)^{-1}A^TAF=A^{-1}EAF=F$, т.е. $F=\left(A^TA\right)^{-1}A^TY$

В этом выражении не надо обращать матрицу А. Если А не квадратная матрица, то $\left(A^TA\right)$ будет квадратной порядка m.

Дать точное определение индивидуальных значений факторов, как в случае выделения всех факторов не возможно. Поскольку задача не решается однозначно, то можно методом наименьших квадратов получить оценки индивидуальных значений общих факторов. Удобно обратиться к методу регрессионного анализа, когда имеется одна зависимая нормированная переменная и n независимых переменных, которые связаны между собой линейно.

$$y_{0i}=\beta_1y_{1i}+\beta_2y_{2i}+\ldots+\beta_ny_{ni}+e_i$$

Коэффициенты β_j выбираются таким образом, чтобы сумма квадратов ошибок оценок e^2 была минимальной.

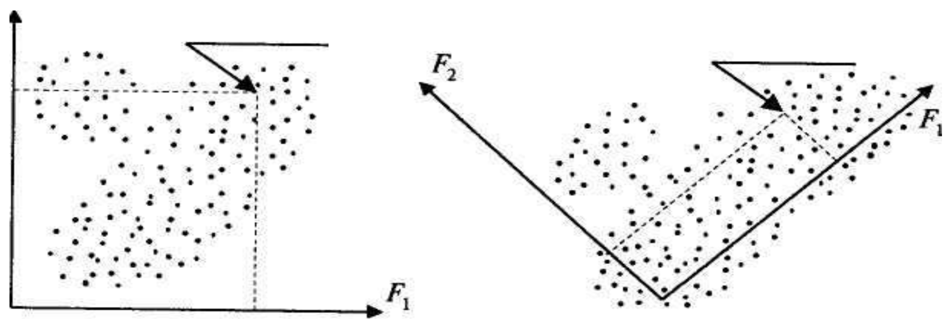
Произведение корреляционной матрицы R на вектор-столбец коэффициентов регрессии β равен вектору-столбцу коэффициентов корреляции между оценками нормированных значений зависимой переменной и всеми исходными признаками V,т.е. $V=R\beta$, $\beta=R^{-1}V$, $\beta^T=(R^{-1}V)^T=V^TR^{-1}$

Матрица оценок индивидуальных значений факторов может быть определена по формуле: $F=\beta^TY=V^TR^{-1}Y$,

где элементами матрицы V являются коэффициенты корреляции между переменными и факторами (матрица факторных нагрузок), R – матрица коэффициентов корреляции между переменными, Y – матрица исходных данных.

Как правило, проведение факторного анализа заканчивается оценкой индивидуальных значений факторов для каждого объекта исследования.

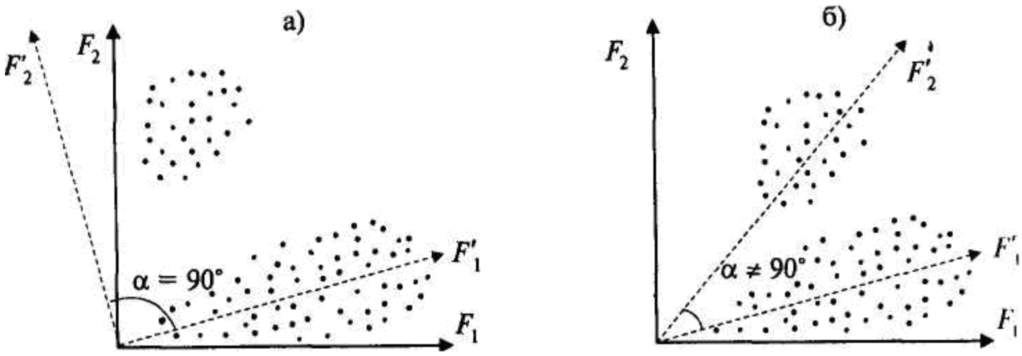
Потребность во вращении возникает, когда пространственное расположение общих факторов F_r нелогично или трудно поддается интерпретации. Возможность появления нелогичных первых результатов анализа объясняется не определяемым четко и не задаваемым положением факторных осей в пространстве, или, отсутствием изначально какой-либо пространственной привязки для осей F_r.



На рисунке показаны два различных положения в пространстве факторных осей $\{F_1$ и $F_2\}$. Легко заметить, что изменение положения F_1 и F_2 одновременно приводит к изменению координат исходных признаков X_j. Цель поворота – преобразование координат (факторных нагрузок) таким образом, чтобы факторобразующие признаки имели наибольшие нагрузки, близкие к единице, а остальные признаки – минимальные значения, близкие к нулю, т.е. добиваются экономичного описания данных.

Повороты осей могут быть ортогональными и косоугольными. Предпочтительно, хотя и более трудно выполнимо и интерпретируемо, косоугольное вращение, при этом, значительно повышаются возможности оптимального отображения сгущений признаков в пространстве R^F.

На рис. а ось F' после поворота F, очевидно, займет более рациональное положение, но из-за жесткости осевой конструкции положение F_2 удаляется от оптимального; на рис. б косоугольным вращением приходят к оптимизации положения сразу обеих осей F_1 и F_2



Вращение пространства общих факторов F_r не изменяет величин общностей h и по-прежнему $AA^T = R^+$, или $ACA^T = R^+$ при $R^+ \to R$.

Рассмотрим особенности наиболее часто применяющихся методов главных компонент и главных факторов, которые имеют много общего.

Метод главных компонент (Г. Хотеллинг) строго говоря, не относится к факторному анализу, хотя он имеет с ним много общего. Специфическим является, во-первых, то, что в ходе вычислительных процедур одновременно получают все главные компоненты и их число первоначально равно числу элементарных признаков; во-вторых, постулируется возможность полного разложения дисперсии элементарных признаков, другими словами, ее полное объяснение через латентные факторы (обобщенные признаки).

Метод главных факторов заключается в том, что дисперсия элементарных признаков здесь объясняется не в полном объеме, признается, что часть дисперсии остается нераспознанной как характерность. Факторы выделяются последовательно: первый, объясняющий наибольшую долю вариации элементарных признаков, затем второй, объясняющий меньшую, вторую после первого латентного фактора часть дисперсии, третий и т.д. Процесс выделения факторов может быть прерван на любом шаге, если принято решение о достаточности доли объясненной дисперсии элементарных признаков или с учетом интерпретируемости латентных факторов.

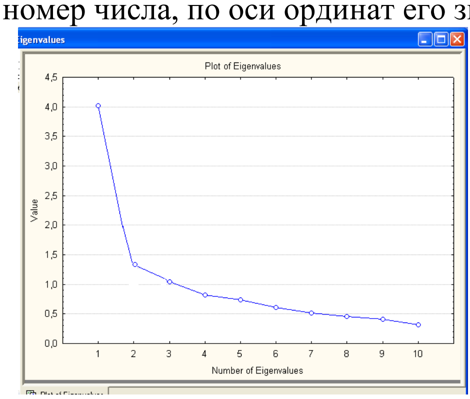
Алгоритм обоих методов начинается с получения матрицы парных коэффициентов корреляции с единицами на главной диагонали. После этого определяются общности и получают редуцированную матрицу.

Для определения латентных факторов находят собственные числа и собственные векторы редуцированной корреляционной матрицы.

Если использовать метод главных компонент, то необходимо определить собственные векторы для каждого собственного числа. В методе главных факторов первоначально отбирают значимые собственные числа, количество которых соответствует количеству главных факторов. Для этого используют критерий Кайзера или критерий факторной осыпи.

1. Критерий Кайзера предлагает отобрать только факторы, с собственными значениями, большими *1*.

2. Критерий факторной осыпи является графическим методом, впервые предложенным Кэттелем (Cattell). Необходимо изобразить собственные значения, расположенные в убывающем порядке в виде графика (по оси абсцисс порядковый номер числа, по оси ординат его значение).



Кэттель предложил найти такое место на графике, где убывание собственных значений слева направо максимально замедляется. Значения выше этой точки определяют оптимальное количество факторов. Предполагается, что справа от этой точки находится только «факториальная осыпь» – «осыпь» является геологическим термином, обозначающим обломки горных пород, скапливающиеся в нижней части скалистого склона. В соответствии с этим критерием можно оставить в приведенном примере 2 или 3 фактора.

Первый критерий (*критерий Кайзера*) иногда сохраняет слишком много факторов, в то время как второй критерий (*критерий каменистой осыпи*) иногда сохраняет слишком мало факторов; однако оба критерия вполне хороши при нормальных условиях, когда имеется относительно небольшое число факторов и много переменных. Обычно исследуется несколько решений с большим или меньшим числом факторов, и затем выбирается одно наиболее интерпретируемое.

Независимо от метода для выделенных собственных чисел определяются собственные векторы матрицы. Нормированные координаты собственных векторов, умноженные на весовой коэффициент, который равен корню из соответствующего собственного числа, являются столбцами матрицы факторных нагрузок.

Алгоритмы факторного анализа отличаются, трудоемкостью, их полное выполнение возможно при условии использования технических средств.

Лекция 7,8. Многомерное шкалирование.

Многомерное шкалирование - одно из направлений анализа данных; оно отличается от других методов многомерного статистического анализа, прежде всего видом исходных данных, которые в данном случае представляют собой матрицу близости между парами объектов («близость», или «сходство», объектов можно определять различными способами). Цель многомерного шкалирования - это описание матрицы близости в терминах расстояний между точками, представление данных о сходстве объектов в виде системы точек в пространстве малой размерности (например, на двумерной плоскости). Упрощая, можно сказать, что «на входе» методов многомерного шкалирования подается матрица близости, а «на выходе» получается координатное размещение точек.

Рассмотрим основные методические аспекты многомерного шкалирования.

Основное предположение многомерного шкалирования заключается в том, что существует некоторое метрическое пространство существенных базовых характеристик, которые неявно и послужили основой для полученных эмпирических данных о близости между парами объектов. Следовательно, объекты можно представить как точки в этом пространстве. Предполагают также, что более близким (по исходной матрице) объектам соответствуют меньшие расстояния в пространстве базовых характеристик. Таким образом, многомерное шкалирование - это совокупность методов анализа эмпирических данных о близости объектов, с помощью которых определяется размерность пространства существенных для данной содержательной задачи характеристик измеряемых объектов и конструируется конфигурация точек (объектов) в этом пространстве. Это пространство («многомерная шкала») аналогично обычно используемым шкалам в том смысле, что значениям существенных характеристик измеряемых объектов соответствуют определенные позиции на осях пространства.

Данные в исходной матрице близости объектов могут быть получены различными способами. Методы многомерного шкалирования ориентируются на экспертные оценки близости объектов, когда респонденту предъявляют пары объектов, и он должен упорядочить их по степени внутреннего сходства, которое иногда оценивается в баллах. Если данные о близости пар объектов не получены непосредственно, а рассчитаны на основании других данных (различные коэффициенты связи), то следует иметь в виду, что многомерное шкалирование может оказаться далеко не лучшим способом анализа структуры исходных данных. Первичные данные, на основе которых рассчитывались близости, содержат больше информации, чем «вторичные» данные о близости.

Методы многомерного шкалирования делятся обычно на две категории: неметрическое многомерное шкалирование и метрическое многомерное шкалирование.

Методы метрического многомерного шкалирования используют, когда оценки близости получены на количественной шкале (не ниже интервальной). В таком виде в исследованиях социальных проблем оценки близости возникают крайне редко. Более естественной является оценка близости, измеренная на порядковой шкале (когда пары объектов можно только упорядочить по степени схожести объектов). В этом случае используют методы неметрического многомерного шкалирования, которые дают «покоординатную развертку» матрицы близости в пространстве двух-трех существенных характеристик, так что упорядочения объектов по матрице близости расстояниям в этом пространстве совпадают.

Основные возможности методов многомерного шкалирования:

1. Построение метрического пространства невысокой размерности, в котором наилучшим образом сохраняется структура исходных данных о близости пар объектов. Проектирование объектов на оси по-

лученного пространства определяет их положение на этих осях, т.е. производится процесс шкалирования.

2. Визуализация структуры исходных данных в виде кон фигурации точек (объектов) в двух-трехмерном базовом пространстве.

3. Интерпретация полученных осей (базовых характеристик) и конфигурации объектов - конечный результат применения многомерного шкалирования, дающий новое знание об изучаемой структуре (в случае корректного использования метода на всех этапах). Характер конфигурации объектов, а также внешние по отношению к исходным данным сведения позволяют дать содержательную интерпретацию осям и тем самым выявить глубинные мотивы, которыми руководствовались эксперты, упорядочивая пары объектов по степени их близости (в одном случае), или обнаружить скрытые факторы, определяющие структуру сходства и различия объектов (в другом случае).

Для методов многомерного шкалирования, как и для других методов анализа данных, слабо разработаны вероятностные модели и аппарат статистического оценивания.

Для повышения достоверности получаемых с помощью методов многомерного шкалирования результатов в одном исследовании нередко применяют различные методы многомерного шкалирования совместно с другими методами; кластер-анализом, факторным анализом, множественной регрессией.

Задача многомерного шкалирования состоит в построении переменных на основе имеющихся расстояний между объектами. В частности, если нам даны расстояния между городами, программа многомерного шкалирования должна восстановить систему координат (с точностью до поворота и единицы длины) и приписать координаты каждому городу, так чтобы зрительно карта и изображение городов в этой системе координат совпали. Близость может определяться не только расстоянием в километрах, но и другими показателями, такими как размеры миграционных потоков между городами, интенсивность телефонных звонков, а также расстояниями в многомерном признаковом пространстве. В последнем случае задача построения такой системы координат близка к задаче, решаемой факторным анализом - сжатию данных, описанию их небольшим числом переменных. Нередко требуется, также, наглядное представление свойств объектов. В этом случае полезно придать координаты переменным, расположить в геометрическом пространстве переменные. С технической точки зрения это всего лишь транспонирование матрицы данных. Для определенности мы будем говорить о создании геометрического пространства для объектов, специально оговаривая случаи анализа множества свойств. В социальных исследованиях методом многомерного шкалирования создают зрительный образ «социально-экономического пространства» объектов наблюдения или свойств. Для такого образа наиболее приемлемо создание двумерного пространства.

Основная идея метода состоит в приписывании каждому объекту значений координат, так, чтобы матрица евклидовых расстояний между объектами в этих координатах, помноженная на константу оказалась близка к матрице расстояний между объектами, определенной из каких-либо соображений ранее.

Метод весьма трудоемкий и рассчитан анализ данных, имеющих небольшое число объектов.

Первая, в этом направлении, работа Торгерсона (Torgerson, 1952, [7]) была посвящена метрическому многомерному шкалированию. Модель этого метода имеет вид: $L\{S\}=D^2+E$ где $L\{S\}$ - линейное преобразование исходной матрицы расстояний, D^2 - матрица расстояний, полученная на основе созданных шкал, E - матрица отклонений модели от исходных данных. Линейное преобразование дает матрицу преобразованных расстояний $T=L\{S\}$. Целью многомерного метрического шкалирования является поиск оптимальных шкал и линейного преобразования матрицы исходных расстояний, минимизирующих ошибку E.

Шепард и Краскэл (Shepard,1962, Kruscal,1964, [7]) совершили существенный прорыв, разработав метод неметрического шкалирования. Суть этого метода состоит в нелинейном преобразовании расстояний. Модель неметрического шкалирования имеет вид: $M\{S\}=D^2+E$, где $M\{S\}$ - монотонное преобразование исходной матрицы расстояний. Этот метод имеет больше шансов получить действительно геометрическое пространство, метрическое шкалирование. Монотонное преобразование дает матрицу преобразованных расстояний $T=L\{S\}$.

Для измерения качества подгонки модели Такейном (Takane, 1977) был предложен показатель S-$stress=\left(\frac{\|\boldsymbol{E}\|}{\|\boldsymbol{T}\|}\right)^{1/2}$, где норма матрицы $\|E\|$, $\|T\|$ означает сумму квадратов элементов матрицы. Слово stress в английском языке имеет множество значений, одно из этих значений - нагрузка. Этот показатель из-меняется от 0 до 1. Равенство его нулю означает точную подгонку модели, единице - полную ее бессмысленность.

Кроме того, оценить качество модели можно с помощью показателя stress index Краскэла, который получается с использованием матрицы не квадратов расстояний, а расстояний.

Еще один показатель качества модели, RSQ, представляет собой квадрат коэффициента корреляции между матрицами T и E. Таким образом, также как в регрессионном анализе, RSQ может быть интерпретирован как доля дисперсии преобразованных расстояний T, объясненная матрицей расстояний D.

Можно построить для текущей конфигурации точек график зависимости воспроизведенных расстояния от исходных расстояний. Такая диаграмма рассеяния называется *диаграммой Шепарда*. По оси ординат OY показываются воспроизведенные расстояния (сходства), а по оси OX откладываются истинные сходства (расстояния) между объектами (отсюда обычно получается отрицательный наклон). На этом график также строится график ступенчатой функции. Ее линия представляет так называемые величины D-с крышечкой, то есть, результат монотонного преобразования исходных данных. Если бы все воспроизведенные результирующие расстояния легли на эту ступенчатую линию, то ранги наблюдаемых расстояний (сходств) был бы в точности воспроизведен полученным решением (пространственной моделью). Отклонения от этой линии показывают на ухудшение качества согласия (т.е. качества подгонки модели).

Чем больше размерность пространства, используемого для воспроизведения расстояний, тем лучше согласие воспроизведенной матрицы с исходной (меньше значение стресса). Если взять размерность пространства равной числу переменных, то возможно абсолютно точное воспроизведение исходной матрицы расстояний. Однако нашей целью является упрощение решаемой задачи, с тем, чтобы объяснить матрицу сходства (расстояний) в терминах лишь нескольких важнейших факторов (латентных переменных или вспомогательных шкал).

Лекция 9,10. Дискриминантный анализ

Дискриминантный анализ является разделом многомерного статистического анализа, который позволяет изучать различия между двумя и более группами объектов по нескольким переменным одновременно.

При интерпретации нужно ответить на вопрос: возможно ли, используя данный набор переменных, отличить одну группу от другой, насколько хорошо эти переменные помогают провести дискриминацию и какие из них наиболее информативны.

Методы классификации связаны с получением одной или нескольких функций, обеспечивающих возможность отнесения данного объекта к одной из групп. Эти функции называются классифицирующими и зависят от значений переменных таким образом, что появляется возможность отнести каждый объект к одной из групп.

Задачи дискриминантного анализа можно разделить на три типа. Задачи первого типа позволяют на основе некоторой информации найти функцию, позволяющую поставить в соответствие новым объектам характерные для нихвыводы. Построение такой функции и составляет задачу дискриминации. Второй тип задачи относится к ситуации, когда признаки принадлежности объекта к той или иной группе потеряны, и их нужно восстановить. Задачи третьего типа связаны с предсказанием будущих событий на основании имеющихся данных.

Дискриминантный анализ общий термин, относящийся к нескольким тесно связанным статистическим процедурам. Эти процедуры можно разделить на методы интерпретации межгрупповых различий – *дискриминации* и методы *классификации* наблюдений по группам.

Основной целью дискриминации является нахождение такой линейной комбинации переменных (в дальнейшем эти переменные будем называть дискриминантными переменными), которая бы оптимально разделила рассматриваемые группы.

Введем следующие обозначения:

g – число классов;

p – число дискриминантных переменных;

n_k – число наблюдений в *k*–й группе;

n – общее число наблюдений по всем группам;

x_{ikm} – величина дискриминантной переменной *i* для *m*–го наблюдения в *k*–й группе;

$\bar{x}_{ik}$ – средняя величина переменной *i* в *k*–й группе;

$\bar{x}_i$ – среднее значение переменной i по всем группам;

Линейная функция $d_{km} = \beta_0 + \beta_1 x_{1km} + \ldots + \beta_p x_{pkm}$, $m = 1,\ldots n$; $k = 1,\ldots g$ называется *канонической дискриминантной функцией* с неизвестными коэффициентами β_i, d_{km} –значение дискриминантной функции для *m*–го объекта в группе *k*

Коэффициенты β_i первой канонической дискриминантной функции выбираются таким образом, чтобы центроиды различных групп как можно больше отличались друг от друга. Коэффициенты второй группы выбираются также, но при этом налагается дополнительное условие, чтобы значения второй функции были некоррелированы со значениями первой. Аналогично определяются и другие функции. Отсюда следует, что любая каноническая дискриминантная функция имеет нулевую внутригрупповую корреляцию с остальными. Если число групп равно *g*, то число канонических дискриминантных функций будет на единицу меньше числа групп. С геометрической точки зрения дискриминантные функции определяют гиперповерхности в *p*-мерном пространстве. В частном случае при *p*=2 она является прямой, а при *p*=3 плоскостью

На практике полезно иметь одну, две или же три дискриминантных функций. Тогда графическое изображениее объектов будет представлено в одно–, двух– и трехмерных пространствах. Такое представление особенно полезно в случае, когда число дискриминантных переменных p велико по сравнению с числом групп g.

Для получения коэффициентов β_i канонической дискриминантной функции нужен статистический критерий различения групп. Классификация переменных будет осуществляться тем лучше, чем меньше рассеяние точек относительно центроида внутри группы и чем больше расстояние между центроидами групп. Один из методов поиска наилучшей дискриминации данных заключается в нахождении такой канонической дискриминантной функции d, которая бы максимизировала отношение межгрупповой вариации к внутригрупповой .

$$\lambda = \frac{B}{W}$$

где B – межгрупповая, а W – внутригрупповая матрицы рассеяния наблюдаемых переменных от средних. Иногда вместо W используют матрицу рассеяния T объединенных данных.

Рассмотрим задачу максимизации отношения для λ когда имеются g групп. Оценим информацию, характеризующую степень различия между объектами по всему пространству точек, определяемому переменными групп. Для этого вычислим матрицу рассеяния T, которая равна сумме квадратов отклонений и попарных произведений наблюдений от общих средних по каждой переменной. Элементы матрицы T определяются выражением

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^{g} \sum_{m=1}^{n} (x_{ikm} - \bar{x}_i)(x_{jkm} - \bar{x}_j) \qquad \bar{x}_i = (1/n)\sum_{k=1}^{g} n_i \bar{x}_{ik}, i = 1,\ldots, p$$

$$\bar{x}_{ik} = (1/n_i)\sum_{m=1}^{n_k} x_{ikm}, i = 1,\ldots, p; k = 1,\ldots, g$$

Матрица T содержит полную информацию о распределении точек по пространству переменных. Диагональные элементы представляют собой сумму квадратов отклонений от общего среднего и показывают, как ведут себя наблюдения по отдельно взятой переменной. Внедиагональные элементы равны сумме произведений отклонений по одной переменной на отклонения по другой.

Если разделить матрицу T на (n-1), то получим ковариационную матрицу. Для проверки условия линейной независимости переменных полезно рассмотреть вместо T нормированную корреляционную матрицу.

Для измерения степени разброса объектов внутри групп рассмотрим матрицу W, которая отличается от T только тем, что ее элементы определяются векторами средних для отдельных групп, а не вектором средних для общих данных. Элементы внутригруппового рассеяния определятся выражением

$$w_{ij} = \sum_{k=1}^{g} \sum_{m=1}^{n_k} (x_{ikm} - \bar{x}_{ik})(x_{jkm} - \bar{x}_{jk})$$

Если разделить каждый элемент матрицы W на (n–g), то получим оценку ковариационной матрицы внутригрупповых данных.

Когда центроиды различных групп совпадают, то элементы матриц T и W будут равны. Если же центроиды групп различные, то разница B=T-W будет определять межгрупповую сумму квадратов отклонений и попарных произведений. Если расположение групп в пространстве различается (т.е. их центроиды не совпадают), то степень разброса наблюдений внутри групп будет меньше межгруппового разброса.

Матрицы W и B содержат всю основную информацию о зависимости внутри групп и между группами. Для лучшего разделения наблюдений на группы нужно подобрать коэффициенты дискриминантной функции из условия максимизации отношения межгрупповой матрицы рассеяния к внутригрупповой матрице рассеяния при условии ортогональности дискриминантных плоскостей. Тогда нахождение коэффициентов дискриминантных функций сводится к решению задачи о собственных значениях и векторах

Пусть $\lambda_1 \geq \ldots \lambda_p$ и $v_1 \ldots v_p$ соответственно собственные значения и векторы. Тогда

$$\lambda = \frac{\sum_k b_{jk} v_j v_k}{\sum_k w_{jk} v_j v_k}$$

что влечет равенство $\sum_k (b_{jk} - \lambda w_{jk}) v_k = 0$, или в матричной записи $(B - \lambda W)v = 0$

Решение уравнения $|B - \lambda W| = 0$ позволяет нам определить компоненты собственных векторов, соответствующих дискриминантным функциям.

Каждое решение, которое имеет свое собственное значение и собственный вектор, соответствует одной дискриминантной функции. Координаты собственного вектора можно использовать в качестве коэффициентов дискриминантной функции. Однако при таком подходе начало координат не будет совпадать с главным центроидом. Для того, чтобы начало координат совпало с главным центроидом нужно нормировать координаты собственного вектора.

$$\boldsymbol{\beta}_i = \mathbf{v}_i \sqrt{n - g}, \quad \beta_0 = -\sum_{i=1}^{p} \beta_i \bar{x}_i.$$

Нормированные коэффициенты полученые по нестандартизованным исходным данным, называются *нестандартизованными.* Нормированные коэффициенты приводят к таким дискриминантным значениям, единицей измерения которых является стандартное квадратичное отклонение. При таком подходе каждая ось в преобразованном пространстве сжимается или растягивается таким образом, что соответствующее дискриминантное значение для данного объекта представляет собой число стандартных отклонений точки от главного центроида.

Стандартизованные коэффициенты можно получить двумя способами:

1. стандартизировать исходные данные;
2. преобразовать нестандартизованные коэффициенты к стандартизованной форме по формуле:

$$\mathbf{c}_i = \boldsymbol{\beta}_i \sqrt{\frac{w_{ii}}{n - g}},$$

Стандартизованные коэффициенты полезно применять для уменьшения размерности исходного признакового пространства переменных. Если абсолютная величина коэффициента для данной переменной для всех дискриминантных функций мала, то эту переменную можно исключить, тем самым сократив число переменных.

Стандартизованные коэффициенты показывают вклад переменных в значение дискриминантной функции. Если две переменные сильно коррелированы, то их стандартизованные коэффициенты могут быть меньше по сравнению с теми случаями, когда используется только одна из этих переменных. Такое распределение величины стандартизованного коэффициента объясняется тем, что при их вычислении учитывается влияние всех переменных.

Общее число дискриминантных функций не превышает числа дискриминантных переменных и, по крайней мере, на 1 меньше числа групп. Степень разделения выборочных групп зависит от величины собственных чисел: чем больше собственное число, тем сильнее разделение. Наибольшей разделительной способностью обладает первая дискриминантная функция, соответствующая наибольшему собственному числу вторая обеспечивает максимальное различение после первой и т.д. Различительную способность i–ой функции оценивают по относительной величине в процентах собственного числа от суммы всех собственных чисел.

Коэффициент канонической корреляции. Другой характеристикой, позволяющей оценить полезность дискриминантной функции является коэффициент канонической корреляции r_i. Каноническая корреляция является мерой связи между двумя множествами переменных. Максимальная величина этого коэффициента равна 1. Будем считать, что группы составляют одно множество, а другое множество образуют дискриминантные переменные. Коэффициент канонической корреляции для i–ой дискриминантной функции определяется формулой:

$r_i = \sqrt{\dfrac{\lambda_i}{1+\lambda_i}}$. Чем больше величина r_i, тем лучше разделительная способность дискриминантной функции.

После получения канонических дискриминантных функций при известной принадлежности объектов к тому или иному классу. решается задача предсказания класса, которому принадлежит некоторый случайно выбранный объект, т.е. задача классификации.

Классификация может проводиться с помощью апостериорной вероятности по Бейесовской схеме вычисления; с применением элементарных классифицирующих функций; с помощью расстояния Махалонобиса.

Классифицирующие функции имеют вид:

$$d_{ik} = b_{k0} + b_{k1}x_{i1} + \ldots + b_{kp}x_{ip} + \ln q_k, \ k = 1, \ldots, g$$

Объект относится к классу, у которого значение функции оказывается наибольшим. Коэффициенты классифицирующих функций удобнее вычислять по скалярным выражениям

$$b_{ki} = (n-g)\sum_{j=1}^{p}(w^{-1})_{ij}\bar{x}_{jk}, \ k = 1, \ldots, g$$

где b_{ki} – коэффициент для переменной i в выражении, соответствующему классу k,

$\left(w^{-1}\right)_{ij}$ – обратный элемент внутригрупповой матрицы сумм попарных произведений W. Постоянный член находится по формуле

$$b_{k0} = -0{,}5 \cdot \sum_{j=1}^{p} b_{kj}\bar{x}_{jk}, \ k = 1, \ldots, g$$

Выбор функций расстояния между объектами для классификации является наиболее очевидным способом введения меры сходства для векторов объектов, которые интерпретируются как точки в евклидовом пространстве. В качестве меры сходства можно использовать евклидово расстояние между объектами. Чем меньше расстояние между объектами, тем больше сходство. Однако в тех случаях, когда переменные коррелированы, измерены в разных единицах и имеют различные стандартные отклонения, трудно четко определить понятие "расстояния". В этом случае полезнее применить не евклидовое расстояние, а *выборочное расстояние Махаланобиса*

$$D^2(\mathbf{x}/G_k) = (n-g)\cdot\sum_{v=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}(w^{-1})_{vj}(x_{iv}-\bar{x}_{vk})(x_{ij}-\bar{x}_{jk}), \ k = 1, \ldots, g$$

При использовании функции расстояния, объект относят к той группе, для которой расстояние наименьшее.

Лекция 11,12. Принятие решений в условиях неопределенности

В большинстве теоретических задач речь идет о постановках и методах решения задач, не содержащих неопределенностей. Однако, как правило, реальные задачи содержат в том или ином виде неопределенность. Можно даже утверждать, что решение задач с учетом разного вида неопределенностей является общим случаем, а принятие решений без их учета – частным. Однако из-за концептуальных и методических трудностей в настоящее время не существует единого методологического подхода к решению таких задач. Тем не менее, накоплено достаточно большое число методов формализации постановки и принятия решений с учетом неопределенностей. При использовании этих методов следует иметь в виду, что все они носят рекомендательный характер, и выбор окончательного решения всегда остается за человеком.

Принято различать три типа неопределенностей:

- неопределенность целей;
- неопределенность природы;
- неопределенность действий активного или пассивного партнера.

В приведенной классификации тип неопределенности рассматривается с позиции того или иного элемента математической модели.

В зависимости от условий внешней среды и степени информативности лица принимающего решение производится следующая классификация задач принятия решений:

а) в условиях риска;
б) в условиях неопределенности;
в) в условиях конфликта или противодействия (активного противника).

Для принятия решений в условиях риска используются следующие критерии.

Критерий ожидаемого значения стремящийся, максимизировать, ожидаемую прибыль (или минимизировать ожидаемые затраты). Использование ожидаемых величин предполагает возможность многократного решения одной и той же задачи, пока не будут получены достаточно точные расчетные формулы.

Пусть X - случайная величина с математическим ожиданием M и дисперсией D. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - значения случайной величины X, то среднее арифметическое их (выборочное среднее) значений $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ имеет дисперсию $\frac{D}{n}$.

При достаточно большом объеме выборки разница между средним арифметическим и математическим ожиданием стремится к нулю (так называемая предельная теорема теории вероятности). Следовательно, использование критерия, ожидаемого значения справедливо только в случае, когда одно и тоже решение приходится применять достаточно большое число раз. Верно и обратное: ориентация на ожидания будет приводить к неверным результатам для решений, которые приходится принимать небольшое число раз.

Критерий ожидаемого значения можно модифицировать так, что его можно будет применять и для редко повторяющихся ситуаций.

Если X - случайная величина с дисперсией D, то среднее арифметическое $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ имеет дисперсию $\frac{D}{n}$. Следовательно если D уменьшается , то вероятность того, что среднее значение близко к математическому ожиданию увеличивается. В критерии «ожидаемое значение – дисперсия» максимизация прибыли сочетается с минимизацией ее дисперсии.

Критерий предельного уровня не дает оптимального решения, максимизирующего прибыль или минимизирующего затраты. Он соответствует определению приемлемого способа действий

Критерий наиболее вероятного исхода предполагает замену случайной ситуации детерминированной путем замены случайной величины прибыли (или затрат) единственным значением, имеющим наибольшую вероятность реализации. Использование данного критерия, также как и в предыдущем случае в значительной степени опирается на опыт и интуицию. При этом необходимо учитывать два обстоятельства, затрудняющие применение этого критерия: - критерий нельзя использовать, если наибольшая вероятность события недопустимо мала; применение критерия невозможно, если несколько значений вероятностей возможного исхода равны между собой.

Будем рассматривать неопределенность «природы», вызванную отсутствием, недостатком информации о действительных условиях (факторах), при которых развивается объект управления. Внешняя среда («природа») может находиться в одном из множества возможных состояний. Это множество может быть конечным и бесконечным. Будем считать, что множество состояний конечно или по крайней мере количество состояний можно пронумеровать.

Пусть S_i - состояние «природы», при этом i = 1,…,n, где n - число возможных состояний. Все возможные состояния известны, не известно только, какое состояние будет иметь место в условиях, когда планируется реализация принимаемого управленческого решения. Будем считать, что множество управленческих решений (планов) R_j также конечно и равно m. Реализация R_j плана в условиях, когда «природа» находится в S_i состоянии, приводит к определенному результату, который можно оценить, введя количественную меру.

В качестве этой меры могут служить выигрыши от принимаемого решения (плана); потери от принимаемого решения, а также полезность, риск и другие количественные критерии.

Данные, необходимые для принятия решения в условиях неопределенности, обычно задаются в форме матрицы, строки которой соответствуют возможным действиям (управленческим решения) *R*, а столбцы возможным состояниям «природы» S

Математическая модель задачи принятия решений определяется множеством состояний {S}, множеством планов (стратегий) {R} и матрицей возможных результатов.

Непосредственный анализ матриц выигрышей или рисков не позволяет в общем случае принять решение по выбору оптимальной стратегии (плана), за исключением тривиального случая, когда выигрыши при одной стратегии выше, чем при любой другой для каждого состояния «природы» (элементы матрицы выигрышей в некоторой строке больше, чем в любой из других). Другими словами, имеется в наличии «доминирующая» стратегия.

Для принятия решения в условиях неопределенности используется ряд критериев. Рассмотрим некоторые из них.

Критерий Лапласа опирается на «принцип недостаточного основания» Лапласа, согласно которому все состояния «природы» S полагаются равновероятными. В соответствии с этим принципом каждому состоянию S_i ставится вероятность q_i определяемая по формуле $q_i = \frac{1}{n}$.

При этом исходной может рассматриваться задача принятия решения в условиях риска, когда выбирается действие R_j, дающее наибольший ожидаемый выигрыш. Для принятия решения для каждого R_j вычисляют среднее арифметическое значение выигрыша: $M_j(R) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_{ji}$. Среди $M_j(R)$ выбирают максимальное значение, которое будет соответствовать оптимальной стратегии R_j.

Применение *критерия Вальда* не требует знания вероятностей состояний S_i. Этот критерий опирается на принцип наибольшей осторожности, поскольку он основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий R_j .

Если в исходной матрице (по условию задачи) результат V_{ji} представляет потери лица, принимающего решение, то при выборе оптимальной стратегии используется минимаксный критерий. Для определения оптимальной стратегии R_j необходимо в каждой строке матрицы результатов найти наибольший элемент $\max_i \{V_{ji}\}$, а затем выбирается действие R_j (строка j), которому будет соответствовать наименьший элемент из этих наибольших элементов, т. е. действие, определяющее результат, равный $W = \min_j \max_i \{V_{ji}\}$.

Если в исходной матрице по условию задачи результат V_{ji} представляет выигрыш (полезность) лица, принимающего решение, то при выборе оптимальной стратегии используется максиминный критерий.

Для определения оптимальной стратегии R_j в каждой строке матрицы результатов находят наименьший элемент $\min_i \{V_{ji}\}$, а за тем выбирается действие R_j (строка j), которому будут соответствовать наибольшие элементы из этих наименьших элементов, т. е. действие, определяющее результат, равный $W = \max_j \min_i \{V_{ji}\}$

Минимаксный критерий Вальда иногда приводит к нелогичным выводам из-за своей чрезмерной «пессимистичности». «Пессимистичность» этого критерия исправляет критерий Сэвиджа.

Критерий Сэвиджа использует матрицу рисков. Элементы данной матрицы можно определить по формулам:

$$r_{ji} = \begin{cases} \max\{V_{ji}\} - V_{ji}, & \text{\textit{если } } V - \text{\textit{выигрыш}} \\ V_{ji} - \min\{V_{ji}\}, & \text{\textit{если } } V - \text{\textit{потери.}} \end{cases}$$

Это означает, что r_{ji} есть разность между наилучшим значением в столбце *i* и значениями V_{ji} при том же *i*. Отметим, что независимо от того, является ли V_{ji} доходом (выигрышем) или потерями (затратами), r_{ji} в обоих случаях определяет величину потерь лица, принимающего решение. Следовательно, можно применять к r_{ji} только минимаксный критерий. Критерий Сэвиджа рекомендует в условиях неопределенности выбирать ту стратегию R_j: при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации (когда риск максимален).

Применение критерия Сэвиджа позволяет любыми путями избежать большого риска при выборе стратегии, а значит, избежать большого проигрыша (потерь).

Критерий Гурвица основан на следующих двух предположениях: «природа» может находится в самом невыгодном состоянии с вероятностью (1-a) и в самом выгодном состоянии с вероятностью a, где a - коэффициент доверия. Если результат V_{ji} - прибыль, полезность, доход и т.п., то критерий Гурвица записывается так $W = \max_j \left[a \max_i V_{ji} + (1-a) \min_i V_{ji} \right]$

Когда V_{ji} представляет затраты (потери), то выбирают действие, дающее $W_{\min} = \min_j \left[a \min_i V_{ji} + (1-a) \max_i V_{ji} \right]$

Если a = 0, получим пессимистический критерий Вальда.

Если a = I, то приходим к решающему правилу вида $\max_j \max_i \{V_{ji}\}$, или к так называемой стратегии «здорового оптимиста», т. е. критерий слишком оптимистичный.

Критерий Гурвица устанавливает баланс между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма путем взвешивания обоих способов поведения соответствующими весами (1-a) и a, где 0< a <1. Значение a от 0 до 1 может определяться в зависимости от склонности лица, принимающего решение, к пессимизму или к оптимизму. При отсутствии ярко выраженной склонности a = 0,5 представляется наиболее разумной.

Выбор критерия принятия решений в условиях неопределенности является наиболее сложным и ответственным этапом в исследовании операций. При этом не существует каких-либо общих советов или рекомендаций. Выбор критерия должно производить лицо, принимающее решение, с учетом конкретной специфики решаемой задачи и в соответствии со своими целями, а также опираясь на прошлый опыт и собственную интуицию.

В частности, если даже минимальный риск недопустим, то следует применять критерий Вальда. Если, наоборот, определенный риск вполне приемлем и лицо, принимающее решение намерено вложить в некоторое предприятие столько средств, чтобы потом оно не сожалело, что вложено слишком мало, то выбирают критерий Сэвиджа.

Лекция 13,14. Временные ряды.

Любой экономический процесс можно описать с помощью уравнений. Наиболее распространенными являются уравнения линейной регрессии, временные уравнения и их системы.

Временные уравнения (ряды) определяют значения переменных в некоторый момент времени. В них возможно присутствие зависимой переменной в левой и правой части уравнения одновременно, но в разные моменты времени, модели данного типа называют динамическими.

Обычно динамические модели подразделяют на два класса

1. Модели с лагами (модели с распределенными лагами) – это модели, содержащие в качестве лаговых переменных лишь независимые (объясняющие) переменные

2. Авторегрессионные модели – это модели, уравнения которых в качестве лаговых объясняющих переменных включают значения зависимых переменных.

Временные ряды используются достаточно широко. Это вполне естественно, так как во многих случаях воздействие одних экономических факторов на другие осуществляется не мгновенно, а с некоторым временным запаздыванием – лагом. Причин наличия лагов в экономике достаточно много, и среди них можно выделить следующие:

Психологические причины, которые обычно выражаются через инерцию в поведении людей. Например, люди тратят |доход постепенно, а не мгновенно. Привычка к определенному образу жизни приводит к тому, что люди приобретают те же блага в течение некоторого времени даже после падения реального дохода.

Технологические причины. Например, изобретение персональных компьютеров не привело к мгновенному вытеснению ими больших ЭВМ в силу необходимости замены соответствующего программного обеспечения, которое потребовало продолжительного времени.

Институциональные причины. Например, контракты между фирмами, трудовые договоры требуют определенного постоянства в течение времени контракта (договора).

Механизмы, формирования экономических показателей. Например, инфляция во многом является инерционным процессом; денежный мультипликатор (создание денег в банковой системе) также проявляет себя на определенном временном интервале и т.д.

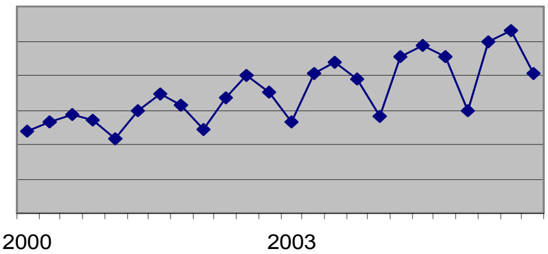
Конечной целью анализа временных рядов является прогнозирование будущих значений исследуемого показателя. Такое прогнозирование позволяет, во-первых предвидеть будущие экономические реалии, во-вторых, проанализировать построенную регрессионную модель на устойчивость (т.е. ее применимость в изменяющихся условиях).

Прогнозирование можно осуществлять либо на основе выявленных закономерностей изменения самого исследуемого показателя во времени и экстраполяции его прошлого поведения на будущее, либо на основе выявленной зависимости исследуемого показателя от других экономических факторов, будущие значения которых контролируемы, известны или легко предсказуемы.

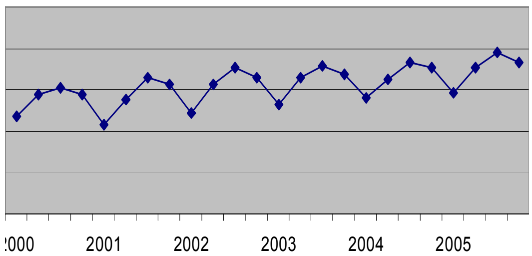
Различают долгосрочное и краткосрочное прогнозирование. В первом анализируется долговременная динамика исследуемого показателя, и в этом случае главным представляется выделение общего направления его изменения – тренда. При этом считается возможным пренебречь краткосрочными колебаниями значений показателя относительно этого тренда. Тренд обычно строится методами регрессионного анализа.

После выделения долгосрочного тренда обычно пытаются определить факторы, вызывающие отклонения значений исследуемой величины от тренда – колеблемость или сезонность. Для предсказания краткосрочных колебаний проводится более детальный регрессионный анализ с целью выявления большого числа показателей определяющих поведение исследуемой величины. Кроме этого, проводят более детальное исследование связей текущих значений исследуемых показателей с их прошлыми значениями или с прошлыми значениями других факторов.

Если амплитуда изменения переменной y с течением времени остается постоянной, можно предположить наличие аддитивной сезонности. В этом случае значение зависимой переменной в каждый момент времени найдем из условия: y=T+S. Если амплитуда изменения переменной y с течением времени увеличивается (уменьшается), можно предположить наличие мультипликативной сезонности. В этом случае значение зависимой переменной в каждый момент времени найдем из условия: y=TS, где T – тренд, S – сезонная компонента.



Мультипликативная сезонность



Аддитивная сезонность

Для определения уравнения тренда используют регрессионный анализ, для оценки сезонной компоненты проводят центрирование данных.

Лекция 15-18 Основные модели экономики и их анализ.

Для моделирования реальных систем, зависящих от времени, широко используются дифференциальные уравнения. В частности, для описания и исследования экономических и биологических систем. В динамике популяций есть много примеров, когда изменение численности популяций во времени носит колебательный характер. Одним из самых известных примеров описания динамики взаимодействующих популяций являются уравнения Вольтера-Лотка, которые имеют вид:

$$\begin{cases} x_1' = (a - bx_2)x_1 \\ x_2' = (-c + dx_1)x_2 \end{cases}$$

Рассмотренная модель может описывать поведение конкурирующих фирм, рост народонаселения, численность воюющих армий, изменение экологической обстановки и др.

Фазовый процесс системы Вольтера-Лотка имеет колебательный характер.

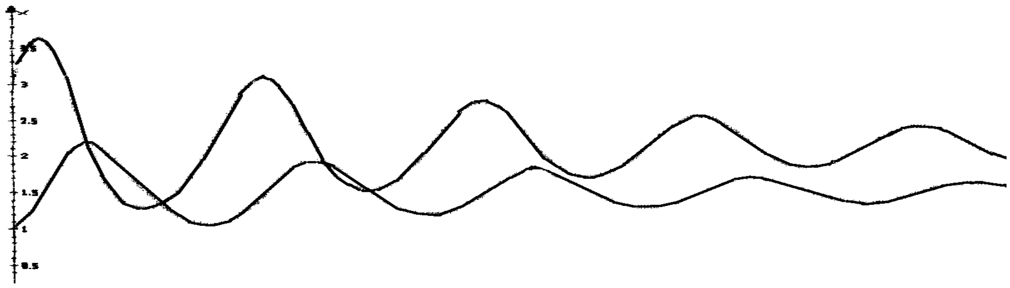
Если в начальный момент система находилась в стационарной точке, то решения не будут изменяться во времени, останутся постоянными. Всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию решений. Неэллиптичность формы траектории, охватывающей центр, отражает негармонический характер колебаний.

Рассмотрим модель конкурирующих видов с "логистической поправкой":

$$\begin{cases} x_1' = (a - bx_2)x_1 - ax_1^2 \\ x_2' = (-c + dx_1)x_2 - ax_2^2 \end{cases}$$

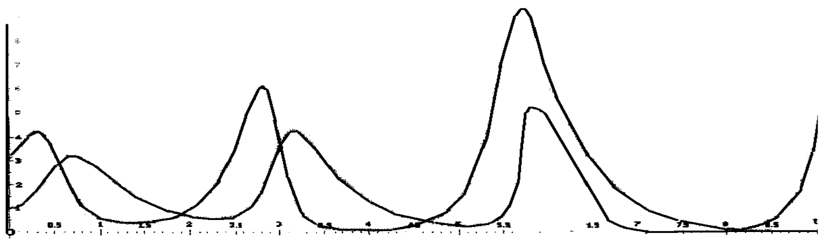
В этом случае поведение решений в окрестности стационарном точки меняется в зависимости от величины и знака параметра а.

Если а>0 фазовый портрет системы имеет вид:



Видно, что в этом случае стационарная точка превращается в устойчивый фокус, а решения в затухающие колебания. При любом начальном условии состояние системы через некоторое время становится близким к стационарному и стремится к нему при $t \to \infty$.

В случае когда а<0 стационарная точка является неустойчивым фокусом и амплитуда колебаний растет. В этом случае как бы близко ни было начальное состояние к стационарному, с течением времени состояние системы будет сильно отличаться от стационарного.



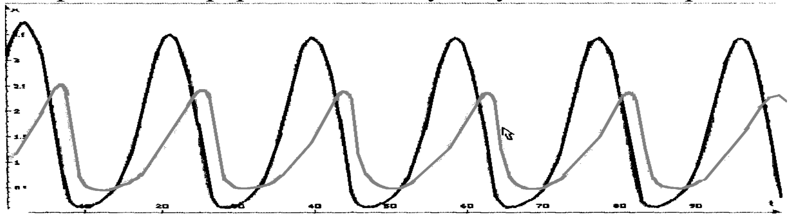
На примере модели Вольтера-Лотка и модели Вольтера-Лотка с логистической поправкой было продемонстрировано одно из важнейших качественных свойств центров – они легко разрушаются даже при самых малых изменениях правой части. Большинство моделей является идеализацией действительности; в них внимание сосредоточено на некоторых основных переменных и соотношениях между ними. Поэтому устойчивость моделей относительно малых возмущений чрезвычайно важна в приложениях. Модели, не чувствительные к малым возмущениям, называются грубыми.

Модель Вольтера–Лотка неустойчива относительно возмущений, поскольку ее стационарное состояние – центр.

Существует другой вид моделей, в которых возникают незатухающие колебания, – это модели, имеющие на фазовых портретах предельные циклы. Такая модель существует для системы конкурирующих видов – это модель Холлинга-Тэннера.

Скорость роста популяции фирм-жертв в этой модели равна сумме трех величин: скорости размножения в отсутствии хищников; влиянию межвидовой конкуренции; влиянию хищников (фирм – конкурентов).

На фазовом портрете модели будет устойчивый предельный цикл.



Модель выравнивания цен по уровню актива интересна тем, что в ней можно наблюдать гармонические колебания решений возле стационарного состояния. Предположим, что изменение уровня актива q пропорционально разности между предложением s и спросом d, т.е. q'=к(s-d), к > 0. Предположим далее, что изменение цены p пропорционально отклонению актива q от некоторого фиксированного уровня q0 так, что p'=-m(q-qo), m > 0.

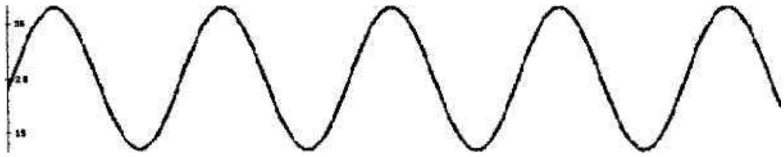
Таким образом, модель выравнивания цен по уровню актива имеет вид:

q'=к(s-d),

p'=-m(q-qo)

Фазовая кривая этой модели имеет вид:

Видно, что цена и актив колеблются возле стационарного состояния. Фазовая траектория пред-



ставляет собой эллипс, охватывающий стационарную точку. Это означает, что колебания актива и цены – гармонические.

3.2. Задания для лабораторных и домашних работ.

Построение математических моделей и определение метода решения задачи.

1) Приведены данные об исполнении баланса за отчетный период, требуется: составить матрицу прямых затрат и проверить ее продуктивность. Вычислить объемы конечного продукта при увеличении валового выпуска каждой отрасли на 100 % и 50% соответственно. Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление отрасли O_1 увеличить в k=1 раз, а отрасли O_2 – на P %=10%.

2) Предприятие выпускает четыре вида изделий с использованием четырех видов сырья. Нормы расхода сырья даны как элементы - столбцы матрицы. Найти затраты сырья, если задан вектор-план выпуска продукции.

3) При подкормке посева надо внести на 1 га почвы 69 ед. химического вещества *А*, 84 ед. вещества *Б* и 39 ед. вещества *В*. В единице массы удобрения $У_1$ содержится 3 ед. химического вещества *А*, 21 ед. вещества *Б* и 3 ед. вещества *В*, а в единице массы удобрения $У_2$ содержится соответственно 16; 4 и 6 ед. химических веществ *А, Б* и *В*. Цена удобрения $У_1$ составляет 4 ден. ед. за единицу массы, удобрения $У_2$ –12 ден. ед. Записать в математической форме условия закупки удобрений, обеспечивающие подкормку посева с соблюдением указанных норм, если на приобретение удобрений отпущено 64 ден. ед.

4) Из Минска в Могилев необходимо перевезти оборудование трех типов: I типа –95 ед., II типа– 100 ед., Ill типа –185 ед. Для перевозки оборудования завод может заказать три вида транспорта. Количество оборудования каждого типа, вмещаемого на определенный вид транспорта, приведено. Записать в математической форме условия перевозки оборудования из Минска в Могилев.

Кластерный анализ

1) Используя не менее двух методов кластер – процедур провести классификацию и построить дендограммы для данных точек.

2) Разбить представленные в таблице страны по уровню экономического развития.

страна	доля экспорта (%)	доля импорта (%)	население (млн.чел.)	% безработного населения
Россия	50	80	146	20
Украина	20	50	120	35
Белоруссия	30	25	100	15
Польша	10	60	95	10
Бельгия	60	20	70	15

Факторный анализ

Определить удовлетворенность, какой стороной жизни преобладает у разных респондентов. В эксперименте участвовало 10 человек, которые отвечали на вопросы, представленные в таблице

возраст	образование	Стаж непрерывной работы	Работа по специальности	Зарплата, тыс.руб	Кол-во человек в семье	жилплощадь	Наличие хобби	Посещение учреждение

Многомерное шкалирование

Для задач, представленных в теме кластерный анализ осуществите многомерное шкалирование, и распределите объекты на несколько групп. По возможности интерпретируйте полученные оси.

Дискриминантный анализ.

Имея достоверную информацию об обанкротившихся и не обанкротившихся в течении 5 лет предприятиях попытайтесь спрогнозировать поведение «молодых» фирм с помощью дискриминантного анализа.

Принятие решений в условиях неопределенностей.

Сведите задачу по теории игр к задаче линейного программирования. Выделите целевую функцию и систему ограничений.

Принятие решений в случае игры с природой. Определите стратегию игрока в условиях капризов погоды (теплая, холодная).

Временные ряды. Сезонность.

Исследуется спрос y на прохладительные напитки в зависимости от дохода x по ежемесячным данным. Определить зависимость, отражающую увеличение спроса с ростом дохода. По фактическим точкам наблюдений проверьте наличие сезонности. Добавьте переменную $s = \begin{cases} 0, & \text{если холодное время года}, \\ 1, & \text{если теплое время года}. \end{cases}$ и определите объем продаж с учетом сезона.

Основные модели экономики.

Проанализируйте модели Холлинга-Тэннера, Вольтера-Лотка, выравнивания цен и др. при разных значениях параметров систем дифференциальных уравнений. Построить графики решений.

3.3.Типовой вариант контрольных работ

1) Используя не менее двух методов кластер – процедур провести классификацию и построить дендограммы для данных точек.

Варианты \ Точки	A	B	C	D	E
1	(3; 4)	(-3; 8)	(-2;-6)	(5; 7)	(6; 0)
2	(8; 4)	(-3; 9)	(2;-6)	(5; -7)	(5; 0)
3	(-4; 4)	(-3; 0)	(5;-6)	(3; -7)	(7; 0)
4	(-5; 4)	(0; 8)	(-9;-6)	(-2; 7)	(6; 5)

2) Объединить 8 Амурских фирм, занимающихся производством и установкой окон в несколько схожих совокупностей.

фирма	возраст фирмы	кол-во сотрудников	количество установленных окон за месяц	средняя цена окна (тыс.руб)	Количество филиалов по области	Скидки (%)	популярность (0-нет, 1д -а)
Home master	11	200	30	17	20	25	1
Уют	3	14	12	13,2	2	33	1
РосОкна	3	50	8	14,8	5	30	1
Ремикс	5	80	14	15	10	10	1
Ванда	8	35	17	14,2	12	15	1
Ремстрой	2	10	5	11,5	1	5	0
СМУ-17	7	20	3	13,5	1	0	0
Оникс	3	20	1	12,9	1	0	0

3.4. Задания для индивидуальной самостоятельной работы студентов

1. **Расчетно-графическая работа**: работа рассчитана на 7-8 недель. студенты составляют задачу, связанную с их будущей профессиональной деятельностью и находят ее решение с помощью многомерных статистических методов. Задача составляется на основании статистических данных, которые собирают студенты во время выполнения курсовых проектов по профессиональным дисцип-

линам. Таблица данных должна содержать 8-10 различных переменных и не менее 20 наблюдений. По выполнению студент защищает свою работу в индивидуальной беседе с преподавателем.

2. **Индивидуальное домашнее задание**: время выполнения задания 2 недели. Выбор варианта осуществляется согласно порядковому номеру студента в группе.

Задание 1. Два предприятия производят продукцию и поставляют её на рынок региона. Они являются единственными поставщиками продукции в регион, поэтому полностью определяют рынок данной продукции в регионе. Каждое из предприятий имеет возможность производить продукцию с применением одной из пяти различных технологий. В зависимости от качества продукции, произведенной по каждой технологии, предприятия могут установить цену реализации единицы продукции на уровне 10, 8, 6, 4 и 2 денежных единиц соответственно. При этом предприятия имеют различные затраты на производство единицы продукции.

В результате маркетингового исследования рынка продукции региона была определена функция спроса на продукцию Y=8 - 0.3-X, где, Y - количество продукции, которое приобретёт население региона (тыс.ед.), а X-средняя цена продукции предприятий, д.е.

Значения долей продукции предприятия 1, приобретенной населением, зависят от соотношения цен на продукцию предприятия 1 и предприятия 2. В результате маркетингового исследования эта зависимость установлена и значения вычислены

1.Существует ли в данной задаче ситуация равновесия при выборе технологий производства продукции обоими предприятиями?

4. Существуют ли технологии, которые предприятия заведомо не будут выбирать вследствие невыгодности?

5. Сколько продукции будет реализовано в ситуации равновесия? Какое предприятие окажется в выигрышном положении? Дайте краткую экономическую интерпретацию результатов решения задачи.

Задание 2. Решить задачу 1, изменив исходные данные. Затраты на единицу продукции, произведенной на предприятиях региона (д.е.) и функцию спроса на продукцию: Y=8-(0.3 + 0.1-(N-l))-X

Задание 3. Намечается крупномасштабное производство легковых автомобилей. Имеются четыре варианта проекта автомобиля. Определена экономическая эффективность каждого проекта в зависимости от рентабельности производства. По истечении трех сроков рассматриваются как некоторые состояния среды (природы). Значения экономической эффективности для различных проектов и состояний природы приведены. Требуется выбрать лучший проект легкового автомобиля для производства, используя критерии Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица. Сравните решение и сделайте выводы.

3.5. Карта обеспеченности дисциплины кадрами профессорско-преподавательского состава.

<table>
<tr><td colspan="8">Обеспеченность преподавательским составом</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Ф.И.О. должность по штатному расписанию</td><td rowspan="3">Какое образовательное учреждение профессионального образования окончил, специальность по диплому</td><td rowspan="3">Ученая степень и ученое звание (почетное звание)</td><td colspan="3">Стаж научно педагогической работы</td><td rowspan="3">Основное место работы, должность</td><td rowspan="3">Условия привлечения к трудовой деятельности (штатный, совместитель (внутренний или внешний с указанием доли ставки), иное</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Всего</td><td colspan="2">В т. ч. педагогический</td></tr>
<tr><td>Всего</td><td>В том числе по преподаваемой дисциплине</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Двоерядкина Н.Н., доцент</td><td>БГПУ, учитель математики</td><td>к.п.н.</td><td>8</td><td>8</td><td>4</td><td>АмГУ</td><td>1 ставка</td></tr>
</table>