

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Амурский государственный университет»

Кафедра Информационных и управляющих систем

## **УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ**

Моделирование

Основной образовательной программы по направлению подготовки

231000.68 – Программная инженерия

Благовещенск, 2012 г.

УМКД разработан кандидатом физико-математических наук, доцентом Ереминым Ильей Евгеньевичем

Рассмотрен и рекомендован на заседании кафедры

Протокол заседания кафедры от «12» января 2012 г. № 6

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ /

УТВЕРЖДЕН

Протокол заседания УМСС 231000.68 – Программная инженерия

от «09» января 2012 г. № 3

Председатель УМСС \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ /

# 1. Рабочая программа

## 1 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель дисциплины: ознакомление студентов с концептуальными основами теории моделирования, применяемыми при исследовании сложных систем с помощью вычислительной техники; формирование научного мировоззрения на основе знания предметной области темы исследования; воспитание научно-исследовательских навыков.

Задачи дисциплины:

- изучение основных методов разработки моделей различных классов систем;
- формирование устойчивых навыков практического решения задач.

## 2 МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП ВПО

Дисциплина относится к базовой части общенаучного цикла (М.1 Б.3) Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению подготовки 231000 «Программная инженерия» (квалификация (степень) «магистр»).

Для успешного освоения данной дисциплины необходимы знания, умения и навыки, приобретенные в результате освоения дисциплин базовой части математического и естественно-научного (Б.2) и вариативной части профессионального (Б.3) циклов Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению подготовки 231000 «Программная инженерия» (квалификация (степень) «бакалавр»): общая теория систем; моделирование систем.

Знания, умения и навыки, приобретенные в результате освоения данной дисциплины необходимы для освоения дисциплин базовой и вариативной части профессионального цикла (М.2) Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению подготовки 231000 «Программная инженерия» (квалификация (степень) «магистр»), прохождения научно-исследовательской практики и выполнения научно-исследовательской работы (М.3).

## 3 КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В результате освоения дисциплины обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

- 1) Знать: методологию построения моделей сложных систем.
- 2) Уметь: формализовать описание моделей сложных систем.
- 3) Владеть: методами научного поиска.

В процессе освоения данной дисциплины студент формирует и демонстрирует следующие общекультурные и профессиональные компетенции:

способен совершенствовать и развивать свой интеллектуальный и общекультурный уровень (ОК-1);

способен к самостоятельному обучению новым методам исследования, к изменению научного и научно-производственного профиля своей профессиональной деятельности (ОК-2);

использует на практике умения и навыки в организации исследовательских и проектных работ, в управлении коллективом (ОК-4);

способен проявлять инициативу, в том числе в ситуациях риска, брать на себя всю полноту ответственности (ОК-5);

способен самостоятельно приобретать с помощью информационных технологий и использовать в практической деятельности новые знания и умения, в том числе в новых областях знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности (ОК-6);

#### 4 СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 часов.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость в часах				Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации
				Лек	Пр	Лаб	Сам	
1	Основные понятия теории моделирования систем	2	1-2	2	0	2	4	Защита лаб. работы
2	Математические схемы моделирования систем	2	3-4	2	0	2	4	Защита лаб. работы
			5-6	2	0	2	4	Защита лаб. работы
3	Формализация и алгоритмизация процессов функционирования систем	2	7-8	2	0	2	4	Защита лаб. работы
			9-10	2	0	2	4	Защита лаб. работы
4	Статистическое моделирование систем на ЭВМ	2	11-12	2	0	2	4	Защита лаб. работы
			13-14	2	0	2	4	Защита лаб. работы
5	Инструментальные средства моделирования	2	15-16	2	0	2	4	Защита лаб. работы
			17-18	2	0	2	4	Защита лаб. работы
6	Всего по разделам	2	1-18	18	0	18	36	Экзамен

#### 5 СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ И ТЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

##### 5.1 Лекции

##### 5.1.1 Раздел 1. Основные понятия теории моделирования систем

Основные понятия; особенности разработки систем и использования моделей; принцип системного подхода; общая характеристика проблемы; классификация видов моделирования систем; обеспечение и эффективность машинного моделирования.

##### 5.1.2 Раздел 2. Математические схемы моделирования систем

Основные подходы к построению моделей; непрерывно-детерминированные модели; дискретно-детерминированные модели; дискретно-стохастические модели; непрерывно-стохастические модели; сетевые модели; комбинированные модели.

##### 5.1.3 Раздел 3. Формализация и алгоритмизация процессов функционирования систем

Методика разработки и машинной реализации моделей; построение концептуальных моделей и их формализация; алгоритмизация моделей и их машинная генерация; получение и интерпретация результатов моделирования.

##### 5.1.4 Раздел 4. Статистическое моделирование систем на ЭВМ

Общая характеристика метода; машинная генерация псевдослучайных последовательностей; проверка и улучшение качества случайных последовательностей; моделирование стохастических воздействий.

##### 5.1.5 Раздел 5. Инструментальные средства моделирования

Систематизация и сравнительный анализ языков имитационного моделирования; пакеты прикладных программ моделирования систем; базы данных моделирования систем; гибридные моделирующие комплексы.

## 5.2 Лабораторные занятия

5.2.1 Лабораторная работа 1. Моделирование временных характеристик динамической системы с прямыми связями

5.2.2 Лабораторная работа 2. Моделирование временных характеристик динамической системы с обратной связью

5.2.3 Лабораторная работа 3. Моделирование временных характеристик динамической системы с перекрестными обратными связями

5.2.4 Лабораторная работа 4. Комплексное моделирование характеристик динамической системы с прямыми связями

5.2.5 Лабораторная работа 5. Комплексное моделирование характеристик динамической системы с обратной связью

5.2.6 Лабораторная работа 6. Комплексное моделирование характеристик динамической системы с перекрестными обратными связями

5.2.7 Лабораторная работа 7. Визуализация системы с обратной связью

5.2.8 Лабораторная работа 8. Визуализация системы с перекрестными связями

5.2.9 Лабораторная работа 9. Визуализация системы с различными видами связей

## 6 САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

№ п/п	Раздел дисциплины	Форма (вид) самостоятельной работы	Трудоемкость в часах
1	Основные понятия теории моделирования систем	Выполнение лабораторной работы, оформление отчета.	4
2	Математические схемы моделирования систем	Выполнение двух лабораторных работ, оформление отчетов.	8
3	Формализация и алгоритмизация процессов функционирования систем	Выполнение двух лабораторных работ, оформление отчетов.	8
4	Статистическое моделирование систем на ЭВМ	Выполнение двух лабораторных работ, оформление отчетов.	8
5	Инструментальные средства моделирования	Выполнение двух лабораторных работ, оформление отчетов.	8
	Промежуточная аттестация	Подготовка к экзамену	36

## 7 МАТРИЦА КОМПЕТЕНЦИЙ

№ п/п	Раздел дисциплины	Компетенции					Общее кол-во компетенций
		ОК-1	ОК-2	ОК-4	ОК-5	ОК-6	
1	Основные понятия теории моделирования систем	+	+				2
2	Математические схемы моделирования систем	+	+	+			3
3	Формализация и алгоритмизация процессов функционирования систем	+		+	+		3
4	Статистическое моделирование систем на ЭВМ	+			+	+	3
5	Инструментальные средства моделирования	+				+	3

## 8 ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Образовательный процесс по дисциплине строится на основе комбинации следующих образовательных технологий.

Интегральную модель образовательного процесса по дисциплине формируют технологии методологического уровня: модульно-рейтинговое обучение, технология поэтапного формирования умственных действий, технология развивающего обучения, элементы технологии развития критического мышления.

Реализация данной модели предполагает использование следующих технологий стратегического уровня (задающих организационные формы взаимодействия субъектов образовательного процесса), осуществляемых с использованием определенных тактических процедур:

- лекционные (вводная лекция, информационная лекция, обзорная лекция, лекция-консультация, проблемная лекция);
- лабораторные (углубление знаний, полученных на теоретических занятиях, решение задач).

Рекомендуется использование информационных технологий при организации коммуникации со студентами для представления информации, использование мультимедиа-средств при проведении лекционных и практических занятий.

Удельный вес занятий, проводимых в интерактивной форме согласно требованиям федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению подготовки 231000.68 «Программная инженерия» (степень «магистр») должен составлять не менее 10 часов аудиторных занятий:

№ п/п	Раздел дисциплины	Форма (вид) образовательных технологий	Количество часов
1	Основные понятия теории моделирования систем	Мультимедиа лекции	2
2	Математические схемы моделирования систем	Мультимедиа лекции	4
3	Формализация и алгоритмизация процессов функционирования систем	Мультимедиа лекции	4
4	Статистическое моделирование систем на ЭВМ	Мультимедиа лекции	4
5	Инструментальные средства моделирования	Мультимедиа лекции	4
	Всего по разделам		18

## 9 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

9.1 Оценочные средства для текущего контроля успеваемости

9.1.1 Контрольные вопросы допуска к выполнению лабораторных работ

9.1.2 Отчеты о выполнении индивидуальных вариантов заданий лабораторных работ

9.2 Оценочные средства для промежуточной аттестации

Вопросы к экзамену:

- 9.2.1 Основные понятия моделирования
- 9.2.2 Особенности разработки систем и использования моделей
- 9.2.3 Принципы системного подхода в моделировании систем
- 9.2.4 Общая характеристика проблемы моделирования систем
- 9.2.5 Классификация видов моделирования систем
- 9.2.6 Математическое моделирование
- 9.2.7 Обеспечение и эффективность машинного моделирования
- 9.2.8 Основные подходы к построению моделей систем
- 9.2.9 Непрерывно-детерминированные модели (D-схемы)
- 9.2.10 Дискретно-детерминированные модели (F-схемы)
- 9.2.11 Дискретно-стохастические модели (P-схемы)
- 9.2.12 Непрерывно-стохастические модели (Q-схемы)
- 9.2.13 Сетевые модели (N-схемы)
- 9.2.14 Комбинированные модели (A-схемы)
- 9.2.15 Методика разработки и машинной реализации моделей систем
- 9.2.16 Построение концептуальной модели системы и ее формализация
- 9.2.17 Алгоритмизация моделей систем и их машинная реализация
- 9.2.18 Получение и интерпретация результатов моделирования систем
- 9.2.19 Общая характеристика метода статистического моделирования
- 9.2.20 Виды машинной генерации случайных последовательностей
- 9.2.21 Процедуры генерации последовательностей случайных чисел
- 9.2.22 Проверка качества последовательностей псевдослучайных чисел
- 9.2.23 Основы систематизации языков моделирования
- 9.2.24 Понятие пакета прикладных программ моделирования
- 9.2.25 Базы данных моделирования
- 9.2.26 Гибридные моделирующие комплексы
- 9.3 Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы
- 9.3.1 Карточки с заданиями и методическими указаниями по выполнению лабораторных работ
- 9.3.2 СТО СМК 4.2.3.05-2011. Стандарт ФГБОУВПО «АмГУ». Оформление выпускных квалификационных и курсовых работ (проектов), 2011. – 95 с.

## **10 УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

а) основная литература:

- 10.1 Советов, Б.Я. Моделирование систем: учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – 5-е изд., стер.. – М.: Высш. шк., 2007. – 344 с.
- 10.2 Моделирование систем: учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ С.И. Дворецкий [и др.]. – М.: Академия, 2009. – 317 с.
- 10.3 Советов, Б.Я. Моделирование систем: учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – М.: Юрайт, 2012. – (режим доступа «Университетская библиотека – online») [www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)

б) дополнительная литература:

- 10.4 Колесов, Ю.Б. Моделирование систем: практикум по компьютерному моделированию: учеб. пособие: рек. УМО/ Ю.Б. Колесов, Ю.В. Сениченков. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 338 с
- 10.5 Еремин, Е.Л. Моделирование динамических систем: (практикум на языке MATLAB): учеб. пособие: Е.Л. Еремин; АмГУ. Фак. мат. и информ. – Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2004. – 152 с.

10.6 Вдовин, В.М. Теория систем и системный анализ: учеб./ В.М. Вдовин, Л.Е. Суркова, В.А. Валентинов. – М.: Дашков и К, 2010. – 639 с.

10.7 Советов, Б.Я. Моделирование систем: практикум учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ/ Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – 4-е изд., стер.. – М.: Высш. шк., 2009. – 296 с. Библиогр.: с. 292

10.8 Юдович, В.И. Математические модели естественных наук: учеб. пособие/ В.И. Юдович. – СПб.: Лань, 2011. – 336 с.: рис.. – Библиогр.: с. 327

10.9 Советов, Б.Я. Моделирование систем: практикум учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ/ Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – М.: Юрайт, 2012. – (режим доступа «Университетская библиотека – online») [www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)

в) периодические издания:

10.10 Проблемы управления

10.11 Математическое моделирование

10.12 Информационные технологии и вычислительные системы

г) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

Свободно распространяемое программное обеспечение

№ п/п	Наименование ресурса	Характеристика
1	<a href="http://www.iqlib.ru">http://www.iqlib.ru</a>	Интернет библиотека образовательных изданий, в которой собраны электронные учебники, справочные и учебные пособия. Удобный поиск по ключевым словам, отдельным темам и отраслям знаний.
2	<a href="http://www.intuit.ru">http://www.intuit.ru</a>	Интернет-университет информационных технологий, в котором собраны электронные и видео-курсы по отраслям знаний
3	<a href="http://amursu.ru">http://amursu.ru</a>	Сайт АмГУ, Библиотека – электронная библиотека АмГУ
4	<a href="http://www.biblioclub.ru">http://www.biblioclub.ru</a>	Электронная библиотечная система «Университетская библиотека – online»: специализируется на учебных материалах для ВУЗов по научно-гуманитарной тематике, а так же содержит материалы по точным и естественным наукам

## 11 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

11.1 Лекционная аудитория, оборудованная мультимедийными средствами

11.2 Лаборатории, оборудованные рабочими местами пользователей ЭВМ

## 12 РЕЙТИНГОВАЯ ОЦЕНКА ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Семестровый модуль дисциплины						
№ п/п	Раздел дисциплины	Виды контроля	Сроки выполнения (недели)	Максимальное кол-во баллов	Посещение, активность на занятиях	Максимальное кол-во баллов за модуль



1	Основные понятия теории моделирования систем	ЛР № 1	1-2	5	1	6
2	Математические схемы моделирования систем	ЛР № 2	3-4	6	1	14
		ЛР № 3	5-6	6	1	
3	Формализация и алгоритмизация процессов функционирования систем	ЛР № 4	7-8	6	1	14
		ЛР № 5	9-10	6	1	
4	Статистическое моделирование систем на ЭВМ	ЛР № 6	11-12	6	1	14
		ЛР № 7	13-14	6	1	
5	Инструментальные средства моделирования	ЛР № 8	15-16	5	1	12
		ЛР № 9	17-18	5	1	
	Промежуточная аттестация	Экзамен	19-21	40	0	40
Итого						100

## 2. Конспект лекций

### Введение. Предмет моделирования систем

Моделирование является основным методом исследований во всех областях знаний и научно обоснованным методом оценок характеристик сложных систем, используемым для принятия решений в различных сферах инженерной деятельности. Существующие и проектируемые системы можно эффективно исследовать с помощью математических моделей, реализуемых на современных ЭВМ, которые в этом случае выступают в качестве инструмента экспериментатора с моделью системы.

#### *Основные понятия моделирования*

Все то, на что направлена человеческая деятельность, называется объектом. Выработка методологии, позволяющей исследовать состояния объекта или некоторой системы, заключается в упорядочении получения и обработки информации об объектах, которые существуют вне нашего сознания и взаимодействуют между собой и внешней средой.

Гипотезы и аналогии, отражающие реальный, объективно существующий мир, должны обладать наглядностью или сводиться к удобным для исследования логическим схемам; такие логические схемы, упрощающие рассуждения и логические построения или позволяющие проводить эксперименты, уточняющие природу явлений, называются моделями. Другими словами, модель – это заместитель реального объекта, обеспечивающий изучение некоторых свойств оригинала.

Замещение одного объекта другим с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала с помощью объекта-модели называется моделированием. Теория замещения оригиналов моделями и исследования их свойств называется теорией моделирования.

Обобщенно моделирование можно определить как метод опосредованного познания, при котором изучаемый объект-оригинал находится в некотором соответствии с другим объектом-моделью, причем модель способна в том или ином отношении замещать оригинал на определенных стадиях познавательного процесса. Стадии познания, на которых происходит такая замена, а также формы соответствия модели и оригинала могут быть различными:

1. моделирование как познавательный процесс, содержащий переработку информации, поступающей из внешней среды, о происходящих в ней явлениях, в результате чего в сознании появляются образы, соответствующие изучаемым объектам;
2. моделирование, заключающееся в построении некоторой системы-модели (второй системы), связанной определенными соотношениями подобия с системой-оригиналом (первой системы), причем в этом случае отображение одной системы в другую является средством выявления зависимостей между двумя системами, отраженными в соотношениях подобия, а не результатом непосредственного изучения поступающей информации.

### *Особенности разработки систем*

Одна из современных проблем НТП заключается в разработке и внедрении в практику проектирования новейших методов исследования характеристик сложных информационно-управляющих и информационно-вычислительных систем различных уровней. АСОИУ относятся к классу больших систем, этапы проектирования, внедрения, эксплуатации и эволюции которых в настоящее время не возможны без использования различных видов моделирования. Отметим, что на всех перечисленных этапах для сложных видов различных уровней необходимо учитывать следующие особенности:

- сложность структуры и стохастичность связей между ее элементами;
- неоднозначность алгоритмов поведения при различных условиях;
- большое количество параметров и переменных;
- неполноту и недетерминированность исходной информации;
- разнообразие и вероятностный характер воздействий внешней среды и т.д.

Независимо от разбиения конкретной сложной системы на подсистемы при проектировании каждой из них необходимо выполнить внешнее проектирование (макропроектирование) и внутреннее проектирование (микропроектирование). Т.к. на этих стадиях разработчик преследует разные цели, то и соответственно используемые методы и средства моделирования могут существенно отличаться.

На стадии макропроектирования должна быть разработана обобщенная модель процесса функционирования сложной системы, позволяющая получить ответы на вопросы об эффективности различных стратегий управления объектом при его взаимодействии с внешней средой. Стадию внешнего проектирования можно разбить на анализ и синтез. При анализе изучают объект управления, строят модель воздействий внешней среды, определяют критерии оценки эффективности, имеющиеся ресурсы, необходимые ограничения. Конечная цель стадии анализа – построение модели объекта управления для оценки его характеристик. При синтезе на этапе внешнего проектирования решаются задачи выбора стратегии управления на основе модели объекта моделирования, т.е. сложной системы.

На стадиях микропроектирования разрабатывают модели с целью создания эффективных подсистем. Причем используемые методы и средства моделирования зависят от того, какие конкретно обеспечивающие подсистемы разрабатываются: математические; технические; программные и т.д.

### *Особенности использования моделей*

Выбор метода моделирования и необходимая детализация моделей существенно зависят от этапа разработки сложной системы. На этапах обследования объекта управления, например промышленного предприятия, и разработки технического задания на проектирование автоматизированной системы управления, модели носят преимущественно описательный характер и преследуют цель наиболее полно представить в компактной форме необходимую информацию об объекте.

На этапах разработки технического и рабочего проектов систем, модели отдельных подсистем детализируются, и моделирование служит для решения конкретных задач проектирования, т.е. выбора оптимального по определенному критерию при заданных вариантах из множества допустимых. Поэтому в основном на этапах проектирования сложных систем используются модели для целей синтеза.

Целевое назначение моделирования на этапе внедрения и эксплуатации сложных систем – это проигрывание возможных ситуаций для принятия обоснованных и перспективных решений по управлению объектом. Моделирование (имитацию) также широко применяют при обучении и тренировке персонала АСУ, вычислительных комплексов и сетей, информационных систем в самых различных сферах. В этом случае моделирование носит характер деловых игр. Модель, реализуемая обычно на ЭВМ, воспроизводит поведение управляемого объекта и внешней среды, а люди в определенные моменты времени принимают решения по управлению объектом.

АСОИУ являются системами, которые развиваются по мере эволюции объекта управления, появления новых средств управления и т.д. поэтому при прогнозировании развития сложных систем роль моделирования оказывается очень высокой, т.к. является единственной возможностью ответа на многочисленные вопросы о путях дальнейшего эффективного развития системы и выбора из них наиболее оптимального.

### **Тема 1. Основные понятия теории моделирования систем**

Моделирование начинается с выработки предмета исследований – системы понятий, отражающих существенные для моделирования характеристики объекта. Отличительной особенностью моделирования сложных систем является его многофункциональность и многообразие способов использования, вследствие которых оно становится неотъемлемой частью всего жизненного цикла системы. Данное обстоятельство объясняется в первую очередь технологичностью моделей, реализованных на базе вычислительной техники, а именно, высокой скоростью получения результатов и их невысокой себестоимостью.

#### *Принципы системного подхода в моделировании систем*

В настоящее время при анализе и синтезе сложных, т.е. больших, составных систем, получил системный подход, который отличается от классического, индуктивного подхода. Отметим, что классический подход рассматривает систему путем перехода от частного к общему и конструирует систему путем слияния ее компонент, синтезируемых по отдельности. В свою очередь системный подход предполагает последовательный переход от общего к частному, причем исследуемый объект виртуально выделяется из окружающей его среды.

При проектировании и эксплуатации сложных систем приходится иметь дело с системами управления различной сложности, но обладающими одним общим свойством – стремлением достичь определенной цели. Введем некоторые определения: *система S* – целенаправленное множество взаимосвязан-

ных элементов любой природы; *внешняя среда*  $E$  – множество существующих вне системы элементов любой природы, оказывающих влияние на систему или находящихся под ее воздействием. В зависимости от цели исследования могут рассматриваться разные соотношения между самим объектом  $S$  и внешней средой  $E$ . Таким образом, в зависимости от уровня, объект исследования может выделяться по-разному, а также могут иметь место его различные схемы взаимодействия с внешней средой.

В рамках системного подхода, необходимо четко определить цель моделирования, т.к. в большинстве случаев оказывается невозможным полностью смоделировать реально функционирующую систему (систему-оригинал или первую систему), следовательно, создается конкретная модель (система-модель), соответствующая поставленной проблеме. Таким образом, применительно к вопросам моделирования цель возникает из постановки самой задачи моделирования. Кроме того, важным аспектом является определение структуры системы – совокупности причинно-следственных связей между ее элементами, отражающих их взаимодействие. Структура системы может изучаться извне с точки зрения состава отдельных подсистем и отношений между ними, а также изнутри, если анализируются свойства или функции системы.

В соответствии с выше изложенным, на текущий момент наметились два базовых подхода к исследованию взаимодействия структуры системы с ее свойствами – структурный и функциональный. При структурном подходе выявляются состав выделенных элементов системы  $S$  и связи между ними. Менее общим оказывается функциональное описание структуры системы, т.е. случай, когда рассматриваются ее отдельные функции, под которыми понимаются соответствующие свойства, приводящие к достижению цели. Отметим, что при наличии некоторого эталона сравнения можно ввести качественные и количественные характеристики систем. Проявление функций системы во времени  $S(t)$ , т.е. функционирование системы, означает переход системы из одного состояния в другое или движение в пространстве состояний  $Z$ .

Следует отметить, что создаваемая модель  $M$  некоторой системы с точки зрения системного подхода также является системой, т.е.  $S' = S'(M)$ , и может рассматриваться по отношению к внешней среде  $E$ . Наиболее просты по представлению модели, в которых сохраняется прямая аналогия явления. Применяются также модели, не содержащие прямой аналогии, но отражающие общие законы и закономерности поведения элементов системы.

Независимо от типа используемой модели при ее построении необходимо руководствоваться следующими принципами системного подхода:

1. пропорционального и последовательного продвижения по этапам и направления создания модели;
2. согласования информационных, ресурсных, надежность и других характеристик;
3. правильного соотношения отдельных уровней иерархии в системе моделирования;
4. целостности отдельных обособленных стадий построения модели.

Модель должна отвечать заданной цели ее создания, поэтому ее отдельные части должны компоноваться взаимно, исходя из единой системной задачи. Цель может быть сформулирована качественно, тогда она будет обладать большей содержательностью, а также длительное время отображать объективные возможности данной системы моделирования. При количественной формулировке цели возникает целевая функция, отображающая наиболее существенные факторы, влияющие на достижение цели.

*Общая характеристика проблемы моделирования систем*

Одновременно с развитием теоретических методов анализа и синтеза совершенствуются и методы экспериментального изучения реальных объектов, а также появляются новые средства исследования. Однако эксперимент был и остается одним из основных и существенных инструментов познания. При объяснении реальных процессов выдвигаются гипотезы, для подтверждения которых ставится эксперимент либо проводятся теоретические рассуждения, подтверждающие их правильность. В широком смысле под экспериментом можно понимать некоторую процедуру организации и наблюдения каких-то явлений, которые осуществляют в условиях, близких к естественным, или имитируют их. Различают пассивный эксперимент, когда исследователь наблюдает протекающий процесс, и активный, когда наблюдатель вмешивается и организует протекание процесса. В последнее время распространен активный эксперимент, поскольку именно на его основе удастся выявить критические ситуации, получить наиболее интересные закономерности, обеспечить возможность повторения эксперимента в различных точках и т.д.

В качестве объекта моделирования, как правило, выступают сложные организационно-технические системы, которые можно отнести к классу больших систем, для которых характерно следующее:

1. Цель функционирования, которая определяет степень направленности поведения модели. В этом случае модели могут быть разделены на одноцелевые, предназначенные для решения одной задачи, и многоцелевые, позволяющие разрешить или рассмотреть ряд сторон функционирования объекта.
2. Сложность, которую, учитывая, что модель является совокупностью отдельных элементов и связей между ними, можно оценить по общему числу элементов и их связей в системе. По разнообразию элементов можно выделить ряд уровней иерархии, отдельные функциональные подсистемы, ряд входов и выходов и т.д.
3. Целостность, указывающая на то, что создаваемая модель является одной цельной системой, т.е. включает в себя определенное количество элементов, находящихся в сложной взаимосвязи друг с другом.
4. Неопределенность, которая проявляется в системе – по состоянию системы, возможности достижения поставленной цели, методам решения задач, достоверности исходной информации и т.д.
5. Поведенческая страта, которая позволяет оценить эффективность достижения системой поставленной цели. В зависимости от наличия случайных воз-

действий можно различать детерминированные и стохастические системы, по своему поведению – непрерывные, дискретные и т.д.

6. Адаптивность, которая является свойством высокоорганизованной системы. Благодаря адаптивности удастся приспособиться к различным внешним возмущающим факторам в широком диапазоне изменения воздействий внешней среды.
7. Организационная структура системы моделирования, которая во многом зависит от сложности модели и степени совершенства средств моделирования. Одним из последних достижений в области моделирования можно считать возможность использования имитационных моделей для проведения машинных экспериментов.
8. Управляемость модели, вытекающая из необходимости обеспечивать управление со стороны экспериментаторов для получения возможности рассмотрения течения процесса в различных условиях, имитирующих реальные.
9. Возможность развития модели, которая, исходя из современного уровня науки и техники, позволяет создавать мощные системы моделирования для исследования многих сторон функционирования реального объекта.

Одним из наиболее важных аспектов построения систем моделирования является проблема цели. Любую модель строят в зависимости от цели, которую ставит перед ней исследователь, поэтому одна из основных проблем при моделировании – это проблема целевого назначения. Для упрощения модели обычно цель подразделяют на подцели, которые позволяют создать более эффективные виды моделей.

Для правильно построенной модели характерным является то, что она выявляет лишь те закономерности, которые действительно нужны исследователю, и не рассматриваем свойства системы, не осуществленные для проводимого исследования. Следует отметить, что оригинал и модель должны быть одновременно сходны по одним и тем же признакам и различны по другим, что позволяет выделить наиболее важные изучаемые свойства. В этом смысле модель выступает как некоторый заместитель оригинала, обеспечивающий фиксацию и изучение лишь некоторых свойств реального объекта.

Таким образом, характеризуя проблему моделирования в целом, необходимо указать, что от постановки задачи моделирования до интерпретации полученных результатов существует большая группа сложных научно-технических проблем, к основным из которых можно отнести следующие: идентификацию реальных объектов; выбор вида моделей; построение моделей и их машинную реализацию; взаимодействие исследователя с моделью в ходе машинного эксперимента; проверку правильности полученных в ходе моделирования результатов; выявление основных закономерностей, исследованных в процессе моделирования.

#### *Классификация видов моделирования систем*

В основе моделирования лежит теория подобия, которая утверждает, что абсолютное подобие может иметь место лишь при замене одного объекта дру-

гим точно таким же. При моделировании абсолютное подобие, как правило, не имеет места, т.к. используемая модель обычно должна отображать непосредственно исследуемую сторону функционирования объекта. В качестве одного из первых признаков классификации видов моделирования можно выбрать степень полноты модели, т.е. разделить их на полные, неполные и приближенные. В основе полного моделирования лежит полное подобие, которое проявляется как во времени, так и в пространстве. Для неполного моделирования характерно частичное подобие модели изучаемому объекту. В основе приближенного моделирования лежит приближенное подобие, при котором некоторые стороны функционирования реального объекта не моделируются вовсе.

В зависимости от характера изучаемых процессов все виды моделирования могут быть разделены на детерминированные и стохастические, статические и динамические, а также дискретные, непрерывные и дискретно-непрерывные. Детерминированное моделирование отображает процессы, в которых предполагается отсутствие всяких случайных воздействий. Стохастическое моделирование отображает вероятностные процессы и события, в этом случае анализируются ряд реализаций случайного процесса и оцениваются его средние характеристики, т.е. набор однородных реализаций. Статическое моделирование служит для описания поведения объекта в какой-либо момент времени, а динамическое моделирование отображает поведение объекта во времени. Дискретное моделирование служит для описания процессов, которые предполагаются дискретными, соответственно непрерывное моделирование позволяет отразить непрерывные процессы в системах, в свою очередь дискретно-непрерывное моделирование используется для случаев, когда задачей является выделение наличия как дискретных, так и непрерывных процессов.

В зависимости от формы представления объекта или системы можно выделить реальное и мысленное моделирование. При реальном моделировании (натурном или физическом) используется возможность исследования различных характеристик на реальном объекте целиком или же на его части. Данный вид моделирования является наиболее адекватным, но при этом его возможности ограничены особенностями исследуемых объектов. Натурным моделированием называется проведение исследования на реальном объекте с последующей обработкой результатов эксперимента на основе теории подобия, оно может заключать в научном или производственном экспериментах, а также представлять комплексные испытания. Другим видом реального моделирования является физическое моделирование, которое отличается от натурного тем, что исследование проводится на установках, которые сохраняют природу явлений и обладают физическим подобием. Физическое моделирование может протекать в реальном и псевдореальном масштабах времени, или без учета времени.

Мысленное моделирование, которое может являться наглядным, символическим или математическим, часто является единственным способом моделирования объектов, которые либо практически не реализуемы в заданном интервале времени, либо существуют вне условий, возможных для их физического создания. При наглядном моделировании (гипотетическом, аналоговом или



макетировании) на базе научных представлений о реальных объектах создаются различные модели, наглядно отражающие явления и процессы, протекающие в объекте или системе. В основу гипотетического моделирования исследователем закладывается некоторая гипотеза о закономерностях протекания процесса, которая отражает уровень знаний об объекте и базируется на причинно-следственных связях между входом и выходом изучаемого объекта. Аналоговое моделирование основывается на применении аналогий различных уровней, наивысшим уровнем является полная аналогия, имеющая место только для достаточно простых систем. Макетирование применяется в тех случаях, когда протекающие в реальном объекте процессы не поддаются физическому моделированию, либо может предшествовать проведению других видов моделирования, при этом в основе построения макетов также лежат аналогии, базирующиеся на причинно-следственных связях между явлениями и процессами в объекте. Символическое моделирование представляет собой искусственный процесс создания логического объекта, который замещает реальный и выражает основные свойства его отношений с помощью знаков или символов, и может быть языковым или знаковым. Если ввести некоторые условные обозначения отдельных понятий, т.е. знаки, то появляется возможность реализации знакового моделирования, при котором, используя операции объединения, пересечения и дополнения теории множеств, можно в отдельных символах дать описание какого-то реального объекта. В основе языкового моделирования лежит некоторый тезаурус, который базируется из фиксированного набора входящих понятий. Отметим, что между тезаурусом и обычным словарем имеются принципиальные отличия. Тезаурус – словарь, очищенный от неоднозначности, т.е. в нем каждому слову может соответствовать только единственное понятие.

#### *Математическое моделирование*

Под математическим моделированием будем понимать процесс установления соответствия заданному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью, а также исследование этой модели, позволяющие получить характеристики изучаемого реального объекта. Вид математического моделирования зависит как от природы реального объекта, так и задачи исследования, а также требуемой достоверности и точности решения этой задачи. Любая математическая модель описывает объект лишь с некоторой степенью приближения к действительности. Математическое моделирование, реализуемое в рамках исследования характеристик процесса функционирования систем можно разделить на аналитическое, имитационное и комбинированное.

Для аналитического моделирования характерно то, что процессы функционирования элементов системы записываются в виде некоторых функциональных соотношений (алгебраических, интегральных, дифференциальных, конечно-разностных и т.п.) или логических условий. Аналитическая модель может быть исследована следующими методами:

- а) аналитическим, когда целью является получение общего вида явных зависимостей для искомых характеристик;

- б) численным, если при отсутствии возможности получения общего решения, требуется получить числовые результаты для конкретных начальных данных;
- в) качественным, если при отсутствии возможности получения общего решения, требуется найти некоторые свойства решения, напр. оценить устойчивость решения.

При имитационном моделировании алгоритм, реализующий математическую модель, воспроизводит процесс функционирования соответствующей системы во времени, при этом имитируются элементарные явления, составляющие исследуемый процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени. Основным преимуществом данного вида по сравнению с аналитическим моделированием является возможность решения более сложных задач. Имитационные модели позволяют достаточно просто учитывать такие факторы, как наличие дискретных и непрерывных элементов, нелинейные характеристики элементов системы, многочисленные случайные воздействия и др. В настоящее время имитационное моделирование представляет наиболее эффективный метод исследования больших систем, а зачастую и единственно практически доступный метод получения информации о поведении системы на этапе ее проектирования.

Комбинированное (аналитико-имитационное) моделирование позволяет объединить достоинства двух выше названных видов математического моделирования. При построении комбинированных моделей проводится предварительная декомпозиция процесса функционирования объекта на составляющие подпроцессы, в последствии там, где возможно используются аналитические модели, а для остальных подпроцессов строятся имитационные модели. Такой подход позволяет охватить качественно новые классы систем, для исследования которых является невозможным применение аналитического или имитационного подхода в отдельности.

С точки зрения математического описания объекта, в зависимости от его характера, модели можно подразделить на аналоговые (непрерывные), цифровые (дискретные) и аналогово-цифровые (комбинированные). Под аналоговой моделью понимается модель, которая описывается уравнениями, связывающими непрерывные величины. Под цифровой понимают модель, которая описывается уравнениями, связывающими дискретные величины, представленные в цифровом виде. Под аналого-цифровой понимается модель, которая описывается уравнениями, связывающими непрерывные и дискретные величины.

#### *Обеспечение и эффективность машинного моделирования*

Практическая реализация имитационного моделирования требует серьезной подготовки, поэтому любая имитационная система характеризуется обязательным наличием различного рода видов обеспечения.

Математическое обеспечение включает в себя совокупность математических соотношений, описывающих поведение реального объекта, а также совокупность алгоритмов, обеспечивающих как подготовку, так и работу с моделью. Программное обеспечение по своему содержанию включает в себя комплекс программ: планирования вычислительного эксперимента, реализации

имитационной модели, практического проведения вычислительного эксперимента, обработки и интерпретации его результатов. Информационное обеспечение включает в себя средства и технологию организации и реорганизации базы данных моделирования, методы логической и физической организации массивов, формы документов, описывающих процесс моделирования и его результаты. Техническое обеспечение включает в себя, прежде всего средства вычислительной техники, связи и обмена информацией между оператором и сетью ЭВМ, ввода и вывода информации, управления проведением вычислительного эксперимента. Эргономическое обеспечение представляет собой совокупность научных или прикладных методик и методов, а также нормативно-технических и организационно-методических документов, используемых на всех этапах взаимодействия человека с инструментальными средствами.

При имитационном моделировании, так же как и при любом другом методе анализа и синтеза системы, весьма существенен вопрос его эффективности. Эффективность моделирования может оцениваться рядом критериев, в том числе точностью и достоверностью результатов моделирования, временем построения и работы с моделью, затратами машинных ресурсов (времени и памяти), стоимостью разработки и эксплуатации модели. Очевидно, наилучшей оценкой эффективности является сравнение получаемых результатов с данными реальных исследований, т.е. моделирование на реальном объекте при проведении физического или натурного экспериментов.

## Тема 2. Математическое моделирование.

### *Форма и принципы представления математических моделей*

Моделирование является основным методом исследований во всех областях знаний и научно обоснованным методом оценок характеристик сложных систем, используемым для принятия решений в различных сферах инженерной деятельности. Существующие и проектируемые системы можно эффективно исследовать с помощью математических моделей, реализуемых на современных ЭВМ, которые в этом случае выступают в качестве инструмента экспериментатора с моделью системы.

Термин «модель» происходит от латинского слова *modus* (копия, образ, очертание). Следовательно, моделирование – это процесс замещения некоторого объекта *A* другим объектом *B*. Замещаемый объект *A* называется оригиналом или объектом моделирования, а замещающий *B* – моделью. Другими словами, модель – это объект-заменитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых свойств оригинала.

Конечной целью любого моделирования являются получение, обработка, представление и использование информации об объектах, которые взаимодействуют между собой и внешней средой; при этом модель выступает как средство познания свойств и закономерности поведения объекта.

Обобщенно моделирование можно определить как метод опосредованного познания, при котором изучаемый объект-оригинал находится в некотором

соответствии с другим объектом-моделью, причем модель способна в том или ином отношении замещать оригинал на определенных стадиях познавательного процесса. Стадии познания, на которых происходит такая замена, а также формы соответствия модели и оригинала могут быть различными:

- с одной стороны, моделирование выступает как познавательный процесс, содержащий переработку информации, поступающей из внешней среды, о происходящих в ней явлениях, в результате чего в сознании появляются образы, соответствующие изучаемым объектам;

- с другой стороны, моделирование может заключаться в построении некоторой системы-модели (второй системы), связанной определенными соотношениями подобия с системой-оригиналом (первой системы), причем в этом случае отображение одной системы в другую является средством выявления зависимостей между двумя системами, отраженными в соотношениях подобия, а не результатом непосредственного изучения поступающей информации.

Моделирование широко используется в различных сферах человеческой деятельности, особенно в сферах проектирования и управления, где особенными являются процессы принятия эффективных решений на основе получаемой информации. Достаточно очевидно, что модель всегда строится с определенной целью, которая оказывает влияние на то, какие свойства объективного явления оказываются существенными, а какие – нет.

Любая модель представляет собой проекцию объективной реальности, формируемую под определенным углом зрения. Отметим, что в зависимости от целей проводимого моделирования может возникать ситуация получения ряда проекций объективной реальности, вступающих в противоречие. Данное обстоятельство характерно, как правило, для сложных систем, у которых каждая проекция выделяет их функциональные качества, существенные для определенной цели из множества других несущественных характеристик.

Теорией моделирования является раздел науки, изучающий способы исследования свойств объектов-оригиналов, на основе замещения их другими объектами-моделями. В основе теории моделирования лежит теория подобия. Необходимо отметить, что при любом виде моделирования абсолютное подобие не имеет места, а вытекающая ситуация лишь стремится к тому, чтобы модель достаточно хорошо отображала исследуемую сторону функционирования объекта. В свою очередь, абсолютное подобие может иметь место лишь при замене одного объекта другим точно таким же.

Все модели можно разделить на два основных класса:

1. вещественные,
2. идеальные.

Вещественные модели, как правило, подразделяются на три группы:

1. натурные,
2. физические,
3. математические.

Вещественные натурные модели – это реальные объекты, процессы и системы, над которыми выполняются эксперименты научные, технические и производственные.

Вещественные физические модели – это макеты, муляжи, воспроизводящие физические свойства оригиналов (кинематические, динамические, гидравлические, тепловые, электрические, световые модели).

Вещественные математические модели – это аналоговые, структурные, геометрические, графические, цифровые и кибернетические заместительные описания объектов-оригиналов.

В свою очередь, идеальные модели можно разделить на:

1. наглядные,
2. знаковые,
3. математические.

Идеальные наглядные модели – это схемы, карты, чертежи, графики, графы, аналоги, структурные и геометрические модели.

Идеальные знаковые модели – это символы, алфавит, языки программирования, упорядоченная запись, топологическая запись, сетевое представление.

Идеальные математические модели – это аналитические, функциональные, имитационные, комбинированные модели.

В приведенной классификации некоторые модели имеют двойное толкование (например, аналоговые). Все модели, кроме натуральных, можно объединить в один класс мысленных моделей, т.к. они являются продуктом абстрактного мышления человека.

Остановимся на одном из наиболее универсальных видов моделирования – математическом, ставящем в соответствие моделируемому физическому процессу систему математических соотношений, решение которой позволяет получить ответ на вопрос о поведении объекта без создания физической модели, часто оказывающейся дорогостоящей и неэффективной.

Математическое моделирование – это средство изучения реального объекта, процесса или системы путем их замены математической моделью, более удобной для экспериментального исследования с помощью ЭВМ.

Математическая модель является приближенным представлением реальных объектов, процессов или систем, выраженным в математических терминах и сохраняющим существенные черты оригинала. Математические модели в количественной форме, с помощью логико-математических конструкций, описывают основные свойства объекта, процесса или системы, его параметры, внутренние и внешние связи.

В общем случае математическая модель реального объекта, процесса или системы представляется в виде системы функционалов:  $\Phi_i(X, Y, Z, t) = 0$ , где  $X$  – вектор входных переменных,  $Y$  – вектор выходных переменных,  $Z$  – вектор внешних воздействий,  $t$  – координата времени.

Построение математической модели заключается в определении связей между теми или иными процессами и явлениями, создании математического аппарата, позволяющего выразить количественно и качественно связь между

теми или иными процессами и явлениями, между интересующими специалиста физическими величинами, и факторами, влияющими на конечный результат.

Обычно их оказывается настолько много, что ввести в модель всю их совокупность не удастся. При построении математической модели перед исследованием возникает задача выявить и исключить из рассмотрения факторы, несущественно влияющие на конечный результат (математическая модель обычно включает значительно меньшее число факторов, чем в реальной действительности). На основе данных эксперимента выдвигаются гипотезы о связи между величинами, выражающими конечный результат, и факторами, введенными в математическую модель. Такая связь зачастую выражается системами дифференциальных уравнений в частных производных (например, в задачах механики твердого тела, жидкости и газа, теории фильтрации, теплопроводности, теории электростатического и электродинамического полей).

Конечной целью этого этапа является формулирование математической задачи, решение которой с необходимой точностью выражает результаты, интересующие специалиста.

Форма и принципы представления математической модели зависит от многих факторов.

По принципам построения математические модели разделяют на:

1. аналитические;
2. имитационные.

В аналитических моделях процессы функционирования реальных объектов, процессов или систем записываются в виде явных функциональных зависимостей.

Аналитическая модель разделяется на типы в зависимости от общего вида рассматриваемой математической проблемы:

1. уравнения (алгебраические, трансцендентные, дифференциальные, интегральные),
2. аппроксимационные задачи (интерполяция, экстраполяция, численное интегрирование и дифференцирование),
3. задачи оптимизации,
4. стохастические проблемы.

Однако по мере усложнения объекта моделирования построение аналитической модели превращается в трудноразрешимую проблему. Тогда исследователь вынужден использовать имитационное моделирование.

В имитационном моделировании функционирование объектов, процессов или систем описывается набором алгоритмов. Алгоритмы имитируют реальные элементарные явления, составляющие процесс или систему с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени. Имитационное моделирование позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях процесса или системы в определенные моменты времени, однако прогнозирование поведения объектов, процессов или систем здесь затруднительно. Можно сказать, что имитационные модели - это проводимые на ЭВМ вычисли-

тельные эксперименты с математическими моделями, имитирующими поведение реальных объектов, процессов или систем.

В зависимости от характера исследуемых реальных процессов и систем математические модели могут быть детерминированными и стохастическими.

В детерминированных моделях предполагается отсутствие всяких случайных воздействий, их элементы (переменные, математические связи) являются достаточно точно установленными, а поведение системы вполне определенным. При их построении чаще всего используются алгебраические уравнения, интегральные уравнения, матричная алгебра. Стохастическая модель учитывает случайный характер процессов в исследуемых объектах и системах, который описывается методами теории вероятности и математической статистики.

По виду входной информации модели разделяются на непрерывные и дискретные. Если информация и параметры являются непрерывными, а математические связи устойчивы, то модель – непрерывная. Если же информация и параметры – дискретны, а связи неустойчивы, то модель – дискретная.

По поведению моделей во времени они разделяются на статические и динамические. Статические модели описывают поведение объекта, процесса или системы в какой-либо момент времени. Динамические модели отражают поведение объекта, процесса или системы во времени.

По степени соответствия между математической моделью и реальным объектом, процессом или системой математические модели разделяют на изоморфные (одинаковые по форме) и гомоморфные (разные по форме). Модель называется изоморфной, если между нею и реальным объектом, процессом или системой существует полное поэлементное соответствие. Гомоморфной – если существует соответствие лишь между наиболее значительными составными частями объекта и модели.

#### *Особенности построения математических моделей.*

Для использования ЭВМ при решении прикладных задач, прежде всего прикладная задача должна быть "переведена" на формальный математический язык, т.е. для реального объекта, процесса или системы должна быть построена его математическая модель. Математические модели в количественной форме, с помощью логико-математических конструкций, описывают основные свойства объекта, процесса или системы, его параметры, внутренние и внешние связи.

Для построения математической модели необходимо:

1. тщательно проанализировать реальный объект или процесс;
2. выделить его наиболее существенные черты и свойства;
3. определить переменные, т.е. параметры, значения которых влияют на основные черты и свойства объекта;
4. описать зависимость основных свойств объекта, процесса или системы от значения переменных с помощью логико-математических соотношений (уравнения, неравенства, логико-математические конструкции);
5. выделить внутренние связи объекта, процесса или системы с помощью ограничений, уравнений, равенств, неравенств, логико-математических конструкций;

6. определить внешние связи и описать их с помощью ограничений, уравнений, равенств, неравенств, логико-математических конструкций.

Математическое моделирование, кроме исследования объекта, процесса или системы и составления их математического описания, также включает:

1. построение алгоритма, моделирующего поведение объекта, процесса или системы;
2. проверка адекватности модели и объекта, процесса или системы на основе вычислительного и натурного эксперимента;
3. корректировка модели;
4. использование модели.

Математическое описание исследуемых процессов и систем зависит от:

1. природы реального процесса или системы и составляется на основе законов физики, химии, механики, термодинамики, гидродинамики, электротехники, теории пластичности, теории упругости и т.д.
2. требуемой достоверности и точности изучения и исследования реальных процессов и систем.

На этапе выбора математической модели устанавливаются: линейность и нелинейность объекта, процесса или системы, динамичность или статичность, стационарность или нестационарность, а также степень детерминированности исследуемого объекта или процесса. При математическом моделировании сознательно отвлекаются от конкретной физической природы объектов, процессов или систем и, в основном, сосредотачиваются на изучении количественных зависимостей между величинами, описывающими эти процессы.

Математическая модель никогда не бывает полностью тождественна рассматриваемому объекту, процессу или системе. Основанная на упрощении, идеализации она является приближенным описанием объекта. Поэтому результаты, полученные при анализе модели, носят приближенный характер. Их точность определяется степенью адекватности (соответствия) модели и объекта.

Построение математической модели обычно начинается с построения и анализа простейшей, наиболее грубой математической модели рассматриваемого объекта, процесса или системы. В дальнейшем, в случае необходимости, модель уточняется, делается ее соответствие объекту более полным.

Возьмем простой пример. Нужно определить площадь поверхности письменного стола. Обычно для этого измеряют его длину и ширину, а затем перемножают полученные числа. Такая элементарная процедура фактически обозначает следующее: реальный объект (поверхность стола) заменяется абстрактной математической моделью – прямоугольником. Прямоугольнику приписываются размеры, полученные в результате измерения длины и ширины поверхности стола, и площадь такого прямоугольника приближенно принимается за искомую площадь стола.

Однако модель прямоугольника для письменного стола – это простейшая, наиболее грубая модель. При более серьезном подходе к задаче прежде, чем воспользоваться для определения площади стола моделью прямоугольника, эту модель нужно проверить. Проверки можно осуществить следующим образом:

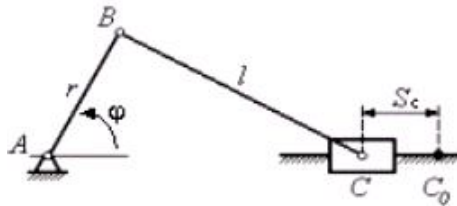


измерить длины противоположных сторон стола, а также длины его диагоналей и сравнить их между собой. Если, с требуемой степенью точности, длины противоположных сторон и длины диагоналей попарно равны между собой, то поверхность стола действительно можно рассматривать как прямоугольник. В противном случае модель прямоугольника придется отвергнуть и заменить моделью четырехугольника общего вида. При более высоком требовании к точности может возникнуть необходимость пойти в уточнении модели еще дальше, например, учесть закругления углов стола.

С помощью этого простого примера было показано, что математическая модель не определяется однозначно исследуемым объектом, процессом или системой. Для одного и того же стола мы можем принять либо модель прямоугольника, либо более сложную модель четырехугольника общего вида, либо четырехугольника с закругленными углами. Выбор той или иной модели определяется требованием точности. С повышением точности модель приходится усложнять, учитывая новые и новые особенности изучаемого объекта, процесса или системы.

Рассмотрим некоторые типичные примеры построения математических моделей детерминированных систем различной природы.

*Пример 1.* Кривошипно-шатунный механизм.



Для кинематического анализа особенностей работы данного механизма, прежде всего, необходимо построить его кинематическую модель. Для решения рассматриваемой задачи можно выполнить следующие действия:

1. Заменяем разбираемый механизм его кинематической схемой, где все звенья будут заменены жесткими связями.
2. На основании сформированной схемы выводится детерминированное математическое описание движения всех элементов механизма.
3. Дифференцируя полученное уравнение, можно получить выражения текущего смещения  $S_C$  ползуна  $C$ , а также его скорости  $V_C$  и ускорения  $A_C$ , представленные дифференциальные уравнения 1-го и 2-го порядка.

Таким образом, математическая модель работы кривошипно-шатунного механизма имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 S_C &= \gamma \left( 1 - \cos \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin^2 \varphi \right); \\
 V_C &= \frac{d\varphi}{dt} \gamma \left( \sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right); \\
 A_C &= \frac{d^2\varphi}{dt^2} \gamma (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi),
 \end{aligned}
 \tag{II-1.1}$$

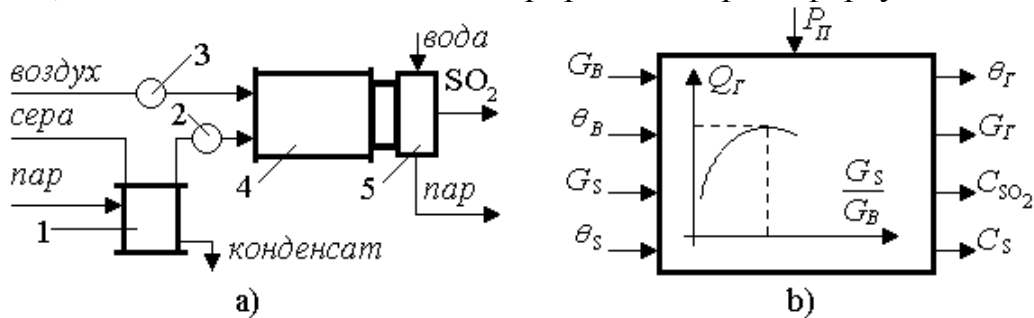
где  $\gamma$  – коэффициент сопротивления, определяемый трением деталей механизма;  $\varphi$  – угол поворота кривошипа;  $\lambda = r/l$  – конструкционный параметр КШМ;  $r$  – радиус вращения его кривошипа  $AB$ ;  $l$  – длина шатуна  $BC$ .

Отметим, что представленные трансцендентные уравнения движения плоского аксиального кривошипно-шатунного механизма, являются основанными на следующих упрощающих предположениях:

1. при построении математической модели нас не интересовали конструктивные формы и расположение масс, входящих в механизм тел, и все тела механизма мы заменили отрезками прямых. На самом деле, все звенья механизма имеют массу и довольно сложную форму. Например, шатун – это сложное сборное соединение, форма и размеры которого, конечно, будут влиять на движение механизма;
2. в рамках описания разбираемой функциональной подсистемы мы также не учитывали упругость входящих в механизм тел, т.е. все звенья рассматривали как абстрактные абсолютно жесткие тела. В действительности же, все входящие в механизм тела – упругие тела. Они при движении механизма будут как-то деформироваться, в них могут даже возникнуть упругие колебания. Это все, конечно, также будет влиять на движение механизма;
3. кроме того, мы не учитывали погрешность изготовления звеньев, зазоры в кинематических парах  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и т.д.

*Пример 2.* Печь сжигания (окисления) серы.

Рассмотрим технологическую схему процесса получения сернистого ангидрида, основанного на окислении природной серы в форсуночных печах.



На рис. а) показано, как предварительно расплавленная сера из сборника 1 насосом 2 подается на форсунки, расположенные в торцевой части печи 4. Сюда же подводится основное количество воздуха, необходимого для окисления серы. С помощью вентилятора 3 дополнительный воздух вводится через патрубок в стенке цилиндрической печи. Образовавшийся сернистый ангидрид поступает в котел-утилизатор 5, где теплота газа используется для получения перегретого пара. Разрежение в печи создается воздухоудувками, расположенными в конце технологической линии производства серной кислоты.

Если рассматривать печь в виде структурной схемы, представленной на рис. б), то в ней обычно выделяют:

- выходные координаты:  $\theta_T$  и  $G_T$  – температура и расход газа печи;  $C_{SO_2}$  –

концентрация  $\text{SO}_2$  в газе;  $C_S$  – концентрация серы в газе в результате проскока несгоревшей серы на выход печи;

- входные воздействия:  $\theta_B, G_B$  – температура и расход воздуха;  $\theta_S, G_S$  – температура и расход серы;
- возмущающее воздействие:  $P_{II}$  – разрежение в печи.

При построении математической модели в качестве выходной переменной примем температуру в зоне реакции и рассмотрим тепловой баланс печи сжигания серы.

В установившемся режиме, соответствующем равенству приходящей, уходящей и рассеиваемой теплоты в печи, справедливо равенство:

$$\sum_i Q_i = Q_S + Q_B + Q_P - Q_{\tilde{A}} - Q_{n\tilde{\delta}} = 0, \quad (\text{П-2.1})$$

где  $Q_S, Q_B$  – теплота, вносимая соответственно серой и воздухом;  $Q_P$  – теплота реакции;  $Q_{nom}$  – потери теплоты в окружающую среду.

Теплота, приносимая с поступающей средой, определяется соотношением

$$\begin{aligned} Q_S &= q_1 + q_2 + q_3, \\ q_1 &= G_S c_{S\delta\tilde{a}} \theta_{S1}, \quad q_2 = G_S c_{S\alpha} \theta_{S2}, \quad q_3 = G_S c_{S\tilde{i}\tilde{e}}, \\ \theta_{S1} &= \theta_{S\tilde{i}\tilde{e}} - \theta_{\text{SO}_2}, \quad \theta_{S2} = \theta_{S\delta\tilde{a}} - \theta_{S\tilde{i}\tilde{e}}, \end{aligned}$$

или

$$Q_S = G_S (c_{S\delta\tilde{a}} \theta_{S1} + c_{S\alpha} \theta_{S2} + c_{S\tilde{i}\tilde{e}}), \quad (\text{П-2.2})$$

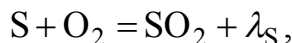
где  $q_1$  – теплота нагревания твердой серы от  $\theta_{\text{SO}_2}$  (начальная температура) до  $\theta_{Snl}$  (температура плавления);  $q_2$  – теплота нагревания жидкой серы от  $\theta_{Snl}$  до  $\theta_{Smv}$  (температура максимальной вязкости);  $q_3$  – теплота плавления серы;  $c_{Smv}$  и  $c_{Sж}$  – удельная теплоемкость твердой и жидкой серы;  $c_{Snl}$  – удельная теплота плавления серы.

Теплота, приносимая воздухом, поступающим в печь, описывается уравнением:

$$Q_B = G_B c_B \theta_B, \quad (\text{П-2.3})$$

где  $c_B$  – теплоемкость воздуха.

Поскольку реакция окисления серы экзотермическая, то количество теплоты, выделяемой за счет теплового эффекта реакции, определяется как:



где  $\lambda_S$  – количество тепла, выделяемого при сжигании одной массовой единицы серы (теплота сгорания серы). Если пренебречь незначительным проскоком серы на выход печи, то количество теплоты, выделяемой в ходе реакции окисления, определяется соотношением:

$$Q_P = G_S \lambda_S. \quad (\text{П-2.4})$$

Теплота, уносимая реакционным газом, определяется выражением:

$$Q_{\tilde{A}} = G_{\tilde{A}} c_{\tilde{A}} \theta_{\tilde{A}}. \quad (\text{П-2.5})$$

Будем полагать, что потери теплоты пропорциональны ее притоку

$$Q_{i\tilde{\delta}} = \beta_{i\tilde{\delta}} (Q_S + Q_B + Q_P), \quad (\text{П-2.6})$$

где  $\beta_{nom}$  – коэффициент тепловых потерь.

На основании выражений (П-2.1) – (П-2.6) имеем

$$(1 - \beta_{i\ddot{o}}) [G_S (c_{S\dot{o}\dot{a}} \theta_{S1} + c_{S\dot{a}\dot{e}} \theta_{S2} + c_{S\ddot{i}\ddot{e}} + \lambda_S) + G_B c_B \theta_B] - G_{\tilde{A}} c_{\tilde{A}} \theta_{\tilde{A}} = 0.$$

Представленное уравнение определяет взаимосвязь основных параметров процесса в установившемся режиме, при  $G_I = G_B$  его можно переписать в виде:

$$\theta_{\tilde{A}} = \frac{(1 - \beta_{i\ddot{o}})}{c_{\tilde{A}}} \left[ \frac{G_S}{G_B} (c_{S\dot{o}\dot{a}} \theta_{S1} + c_{S\dot{a}\dot{e}} \theta_{S2} + c_{S\ddot{i}\ddot{e}} + \lambda_S) + c_B \theta_B \right]. \quad (\text{П-2.7})$$

Таким образом, статическая характеристика печи сжигания серы по основному каналу имеет вид:

$$\theta_{\tilde{A}} = f \left( \frac{G_S}{G_B} \right), \quad (\text{П-2.8})$$

а ее номинальный участок является относительно линейным.

Приращение температуры в зоне реакции прямо пропорционально приращениям приходящей и уходящей теплоты и обратно пропорционально тепловой емкости реакционной зоны печи:

$$\frac{d\Delta\theta_{\tilde{A}}}{dt} = \frac{1}{A_{\tilde{I}}} (\Delta Q_S + \Delta Q_B + \Delta Q_P - \Delta Q_{\tilde{A}} - \Delta Q_{n\ddot{o}}), \quad (\text{П-2.9})$$

где  $A_{\tilde{I}}$  – тепловая емкость реакционной зоны печи.

Примем ряд следующих допущений: составы продуктов на входе в печь постоянны; температура уходящего реакционного газа равна температуре в зоне реакции; температура наружной стенки и теплоотдача от наружной стенки в окружающую среду постоянны, ввиду низкой теплопроводности печи; состав газа в печи равен составу реакционного газа, в соответствии с этим, согласно формулам (П-2.2) – (П-2.6), приращения  $\Delta Q_i$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta Q_S &= (c_{S\dot{o}\dot{a}} \theta_{S1} + c_{S\dot{a}\dot{e}} \theta_{S2}) \Delta G_S, \\ \Delta Q_B &= c_B \theta_B \Delta G_B = 0, \quad \Delta \theta_P = \lambda_S \Delta G_S, \\ \Delta Q_{\tilde{A}} &= c_{\tilde{A}} G_{\tilde{A}} \Delta \theta_{\tilde{A}}, \\ \Delta Q_{i\ddot{o}} &= \beta_{i\ddot{o}} (c_{S\dot{o}\dot{a}} \theta_{S1} + c_{S\dot{a}\dot{e}} \theta_{S2} + c_{S\ddot{i}\ddot{e}}) \Delta G_S. \end{aligned} \quad (\text{П-2.10})$$

Следовательно, учитывая соотношения (П-2.10), уравнение (П-2.9), рассматриваемое в его первой форме записи, можно представить как:

$$T \frac{dx}{dt} + x = Ku, \quad (\text{П-2.11})$$

$$x = \Delta \theta_{\tilde{A}}, \quad u = \Delta G_S,$$

$$T = \frac{A_{\tilde{I}}}{c_{\tilde{A}} G_{\tilde{A}}}, \quad K = \frac{(1 - \beta_{i\ddot{o}})}{c_{\tilde{A}} G_{\tilde{A}}} (c_{S\dot{o}\dot{a}} \theta_{S1} + c_{S\dot{a}\dot{e}} \theta_{S2} + c_{S\ddot{i}\ddot{e}} + \lambda_S). \quad (\text{П-2.12})$$

Отметим, что исполнительный механизм по технологическим соображениям расположен на некотором удалении от форсунок, подающих серу в печь. В связи с этим в основном канале управления "расход серы – температура газа" возникает так называемое транспортное запаздывание  $\tau$ , т.е. реальный процесс описывается уравнением:

$$T \frac{dx}{dt} + x = Ku(t - \tau), \quad (\text{П-2.13})$$

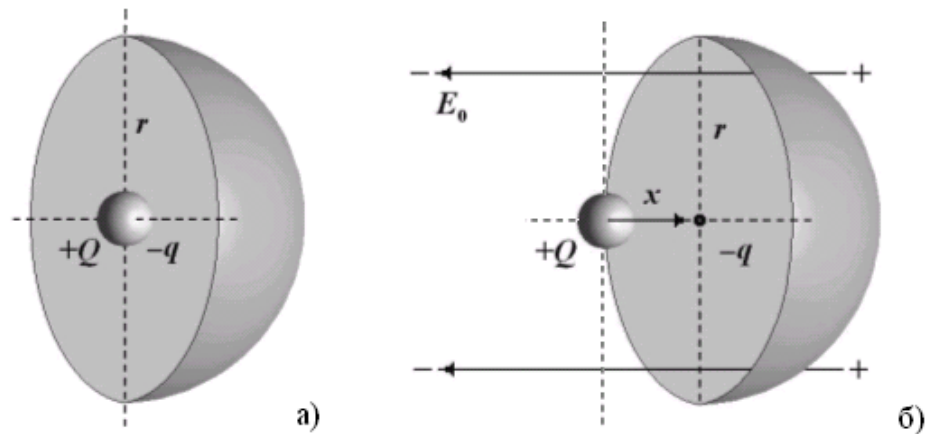
которому во второй форме записи соответствует уравнение вида

$$x(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-\tau s} u(s). \quad (\text{П-2.14})$$

*Пример 3.* Упругая электронная поляризация диэлектрика.

Описание происхождения разбираемых процессов может быть выполнено на базе общепринятой модели упруго связанных электронов, характерной для классической теории поляризации, в рамках которой любой ион или атом изначально рассматривается в качестве корпускулярной системы взаимодействующих заряженных частиц. При этом полагается, что отрицательный заряд и масса электронного облака являются равномерно распределенными внутри сферически симметричной области фиксированного радиуса  $r$ , а положительный заряд и масса атомного остатка сосредоточены в ее точечном центре.

Является очевидным, что в состоянии покоя геометрические центры зарядов электронного облака  $q$  и атомного ядра  $Q$  совпадают. В свою очередь, приложение к образцу внешнего электрического поля напряженностью  $E_0$  вызывает деформацию расположения рассматриваемых частиц относительно друг друга. Поскольку масса ядер в  $10^3$ - $10^5$  раз больше массы электронов, то разбираемое явление оказывается фактически обусловленным величиной смещения  $x$  электронного облака относительно неподвижного атомного остатка, направленного в сторону положительного заряда внешнего источника.



а) – исходное состояние; б) – поляризованное состояние.

Необходимо отметить, что наибольшее смещение испытывают электроны, находящиеся на внешних (оптических) оболочках частиц. Действительно, в силу максимальных радиусов своих орбиталей, а также существования эффекта экранизации атомных ядер внутренними электронными оболочками, они оказываются слабее всего связанными с атомными остатками. Следовательно, определяющий вклад в электронную поляризацию каждой отдельно взятой частицы вносят именно оптические электроны, а его величина значительно превышает суммарный дипольный момент, индуцированный вынужденной деформацией ее оставшихся (глубинных) электронных оболочек.

Рассмотрим типовую методику построения динамических моделей упругих поляризационных процессов, позволяющую использовать для описания взаимодействия диэлектрика со слабым переменным электромагнитным полем уравнение затухающих колебаний линейного гармонического осциллятора.

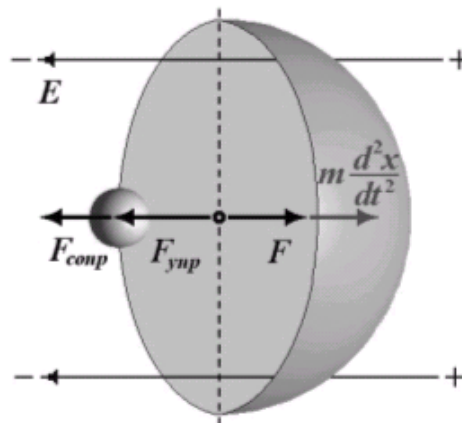
Как известно динамика практически любого физического процесса может быть достаточно адекватно отображена с помощью трех основных законов механики Ньютона. При этом для построения исходных моделей тех или иных поляризационных явлений обычно используются статические схемы их механизмов, на основании которых формируются уравнения балансов сил, действующих в изучаемой системе.

В общем случае, на поляризуемую, т.е. движущуюся с некоторым ускорением заряженную частицу массой  $m$ , влияют следующие силы.

Во-первых, электродвижущая сила  $F$ , определяемая напряженностью  $E$  эффективного поля.

Во-вторых, квазиупругая сила  $F_{упр}$ , обусловленная электрическим взаимодействием зарядов и стремящаяся вернуть частицу в ее исходное положение.

В-третьих, сила сопротивления  $F_{сопр}$ , вызванная внутренним трением.



Таким образом, является возможным сгруппировать следующее уравнение:

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(t) - F_{сопр}(t) - F_{упр}(t), \quad (\text{П-3.1})$$

где  $x(t)$  – временная функция смещения частицы.

Каждая из названных сил может быть представлена в дифференциальной форме записи, как:

$$F(t) = qE(t); F_{сопр}(t) = \frac{m}{\tau} \cdot \frac{dx(t)}{dt}; F_{упр}(t) = ax(t), \quad (\text{П-3.2})$$

где  $q$  – электрический заряд частицы;  $\tau$  – время релаксации разбираемого поляризационного процесса;  $a$  – коэффициент упругости соответствующей химической связи.

Подстановка выражений (П-3.2) в соотношение балансов сил (П-3.1), а также типовая перегруппировка их слагаемых и коэффициентов, выполненная для приведения итогового уравнения к более компактной форме, дает следующий результат:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \frac{a}{m} x(t) = \frac{q}{m} E(t). \quad (\text{П-3.3})$$

Принимая во внимание, что при исследовании поляризационных процессов, как правило, практический интерес представляет собой не прямое рассмотрение величин смещений заряженных частиц  $x(t)$ , а изучение непосредственной динамики изменения наведенных ими дипольных моментов  $\mu(t)$ , то, с помощью подстановки  $\mu = q \cdot x$ , выражение (П-3.3) приводится в его эквивалентный вид:

$$\frac{d^2 \mu(t)}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \cdot \frac{d\mu(t)}{dt} + \frac{a}{m} \mu(t) = \frac{q^2}{m} E(t). \quad (\text{П-3.4})$$

Если приложенное к образцу переменное электрическое поле имеет гармонический характер, напр., является синусоидальным, то коэффициенты в левой части уравнения (П-3.4) могут быть заменены типовыми динамическими параметрами гармонических колебаний с трением:

$$\frac{d^2 \mu(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{d\mu(t)}{dt} + \omega_0^2 \mu(t) = \frac{q^2}{m} E(t), \quad (\text{П-3.5})$$

где  $\beta$  и  $\omega_0$  – коэффициент затухания и частота собственных колебаний частицы.

Следовательно, базовое динамическое описание общей совокупности процессов упругой электронной поляризации частиц, необходимое в рамках изучения взаимодействия диэлектрического образца с приложенным к нему переменным электромагнитным полем малой амплитуды, может быть представлено системой уравнений:

$$\frac{d^2 \mu_k(t)}{dt^2} + 2\beta_k \frac{d\mu_k(t)}{dt} + \omega_{0k}^2 \mu_k(t) = \frac{q_k^2}{m_k} E(t), \quad k = \overline{1, K}, \quad (\text{П-3.6})$$

где  $q_k$  и  $m_k$  – заряды и массы конкретных электронных оболочек частицы;  $K$  – общее количество их разновидностей.

Последующее отображение уравнений (П-3.6) в комплексной области, проведенное, напр., методами технической кибернетики, разобранными в предыдущей главе, позволяет выразить частотные передаточные функции разбираемых процессов, эквивалентные комплексным поляризуемостям электронных оболочек частиц, следующего вида:

$$\alpha_k(j\omega) = \frac{q_k^2/m_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 + j2\beta_k\omega}, \quad k = \overline{1, K}. \quad (\text{П-3.7})$$

Разделив вещественные и мнимые составляющие приведенных комплексных выражений, можно сформировать вытекающие на их основании зависимости  $\alpha'_k(\omega)$  и  $\alpha''_k(\omega)$ :

$$\alpha'_k(\omega) = \frac{q_k^2}{m_k} \cdot \frac{\omega_{0k}^2 - \omega^2}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2 + (2\beta_k\omega)^2}, \quad k = \overline{1, K}; \quad (\text{П-3.8})$$

$$\alpha''_k(\omega) = \frac{q_k^2}{m_k} \cdot \frac{2\beta_k\omega}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2 + (2\beta_k\omega)^2}, \quad k = \overline{1, K}. \quad (\text{П-3.9})$$

Для практического моделирования найденных характеристик объективно необходимыми являются численные значения коэффициентов затухания и частот собственных колебаний электронных оболочек частиц.

При этом традиционный параметрический синтез решений текущих задач, непосредственно возникающих в рамках проводимых расчетов, может быть вполне обоснованно осуществлен с помощью практического применения следующих достаточно известных формул:

$$\omega_{0k}^2 = \frac{q_k Q_k}{4\pi\epsilon_0 m_k r_k^3}; \quad 2\beta_k = \frac{q_k^2 \omega_{0k}^2 \mu_0}{6\pi c m_k}, \quad k = \overline{1, K}, \quad (\text{П-3.10})$$

здесь  $q_k$  и  $m_k$  – заряды и массы конкретных оболочек, обусловленные количеством образующих их электронов;  $Q_k$  – эффективные заряды атомных остатков, действующие на соответствующие электронные оболочки;  $r_k$  – сферические радиусы оболочек;  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума.

Разберем последовательность построения единой динамической модели процесса общей поляризации кристаллического диэлектрического образца, а также строгий математический вывод выражений его поляризационных свойств, используя типовые вычислительные методики, характерные для теории управления. Во-первых, будем рассматривать диэлектрик в качестве совокупности взаимодействующих заряженных частиц, каждая из разновидностей которых обладает собственными параметрами, – например зарядом и массой. Кроме того, в качестве базового описания процесса электрической деформации отдельной частицы, происходящего под воздействием переменного (гармонического) электрического поля малой амплитуды, воспользуемся уравнением вынужденных гармонических колебаний с трением вида (П-3.5). Следовательно, общая поляризация образца может быть представлена системой неоднородных линейных дифференциальных уравнений (П-3.6). Во-вторых, для описания воздействия, вынуждающего колебания частиц, т.е. напряженности эффективного электрического поля, будем использовать базовую модель Лорентца типа:

$$E(t) = E_0(t) - \frac{P(t)}{\epsilon_0} + \frac{P(t)}{3\epsilon_0} + 0, \quad P(t) = \sum_{i=1}^K \mu_i(t) N_i. \quad (\text{П-3.11})$$

$P$  – поляризованность (вектор поляризации) единицы объема образца;  $\epsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума;  $N_i$  – объемные концентрации частиц.

Таким образом, учитывая динамическую форму представления функции напряженности эффективного поля, вытекающую на основании выражения (П-3.11), в системе уравнений вынужденных колебаний частиц, составляющих диэлектрик, предлагается сформировать следующую модель, описывающую общую динамику процессов его поляризации:

$$\frac{d^2 \mu_k(t)}{dt^2} + 2b_k \frac{d\mu_k(t)}{dt} + \omega_{0k}^2 \mu_k(t) = \frac{q_k^2}{m_k} E(t), \quad k = \overline{1, K}; \quad (\text{П-3.12})$$

$$E(t) = E_0(t) - \frac{2}{3\epsilon_0} \sum_{i=1}^K \mu_i(t) N_i.$$



Отметим, что с точки зрения технической кибернетики полученное выражение представляет собой модель некоторой замкнутой линейной системы управления с явно выраженной отрицательной обратной связью.

Учитывая выражение уравнений (П-3.12) в изображениях Лапласа, т.е.

$$\mu_k(s) = \frac{q_k^2/m_k}{s^2 + 2b_k s + \omega_{0k}^2} E(s), \quad k = \overline{1, K}; \quad (\text{П-3.13})$$

$$E(s) = E_0(s) - \frac{2}{3\varepsilon_0} \sum_{i=1}^K \mu_i(s) N_i,$$

или

$$\mu_k(s) = W_k(s) E(s), \quad k = \overline{1, K}; \quad (\text{П-3.14})$$

$$E(s) = E_0(s) - \frac{2}{3\varepsilon_0} E(s) \sum_{i=1}^K W_i(s) N_i,$$

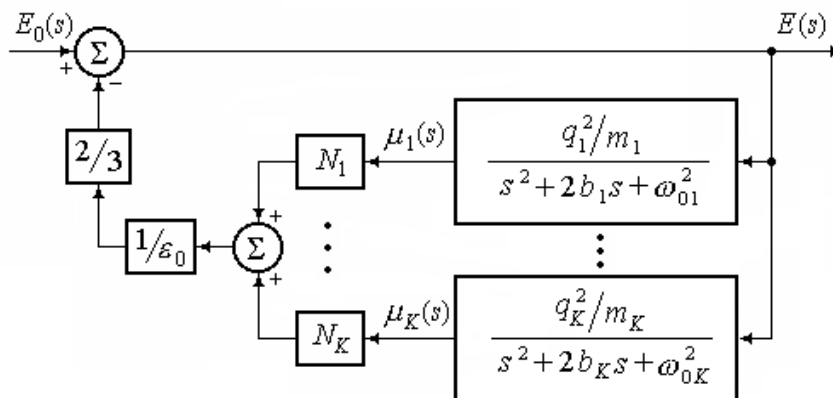
становится возможным получить явный вид передаточной функции по рассогласованию внешнего и эффективного полей:

$$E(s) = W_\varepsilon(s) E_0(s), \quad W_\varepsilon(s) = \frac{1}{1 + \frac{2}{3\varepsilon_0} \sum_{i=1}^K W_i(s) N_i}. \quad (\text{П-3.15})$$

Оценивая комплексный коэффициент усиления типа (П-3.15), необходимо отметить, что в традиционной физике диэлектриков он обычно не применяется, поскольку исторически используется обратное ему понятие диэлектрической проницаемости. Следовательно, принимая во внимание, что числитель частотной передаточной функции по рассогласованию  $W_\varepsilon(j\omega)$  равен единице, для описания  $\varepsilon(j\omega)$  предлагается использовать ее знаменатель, преобразованный с учетом замены обозначений  $W_k(j\omega) \rightarrow \alpha_k(j\omega)$  к следующему виду:

$$\varepsilon(j\omega) = 1 + \frac{2}{3\varepsilon_0} \sum_{i=1}^K \alpha_i(j\omega) N_i \quad (\text{П-3.16})$$

Кроме того, на основании (П-3.13), используя метод структурных схем, можно получить наглядное изображение разбираемой системы.



При этом становятся достаточно очевидными причинно-следственные отношения между входом и выходами ее отдельных элементов, соответственно –  $\mu_k(s)$  и  $E(s)$ , а также между общим входом системы –  $E_0(s)$  и результирующим выходом  $E(s)$ .

В заключение рассмотренной темы отметим, что чем выше оказываются требования, предъявляемые к точности результатов решения задачи, тем острее становится необходимость учета в синтезируемой математической модели всех особенностей изучаемого объекта, процесса или системы. При этом исследователю важно во время остановиться, так как сложная математическая модель может превратиться в трудно разрешимую задачу.

Очевидно, что наиболее просто строится модель, когда хорошо известны законы, определяющие поведение и свойства объекта, процесса или системы, и имеется большой практический опыт их применения.

Более сложная ситуация возникает тогда, когда наши знания об изучаемом объекте, процессе или системе недостаточны. В этом случае при построении математической модели приходится делать дополнительные предположения, которые носят характер гипотез, такая модель называется гипотетической. Выводы, полученные в результате исследования такой гипотетической модели, носят условный характер. Для проверки выводов необходимо сопоставить результаты исследования модели на ЭВМ с результатами натурного эксперимента. Таким образом, вопрос применимости некоторой математической модели к изучению рассматриваемого объекта, процесса или системы не является математическим вопросом и не может быть решен математическими методами. При этом основным критерием ее истинности является эксперимент, т.е. практика в самом широком смысле этого слова.

Построение математической модели в прикладных задачах – один из наиболее сложных и ответственных этапов работы. Опыт показывает, что во многих случаях правильно выбрать модель – значит, решить проблему более, чем наполовину. Главная трудность данного этапа состоит в том, что он требует соединения математических и специальных знаний. Очень важно, чтобы при решении прикладных задач математики обладали специальными знаниями об объекте, а их партнеры, специалисты, – определенной математической культурой, опытом исследования в своей области, знанием ЭВМ и программирования.

### Тема 3. Компьютерное имитационное моделирование

Компьютерное моделирование как новый метод научных исследований основывается на:

- построении математических моделей для описания изучаемых процессов;
- использовании новейших вычислительных машин, обладающих высоким быстродействием (миллионы операций в секунду) и способных вести диалог с человеком.

Суть компьютерного моделирования состоит в следующем: на основе математической модели с помощью ЭВМ проводится серия вычислительных экс-

периментов, т.е. исследуются свойства объектов или процессов, находятся их оптимальные параметры и режимы работы, уточняется модель. Например, располагая уравнением, описывающим протекание того или иного процесса, можно изменяя его коэффициенты, начальные и граничные условия, исследовать, как при этом будет вести себя объект. Имитационные модели – это проводимые на ЭВМ вычислительные эксперименты с математическими моделями, имитирующими поведение реальных объектов, процессов или систем.

Реальные процессы и системы можно исследовать с помощью двух типов математических моделей: аналитических и имитационных.

В аналитических моделях поведение реальных процессов и систем (РПС) задается в виде явных функциональных зависимостей (уравнений линейных или нелинейных, дифференциальных или интегральных, систем этих уравнений). Однако получить эти зависимости удается только для сравнительно простых РПС. Когда явления сложны и многообразны исследователю приходится идти на упрощенные представления сложных РПС. В результате аналитическая модель становится слишком грубым приближением к действительности. Если все же для сложных РПС удастся получить аналитические модели, то зачастую они превращаются в трудно разрешимую проблему. Поэтому исследователь вынужден часто использовать имитационное моделирование.

Имитационное моделирование представляет собой численный метод проведения на ЭВМ вычислительных экспериментов с математическими моделями, имитирующими поведение реальных объектов, процессов и систем во времени в течении заданного периода. При этом функционирование РПС разбивается на элементарные явления, подсистемы и модули. Функционирование этих элементарных явлений, подсистем и модулей описывается набором алгоритмов, которые имитируют элементарные явления с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени.

Имитационное моделирование – это совокупность методов алгоритмизации функционирования объектов исследований, программной реализации алгоритмических описаний, организации, планирования и выполнения на ЭВМ вычислительных экспериментов с математическими моделями, имитирующими функционирование РПС в течении заданного периода.

Под алгоритмизацией функционирования РПС понимается пооперационное описание работы всех ее функциональных подсистем отдельных модулей с уровнем детализации, соответствующем комплексу требований к модели.

"Имитационное моделирование" (ИМ) – это двойной термин. "Имитация" и "моделирование" – это синонимы. Фактически все области науки и техники являются моделями реальных процессов. Чтобы отличить математические модели друг от друга, исследователи стали давать им дополнительные названия. Термин "имитационное моделирование" означает, что мы имеем дело с такими математическими моделями, с помощью которых нельзя заранее вычислить или предсказать поведение системы, а для предсказания поведения системы необходим вычислительный эксперимент (имитация) на математической модели при заданных исходных данных.

Основное достоинство ИМ:

- возможность описания поведения компонент (элементов) процессов или систем на высоком уровне детализации;
- отсутствие ограничений между параметрами ИМ и состоянием внешней среды РПС;
- возможность исследования динамики взаимодействия компонент во времени и пространстве параметров системы.

Эти достоинства обеспечивают имитационному методу широкое распространение.

Рекомендуется использовать имитационное моделирование в следующих случаях.

1. Если не существует законченной постановки задачи исследования и идет процесс познания объекта моделирования. Имитационная модель служит средством изучения явления.
2. Если аналитические методы имеются, но математические процессы сложны и трудоемки, и имитационное моделирование дает более простой способ решения задачи.
3. Когда кроме оценки влияния параметров (переменных) процесса или системы желательно осуществить наблюдение за поведением компонент (элементов) процесса или системы (ПС) в течение определенного периода.
4. Когда имитационное моделирование оказывается единственным способом исследования сложной системы из-за невозможности наблюдения явлений в реальных условиях (реакции термоядерного синтеза, исследования космического пространства).
5. Когда необходимо контролировать протекание процессов или поведение систем путем замедления или ускорения явлений в ходе имитации.
6. При подготовке специалистов новой техники, когда на имитационных моделях обеспечивается возможность приобретения навыков в эксплуатации новой техники.
7. Когда изучаются новые ситуации в РПС. В этом случае имитация служит для проверки новых стратегий и правил проведения натуральных экспериментов.
8. Когда особое значение имеет последовательность событий в проектируемых ПС, а модель используется для предсказания узких мест в функционировании РПС.

Однако ИМ наряду с достоинствами имеет и недостатки. Разработка хорошей ИМ часто обходится дороже создания аналитической модели и требует больших временных затрат. Может оказаться, что ИМ неточна (что бывает часто), и мы не в состоянии измерить степень этой неточности.

Зачастую исследователи обращаются к ИМ, не представляя тех трудностей, с которыми они встретятся и совершают при этом ряд ошибок методологического характера. И, тем не менее, ИМ является одним из наиболее широко используемых методов при решении задач синтеза и анализа сложных процессов и систем.

Одним из видов имитационного моделирования является статистическое имитационное моделирование, позволяющее воспроизводить на ЭВМ функционирование сложных случайных процессов.

При исследовании сложных систем, подверженных случайным возмущениям используются вероятностные аналитические модели и вероятностные имитационные модели.

В вероятностных аналитических моделях влияние случайных факторов учитывается с помощью задания вероятностных характеристик случайных процессов (законы распределения вероятностей, спектральные плотности или корреляционные функции). При этом построение вероятностных аналитических моделей представляет собой сложную вычислительную задачу.

Поэтому вероятностное аналитическое моделирование используют для изучения сравнительно простых систем. Подмечено, что введение случайных возмущений в имитационные модели не вносит принципиальных усложнений, поэтому исследование сложных случайных процессов проводится в настоящее время, как правило, на имитационных моделях.

В вероятностном имитационном моделировании оперируют не с характеристиками случайных процессов, а с конкретными случайными числовыми значениями параметров ПС. При этом результаты, полученные при воспроизведении на имитационной модели рассматриваемого процесса, являются случайными реализациями.

Поэтому для нахождения объективных и устойчивых характеристик процесса требуется его многократное воспроизведение, с последующей статистической обработкой полученных данных. Именно поэтому исследование сложных процессов и систем, подверженных случайным возмущениям, с помощью имитационного моделирования принято называть статистическим моделированием.

#### **Тема 4. Статистическое моделирование систем на ЭВМ**

В практике моделирования систем информатики наиболее часто приходится иметь дело с объектами, которые в процессе своего функционирования содержат элементы стохастичности или подвергаются случайным воздействиям внешней среды. Поэтому основным методом получения результатов с помощью имитационных моделей таких стохастических систем является метод статистического моделирования на ЭВМ, использующий в качестве теоретической базы предельные теоремы теории вероятности.

Возможность получения пользователем модели результатов статистического моделирования сложных систем в условиях ограниченности машинных ресурсов существенно зависит от эффективности процедур генерации псевдослучайных последовательностей на ЭВМ, положенных в основу имитации воздействия на элементы моделируемой системы.

##### *Общая характеристика метода статистического моделирования*

Сущность метода статистического моделирования сводится к построению для процесса функционирования исследуемой системы некоторого модели-

рующего алгоритма, имитирующего поведение и взаимодействие элементов системы с учетом случайных входных воздействий и воздействий внешней среды, а также реализации этого алгоритма с использованием программно-технических средств ЭВМ. Различают две области применения данного метода:

- 1) для изучения стохастических систем;
- 2) для решения детерминированных задач.

Основной идеей решения детерминированных задач методом статистического моделирования, является замена детерминированной задачи эквивалентной схемой некоторой стохастической системы, выходные данные которой совпадают с результатом решения исходной задачи. Естественно, что при такой замене вместо точного решения имеет место, приближенное решение, погрешность которого уменьшается с увеличением числа испытаний (реализаций моделирующего алгоритма).

В результате статистического моделирования системы получается серия частных значений искомых величин или функций, статистическая обработка которых позволяет получить сведения о поведении реального объекта или процесса в произвольные моменты времени. Если количество реализаций достаточно велико, то полученные результаты моделирования системы приобретают статистическую устойчивость и с достаточной точностью могут быть приняты в качестве оценок искомых характеристик функционирования системы.

Теоретической основой метода статистического моделирования систем на ЭВМ являются предельные теоремы теории вероятностей:

- неравенство Чебышева; теорема Бернулли;
- теорема Чебышева; обобщенная теорема Чебышева;
- теорема Маркова;
- центральная предельная теорема;
- теорема Лапласа (частный случай центральной предельной теоремы).

Множества случайных явлений (событий, величин), подчиняются определенным закономерностям, позволяющим не только прогнозировать их поведение, но и количественно оценивать некоторые их средние характеристики, проявляющие определенную устойчивость. Характерные закономерности наблюдаются также в распределениях случайных величин, которые образуются при сложении множества воздействий. выражением этих закономерностей и устойчивости средних показателей являются так называемые предельные теоремы теории вероятностей, принципиальное значение которых состоит в том, что они гарантируют высокое качество статистических оценок при весьма большом числе испытаний. При использовании ЭВМ, практически приемлемые при статистическом моделировании количественные оценки характеристик систем часто могут быть получены уже при сравнительно небольших числах реализаций системы.

#### *Псевдослучайные последовательности и процедуры их машинной генерации*

При статистическом моделировании систем одним из основных вопросов является учет стохастических воздействий. Количество случайных чисел, используемых для получения статически устойчивой оценки процесса функцио-

нирования системы при реализации моделирующего алгоритма на ЭВМ, колеблется в достаточно широких пределах в зависимости от класса объекта моделирования, вида оцениваемых характеристик, необходимой точности и достоверности результатов моделирования. Для метода статистического моделирования на ЭВМ характерно, что большое число операций, а соответственно и большая доля машинного времени расходуется на действия со случайными числами. Кроме того, результаты статистического моделирования существенно зависят от качества исходных (базовых) последовательностей случайных чисел. Поэтому наличие простых и экономичных способов формирования последовательностей случайных чисел требуемого качества во многом определяет возможность практического использования машинного моделирования систем. На практике реализуются три основных способа генерации случайных чисел: аппаратный (физический); табличный (файловый) и алгоритмический (программный).

При аппаратном способе генерации случайные последовательности вырабатываются специальной электронной приставкой – генератором (датчиком) случайных чисел, – служащей в качестве одного из периферийных устройств ЭВМ. Таким образом, реализация этого способа не требует дополнительных вычислительных операций ЭВМ по выработке случайных чисел, а необходима только операция обращения к данному устройству.

В качестве физического эффекта, лежащего в основе таких генераторов случайных чисел, чаще всего используются шумы в электронных и полупроводниковых приборах, явления полураспада радиоактивных элементов и т.д.

Если случайные числа, оформленные в виде таблицы, помещать во внешнюю или оперативную память ЭВМ, предварительно сформировав из них соответствующий файл (массив), то такой способ получения случайных чисел будет называться табличным. Однако этот способ при моделировании систем на ЭВМ обычно оказывается рациональным использовать при сравнительно небольшом объеме таблицы и соответственно массива чисел, т.е. тогда, когда для его хранения можно применять оперативную память машины.

Хранение подобного файла во внешней памяти при частом обращении к нему в процессе статистического моделирования не рационально, т.к. оно вызывает увеличение затрат машинного времени при моделировании системы за счет необходимости обращения к внешнему накопителю. Возможны промежуточные способы организации файла, если он периодически переписывается по частям в оперативную память. Такой подход уменьшает время на обращение к внешней памяти, но сокращает объем оперативной памяти, который можно использовать для моделирования процесса функционирования системы.

Алгоритмический способ получения последовательности случайных чисел основан на их формировании непосредственно в ЭВМ с помощью специальных алгоритмов и реализующих их программ. При этом каждое случайное число вычисляется с помощью соответствующей процедуры по мере возникновения потребностей при моделировании системы на ЭВМ.

Для сравнения рассмотрим совместно достоинства и недостатки всех трех перечисленных способов генерации последовательностей случайных чисел.

Способ	Достоинства	Недостатки
Аппаратный	Запас чисел не ограничен. Расходуется минимум оперативной памяти ЭВМ. Не используется внешняя память ЭВМ.	Требуется периодическая проверка. Невозможно воспроизведение последовательностей. Используется специальное внешнее устройство. Необходимы меры по обеспечению стабильности.
Табличный	Требуется однократная проверка. Возможно воспроизведение последовательностей.	Запас чисел ограничен. Используется много места в оперативной памяти или необходимо время на обращение к внешней памяти.
Алгоритмический	Требуется однократная проверка. Возможно многократное воспроизведение последовательностей случайных чисел. Занимает мало место в памяти ЭВМ. Не используются внешние устройства.	Запас чисел последовательности ограничен ее периодом. Существенные затраты машинного времени.

Из таблицы видно, что для практического моделирования систем на универсальных ЭВМ наиболее рационален алгоритмический способ генерации последовательностей случайных чисел.

### **Тема 5.** Планирование машинных экспериментов с моделями систем

Имитационное моделирование является по своей сути машинным экспериментом с моделью исследуемой или проектируемой системы. План имитационного эксперимента на ЭВМ представляет собой метод получения с помощью эксперимента необходимой пользователю информации. Эффективность использования экспериментальных ресурсов существенным образом зависит от выбора плана эксперимента. Основная цель экспериментальных исследований с помощью имитационных моделей состоит в наиболее глубоком изучении поведения моделируемой системы. Для этого необходимо планировать и проектировать не только саму модель, но и процесс ее использования, т.е. проведение с ней экспериментов на ЭВМ. Весь комплекс вопросов планирования экспериментов с имитационными моделями для их успешного решения рационально разбить на стратегическое и тактическое планирование.

#### *Основы планирования экспериментов с моделями систем*

К настоящему времени в различных областях знаний сложилась теория планирования экспериментов, в которой разработаны достаточно мощные ма-



тематические методы, позволяющие повысить эффективность таких экспериментов. Однако перенос этих результатов на область машинных экспериментов с моделями может иметь место только с учетом специфики моделирования систем на ЭВМ. Несмотря на то, что цели экспериментального моделирования на ЭВМ и проведения натуральных экспериментов совпадают, между ними существуют различия, поэтому при их планировании наиболее значение имеет следующее: 1) простота повторения условий эксперимента на ЭВМ с моделью системы; 2) возможность управления экспериментом с моделью, включая его прерывание и возобновление; 3) легкость варьирования условий проведения эксперимента (воздействий внешней среды); 4) наличие корреляции между последовательностями точек в процессе моделирования; 5) трудности, связанные с определением времени моделирования.

В связи с тем, что математические методы планирования экспериментов основаны на кибернетическом представлении процесса проведения эксперимента, наиболее подходящей моделью последнего является абстрактная схема, называемая «черным ящиком». При таком кибернетическом подходе различают входные и выходные переменные  $x_k$  и  $y_i$ . В зависимости от того, какую роль играет каждая переменная в проводимом эксперименте, она может являться либо фактором, либо реакцией. Пусть, например, имеют место только две переменные  $x$  и  $y$ . Тогда если цель эксперимента – изучение влияния переменной  $x$  на переменную  $y$ , то  $x$  – фактор, а  $y$  – реакция. В экспериментах с машинными моделями фактор является экзогенной или управляемой (входной) переменной, а реакция – эндогенной (выходной) переменной.

При планировании экспериментов необходимо определить основные свойства факторов, которые могут быть управляемыми и неуправляемыми, наблюдаемыми и ненаблюдаемыми, количественными и качественными, фиксированными и случайными. Фактор называется управляемым, если его значения целенаправленно выбираются исследователем в процессе эксперимента. Фактор называется наблюдаемым, если его значения наблюдаются и регистрируются. Наблюдаемые неуправляемые факторы получили название сопутствующих. Фактор относится к изучаемым, если он включен в модель для изучения свойств системы, а не для вспомогательных целей, например для увеличения точности эксперимента. Фактор будет количественным, если его значения – числовые величины, влияющие на реакцию, в противном случае фактор называется качественным. Фактор называется фиксированным, если в эксперименте исследуются все интересующие экспериментатора значения фактора, если экспериментатор исследует только некоторую случайную выборку из совокупности интересующих его значений факторов, то фактор называется случайным.

#### *Стратегическое планирование машинных экспериментов*

Стратегическое планирование машинных экспериментов с моделями систем ставит своей целью решение задачи получения необходимой информации о системе с помощью модели, реализованной на ЭВМ, с учетом ограничений на ресурсы, имеющиеся в распоряжении экспериментатора. По своей сути стратегическое планирование аналогично внешнему проектированию при создании

системы, только здесь в качестве объекта выступает процесс моделирования системы.

При стратегическом планировании машинных экспериментов с моделями систем возникает целый ряд проблем, взаимно связанных как с особенностями функционирования моделируемого объекта (системы), так и с особенностями машинной реализации модели и обработки результатов эксперимента. В первую очередь к ним относятся проблемы: построения плана машинного эксперимента; наличия большого количества факторов; многокомпонентной функции реакции; стохастической сходимости результатов машинного эксперимента; ограниченности машинных ресурсов на проведение эксперимента.

Применяя системный подход к проблеме стратегического планирования машинных экспериментов, можно выделить следующие его этапы: 1) построение структурной модели; 2) построение функциональной модели. При этом структурная модель выбирается исходя из того, что должно быть сделано, а функциональная – из того, что может быть сделано.

Таким образом, использование при стратегическом планировании структурных и функциональных моделей плана машинных экспериментов позволяет решить вопрос о практической реализации модели на ЭВМ, учитывая допустимые затраты ресурсов на моделирование системы.

#### *Тактическое планирование машинных экспериментов*

Тактическое планирование машинных экспериментов с моделями систем представляет собой определение способа проведения каждой серии испытаний машинной модели, предусмотренных планом эксперимента. Для тактического планирования также имеется аналогия с внутренним проектированием системы, но опять в качестве объекта рассматривается процесс работы с моделью системы.

Тактическое планирование эксперимента с машинной моделью системы связано с вопросами эффективного использования выделенных для эксперимента машинных ресурсов и определение конкретных способов проведения испытаний модели, намеченных планом эксперимента, построенным при стратегическом планировании. Тактическое планирование, прежде всего, связано с решением следующих проблем: определения начальных условий и их влияния на достижение установившегося результата при моделировании; обеспечения точности и достоверности результатов моделирования; уменьшения дисперсии оценок характеристик процесса функционирования моделируемых систем; выбора правил автоматической остановки имитационного эксперимента.

Чем сложнее машинная модель, тем важнее этап тактического планирования, выполняемый непосредственно перед моделированием системы на ЭВМ. Процесс планирования машинных экспериментов с моделью системы итерационен, т.е. при уточнении некоторых свойств моделируемой системы этапы стратегического и тактического планирования могут чередоваться.

### 3. Лабораторные занятия

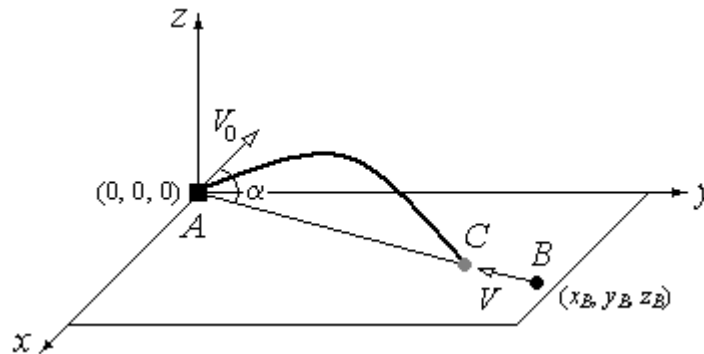
#### Лабораторная работа № 1

Тема: Имитация стрельбы по движущейся цели.

Цель: Реализовать компьютерную имитацию (двухмерный и трехмерный анимационные графики) поражения подвижной мишени снарядом, выпущенным из неподвижного орудия стрельбы.

#### Исходные данные

Орудийное устройство стрельбы и поражаемая им мишень находятся на идеально ровной горизонтальной поверхности. При этом орудие является неподвижно размещенным в точке  $A(0, 0, 0)$ , а цель движется прямолинейно в направлении орудия из точки  $B(x_B, y_B, z_B)$  по кратчайшему расстоянию с постоянной скоростью  $V$ . Начальная скорость снаряда  $V_0$  равна  $600 \text{ м/с}$ . Каких-либо внешних воздействий на снаряд, а также сил сопротивления его полету нет.



Базовая математическая модель положения снаряда, выпущенного из орудия, в любой текущий момент времени описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} s(t) = V_0 \cos \alpha \cdot t \\ h(t) = V_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $s(t)$  и  $h(t)$  – текущие пространственные координаты траектории полета снаряда, соответственно, по ее дальности и высоте;  $\alpha$  – угол возвышения орудийного ствола;  $g$  – ускорение свободного падения, равное  $9,807 \text{ м/с}^2$ .

Индивидуальные варианты заданий.

Первая цифра № варианта	Координаты цели $(x_B, y_B, z_B)$ , [м]	Первая цифра № варианта	Скорость цели $V$ , [м/с]
1	(10000, 10000, 0)	1	20
2	(-10000, 10000, 0)	2	25
3	(10000, -10000, 0)	3	30
4	(-10000, -10000, 0)	4	35

**Занятие 1.****Задание 1.1.**

Используя схему, а также формулы (1.1), сформируйте математическую модель, позволяющую рассчитывать значение угла бросания  $\alpha$ , обеспечивающего падение снаряда в изначально неподвижную цель. Создайте программу построения соответствующего графика.

*Практические рекомендации.* Для решения задачи следует использовать условие падения снаряда на цель, т.е.  $h(t) = 0$ .

**Задание 1.2.**

Используя сформированную математическую модель, разработайте программный код автоматизированного расчета угла возвышения орудийного ствола, обеспечивающего падение снаряда в движущуюся мишень.

*Практические рекомендации.* Необходимо учитывать, что расстояние  $AB$ , определяемое исходными координатами орудия и цели, представляет собой сумму отрезков  $AC$  и  $CB$ , величины которых могут быть описаны, соответственно, как  $s(t)$  и  $Vt$ , где  $t$  – время полета снаряда.

**Занятие 2.****Задание 2.1.**

Постройте двумерный график траекторий снаряда и цели.

*Практические рекомендации.* При определении границ изображаемой сцены необходимо принять меры для исключения ее геометрических искажений.

**Задание 2.2.**

Реализуйте программу, обеспечивающую генерацию двумерного анимационного графика, имитирующего рассматриваемую игровую ситуацию.

*Практические рекомендации.* Орудие и цель могут быть смоделированы символическими фигурами (с помощью опций оператора *plot*).

**Занятие 3.****Задание 3.1.**

Реализуйте программу, трехмерный график траекторий снаряда и цели.

*Практические рекомендации.* При определении границ изображаемой сцены необходимо принять меры для исключения ее геометрических искажений.

*Практические рекомендации.* Орудие и цель могут быть смоделированы пространственными геометрическими телами (сферами или цилиндрами) с помощью соответствующих операторов *MatLAB*.

**Задание 3.2.**

Реализуйте программу, обеспечивающую генерацию трехмерного анимационного графика, имитирующего рассматриваемую игровую ситуацию.

**Задание 3.3.**

Отредактируйте разработанный код, чтобы клип был наиболее наглядным.

*Практические рекомендации.* Поверхность, на которой располагаются орудие и цель, можно изобразить полигоном определенного цвета. На каждом кадре формируемого клипа целесообразно вывести траектории движения снаряда и мишени, отображаемые разноцветными линиями.

## Лабораторная работа № 2

Тема: Моделирование характеристик динамической системы  
с прямыми связями

### Вопросы текущего контроля знаний

1. Дайте определение передаточной функции.
2. Поясните назначение элементов структурных схем: функционального блока; узла; сумматора.
3. Поясните сущности вещественной и мнимой частотных характеристик системы.

### Теоретическая часть

Линейные системы – это такие системы, динамика которых моделируется линейными уравнениями. Это могут быть линейные алгебраические уравнения, линейные дифференциальные уравнения, линейные разностные уравнения или их комбинации. Моделирование линейных систем главным образом применяется по четырем причинам.

Во-первых, технологические системы и их модели часто бывают линейными, по крайней мере, в определенных границах.

Во-вторых, точные решения систем линейных уравнений могут быть легко найдены.

В-третьих, существуют высокоточные методы моделирования линейных систем.

В-четвертых, с помощью линейных систем можно оценить искажения в нелинейных системах.

Характерным свойством линейных динамических систем служит допустимость применения при их рассмотрении принципа суперпозиции, следствием которого является:

- отсутствие какого-либо возмущающего воздействия, влияющего на другие возмущающие воздействия;
- отсутствие пересекающихся реакций, вызванных различными возмущающими воздействиями;
- сочетание возмущающих воздействий может быть выявлено по сочетанию реакций определением каждого возмущающего воздействия от реакции и последующего объединения или наложения реакций системы на суммарное возмущающее воздействие.

Другим выводом, следующим из принципа суперпозиции, является, что если на линейную систему действуют  $n$  одинаковых возмущающих воздействий, то реакция от такого воздействия определится как  $n$  одинаковых реакций, каждая из которых, представляет собой реакцию системы на одно возмущающее воздействие.

Математические описания линейных динамических систем, часто встречающиеся при решении прикладных задач, связанных с моделированием физических процессов, могут быть эквивалентно представлены с использованием линейных интегральных преобразований Лапласа (т.е. преобразованы с помощью оператора Лапласа). Эти преобразования, в рамках применения элементарных функций и операций над ними, позволяют сводить довольно сложные для решения дифференциальные уравнения к решению алгебраических уравнений, представляющих собой изображения по Лапласу исходных выражений.

*Теорема 1.* Преобразование Лапласа для суммы двух функций равно сумме преобразований каждой из них:

$$L(f_1 + f_2) = L(f_1) + L(f_2).$$

*Теорема 2.* Преобразование Лапласа произведения функции на постоянную величину равно произведению этой постоянной на преобразование Лапласа самой функции:

$$L(cf) = cL(f).$$

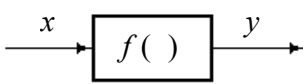
*Теорема 3.* Теорема дифференцирования. Если функция  $f(t)$  и ее производные могут быть преобразованы с помощью оператора Лапласа и если  $L[f(t)]=F(s)$ , то

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0).$$

Структурные схемы появились в качестве наглядных образов для представления проектируемых комплексных систем. Поскольку связь между их параметрами и динамикой зачастую может быть потеряна, если исследуемые процессы рассматриваются только на основании системы математических уравнений.

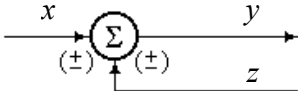
Альтернативой структурных схем служит изображение причинно-следственных отношений между входом и выходом каждого элемента системы, математические описания которых в изображениях Лапласа называют элементарными передаточными функциями.

Каждый блок структурной схемы имеет свою передаточную функцию. Главной характеристикой структурной схемы является сигнальный поток на входе и выходе, рассматриваемого в виде однонаправленного процесса, с преобразованием его внутри блока подобно тому, как оператор передаточной функции действует на входной сигнал для преобразования его в выходной. При этом используется ряд специализированных обозначений типовых блоков.

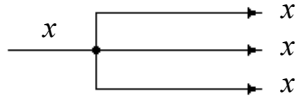


Обозначает преобразование

$$y = f(x)$$



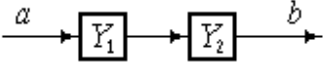
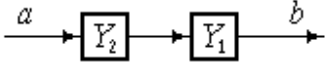
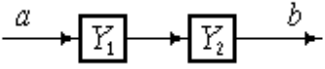
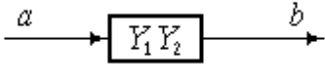
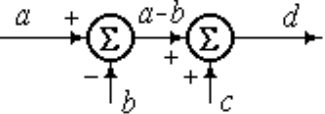
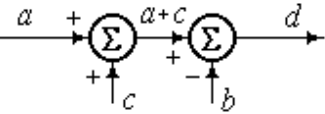
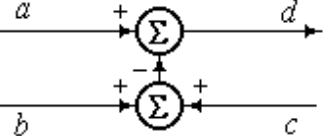
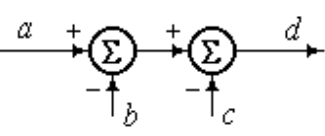
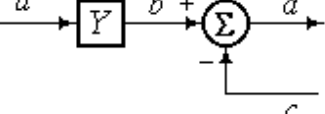
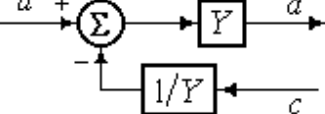
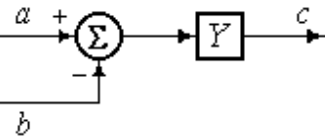
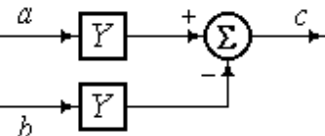
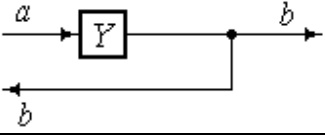
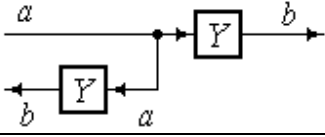
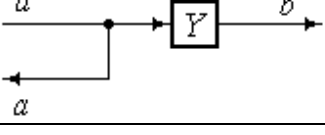
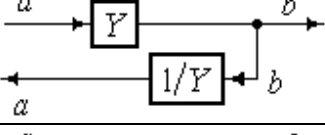
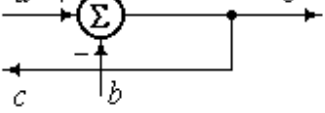
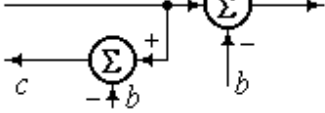
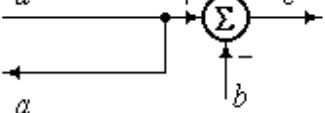
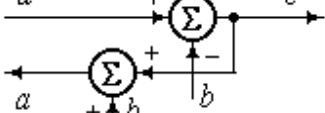
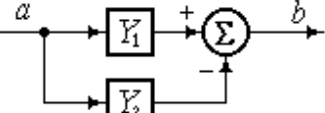
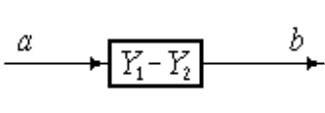
Обозначает  $z = \pm x \pm y$



Обозначает разветвление

Типовые схемы преобразования сигналов и их эквивалентных соотношений, применяемых в структурном анализе, представлены в таблице 1.

Таблица 1

Преобразования	Типовая схема	Эквивалентная схема	Уравнения
Перемена блоков			$b = aY_1Y_2$
Объединение каскадных блоков			$b = aY_1Y_2$
Взаимный обмен сумматоров			$d = a - b + c$
Перестроение сумматоров			$d = a - b - c$
Смещение блока за сумматор			$d = aY - c$
Смещение сумматора за блок			$c = (a - b)Y$
Смещение блока за узел			$b = aY$
Смещение узла за блок			$b = aY$ $a = b/Y = a$
Смещение сумматора за узел			$c = a - b$
Смещение узла за сумматор			$c = a - b$ $a = c + b$
Устранение прямой петли			$b = a(Y_1 - Y_2)$

## Занятие 1. Представление модели системы в форме записи через передаточные функции и в виде структурной схемы

### Исходные данные

Замкнутая линейная динамическая система, состоящая из двух параллельных колебательных звеньев, описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + 2b_1 \frac{dy_1(t)}{dt} + \omega_{01}^2 y_1(t) &= k_1 v(t); \\ \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + 2b_2 \frac{dy_2(t)}{dt} + \omega_{02}^2 y_2(t) &= k_2 v(t); \\ y(t) &= K \sum_{i=1}^2 y_i(t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $y_i(t)$  – выходные временные характеристики звеньев системы;  $b_i$  и  $\omega_{0i}$  – соответственно, коэффициенты затухания и частоты их собственных колебаний;  $k_i$  – некоторые параметры соответствующих звеньев;  $v(t)$  – функция внешнего воздействия;  $y(t)$  – результирующая выходная характеристика системы;  $K$  – коэффициент связи.

### Практическая часть

#### Задание 1.1

1. Представьте заданную модель в изображениях Лапласа для нулевых начальных условий.
2. Преобразуйте полученную систему уравнений в типовую форму записи через передаточные функции.
3. Найдите общую передаточную функцию рассматриваемой системы.
4. Выполнив замену  $s \rightarrow j\omega$ , получите частотные аналоги передаточных функций.

#### Задание 1.2

1. На основании результатов выполнения пункта 2 задания 1.1 постройте структурную схему исследуемой системы.
2. Устраните прямую петлю, имеющую место в построенной схеме.
3. Замените все типовые элементы полученной схемы одним блоком.
4. Сравните последнюю схему с общей передаточной функцией системы.

## Занятие 2. Моделирование временных характеристик системы

### Исходные данные

Математическая модель рассматриваемой системы (2.1), представленная в типовой форме записи через передаточные функции, имеет вид:



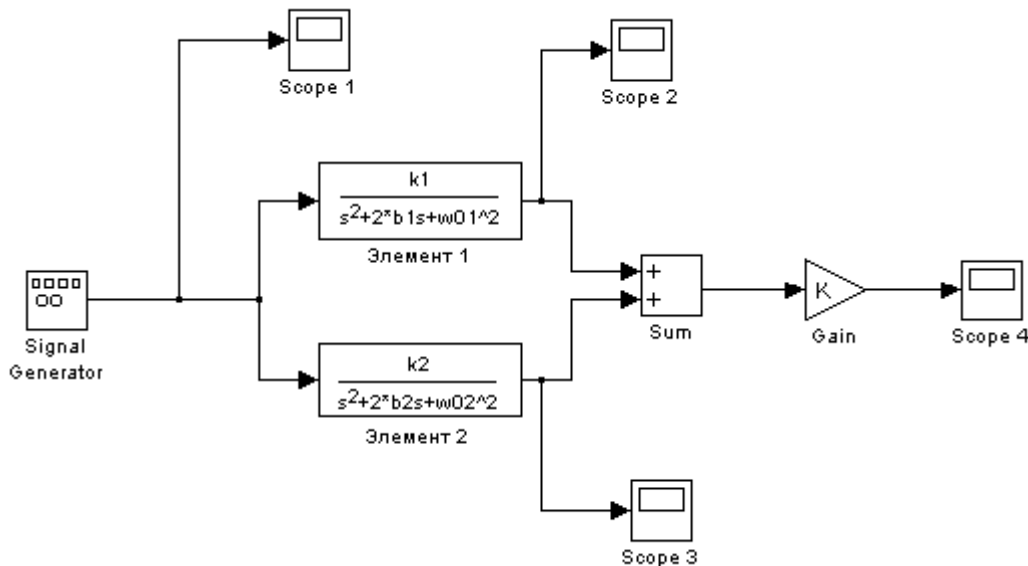
$$y_1(s) = W_1(s)v(s), \quad W_1(s) = \frac{k_1}{s^2 + 2b_1s + \omega_{01}^2};$$

$$y_2(s) = W_2(s)v(s), \quad W_2(s) = \frac{k_2}{s^2 + 2b_2s + \omega_{02}^2};$$
(2.2)

$$y(s) = v(s)K \sum_{i=1}^2 W_i(s),$$

где  $y_i(s)$  – изображения выходных характеристик звеньев системы;  $W_i(s)$  – передаточные функции соответствующих процессов;  $v(s)$  – изображение функции внешнего воздействия;  $b_i$  и  $\omega_{0i}$  – коэффициенты затухания и частоты собственных колебаний соответствующих звеньев;  $k_i$  – их некоторые параметры;  $y(s)$  – изображение выходной характеристики системы;  $K$  – коэффициент связи.

Таким образом, для моделирования временных характеристик рассматриваемой системы можно использовать ниже представленную *simulink*-схему.



### Практическая часть

#### Задание 2.1

Используя демонстрационные возможности *MatLAB*, просмотрите примеры построения и применения *simulink*-схем.

#### Задание 2.2

Создайте *simulink*-схему, согласно индивидуальным вариантам заданий (табл. 2), и получите временные характеристики:  $v(t)$  – входного синусоидального сигнала с единичной амплитудой и частотой 20 рад/с;  $y_i(t)$  – выходов элементов системы;  $y(t)$  – результирующего выхода системы в первые 10 с. после начала ее работы. Обратите внимание, что из соображений наглядности, все полученные графические окна вывода рассчитанных характеристик должны быть соразмерены по оси  $y$  с учетом оптимальности использования их пространства.

Таблица 2. Индивидуальные варианты заданий

№ п/п	$k_1$	$b_1$	$\omega_{01}$	$k_2$	$b_2$	$\omega_{02}$	$K$
1	100	1	10	150	2	5	0,4
2	110	2	11	140	3	6	0,5
3	120	3	12	130	4	7	0,6
4	130	4	13	120	5	8	0,7
5	140	5	14	110	6	9	0,8
6	150	6	15	100	7	8	0,9
7	160	7	16	110	8	7	1,0
8	170	6	17	120	9	6	1,1
9	180	5	18	130	8	5	1,2
10	190	4	19	140	7	4	1,3
11	200	3	20	150	6	3	1,4
12	210	2	21	160	5	2	1,5

### Занятие 3. Комплексное моделирование характеристик системы

#### Исходные данные

Математическая модель замкнутой линейной динамической системы, состоящей из двух параллельных колебательных звеньев, представленная в типовой форме записи через передаточные функции, имеет вид (2.2).

#### Практическая часть

##### Задание 3.1

На основании индивидуального варианта задания (табл. 2) сформируйте описания передаточных функций для каждого из отдельных звеньев системы в виде векторов коэффициентов полиномов, описывающих соответствующие числители  $num1$ ,  $num2$  и знаменатели  $den1$ ,  $den2$ . Используя функцию  $parallel(num1, den1, num2, den2)$  получите результирующую передаточную функцию исследуемой системы.

##### Задание 3.2

С помощью функции  $lsim(num, den, v, T)$  рассчитайте временную характеристику результирующего выхода системы в первые 10 с. после начала ее работы для входного сигнала синусоидального вида с единичной амплитудой и частотой 20 рад/с.

##### Задание 3.3

Используя функцию  $nyquist(num, den, w)$ , рассчитайте вещественную и мнимую частотные характеристики системы для диапазона  $w$  от 0 до 50 рад/с.

##### Задание 3.4

Осуществите совместный вывод следующих графиков: временной характеристики внешнего воздействия; временной характеристики результирующего выходного сигнала; вещественной и мнимой частотных характеристик системы.

### Лабораторная работа № 3

Тема: Моделирование характеристик динамической системы с обратной связью

Вопросы текущего контроля знаний

1. Раскройте понятие обратной связи.
2. Поясните сущность амплитудной и фазовой частотных характеристик.

#### Теоретическая часть

Передаточной функцией по рассогласованию, или общей передаточной функцией, называется функциональная зависимость  $W_\varepsilon(s)$ , выражающая связь между изображениями по Лапласу общего входа и результирующего выхода исследуемой линейной динамической системы.

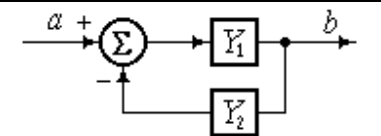
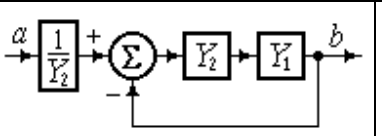
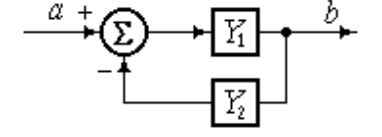
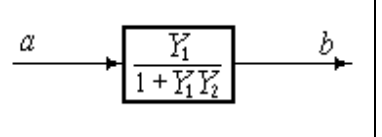
В случае рассмотрения систем, обладающих прямыми связями, ее нахождение достаточно очевидно. Для систем, структура которых обладает более сложными видами связей, при решении рассматриваемой задачи, как правило, используются либо способ введения промежуточной переменной, или же метод последовательных преобразований структурной схемы системы.

Первый подход заключается в замене изображений выходов  $y_i(s)$  на их эквивалентные выражения через соответствующие передаточные функции  $W_i(s) \cdot v(s)$ , после чего явный вид  $W_i(s)$  находится путем алгебраических преобразований полученной системы уравнений. В случае поиска передаточной функции по рассогласованию системы с обратной связью реализуется замена:

$$x(s) = W_\varepsilon(s) \cdot v(s).$$

В рамках второго подхода применяются типовые схемы преобразования сигналов и их эквивалентных соотношений, приведенные в табл. 3.

Таблица 3

Преобразования	Типовая схема	Эквивалентная схема	Уравнения
Удаление блока из контура обратной связи			$b = a \frac{Y_1}{1 + Y_1 Y_2}$
Устранение контура обратной связи			$b = a \frac{Y_1}{1 + Y_1 Y_2}$

## Занятие 1. Представление модели системы в форме записи через передаточные функции и в виде структурной схемы

### Исходные данные

Замкнутая линейная динамическая система с отрицательной обратной связью, состоящая из двух параллельных колебательных звеньев, описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + 2b_1 \frac{dy_1(t)}{dt} + \omega_{01}^2 y_1(t) &= k_1 x(t); \\ \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + 2b_2 \frac{dy_2(t)}{dt} + \omega_{02}^2 y_2(t) &= k_2 x(t); \\ x(t) &= v(t) - K \sum_{i=1}^2 y_i(t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $y_i(t)$  – выходные временные характеристики звеньев системы;  $b_i$  и  $\omega_{0i}$  – соответственно, коэффициенты затухания и частоты их собственных колебаний;  $k_i$  – некоторые параметры звеньев;  $x(t)$  – совокупность входных воздействий;  $v(t)$  – функция внешнего воздействия;  $K$  – коэффициент обратной связи.

### Практическая часть

#### Задание 1.1

1. Представьте модель (2.1) в изображениях Лапласа для нулевых начальных условий.
2. Преобразуйте полученную систему уравнений в типовую форму записи через передаточные функции.
3. С помощью ввода промежуточной переменной найдите передаточную функцию по рассогласованию для рассматриваемой системы.

#### Задание 1.2

1. На основании результатов выполнения пункта 2 задания 1.1 постройте структурную схему рассматриваемой системы.
2. Устраните прямую петлю, имеющую место в обратном канале схемы.
3. Замените элементы обратного канала одним эквивалентным блоком.
4. Устраните контур обратной связи.
5. Сравните последнюю схему с общей передаточной функцией системы.

## Занятие 2. Моделирование временных характеристик системы

### Исходные данные

Математическая модель рассматриваемой системы (3.1), представленная в типовой форме записи через передаточные функции, имеет вид:

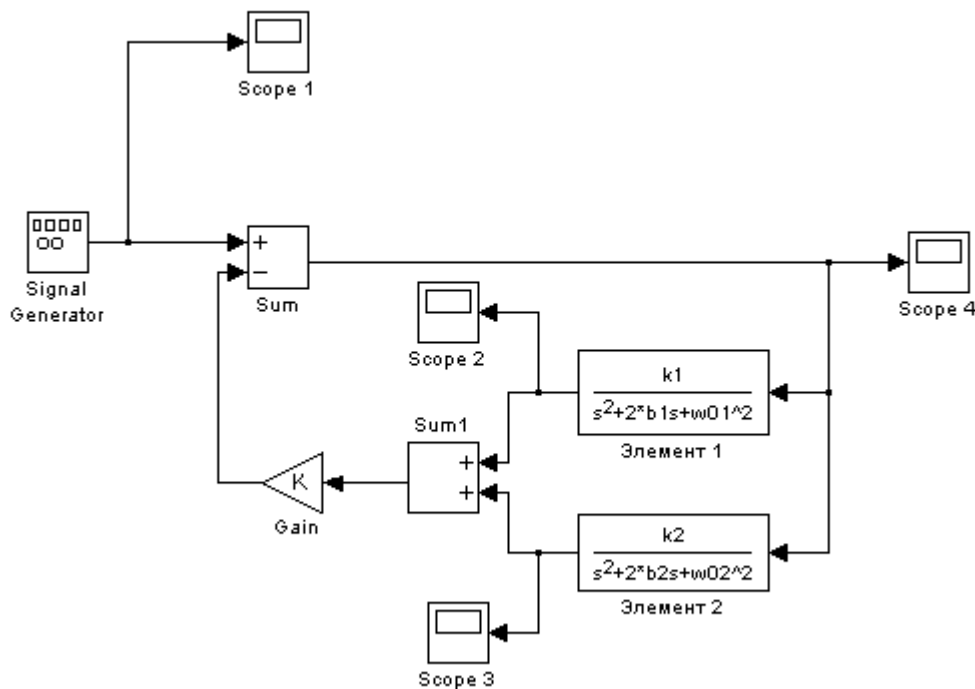
$$y_1(s) = W_1(s)x(s), \quad W_1(s) = \frac{k_1}{s^2 + 2b_1s + \omega_{01}^2};$$

$$y_2(s) = W_2(s)x(s), \quad W_2(s) = \frac{k_2}{s^2 + 2b_2s + \omega_{02}^2};$$
(3.2)

$$x(s) = W_\varepsilon(s)v(s), \quad W_\varepsilon(s) = \frac{1}{1 + K \sum_{i=1}^2 W_i(s)},$$

где  $y_i(s)$  – изображения выходов звеньев системы;  $W_i(s)$  – передаточные функции соответствующих процессов;  $v(s)$  – изображение функции внешнего воздействия;  $b_i$  и  $\omega_{0i}$  – коэффициенты затухания и частоты собственных колебаний соответствующих звеньев;  $k_i$  – их некоторые параметры;  $x(s)$  – изображение выходной характеристики системы;  $K$  – коэффициент обратной связи;  $W_\varepsilon(s)$  – передаточная функция по рассогласованию.

Таким образом, для моделирования временных характеристик рассматриваемой системы можно использовать *simulink*-схему, представленную ниже.



## Практическая часть

### Задание 2.1

Создайте *simulink*-схему, согласно индивидуальным вариантам заданий (табл. 2). Получите временные характеристики:  $v(t)$  – входного синусоидального сигнала с единичной амплитудой и частотой 50 рад/с;  $y_i(t)$  – выходов элементов системы;  $y(t)$  – результирующего выхода системы в первые 10 с. после начала ее работы. Приведите сетки графических окон к единому виду.

### Задание 2.2

Получите рассматриваемые временные характеристики для входного синусоидального сигнала с единичной амплитудой и частотой 5 рад/с. Поясните качественное различие амплитуд результирующих выходов системы в первом и втором случаях.

## Занятие 3. Комплексное моделирование характеристик системы

### Практическая часть

#### Задание 3.1

На основании индивидуального варианта задания (табл. 2) сформируйте описания передаточных функций для каждого из отдельных звеньев системы в виде векторов коэффициентов полиномов, описывающих соответствующие числители  $num1$ ,  $num2$  и знаменатели  $den1$ ,  $den2$ . Используя функцию *parallel(num1, den1, num2, den2)* получите передаточную функцию для обратного канала исследуемой системы.

#### Задание 3.2

С помощью функции *feedback(num\_ПК, den\_ПК, num\_ОК, den\_ОК, ±K\_ОС)* сформируйте передаточную функцию по рассогласованию входа и результирующего выхода моделируемой системы.

#### Задание 3.3

Используя функцию *bode(num, den, w)*, рассчитайте амплитудную и фазовую частотные характеристики системы для диапазона  $w$  от 0 до 50 рад/с.

#### Задание 3.4

С помощью функции *lsim(num, den, v, T)* рассчитайте временную характеристику результирующего выхода системы в первые 10 с. после начала ее работы для входного синусоидального сигнала с единичной амплитудой и частотой 20 рад/с.

#### Задание 3.5

На основании векторов  $v(t)$  и  $x(t)$ , рассчитайте вектор величины рассогласования входа и выхода моделируемой системы  $\varepsilon(t) = x(t)/v(t)$ . Найдите значение амплитудной частотной характеристики –  $A$  для заданной частоты входного сигнала.

#### Задание 3.6

Осуществите совместный вывод следующих графиков: АЧХ и ФЧХ системы; характеристики  $\varepsilon(t)$  с наложением на нее прямой линии  $y = A$ . Поясните результаты моделирования.

## Лабораторная работа № 4

Тема: Моделирование характеристик динамической системы с перекрестными обратными связями

Вопросы текущего контроля знаний

1. Раскройте понятие перекрестной связи.
2. Поясните сущность метода нахождения явного вида передаточной функции способом введения промежуточной переменной.

Теоретическая часть

Системы с перекрестными обратными связями представляют собой класс систем, наиболее сложных с точки зрения преобразования их математических моделей. Для нахождения явного вида передаточных функций, описывающих динамику звеньев подобных систем необходимо представить уравнения исследуемой системы в первой стандартной форме записи. После выполнения прямого интегрального преобразования Лапласа для полученных уравнений появляется возможность путем обычных алгебраических преобразований вывести искомые соотношения с помощью ввода промежуточных переменных.

**Занятие 1.** Представление модели системы в форме записи через передаточные функции и в виде структурной схемы

Исходные данные

Замкнутая линейная динамическая система с отрицательной обратной связью, состоящая из двух параллельных колебательных звеньев, описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + \omega_{01}^2 [y_1(t) + y_2(t)] &= k_1 v(t); \\ \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + \omega_{02}^2 [y_2(t) + y_1(t)] &= k_2 v(t); \\ y(t) &= \sum_{i=1}^2 y_i(t), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $y_i(t)$  – выходные временные характеристики звеньев системы;  $\omega_{0i}$  – частоты их собственных колебаний;  $k_i$  – некоторые параметры звеньев;  $v(t)$  – функция внешнего воздействия;  $y(t)$  – результирующий выход системы.

Практическая часть

**Задание 1.1**

1. Представьте заданную модель в первой стандартной форме записи и выполните для нее прямое интегральное преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях.

2. Приведите преобразованную систему уравнений ко второй стандартной форме записи, выделив явно изображение внешнего воздействия.
3. С помощью ввода соответствующих промежуточных переменных найдите явный вид передаточных функций для каждого из звеньев.

### Задание 1.2

На основании результатов выполнения пункта 2 задания 1.1 постройте структурную схему рассматриваемой системы.

## Занятие 2. Моделирование временных характеристик системы

### Исходные данные

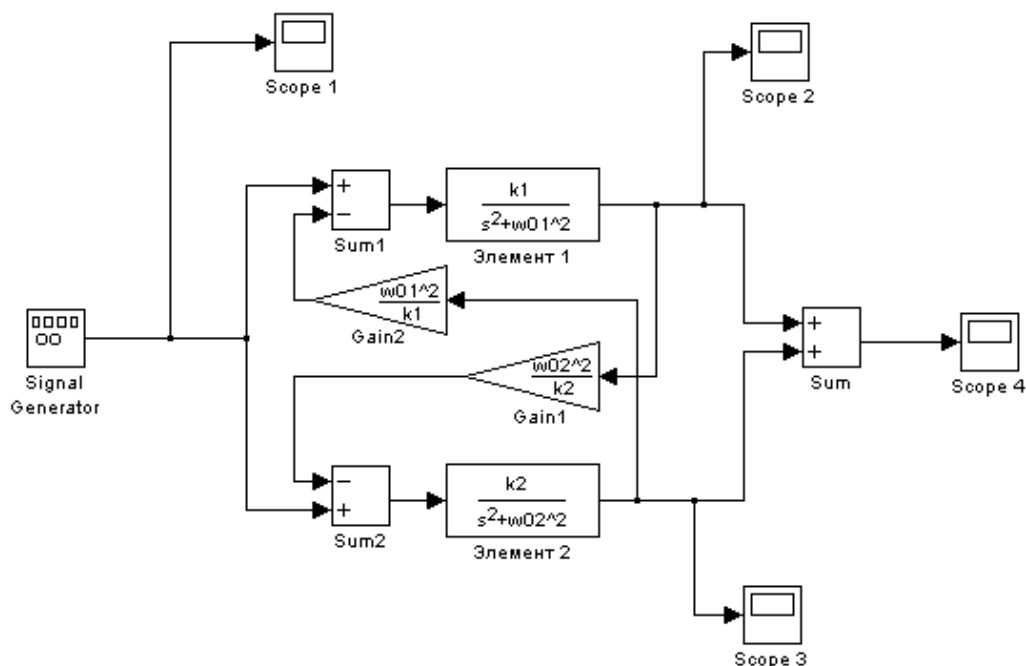
Математическая модель рассматриваемой системы (4.1), представленная в типовой форме записи через передаточные функции, имеет вид:

$$y_1(s) = \frac{k_1}{s^2 + \omega_{01}^2} \left( v(s) - \frac{\omega_{01}^2}{k_1} y_2(s) \right);$$

$$y_2(s) = \frac{k_2}{s^2 + \omega_{02}^2} \left( v(s) - \frac{\omega_{02}^2}{k_2} y_1(s) \right); \quad (3.2)$$

$$y(s) = \sum_{i=1}^2 y_i(s),$$

где  $y_i(s)$  – изображения выходов звеньев системы;  $v(s)$  – изображение функции внешнего воздействия;  $\omega_{0i}$  – частоты собственных колебаний соответствующих звеньев;  $k_i$  – их некоторые параметры;  $y(s)$  – изображение выходной характеристики системы. Таким образом, для моделирования временных характеристик системы можно использовать *simulink*-схему, представленную ниже.





## Практическая часть

### Задание 2.1

Создайте *simulink*-схему, согласно индивидуальным вариантам заданий (табл. 2). При формировании схемы для форматирования ее элементов используйте контекстные меню, вызываемые правой клавишей мыши. Получите временные характеристики:  $v(t)$  – входного синусоидального сигнала с единичной амплитудой и частотой 50 рад/с;  $y_i(t)$  – выходов элементов системы;  $y(t)$  – результирующего выхода системы в первые 10 с. после начала ее работы. Приведите сетки графических окон к единым видам, соответственно, в необходимом масштабе для характеристик  $v(t)$  и  $y(t)$ , и в другом масштабе для  $y_i(t)$ . Проанализируйте полученные результаты.

## Занятие 3. Комплексное моделирование характеристик системы

### Исходные данные

Математическая модель замкнутой линейной динамической системы, состоящей из двух параллельных колебательных звеньев, представленная в типовой форме записи через передаточные функции, имеет вид (4.2).

## Практическая часть

### Задание 3.1

Используя встроенное в *MatLAB* символьное ядро *Maple*, посредством ввода промежуточных переменных найдите явный вид передаточных функций для каждого из звеньев системы.

*Пример:*

```
maple('sist:={w1=k1/(s^2+w01^2)*(1-w01^2/k1*w2),
w2=k2/(s^2+w02^2)*(1-w02^2/k2*w1)}:
solve(sist,{w1,w2});')
```

### Задание 3.2

На основании индивидуального варианта задания (табл. 2) сформируйте описания передаточных функций для каждого из отдельных звеньев системы в виде векторов коэффициентов полиномов, описывающих соответствующие числители  $num1$ ,  $num2$  и знаменатели  $den1$ ,  $den2$ . Используя функцию *parallel(num1, den1, num2, den2)* получите передаточную функцию для обратного канала исследуемой системы.

*Пример:*

```
num1=[k1 0 k1*w02^2-w01^2*k2];
den1=[1 0 w02^2+w01^2 0 0];
num2=[k2 0 w01^2*k2-k1*w02^2];
den2=[1 0 w02^2+w01^2 0 0];
[num,den]=parallel(num1,den1,num2,den2);
```

**Задание 3.3**

Используя функции *nyquist* и *bode*, рассчитайте вещественную и мнимую, а также амплитудную и фазовую частотные характеристики системы для диапазона  $\omega$  от 0 до 50 рад/с.

**Задание 3.4**

С помощью функции *lsim(num, den, v, T)* рассчитайте временную характеристику результирующего выхода системы в первые 10 с. после начала ее работы для входного синусоидального сигнала с единичной амплитудой и частотой 20 рад/с.

**Задание 3.5**

Осуществите совместный вывод следующих графиков: временной характеристики внешнего воздействия; временной характеристики результирующего выходного сигнала; вещественной и мнимой частотных характеристик системы; амплитудной и фазовой частотных характеристик системы.

**Лабораторная работа № 5**

Тема: Визуализация процессов поляризации двухатомной молекулы

**Вопросы текущего контроля знаний**

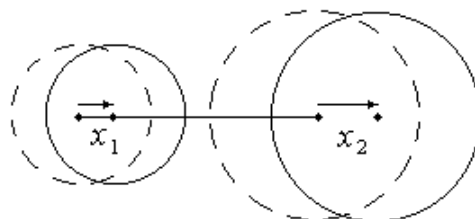
1. Поясните понятие имитационного моделирования.
2. Раскройте принцип реализации метода прямой перерисовки анимационного изображения.

**Теоретическая часть**

Объектом моделирования является визуализация процесса поляризации двухатомной молекулы, происходящей под действием переменного электрического поля. Физическая сущность рассматриваемого явления состоит из параллельно протекающих процессов электронной и ионной поляризации частиц, составляющих рассматриваемую систему.

**Занятие 1. Расчет характеристик электронной поляризации****Исходные данные**

Процессы электронной поляризации заключаются в смещениях электронных оболочек ионов относительно атомных ядер, механизм которых схематично отображен на рисунке.



Упрощенная математическая модель электронной поляризации исследуемого объекта может быть описана следующей системой уравнений:

$$\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + \omega_{01}^2 x_1(t) = E(t);$$

$$\frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + \omega_{02}^2 x_2(t) = E(t),$$

где  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  – функции смещения центров электронных оболочек относительно атомных ядер;  $\omega_{01}$  и  $\omega_{02}$  – частоты их собственных колебаний;  $E(t)$  – функция внешнего воздействия.

### Практическая часть

#### Задание 1.1

1. Представьте исходную систему уравнений через передаточные функции.
2. С помощью оператора *lsim* рассчитайте временные характеристики  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  в диапазоне от 0 до 30 с., полагая  $\omega_{01}=5$  и  $\omega_{02}=2,5$  рад/с, для входного синусоидального сигнала с единичной амплитудой и частотой 0,5 рад/с.
3. Постройте совместно графики  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ .

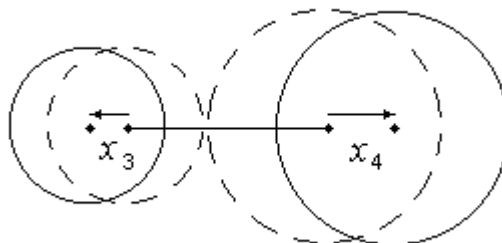
#### Задание 1.2

Реализуйте программу анимации рассматриваемого явления, используя значения радиусов электронных облаков  $r_1=5$  и  $r_2=10$ , а также расстояние между атомами, равное 15.

### Занятие 2. Расчет характеристик ионной поляризации

#### Исходные данные

Механизм упругой ионной поляризации заключается в смещениях атомных ядер ионов относительно своих исходных состояний, при этом разно заряженные частицы перемещаются в противоположных направлениях, см. схему на рисунке.



Упрощенная математическая модель ионной поляризации исследуемого объекта может быть описана следующей системой уравнений:

$$\frac{d^2 x_3(t)}{dt^2} + \omega_{03}^2 x_3(t) = E(t) - \omega_{03}^2 x_4(t);$$

$$\frac{d^2 x_4(t)}{dt^2} + \omega_{04}^2 x_4(t) = E(t) - \omega_{04}^2 x_3(t),$$

где  $x_3(t)$  и  $x_4(t)$  – функции смещения атомных ядер ионов;  $\omega_{03}$  и  $\omega_{04}$  – частоты их собственных колебаний;  $E(t)$  – функция внешнего воздействия.

### Практическая часть

#### Задание 2.1

1. Используя потенциал нахождения символьного решения в пакете *MatLAB*, найдите явный вид передаточных функций для описания динамики элементов исследуемой системы.
2. С помощью оператора *lsim* рассчитайте временные характеристики  $x_3(t)$  и  $x_4(t)$  в диапазоне от 0 до 30 с., полагая  $\omega_{03}=1$  и  $\omega_{04}=1$  рад/с, для входного синусоидального сигнала с единичной амплитудой и частотой 0,5 рад/с.
3. Постройте совместно графики  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ .

#### Задание 2.2

Реализуйте программу анимации рассматриваемого явления, используя значения радиусов электронных облаков  $r_1=5$  и  $r_2=10$ , а также расстояние между атомами, равное 15.

### Занятие 3. Расчет общей динамики системы

#### Исходные данные

Результаты, полученные при выполнении двух предыдущих занятий, позволяют имитировать движение электронных облаков относительно неподвижных атомных ядер, а также непосредственное движение атомных ядер. Таким образом, имитация общей совокупности рассматриваемых явлений может быть реализована как графический вывод электронных колебаний частиц (смещений центров окружностей) относительно их подвижных атомных ядер (смещений частиц целиком).

#### Задание 3.1

Реализуйте программу анимации общей картины поляризационных явлений (как ионной, так и электронной поляризации каждого из элементов системы), используя значения радиусов электронных облаков  $r_1=5$  и  $r_2=10$ , а также расстояние между атомами, равное 15. При создании программной реализации необходимо учитывать, что отрицательный ион (большая окружность) начинает свое движение в направлении, которое совпадает со смещением электронных оболочек.

## Лабораторная работа № 6

Тема: Построение сетевой модели системы на базе Сети Петри

### Вопросы текущего контроля знаний

1. Поясните понятие сетевой модели
2. Дайте определение сети Петри (N-схемы).

### Теоретическая часть

**Понятие сети Петри.** Формально сеть Петри (N-схема) задается четверкой вида:  $N = \langle B, D, I, O \rangle$ ,

$B$  – конечное множество символов, называемых позициями;

$D$  – конечное множество символов, называемых переходами;

$I$  – входная функция (прямая функция инцидентности);

$O$  – выходная функция (обратная функция инцидентности).

Таким образом, входная функция  $I$  отображает переход  $d_j$  в множество выходных позиций  $b_i \in I(d_j)$ , а выходная функция  $O$  отображает переход  $d_j$  в множество выходных позиций  $b_i \in D(d_j)$ .

Графически N-схема изображается в виде двудольного ориентированного мультиграфа, представляющего собой совокупность позиций и переходов. Граф N-схемы имеет два типа узлов: позиции и переходы, изображаемые окружностями и планками соответственно. Ориентированные дуги соединяют позиции и переходы, причем каждая дуга направлена от элемента одного множества (позиции или перехода) к элементу другого множества (переходу или позиции).

Приведенное представление N-схемы может использоваться только для отражения статики моделируемой системы (взаимосвязи событий и условий), но не позволяет отразить в модели динамику функционирования моделируемой системы. Для представления динамических свойств объекта вводится функция маркировки (разметки)  $M: B \rightarrow \mathbb{N}$ . Маркировка  $M$  есть присвоение неких абстрактных объектов, называемых метками (фишками), позициям N-схемы, причем количество меток, соответствующее каждой позиции, может меняться в процессе функционирования сети. При графическом задании N-схемы разметка отображается помещением внутри вершин-позиций соответствующего числа точек (когда количество точек велико, ставят цифры).

Маркированная (размеченная) N-схема описывается в виде пятерки  $N_M = \langle B, D, I, O, M \rangle$  и является совокупностью сети Петри и функции маркировки  $M$ .

Функционирование N-схемы отражается путем перехода от разметки к разметке. Начальная разметка обозначается как  $M_0: B \rightarrow \mathbb{N}$ . Смена разметок про-

исходит в результате срабатывания одного из переходов  $d_j \in D$  сети. Необходимым условием срабатывания перехода  $d_j$  является  $b_i \in I(d_j) \{M(b_i) \geq 1\}$ , где  $M(b_i)$  – разметка позиции  $b_i$ . Переход  $d_j$ , для которого выполняется указанное условие, определяется как находящийся в состоянии готовности к срабатыванию или как возбужденный переход.

Срабатывание перехода  $d_j \in D$  изменяет разметку сети. Правило изменения разметки:

$$M_{k+1}(b) = M_k(b) - I(d_j) + O(d_j), \quad k=1, \infty, \quad (6.1)$$

где переход  $d_j \in D$  изымает по одной метке из каждой своей входной позиции и добавляет по одной метке в каждую из выходных позиций. Смена разметки обозначается как  $M_{k+1} \stackrel{d_j}{\leftarrow} M_k$ .

Для анализа функционирования сети Петри строится граф разметки. Граф разметки в качестве вершин содержит разметки, а дуги, соединяющие вершины в графе разметки помечаются теми переходами, срабатывание которых повлекло изменение разметки.

## Занятие 1.

### Исходные данные

Сетевая модель (N-схема) задана пятеркой множеств:

$$N_M = \langle B, D, I, O, M \rangle.$$

Рассмотрим формальную N-схему, описанную пятеркой множеств и построим сетевую модель в виде графа.

$$N_M: B = \{b_1, b_2, b_3\}; D = \{d_1, d_2, d_3\};$$

$$I(d_1) = \emptyset,$$

$$I(d_2) = \{b_2, b_3\},$$

$$I(d_3) = \{b_1\};$$

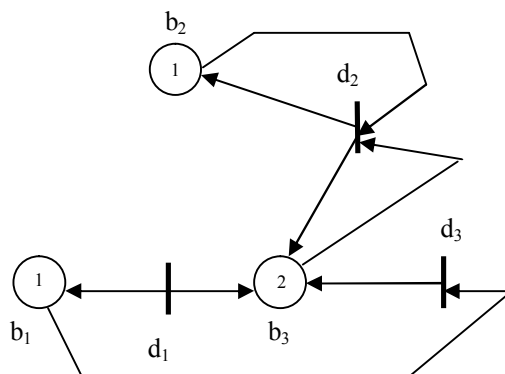
$$O(d_1) = \{b_1, b_3\},$$

$$O(d_2) = \{b_2, b_3\},$$

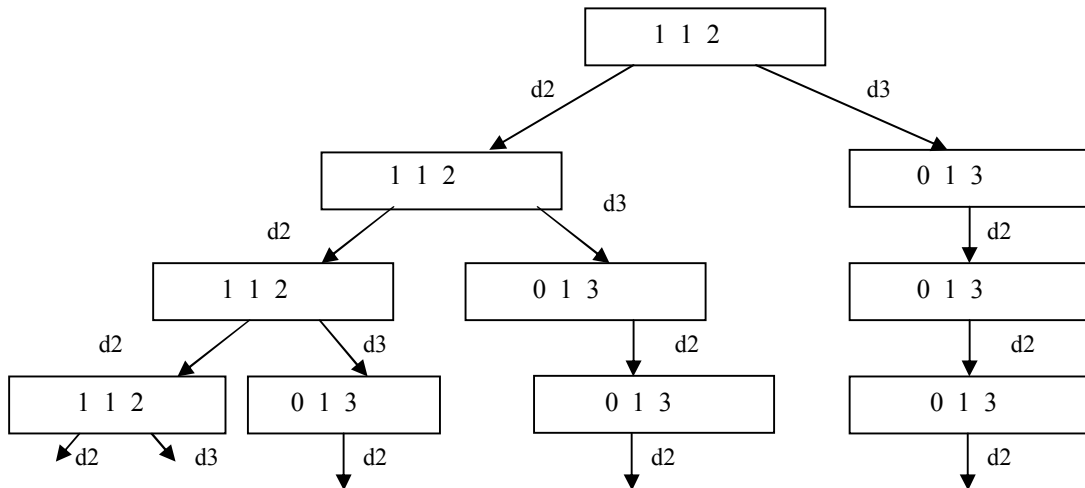
$$O(d_3) = \{b_3\};$$

$$M_0 = (1, 1, 2).$$

Построим граф сети Петри:



Построим граф разметки для полученной сети Петри. При построении графа разметки необходимо проверить условие срабатывания перехода, для каждого перехода в сети, затем после каждого срабатывания определенного перехода определять разметку всех позиций в сети Петри по правилу (6.1).



### Практическая часть

#### Задание 1.1

Постройте граф размеченной сети Петри по заданным множествам (табл.4). Постройте граф разметки для сети Петри и определите:

- 1) какая позиция в сети накапливает максимальное количество фишек;
- 2) может ли в сети накапливаться бесконечно много фишек в какой-либо позиции и в какой;
- 3) могут ли переходы функционировать  $\infty$  число раз;
- 4) есть ли в сети потенциально мертвый переход (переход, который никогда не работает).

### Занятие 2.

#### Задание 2.1

Создайте сетевую модель, описанную в задании 1, используя демонстрационные возможности пакета программ, просмотрите примеры построения и анализа  $N$ -схем.

### Занятие 3.

#### Задание 3.1

Создайте сетевую модель параллельной обработки заданий на ЭВМ двумя приложениями. Полученную сеть Петри проанализируйте на наличие в сети бесконечного цикла, используя демонстрационные возможности пакета программ.

Таблица 4

№	B	D	I	O	M0
1	{b1, b2, b3, b4, b5}	{d1, d2, d3, d4}	I(d1)={b1,b3} I(d2)={ b2,b3,b5} I(d3)={b3} I(d4)={b4}	O(d1)= {b2,b4} O(d2)={b2} O(d3)= ∅ O(d4)={b1}	2 1 3 0 2
2	{b1, b2, b3, b4}	{d1, d2, d3}	I(d1)={b2,b4} I(d2)={b1,b3,b4} I(d3)= { b1}	O(d1)={b2,b3} O(d2)={b3,b4} O(d3)={b4}	3 1 2 1
3	{b1, b2, b3, b4, b5}	{d1, d2, d3}	I(d1)={b1,b3} I(d2)={ b1,b2} I(d3)={ b3}	O(d1)={b2,b4}, O(d2)= ∅, O(d3)= { b5},	2 1 0 0 0
4	{b1, b2, b3, b4, b5}	{d1, d2, d3, d4}	I(d1)={b2,b4} I(d2)={b1,b3,b5} I(d3)={b2,b4} I(d4)={ b1,b2}	O(d1)={b3,b5} O(d2)={b2,b4} O(d3)={ b3,b1} O(d4)={ b4,b5}	1 1 0 1 0
5	{b1, b2, b3}	{d1, d2, d3}	I(d1)={b2,b3} I(d2)=∅ I(d3)={b1}	O(d1)={b1,b3} O(d2)={b1,b2,b3} O(d3)={b2}	5 0 3
6	{b1, b2, b3, b4, b5}	{d1, d2, d3}	I(d1)={b1,b5} I(d2)={b2,b3} I(d3)={b1,b2,b3}	O(d1)={b1,b2} O(d2)={ b4,b5} O(d3)={b3,b4,b5}	1 0 3 1 3
7	{b1, b2, b3, b4}	{d1, d2, d3, d4}	I(d1)={b1,b4} I(d2)={b2,b3,b4} I(d3)=∅ I(d4)={b3}	O(d1)=∅ O(d2)={b1,b3,b4} O(d3)=∅ O(d4)={b2}	1 1 1 1
8	{b1, b2, b3, b4, b5}	{d1, d2}	I(d1)={b1,b2,b5} I(d2)={b1,b3,b5}	O(d1)={b1,b2} O(d2)={b3}	1 0 1 0 1
9	{b1, b2, b3, b4, b5}	{d1, d2, d3}	I(d1)={b2,b4} I(d2)={b1,b3,b5} I(d3)={ b1,b2}	O(d1)={b1,b5} O(d2)={b2,b3,b4} O(d3)={b2,b4}	2 2 0 1 1
10	{b1, b2, b3, b4, b5}	{d1, d2, d3, d4}	I(d1)={b5,b4} I(d2)={b2,b3,b4} I(d3)={b1,b2} I(d4)={b5}	O(d1)=∅, O(d2)={b1,b3,b5} O(d3)={b4,b2} O(d4)={b3,b2}	1 1 2 1 1



## Содержание

1. Рабочая программа .....	3
2. Конспект лекций .....	10
3. Лабораторные занятия .....	43

Илья Евгеньевич ЕРЕМИН

*доцент кафедры Информационных и управляющих систем АмГУ,  
кандидат физико-математических наук, доцент*

Имитационное моделирование для направления подготовки магистров  
231000.68 – «Программная инженерия»:  
учебно-методический комплекс дисциплины.