Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Амурский государственный университет»

Кафедра Информационных и управляющих систем

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ

«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

Основной образовательной программы по специальности 230201.65 – Информационные системы и технологии

Благовещенск 2012

УМКД разработан доцентом Акиловой Ириной Михайловной

Рассмотрен и рекомендован на заседании кафедры

Протокол заседания кафедры от «______» ________________2012 г. № _______

Зав. кафедрой _________________________ / А.В.Бушманов

УТВЕРЖДЕН

Протокол заседания УМСС специальности 230201.65 – Информационные системы и технологии

от «____» _____________________2012 г. №__________

Председатель УМСС ________________ / В.В.Еремина /

СОДЕРЖАНИЕ

Рабочая программа 4
Краткое изложение программного материала 11
Методические указания по организации межсессионного контроля знаний студентов 47
Контроль знаний 47

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Амурский государственный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____________ В.В. Проказин
«___» _________ 20__ г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Направление подготовки 230201.65 – «Информационные системы и технологии»

Квалификация (степень) выпускника – инженер

Курс 2 Семестр - 3

Лекции 36 (час.) Экзамен – 3

Лабораторные занятия 18 (час.)

Практические (семинарские) занятия 36 (час.)

Самостоятельная работа 80 (час.)

Общая трудоемкость дисциплины – 170 (час.)

Составитель – И.М.Акилова, доцент

Факультет математики и информатики

Кафедра информационных и управляющих систем

2011 г.

Рабочая программа составлена на основании Государственного образовательного стандарта ВПО по специальности 230201.65 – Информационные системы и технологии

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры информационных и управляющих систем

«___» ____________ 20___ г., протокол № _____

Заведующий кафедрой _____________ А.В. Бушманов

Рабочая программа одобрена на заседании учебно-методического совета направления подготовки 230100.62 «Информатика и вычислительная техника»

«___» ____________ 20___ г., протокол № _____

Председатель _____________ В.В. Еремина

Рабочая программа переутверждена на заседании кафедры информационных и управляющих систем

«___» ____________ 20___ г., протокол № _____

Заведующий кафедрой _____________ А.В. Бушманов

СОГЛАСОВАНО
Учебно-методическое
управление

____

«___» ____________ 20___ г.

СОГЛАСОВАНО
Председатель учебно-методического
совета факультета

_____________ С.Г. Самохвалова

«___» ____________ 20___ г.

СОГЛАСОВАНО
Заведующий выпускающей кафедрой

_____________ А.В. Бушманов

«___» ____________ 20___ г.

СОГЛАСОВАНО
Директор научной библиотеки

_____________ Л.А. Проказина

«___» ____________ 20___ г.

1 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель и задачи дисциплины - курс «Вычислительная математика» ставит своей целью изучение основных вопросов численных методов: погрешности вычислений; численных методов линейной алгебры; решение нелинейных уравнений и систем; интерполирование и экстраполирование функций; положений теории, относящихся к приближению функций; интегрированию; решению дифференциальных уравнений и исследованию одномерных и многомерных рядов наблюдений.

Основное назначение курса – ознакомить студентов со спецификой использования разнообразных вычислительных методов и методов статистического анализа временных рядов на базе современных ЭВМ.

Задачи дисциплины:

- развитие математического мышления, воспитание высокой математической культуры;
- формирование личности студента, развитие его интеллекта, способностей к логическому и алгоритмическому мышлению.
- освоение обучаемыми математических методов и основ математического моделирования;
- на примерах математических понятий и методов продемонстрировать студентам сущность научного подхода, специфику математики и ее роль в прикладных исследованиях

2 МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП ВПО

Программа курса «Вычислительная математика» составлена в соответствие с требованиями государственного образовательного стандарта специализации – Информационные системы и технологии, специализации 230201.65, блок общие математические и естественнонаучные дисциплины ЕН.В.01.

Этому курсу предшествует дисциплина «Высшая математика» с разделами: «Математический анализ», «Дифференциальное уравнения», «Теория вероятностей и математическая статистика», в которых излагается материал для изучения численных методов и их реализации.

Знания, умения и навыки, формируемые в процессе изучения дисциплины «Вычислительная математика» будут использоваться в дальнейшем при освоении дисциплин вариативной части профессионального цикла: «Программирование», «Теория вычислительных процессов», «Основы теории управления» и др. Знание основных методов, моделей и алгоритмов вычислительной математики необходимо при разработке численных моделей на ЭВМ.

3. ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮ ОСВОЕНИЯ СОДЕРЖАНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В результате освоения дисциплины обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

1) Знать: модели представления и методы обработки экспериментальных данных.

2) Уметь: применять математические методы и вычислительную технику для решения практических задач;

3) Владеть: методами научного поиска.

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Общая трудоемкость дисциплины составляет 150 часов.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость в часах				Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации
				Лек	Пр	Лаб	Сам	
1	Элементы теории	3	1-2	2	6		10	Защита практич.

	погрешностей							работы
2	Линейная алгебра	3	3-5	4	4	6	10	Защита практич. работы, защита лабораторной работы
3	Численные методы решения алгебраических уравнений высших степеней и трансцендентных уравнений	3	6-7	2	2	4	10	Защита практич. работы, защита лабораторной работы
4	Интерполирование функций	3	8-9	2	4		10	Защита практич. работы
5	Численное интегрирование	3	10-11	2	4	4	10	Защита практич. работы, защита лабораторной работы
6	Численное дифференцирование	3	12-13	2	4	4	10	Защита практич. работы, защита лабораторной работы
7	Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.	3	14-15	2	6		10	Защита практич. работы
8	Численное решение уравнений с частными производными и интегральных уравнений	3	16-18	2	6		10	Защита практич. работы
9	Всего по разделам	3	1-18	18	36	18	80	Экзамен

5 СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ И ТЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

5.1 Лекции

Тема 1: Основные источники погрешностей и их классификация. Погрешности численного решения задач. Прямая и обратная вычислительные задачи теории погрешностей. Оценка результатов вычислений.

Тема 2: Прямые и итерационные методы реализации СЛАУ. Вычисление определяется методом ГАУССА. Вычисление элементов обратной матрицы. Вычисление собственных значений и собственных векторов. Оценки погрешности решения задачи линейной алгебры.

Тема 3: Границы расположения корней алгебраического уравнения. Число действительных корней алгебраического уравнения. Отделение корней алгебраического уравнения. Итерационные методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений.

Тема 4: Постановка задачи интерполирования. Интерполирование для случая равноотстоящих узлов. Первая и вторая интерполяционные формулы Ньютона. Интерполяционная формула Лагранжа. Оценка остаточных членов формул. Схема Эйткена. Обратное интерполирование. Решение уравнений методом обратного интерполирования.

Тема 5: Квадратурные формулы с равноотстоящими узлами. Квадратурные формулы Гаусса. Выбор шага интегрирования. Интегрирование с помощью степенных рядов. Интегралы от разрывных функций. Метод выделения особенностей. Интегралы с бесконечными пределами. Метод усечения. Метод повторного применения квадратурных формул.

Тема 6: Простейшие формулы численного дифференцирования. Вычисление второй производной. Вывод формул численного дифференцирования. Обусловленность формул численного дифференцирования. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Разрешимость задачи Коши. Метод Эйлера для задачи Коши. Метод Рунге-Кутта.

Тема 7: Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод конечных разностей для линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Метод конечных разностей для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка Метод Галеркина.

Тема 8: Метод сеток. Метод сеток для задачи Дирихле. Итерационный метод решения системы конечно-разностных уравнений. Решение краевых задач для криволинейных областей. Метод сеток для уравнения параболического типа. Метод сеток для уравнения гиперболического типа.

5.2 Практические занятия

5.2.1 Практическая работа 1. Теория погрешностей

5.2.2 Практическая работа 2. Решение СЛАУ методом Гаусса, вычисление определителя методом Гаусса

5.2.3 Практическая работа 3.Решение уравнений наивысших порядков и трансцендентных уравнений методом хорд, методом касательных, методом Ньютона

5.2.4 Практическая работа 4. Интерполирование и экстраполирование функций

5.2.5 Практическая работа 5. Интегрирование функций

5.2.6 Практическая работа 6.Дифференцирование функций

5.2.7 Практическая работа 7.Конечно-разностные методы решения дифференциальных уравнений первого порядка

5.2.8 Практическая работа 8. Метод Галеркина

5.2.9 Практическая работа 9. Численное решение уравнений с частными производными и интегральных уравнений

5.3 Лабораторные занятия

5.3.1 Лабораторная работа № 1. Решение СЛАУ методом Гаусса, вычисление определителя методом Гаусса

5.3.2 Лабораторная работа № 2. Решение уравнений наивысших порядков и трансцендентных уравнений методом хорд, методом касательных, методом Ньютона

5.3.3 Лабораторная работа № 3. Интегрирование функций по формулам трапеций и Симпсона

5.3.4 Лабораторная работа № 4. Дифференцирование функций методом Эйлера

6 САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

№ п/п	Раздел дисциплины	Форма (вид) самостоятельной работы	Трудоемкость в часах
1	Метод Крылова для нахождения собственных чисел и собственных векторов (20 часов).	Выполнение расчетно–графической работы, оформление отчета.	50
2	Среднеквадратичные приближения, приближение сплайнами	Выполнение лабораторной работы, оформление отчета.	30
4			80

7 ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Образовательный процесс по дисциплине строится на основе комбинации следующих образовательных технологий.

Интегральную модель образовательного процесса по дисциплине формируют технологии методологического уровня: модульно-рейтинговое обучение, технология поэтапного формирования умственных действий, технология развивающего обучения, элементы технологии развития критического мышления.

Реализация данной модели предполагает использование следующих технологий стратегического уровня (задающих организационные формы взаимодействия субъектов образовательного процесса), осуществляемых с использованием определенных тактических процедур:

– лекционные (вводная лекция, информационная лекция, обзорная лекция, лекция-консультация, проблемная лекция);

– практические (углубление знаний, полученных на теоретических занятиях, решение задач);

– тренинговые (формирование определенных умений и навыков, формирование алгоритмического мышления);

– активизации познавательной деятельности (приемы технологии развития критического мышления через чтение и письмо, работа с литературой, подготовка презентаций по темам домашних работ);

– самоуправления (самостоятельная работа студентов, самостоятельное изучение материала).

Рекомендуется использование информационных технологий при организации коммуникации со студентами для представления информации, выдачи рекомендаций и консультирования по оперативным вопросам (электронная почта), использование мультимедиа-средств при проведении лекционных и практических занятий.

8 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

8.1 Оценочные средства для текущего контроля успеваемости

8.1.1 Контрольные вопросы допуска к выполнению практических работ

8.1.2 Отчеты о выполнении индивидуальных вариантов заданий практических работ

8.2 Оценочные средства для промежуточной аттестации

Вопросы к экзамену:

1. Содержание предмета “Вычислительная математика”. Основные этапы численного решения задач на ЭВМ.
2. Основные источники и классификация погрешностей численного решения задач.
3. Вычислительная погрешность
4. Неустранимая погрешность
5. Погрешности арифметических операций над приближенными числами.
6. Сложение и вычитание приближенных чисел. Оценка погрешности результата.
7. Умножение и деление приближенных чисел. Оценка погрешности вычислений.
8. Оценка погрешности функции на погрешность аргумента.
9. Обратная задача для оценки погрешности функции на погрешности аргументов. Допустимые погрешности аргументов.
10. Вычислительная погрешность метода Гаусса. Выбор ведушего элемента исключения.
11. Метод Гаусса для решения СЛАУ с выбором главного элемента по столбцу.
12. Метод Гаусса для решения СЛАУ с выбором главного элемента по всей матрице.
13. Вычисление определителя методом Гаусса.
14. Вычисление элементов обратной матрицы методом Гаусса.
15. Решение СЛАУ методом простой итерации. (первый способ).
16. Решение СЛАУ методом простой итерации. (второй способ).
17. Применение метода простой итерации для уточнения элементов обратной матрицы

18. Постановка задачи интерполирования. Интерполирование для случая равноотстоящих узлов. Первая интерполяционная формула Ньютона.
19. Постановка задачи интерполирования. Интерполирование для случая равноотстоящих узлов. Вторая интерполяционная формула Ньютона.
20. Интерполяционная формула Лагранжа.
21. Интерполяционная схема Эйткена.
22. Обратное интерполирование. Нахождение корней уравнения методом обратного интерполирования.
23. Выбор шага интегрирования. Принцип Рунге для оценки погрешностей.
24. Приближенное вычисление интегралов. Формулы Ньютона – Котеса.
25. Приближенное вычисление интегралов. Квадратурные формулы Гаусса.
26. Интегрирование с помощью степенных рядов. Оценка погрешности результата.
27. Кратные интегралы. Метод повторного применения квадратурных формул.
28. Интегралы с бесконечными пределами. Метод усечения.
29. Интегралы от разрывных функций. Аддитивный способ выделения особенностей.
30. Интегралы от разрывных функций. Мультипликативный способ выделения особенностей.
31. Метод Люстерника – Диткина для вычисления двойного интеграла.
32. Простейшие формулы численного дифференцирования.
33. Вычисление второй производной по формулам численного дифференцирования.
34. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Теоремы о разрешимости задачи Коши
35. Метод Эйлера для решения задачи Коши
36. Метод Рунге – Кутта для решения задачи Коши
37. Постановка краевой задачи для обыкновенных дифферинциальных уравнений второго порядка
38. Метод конечных разностей для линейных дифференциальных уравнений второго порядка
39. Метод конечных разностей для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка
40. Метод Галеркина.
41. Численное решение уравнений с частными производными методом сеток.
42. Метод сеток для задачи Дирихле.
43. Итерационный метод решения системы конечно – разностных уравнений.
44. Решение краевых задач для криволинейных областей.
45. Метод сеток для уравнений параболического типа.
46. Метод сеток для уравнений гиперболического типа.

8.3 Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы

8.3.1 Учебное пособие по вычислительной математике с заданиями и методическими указаниями по выполнению практических работ

9 УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1 Демидович Б.П. Основы вычислительной математики : учеб. пособие/ Б.П. Демидович, И.А. Марон. -5-е,7-е изд., стер.. -СПб.: Лань, 2006, 2009.

2 Копченова Н.В. Вычислительная математика в примерах и задачах : учеб. пособие/ Н. В. Копченова, И. А. Марон. -2-е изд., стер.. -СПб.: Лань, 2008. -368 с.

3 Плохотников К.Э. Вычислительные методы. Теория и практика в среде Matlab : курс лекций : учеб. пособие : рек. УМО/ К.Э. Плохотников. -М.: Горячая линия -Телеком, 2009. -496 с.:

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. Акилова И.М. Вычислительная математика : Учеб. пособие: Доп. УМО вузов/ И. М. Акилова; АмГУ, ФМиИ. -Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2004. -167 с.

2. Петров И.Б. Лекции по вычислительной математике : учеб. пособие/ И. Б. Петров, А. И. Лобанов. -М.: БИНОМ. Лаб. знаний; М.: Интернет-Ун-т Информ. Технологий, 2006. -524 с.:а-ил.

3. Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования : В 2 т/ ; Рос. акад наук: Ин-т вычисл. мат. Т. 1 : Вычислительная математика/ отв. ред. Н. С. Бахвалов, В. В. Воеводин. -2005. -344 с.

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ И ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ

1. Свободно распространяемые версии математических пакетов (MathCAD, MatLAB, Maple), Exel

№ п/п	Наименование ресурса	Характеристика
1	http;//www.iqlib.ru	Интернет библиотека образовательных изданий, В которой собраны электронные учебники, справочные и учебные пособия. Удобный поиск по ключевым словам, отдельным темам и отраслям знаний.
2	http://www.intuit.ru	Интернет-университет информационных технологий. В котором собраны электронные и видео-курсы по отряслям знаний
3	http;//amursu.ru	Сайт АмГУ, Библиотека – электронная библиотека АмГУ

10 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

9.1 Лекционная аудитория

9.2 Лаборатории, оборудованные рабочими местами пользователей ЭВМ

11 РЕЙТИНГОВАЯ ОЦЕНКА ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Семестровый модуль дисциплины						
№ п/п	Раздел дисциплины	Виды контроля	Сроки выполнения (недели)	Максимальное кол-во баллов	Посещение, активность на занятиях	Максимальное кол-во баллов за модуль
1	Погрешности вычислений; Устойчивость и сложность алгоритма (по памяти, по времени)	ПР № 1	1-2	5	1	6
2	Численные методы линейной алгебры; решение нелинейных уравнений и систем	ПР № 2	3-4	5	1	6
3	Интерполяция функций	ПР № 3	5-6	5	1	6
4	Численное интегрирование и дифференцирование	ПР № 4	7-8	5	2	7
5	Численное	ПР № 5	9-10	5	2	7

	дифференцирование					
6	Решение обыкновенных дифференциальных уравнений	ПР № 6	11-12	5	2	7
7	Методы приближения и аппроксимации функций	ПР № 7	13-14	5	2	7
8	Методы приближения и аппроксимации функций	ПР № 8	15-16	5	2	7
9	Математические программные системы	ПР № 9	17-18	5	2	7
10	Всего		1-18	45	15	60
11	Промежуточная аттестация	экзамен				40
Итого						100

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ПРОГРАММНОГО МАТЕРИАЛА

Лекция № 1,2. Элементы теории погрешностей.

Под погрешностью понимается некоторая величина, характеризующая точность результата. Существуют три вида погрешностей: 1) неустранимая (возникающая от недостаточно точного отображения реальных явлений их математической моделью); 2) погрешность метода; 3) погрешность вычислений (возникающая из-за округлений).
Основная задача теории погрешностей – указание области неопределенности результата.

Буквами *a, в, c* ... будем обозначать точные числа, $a^*, в^*, c^*$ ... – приближенные.

Число a^*, незначительно отличающееся от точного числа a и заменяющее последнее в вычислениях, является приближенным.

При вычислении вместо точного значения a какой-либо величины часто приходится использовать приближенное значение a^* этой величины, отличающееся от точного. Если известно, что $a^* < a$, то a^* называется приближенным значением точного числа a по недостатку; если же $a^* > a$, то a^* называется приближенным значение точного числа a по избытку.

Разность Δ между точным числом a и его приближенным значением a^* называется ошибкой, или погрешностью данного приближенного числа.

Абсолютной погрешностью приближенного числа a^* является

$\Delta a^* = | a - a^* |$.

Поскольку чаще всего точное значение a неизвестно, для оценки приближения используют абсолютную погрешность, т.е. такую величину Δa^*, при которой $| a - a^* | \le \Delta a^*$. Это равносильно тому, что значение заключено в пределах

$a - \Delta a^* \le a \le a + \Delta a^*$.

Часто полученное неравенство, задающее область неопределенности точного значения a, записывают в виде:

$a^* = a \pm \Delta a^*$.

Отметим, что абсолютная погрешность – величина размерная, имеющая размерность приближенного числа a^*.

Пояснение. Если a^* – расстояние, пробегаемое бегуном за тренировку и измеряемое в метрах (м), то абсолютная Δa^* – погрешность, с которой измерено расстояние, преодоленное спортсменом на тренировке, также имеет размерность в метрах.

С помощью абсолютной погрешности можно отразить количественную, но не качественную сторону погрешности некоторого результата. Например, расстояние, преодоленное прыгуном в длину, измерено с точностью 0,5 см. С такой же погрешностью измерена длина беговой дорожки стадиона. Очевидно, что второе измерение выполнено качественнее, чем первое.

Относительной погрешностью называется некоторая величина δa^*, удовлетворяющая условию $\left|\dfrac{a-a^*}{a^*}\right| \le \delta\, a^*$.

Относительная погрешность – величина безразмерная и используется для сравнения точности разномасштабных измерений (вычислений). Часто относительная погрешность вычисляется в процентах.

Лекция № 3, 4, 5 Линейная алгебра

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \cdots + a_{nn}\, x_n = b_n \end{cases}, \tag{1}$$

где совокупность чисел $a_{11}, \cdots, a_{nn}$ называется матрицей коэффициентов (A) и представляется в виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

неизвестные величины $x_1, x_2, \cdots, x_n$ называются вектором неизвестных (x), совокупность чисел $b_1, b_2, \cdots, b_n$ – вектором свободных элементов (B).

СЛАУ более компактно записывается в матричном виде

$$A \cdot x = B. \tag{2}$$

В дальнейшем будем использовать оба способа записи СЛАУ.

Методы численного решения системы (1) подразделяются на точные и итерационные. Точные – это методы, при использовании которых решение достигается за конечное число действий. Их еще называют конечными. К их числу относятся методы Крамера, Гаусса и др., известные из курса высшей математики. При решении по этим методам накапливается ошибка, причем чем больше производится действий, тем существеннее ошибка.

При использовании итерационных методов (их еще называют бесконечными) решение получают с заданной степенью точности путем многократного повторения одного и того же вычислительного процесса, в результате выполнения которого решение все более уточняется.

1. Метод Гаусса.

На практике зачастую сначала находят приближенное решение методом Гаусса, а затем его уточняют итерационными методами.

Наиболее удобен метод Гаусса с выбором главного элемента. Смысл главного элемента состоит в том, чтобы сделать возможно меньшими коэффициенты при x_i и тем самым уменьшить погрешность вычислений.

Весь процесс вычислений распадется на два этапа: прямой ход и обратный ход.

На первом этапе прямоугольная матрица должна быть преобразована к треугольному виду путем исключения неизвестных.

Пусть среди коэффициентов при неизвестном x наибольшим по абсолютной величине является a_{11}. Назовем его главным элементом, а строку, содержащую главный элемент, – главной строкой. Если это не так, то переставим уравнения, чтобы на месте a_{11} был именно такой коэффициент.

Составим соотношения:

$$m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}}, \qquad m_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \qquad \cdots, \qquad m_{n1} = -\frac{a_{n1}}{a_{11}}$$

Прибавим к каждому уравнению СЛАУ, начиная со второго (первое уравнение, умноженное на $m_{21}, m_{31}, \cdots, m_{n1}$ соответственно). После этого из всех уравнений, кроме первого, исключится x_1. Новые значения коэффициентов обозначим за $a_{ij}^{(i)}$ и $b_j^{(i)}$ (причем индексы i и j изменяются от 2 до n). СЛАУ примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases} \tag{3}$$

Теперь повторим описанную процедуру применительно ко всем уравнениям, начиная со второго. Пусть среди коэффициентов при неизвестном x_2 наибольшим по абсолютной величине является коэффициент $a_{22}^{(1)}$. Если это не так, то переставим оставшиеся n - 1 уравнения, чтобы на месте $a_{22}^{(1)}$ был именно такой коэффициент.

Рассчитаем

$$m_{32} = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \qquad m_{42} = -\frac{a_{42}}{a_{22}^{(1)}}, \qquad \cdots, \qquad m_{n2} = -\frac{a_{n2}}{a_{22}^{(1)}}$$

и прибавим к i-му уравнению системы ($i = 3, 4, 5, \ldots, n$) второе уравнение, умноженное на m_{i2}. Получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a_{n3}^{(i)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(i)}x_n = b_n^{(i)} \end{cases} \tag{4}$$

После $(n - 1)$ шага придем к треугольной системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases} \tag{5}$$

Второй этап (обратный ход) заключается в решении системы (5). Из последнего уравнения определяется x_n. Найденное значение x_n подставляется в предпоследнее уравнение, определяется x_{n-1} и так далее, до x_1. На этом решение заканчивается.

Если в ходе решения все вычисления производились без округлений, то полученные значения неизвестных точные.

При вычислениях могут произойти ошибки. Поэтому необходим контроль вычислений. Для этого суммируем все коэффициенты по строке и делаем проверку. Если вычисления ведутся с постоянным числом знаков после запятой, то числа b_i и полученная сумма не должны различаться более чем на единицу последнего разряда. В противном случае нужно проверить предыдущие вычисления.

2. *Применение метода Гаусса для вычисления определителя.*

Воспользуемся алгоритмом метода Гаусса с выбором главного элемента по столбцу. Искомый определитель и определитель полученной треугольной матрицы $A^{(n-1)}$ связаны равенством

$$\det A = (-1)^s \det A^{(n-1)},$$

где s – число потребовавшихся перестановок строк.

Определитель треугольной матрицы равен произведению «ведущих» элементов, т.е.:

$$\Delta = \det A^{(n-1)} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Таким образом, для вычисления определителя матрицы **A** нужно выполнить вычисления, необходимые для осуществления прямого хода в методе Гаусса для системы $Ax = 0,$ и затем найти произведение «ведущих» элементов.

$$\Delta = \det A = (-1)^s a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{nn}^{(n-1)}$$

Вычислительная схема в этом случае такая же, как и для решения СЛАУ, только без столбца свободных членов.

Метод Ньютона для решения системы нелинейных уравнений

Если известно достаточно хорошее начальное приближение к решению системы уравнений

$F(x)=0$, (1)

то эффективным методом повышения точности является метод Ньютона.

Идея метода Ньютона заключается в том, что в окрестности имеющегося приближения $x^{(n)}$ задача заменяется некоторой вспомогательной линейной задачей. Последняя выбирается так, чтобы погрешность замены имела более высокий порядок малости, чем первый (в определяемом далее смысле), в окрестности имеющегося приближения. За следующее приближение принимается решение этой вспомогательной задачи.

Пусть дана система

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0. \end{cases}$$

Начальные приближения x_0 и y_0 определяют грубо приближенно (графически, прикидкой и т.п.). Для нахождения последующих приближений используют соотношения

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta x_n}{\Delta n}; \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta y_n}{\Delta n} \quad ,$$

где

$$\Delta n = \begin{vmatrix} F'_x(x_n, y_n) & F'_y(x_n, y_n) \\ G'_x(x_n, y_n) & G'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

$$\Delta x_n = -\begin{vmatrix} F'_y(x_n, y_n) & F(x_n, y_n) \\ G'_y(x_n, y_n) & G(x_n, y_n) \end{vmatrix}; \quad \Delta y_n = \begin{vmatrix} F(x_n, y_n) & F'_x(x_n, y_n) \\ G(x_n, y_n) & G'_x(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

Метод Ньютона эффективен только при достаточной близости начального приближения к решению системы.

Лекции № 6,7 Методы приближенного вычисления корней нелинейных уравнений

1. Корень уравнения

Пусть дано уравнение

$f(x)=0$, (1) где функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале *(a, b)*.

Корнем уравнения (1) называется всякое значение $x^* \in (a,\ b)$, для которого $f(x^*)=0$. Предполагаем, что для каждого корня уравнения (1) существует окрестность, не содержащая корней этого уравнения, т.е. все корни уравнения (1) изолированы.

Например, уравнение $f(x)=x^2-7\cdot x+10=0$ имеет два действительных корня $x_1^*=2, x_2^*=5$, которые изолированы: первый корень принадлежит отрезку [1,3], второй – [4,6].

Уравнение $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}=0$ имеет бесконечное счетное множество корней

$x_n^*=\dfrac{1}{n\cdot\pi}, n=\pm1,\pm2,\ldots,\pm k\ldots$. Любой корень этого уравнения отделен от другого,

так как для любого $n=k$ корень $x_n^*=\dfrac{1}{n\cdot\pi}$ лежит внутри отрезка $\left[\dfrac{1}{(k+0{,}5)\cdot\pi},\dfrac{1}{(k-0{,}5)\cdot\pi}\right]$, на котором нет других корней.

В практических ситуациях корни уравнений часто не удается определить точно. Иногда коэффициенты в уравнении заданы приближенно и задача определения точного корня вообще не имеет смысла. Нахождение приближенных корней уравнения происходит в два этапа: первый называется этапом локализации (или отделения) корней, второй – этапом итерационного уточнения корней до заданной степени точности.

2. Отделение корней уравнения графически

Отрезок $[a,b]$, содержащий только один корень x^* уравнения (1), называют отрезком локализации корня x^*. Цель этапа локализации считают достигнутой, если для каждого из подлежащих определению корней удалось указать отрезок локализации (его длину стараются по возможности сделать минимальной).

Прежде чем переходить непосредственно к отысканию отрезков локализации, имеет смысл провести предварительное исследование задачи для выяснения того, существуют ли вообще корни уравнения (1), сколько их и как они расположены на числовой оси.

На практике корни часто отделяют графическим методом. Если уравнение (1) заменить равносильным ему уравнением $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$, где графики функций $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ более просты, чем график функции $f(x)$, тогда приближенные корни уравнения (1) – абсциссы точек пересечения графиков $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Широко применяют построение таблиц значений функций *f* вида $y_i=f(x_i), i=1,2,\ldots,n.$ При этом способе локализации о наличии на отрезке $[a,b]$ корня судят по перемене знака функции на концах отрезка. Основанием для применения указанного способа служит следующая теорема.

Т е о р е м а 1. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, т.е. $f(a)\cdot f(b)<0$. Тогда отрезок $[a,b]$ содержит по крайней мере один корень уравнения $f(x)=0$.

3. Отделение корней аналитически

Прежде чем отделять корни уравнения, естественно найти границы области, в которой расположены все корни уравнения, поэтому мы сначала приведем ряд способов отыскания этих границ.

Для алгебраического уравнения

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0 \qquad (2)$$

задача отделения корней решается более просто и точно. Прежде чем отделять корни уравнения, естественно найти границы области, в которой расположены все корни уравнения, поэтому мы сначала приведем ряд способов отыскания этих границ.

Пусть $a = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|\}$, $a' = \max\{|a_0|, |a_2|, \cdots, |a_{n-1}|\}$.

Т е о р е м а 2. Все корни уравнения (2) расположены в кольце

$$\frac{|a_n|}{a' + |a_n|} \le |z| \le 1 + \frac{a}{|a_0|}. \qquad (3)$$

Предположим, что все коэффициенты уравнений – действительные числа и

$a_0 > 0$. Найдем границы действительных корней уравнения. Очевидно, достаточно иметь способы определения границ положительных корней, так как, заменяя *x* на

– *x*, получим уравнение, корни которого отличаются от корней исходного уравнения знаком.

Т е о р е м а 3. Обозначим через *a* максимум абсолютных величин отрицательных коэффициентов уравнения, и пусть первый отрицательный коэффициент в ряду $a_0, a_1, \cdots, a_n$ есть a_m. Тогда все положительные корни уравнения меньше $1 + \sqrt[m]{\frac{a}{a_0}}$, если отрицательных коэффициентов нет, то нет и положительных корней.

С помощью теоремы 3 можно найти границы действительных корней очень грубо. Иногда эти границы можно сузить, применив следующий простой прием.

Пусть в уравнении коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ неотрицательны, а $a_m, a_{m+1}, \cdots, a_n$ неположительны и $a_m < 0$. Введем обозначения:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{m-1} x^{n-m+1} \equiv \varphi(x),$$

$$a_m x^{n-m} + a_{m+1} x^{n-m-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \equiv -\psi(x).$$

Тогда

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x) = x^{n-m+1}\left\{\frac{\varphi(x)}{x^{n-m+1}} - \frac{\psi(x)}{x^{n-m+1}}\right\}.$$

Первое слагаемое в скобках содержит только положительные степени x, а второе – только отрицательные. Следовательно, при $x > 0$ первое слагаемое возрастает, а второе убывает с возрастанием x, т. е. при $x > 0$ функция *f(x)* возрастает вместе с *x*. Найдя какое-либо $x = \alpha > 0$, для которого $f(\alpha) > 0$, мы можем гарантировать, что все корни уравнения меньше α.

В общем случае представим *f(x)* в виде

$$f(x) = F(x) + \Phi(x),$$

где *F(x)* есть многочлен, содержащий все первые старшие по степени члены многочлена *f(x)*, имеющие положительные коэффициенты, и все члены с отрицательными коэффициентами, а *Φ(x)* — многочлен, образованный всеми остальными членами исходного многочлена *f(x)*. Тогда, если мы найдем $x = \alpha > 0$, для которого $F(\alpha) > 0$, то $f(x) > 0$ при всех $x \ge \alpha$, так как $\Phi(x) \ge 0$ при $x > 0$ и все корни уравнения $f(x) = 0$ будут меньше α.

Хороший способ отыскания верхней границы положительных корней указал Ньютон. Этот способ основан на утверждении: если при $x = a > 0$ имеют место неравенства

$$f(a)>0, \quad f'(a)>0, \quad \cdots, \quad f^{(n)}(a)>0, \tag{4}$$

то уравнение $f(x) = 0$ не имеет корней больших α.

Таким образом, способ Ньютона заключается в отыскании значения $a>0$, при котором многочлен *f(x)* и все его производные имеют положительное значение. Тогда это значение будет верхней границей положительных корней.

Замечание. Нижняя граница положительных корней может быть найдена из уравнения $a_0 + a_1 y + \cdots + a_n y^n = 0$ такими же приемами, так как если β есть верхняя граница положительных корней этого уравнения, то $\dfrac{1}{\beta}$ будет нижней границей положительных корней исходного уравнения.

4. Число действительных корней алгебраического уравнения

Точное число корней алгебраического уравнения, заключенных в данных пределах, может быть определено с помощью теоремы Штурма.

Теорема Штурма. Пусть дано алгебраическое уравнение $f(x)=0$ степени *n*, не имеющее кратных корней; найдем производную $f'(x)=f_1(x)$ и обозначим остаток от деления *f(x)* на $f'(x)$, взятый с обратным знаком, через $f_2(x)$; остаток от деления $f_1(x)$ на $f_2(x)$ с обратным знаком – через $f_3(x)$ и т. д., до тех пор пока не придем к постоянной. Получим последовательность функций $f(x), f_1(x), \cdots, f_n(x)$. Число действительных корней уравнения $f(x)=0$, расположенных на отрезке $[a,b]$, равно разности между числом перемен знака нашей последовательности функций при $x=a$ и числом перемен знака последовательности при $x=b$.

5. Приближенный корень уравнения

Пусть некоторый корень x^* уравнения (1) отделен на отрезке $[\alpha, \beta]$. Приближенным корнем уравнения (1) является значение $\bar{x} \in [\alpha, \beta]$, для которого выполняется условие $\left|\bar{x} - x^*\right| \le \varepsilon$, где $\varepsilon>0$ – точность, с которой требуется найти приближенный корень $\bar{x}$, т.е. ε является абсолютной погрешностью приближенного корня.

Обозначим $m_1 = \min\limits_{[\alpha,\beta]}\left|f'(x)\right|$ – наименьшее значение модуля производной функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. Если $m_1 > 0$, тогда справедлива следующая оценка погрешности приближенного корня:

$$\left|\bar{x} - x^*\right| \le \left|f(\bar{x})\right| / m_1. \tag{5}$$

Значение $f(\bar{x})$ является невязкой функции.

Иногда ошибочно поиск приближенного корня $\bar{x}$ продолжают до тех пор, пока не будет выполнено условие $\left|f(\bar{x})\right| \le \varepsilon$. Однако выполнение этого неравенства не гарантирует выполнения неравенства $\left|\bar{x} - x^*\right| \le \varepsilon$, т.е. приближения корня $\bar{x}$ с заданной точностью ε.

6. Метод половинного деления

Пусть корень x^* отделен на отрезке $[\alpha_0, \beta_0]$. Отрезок $[\alpha_0, \beta_0]$ делят на 2^1, 2^2,...,2^K,... частей, проверяя всякий раз, чтобы на очередном отрезке $[\alpha_k, \beta_k]$, *K=0,1,2,...* было выполнено условие (2). Деление отрезка продолжается до тех пор, пока при заданном ε не будет выполнено неравенство:

$$(\beta_0 - \alpha_0)/2^n \le \varepsilon, \tag{6}$$

где n – число делений отрезка $[\alpha_0, \beta_0]$. После этого полагают $\bar{x} = (\alpha_n - \beta_n)/2$. Погрешность уточняют по формуле (5).

7. Метод последовательных приближений (итераций)

Итерационные методы – специальные методы построения последовательных приближений к решению задачи. Применение их начинают с выбора одного или нескольких начальных приближений. Для получения каждого из последующих приближений выполняют однотипный набор действий с использованием найденных ранее приближений – итераций. Неограниченное продолжение итерационного процесса теоретически позволяет построить бесконечную последовательность приближений к решению – итерационную последовательность. Если эта последовательность сходится к решению задачи, то говорят, что итерационный метод сходится. Множество начальных приближений, для которых метод сходится, называется областью сходимости метода.

Скорость сходимости – одна из важнейших характеристик итерационных методов. Говорят, что метод сходится со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой $q<1$, если для всех n справедлива следующая оценка:

$$\left|x^{(n)} - x^*\right| \le c_0 q^n. \qquad (7)$$

Итерационный метод называют одношаговым, если для вычисления очередного приближения $x^{(n+1)}$ используется только одно предыдущее приближение $x^{(n)}$.

Пусть одношаговый итерационный метод обладает следующим свойством: существует σ-окрестность корня x^* такая, что если приближение $x^{(n)}$ принадлежит этой окрестности, то справедлива оценка

$$\left|x^{(n+1)} - x^*\right| \le C\left|x^{(n)} - x^*\right|^p, \qquad (8)$$

где $C>0$ и $p\geq 1$ – постоянные. В этом случае число p называют порядком сходимости метода.

Если уравнение $f(x)=0$ имеет корень $x=\alpha$, а функция $\psi(x)$ непрерывна в окрестности $x=\alpha$, то уравнение

$$x = \varphi(x) \equiv x - \psi(x) f(x) \qquad (9)$$

также имеет корень $x=\alpha$. Функцию $\psi(x)$ можно подобрать так, что итерационный процесс для уравнения (9) будет сходящимся.

<u>Метод хорд.</u> Пусть $f(x)$ – действительная функция действительного переменного x, а $x=\alpha$ – действительный корень уравнения $f(x)=0$. Предположим, что в некоторой окрестности точки $x=\alpha$ функция $f(x)$ вместе с $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывна, а $f'(x)$ и $f''(x)$ в этой окрестности не меняют знака. Это означает, что при переходе через $x=\alpha$ функция $f(x)$ меняет знак и имеет точку $x=\alpha$ простым

корнем. Пусть x_0 – точка рассматриваемой окрестности, в которой $f(x_0)f''(x_0)>0$. В (9) в качестве функции $\psi(x)$ возьмем функцию

$$\psi(x) \equiv \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

Тогда уравнение

$$x = \varphi(x) \equiv x - \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} f(x) = \frac{x_0 f(x) - x f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \qquad (10)$$

также имеет корнем через $x=\alpha$. За начальное приближение примем любую, достаточно близкую к α точку x_1 рассматриваемой окрестности, в которой $f(x_1)$ имеет знак, противоположный знаку $f(x_0)$, а последующие приближения будем строить обычным способом:

$$x_n = \frac{x_0 f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_0)}{f(x_{n-1}) - f(x_0)} \qquad (n = 2,3,\ldots) \tag{11}$$

Так как $f(x_n) = f(x_n) - f(\alpha)$, то, положив

$m = \min\limits_{x\in[x_0,x_1]} |f'(x)|$, будем иметь:

$$|x_n - \alpha| \le \frac{|f(x_n)|}{m}, \tag{12}$$

что позволяет на каждом шаге по значениям $f(x_n)$ следить за достигнутой точностью.

Метод хорд является итерационным методом первого порядка.

Метод Ньютона для решения уравнения $f(x) = 0$ получим, если положить в (9)

$$\psi(x) \equiv \frac{1}{f'(x)},$$

т.е. свести отыскание корня $x = \alpha$ уравнения $f(x) = 0$ к отысканию корня уравнения

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \equiv \varphi(x). \tag{13}$$

Будем предполагать, что на отрезке $[a,b]$, содержащем единственный корень $x = \alpha$ уравнения $f(x) = 0$, функция $f(x)$ имеет непрерывные производные $f'(x)$ и $f''(x)$, не обращающиеся в нуль на этом отрезке. В таком случае

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'^2(x) - f(x) f''(x)}{f'^2(x)}$$

и $\varphi'(\alpha) = 0$. Это означает, что существует такая окрестность точки $x = \alpha$, что если начальное приближение $x = x_0$ взято из этой окрестности, то последовательность

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \qquad (n = 1,2,\ldots) \tag{14}$$

будет сходиться к $x = \alpha$. Начальное приближение x_0 целесообразно выбирать так, чтобы было

$$f(x_0) f''(x_0) > 0. \tag{15}$$

Так как в методе Ньютона $\varphi'(\alpha) = 0$, а $\varphi''(\alpha)$, вообще говоря, не равна нулю, то этот метод является итерационным методом второго порядка.

Скорость сходимости метода Ньютона можно оценить следующим образом:

$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Если $m_1 = \min\limits_{[a,b]} |f'(x)|, \quad m_2 = \max\limits_{[a,b]} |f''(x)|,$ где $[a,b]$ – отрезок, содержащий x_0 и α, на котором не меняют знаки $f'(x)$ и $f''(x)$, то

$$|x_{n+1} - \alpha| \le \frac{m_2}{2m_1} |x_n - \alpha|^2. \tag{16}$$

При заданном ε процесс итерации следует продолжать до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| \cdot \frac{q}{1-q} \le \varepsilon . \qquad (17)$$

После этого полагают $\bar{x} = x_{n+1}$.

При решении уравнений методом итераций основную трудность представляет процесс отыскания *φ(x)*, которая удовлетворяет условию (9). Если у уравнения несколько корней, функция *φ(x)* для разных отрезков, на которых отделены корни, чаще всего имеет разный вид. Выбор *φ(x)* влияет на скорость сходимости: чем меньше величина *q*, тем быстрее сходится метод.

Лекция № 8,9 Интерполирование функций

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей своих значений:

$$y_i = f(x_i),\ i = 0,1,2,\ldots,n, \qquad (1)$$

причем $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, а расстояние $\mathrm{h} = \mathrm{x_i} - x_{i-1}$ между соседними узлами таблицы значений аргумента постоянно. В этом случае величину h называют шагом таблицы, а узлы – равноотстоящими.

Величину $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ принято называть конечной разностью первого порядка функции $y = f(x)$ в точке x_i. Конечная разность второго порядка определяется формулой $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$. Общее определение конечной разности порядка *k* таково:

$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$. Здесь $k \ge 1$b $\Delta^0 y_i = y_i$. Вычисления производятся в точках *x*, не совпадающих с табличными.

1. Интерполяционные формулы Ньютона.

Первая интерполяционная формула Ньютона имеет вид:

$$y(x) = P_n(x) = y_0 + g\Delta y_0 + \frac{g(g-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{g(g-1)\ldots(g-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \qquad (2)$$

где $g = \dfrac{x - x_0}{h}$, $\quad h = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, 1, ..., n-1$,

Число *n* желательно выбирать так, чтобы разности $\Delta^n y_i$ были практически постоянными.

Остаточный член $R_n(x)$ формулы имеет вид:

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{g(g-1)\ldots(g-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \qquad (3)$$

где ξ – некоторая внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы $x_i\ (i = 0, ..., n)$ и точку x.

При наличии дополнительного узла x_{i+1} на практике пользуются более удобной приближенной формулой.

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} g(g-1)\ldots(g-n). \qquad (4)$$

Первая формула Ньютона применяется для интерполирования и экстраполирования в точках x, близких к началу таблицы, $\Delta^n y_i$ – конечная разность *n*-го порядка, причем:

если *n*=1, то получается формула линейной интерполяции

$$y(x) = y_0 + g\Delta y_0; \qquad (5)$$

если *n*=2, то получается формула квадратичной интерполяции

$$y(x) = y_0 + g\Delta y_0 + \frac{g(g-1)}{2!}\Delta^2 y_0. \qquad (6)$$

<u>Вторая</u> интерполяционная формула Ньютона имеет вид:

$$y(x) = P_n(x) = y_n + g\Delta y_{n-1} + \frac{g(g+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{g(g+1)\ldots(g+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (7)$$

где $g = \dfrac{x - x_n}{h}$

Остаточный член $R_n(x)$ формулы имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{g(g+1)\ldots(g+n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \qquad (8)$$

где ξ – внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы $x_i, (i = 0,1,\ldots,n)$ и точку x.

Вторая формула Ньютона используется для интерполирования и экстраполирования в точках x, близких к концу таблицы, т.е. к x_n.

1. <u>Интерполяционная формула Лагранжа.</u>

Пусть x_i $(i = 0,\ldots.,n)$ – произвольные узлы, а $y_i = f(x_i)$ – значения функции $f(x)$. Многочленом степени n, принимающем в точках x_i значения y_i, является интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}. \qquad (9)$$

Остаточный член равен

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n), \qquad (10)$$

где ξ – некоторая точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы x_i $(i = 0,\ldots,n)$ и точку x.

Если требуется найти не общее выражение $L_n(x)$, а лишь его значения при конкретных x и при этом значения функции даны в достаточно большом количестве узлов, то удобно пользоваться интерполяционной схемой Эйткина. Согласно этой схеме последовательно вычисляются многочлены

$$L_{i,i+1}(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i}\begin{vmatrix} y_i & x_i - x \\ y_{i+1} & x_{i+1} - x \end{vmatrix}$$

$$L_{i,i+1,i+2}(x) = \frac{1}{x_{i+2} - x_i}\begin{vmatrix} L_{i,i+1}(x) & x_i - x \\ L_{i+1,i+2}(x) & x_{i+2} - x \end{vmatrix}$$

$$L_{i,i+1,i+2,i+3}(x) = \frac{1}{x_{i+3} - x_i}\begin{vmatrix} L_{i,i+1,i+2}(x) & x_i - x \\ L_{i+1,i+2,i+3}(x) & x_{i+3} - x \end{vmatrix} \quad \text{и т.д.}$$

Интерполяционный многочлен n-й степени, принимающий в точке x_i значения y_i $(i = 0,1,\ldots,n)$, запишется следующим образом:

$$L_{0,1,2,\ldots n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0}\begin{vmatrix} L_{0,1,\ldots,n-1}(x) & x_0 - x \\ L_{0,1,\ldots,n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}$$

Вычисления по схеме Эйткина обычно ведут до тех пор, пока последовательные значения $L_{0,1,\ldots,n}(x)$ и $L_{0,1,\ldots,n,n+1}(x)$ не совпадут в пределах заданной точности.

Лекция № 11, 12 Численное интегрирование

Заменяя подынтегральную функцию каким-либо интерполяционным многочленом, получаем квадратурные формулы вида

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R, \qquad (1)$$

где x_k – выбранные узлы интерполяции; A_k – коэффициенты, зависящие только от выбора узлов, но не от вида функции $(k = 0,1,\ldots,n)$; R – остаточный член, или погрешность квадратурной формулы. Отбрасывая остаточный член R, мы проводим погрешность усечения. При расчете к ней еще добавляются различные погрешности округления.

Разобьем отрезок интегрирования *[a,b]* на n равных частей системой точек

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0,1,\ldots,n),\ x_0 = a,\ x_n = b,\ h = \frac{b-a}{n}$$

и вычислим подынтегральную функцию в полученных узлах

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 0,1,\ldots,n).$$

Квадратурные формулы для равноотстоящих узлов называются формулами Ньютона – Котеса. Формулы Ньютона – Котеса различаются степенями использования интерполяционных многочленов. Чтобы не иметь дело с многочленами высоких степеней, обычно разбивают промежуток интегрирования на отдельные участки, применяют формулы Ньютона – Котеса с невысокими степенями на каждом участке и потом складывают полученные результаты (что дает так называемые составные формулы).

В квадратурных формулах Гаусса

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i) + R_n(f) \qquad (4)$$

коэффициенты A_i и абсциссы t_i $(i = 0,1,\ldots n)$ подбираются так, чтобы формула была точной для всех многочленов наивысшей возможной степени N. Числа A_i, t_i определены однозначно при $N = 2n-1$. В табл. 7 приведены значения абсцисс t_i и коэффициентов A_i, а также формулы остаточных членов $R_n(f)$ при $n = 4,5,7$.

Неудобство применения квадратурной формулы Гаусса состоит в том, что коэффициенты A_i и абсциссы t_i, вообще говоря, иррациональные числа. Этот недостаток искупается ее высокой точностью при сравнительно малом числе узлов интегрирования. В тех случаях, когда подынтегральная функция сложна и на вычисление ее значений в каждом узле интегрирования требуется много времени, использовать формулу Гаусса особенно выгодно.

Лекция № 12,13 Численное дифференцирование

Лекция № 14, 15 Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

1. *Общая постановка задачи*

Пусть дано дифференциальное уравнение второго порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0. \qquad (1)$$

Двухточечная краевая задача для уравнения (1) ставится следующим образом: найти функцию $y = y(x)$, которая внутри отрезка $[a;b]$ удовлетворяет уравнению (1), а не на концах отрезка – краевым условиям.

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(y(a), y'(a)) = 0\\ \varphi_2(y(b), y'(b)) = 0\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Рассмотрим случай, когда уравнение (1) и граничные условия (2) линейны. Такая краевая задача называется линейной краевой задачей. В этом случае дифференциальное уравнение и краевые условия записываются так:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A\\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B\end{aligned}\right\}, \qquad (4)$$

где $p(x), q(x), f(x)$ – известные непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, A, B$ – заданные постоянные, причем $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$ и $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

Если $A = B = 0$, то краевые условия (4) называются однородными.

Пусть $x_0 = a, x_n = b, x_i = x_0 + ih, (i = 1,2,\ldots,n-1)$ – система равноотстоящих узлов с некоторым шагом $h = \dfrac{b-a}{n}$ и $p_i = p(x_i), q_i = q(x_i), f_i = f(x_i)$.

Обозначим получаемые в результате расчета приближенные значения искомой функции $y(x)$ и ее производных $y'(x), y''(x)$ в узлах x_i через y_i, y'_i, y''_i соответственно. Заменим приближенно в каждом внутреннем узле производные $y'(x_i), y''(x_i)$ центрально-разностными отношениями

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \qquad (5)$$

а на концах положим

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}. \qquad (6)$$

Тогда получаем систему

$$\left.\begin{aligned}&\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} p_i + q_i y_i = f_i, \quad (i = 0,1,2,\ldots,n-1)\\ &\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, \quad \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B.\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Оценка погрешностей метода конечных разностей для задач (3), (4) имеет вид:

$$|y_i - y(x_i)| \le \frac{h^2 M_4}{96}(b-a)^2, \qquad (8)$$

где $y(x_i)$ – значение точного решения при $x = x_i$, $M_4 = \max\limits_{[a,b]} |y^{(4)}(x)|$.

2. Метод последовательных приближений.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y), \quad (9)$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0. \quad (10)$$

Метод последовательных приближений состоит в том, что решение $y(x)$ получают как предел последовательности функций $y_n(x)$, которые находят по рекуррентной формуле

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))dx. \quad (11)$$

Доказано [10], что если правая часть $f(x, y)$ в некотором замкнутом прямоугольнике $R : \{|x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$ удовлетворяет условию Липшица по y:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le N|y_1 - y_2|, N = const, \quad (12)$$

то независимо от выбора начальной функции последовательные приближения $y_n(x)$ сходятся на некотором отрезке $[x_0, x_0 + h]$ к решению задачи (10), (11).

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике *R*, то оценка погрешности приближенного решения $y_n(x)$ на отрезке $[x_0, x_0 + h]$ дается неравенством

$$\varepsilon_n = |y(x) - y_n(x)| \le MN^n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (13)$$

где $M = \max\limits_{(x,y)\in R} |f(x, y)|$, а число *h* определяется из условия

$$h = \min(a, \frac{b}{M}). \quad (14)$$

В качестве начального приближения $y_0(x)$ можно взять любую функцию, достаточно близкую к точному решению. Иногда, например, выгодно в качестве $y_0(x)$ брать приближенное решение уравнения (9), полученное в виде частичной суммы ряда Тейлора.

Метод последовательных приближений применим и для решения системы дифференциальных уравнений, а также для решения дифференциального уравнения n-го порядка, если его записать в виде системы.

Лекция № 16, 17, 18. Численное решение уравнений с частными производными и интегральных уравнений

Метод сеток, или метод конечных разностей, – один из самых распространенных в настоящее время методов численного решения уравнений с частными производными. В его основе лежит идея замены производных конечно-разностными отношениями.

Будем рассматривать лишь случай двух независимых переменных. Пусть в плоскости xOy имеется некоторая область G с границей Γ (рис. 4). Построим на плоскости два семейства параллельных прямых:

$$x = x_0 + ih \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$
$$y = y_0 + kl \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

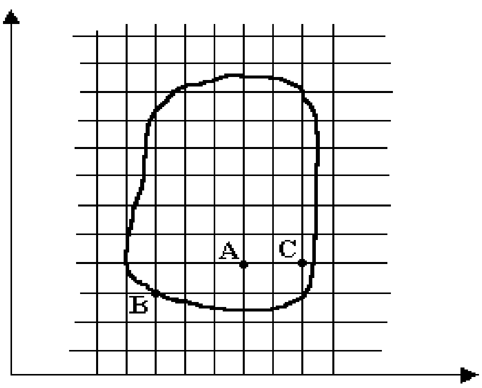

Рис. 4.

Точки пересечения этих прямых назовем узлами. Два узла называются соседними, если они удалены друг от друга в направлении оси Ox или Oy на расстояние, равное шагу сетки *h* или *l* соответственно. Выделим узлы, принадлежащие области $G+\Gamma$, а также некоторые, не принадлежащие этой области, но расположенные на расстоянии меньше чем шаг от границы Γ. Те узлы, у которых все четыре соседних узла принадлежат выделенному множеству, называются внутренними (узел A, рис. 4), оставшиеся из выделенных узлов называются граничными (узлы B,C, рис. 4).

Значения искомой функции $u=u(x,y)$ в узлах сетки будем обозначать через $u_{ik}=u(x_0+ih,y_0+kl)$. В каждом внутреннем узле (x_0+ih,y_0+kl) заменим частные производные разностными отношениями:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ik}\approx\frac{u_{i+1,k}-u_{i-1,k}}{2h},\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ik}\approx\frac{u_{i,k+1}-u_{i,k-1}}{2l}. \qquad (1.1)$$

В граничных точках приходится пользоваться менее точными формулами вида:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ik}\approx\frac{u_{i+1,k}-u_{i,k}}{h},\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ik}\approx\frac{u_{i,k+1}-u_{i,k}}{l}. \qquad (1.2)$$

Аналогично заменяются частные производные второго порядка, – например:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ik}&\approx\frac{u_{i+1,k}-2u_{i,k}+u_{i-1,k}}{h^2},\\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ik}&\approx\frac{u_{i,k+1}-2u_{i,k}+u_{i,k-1}}{l^2}\end{aligned}\right\} \qquad (1.3)$$

Указанные замены производных в каждом узле сетки позволяют свести решение уравнений с частными производными к решению системы разностных уравнений.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Практическая работа № 1

Вариант № I.

1. Округляя следующие числа до трех значащих цифр, определить абсолютную Δ и относительную δ погрешности полученных приближенных чисел: 2,1514; 0,16152; 0,003922.

2. Найти сумму приближенных чисел, все знаки которых верны, и указать ее абсолютную и относительную погрешности:

23,4 + 0,263 + 445.

3. Определить количество верных цифр в числе, если известна его относительная погрешность:

а) a = 1,8921, $\delta a = 0{,}1\cdot10^{-2}$;

б) a = 0,00564, δa = 0,15.

4. Сторона квадрата равна 3,07 м ± 0,02 м. Вычислить площадь квадрата, округлив результат до верных знаков.

5. Вычислить значение функции при заданных значениях переменных. Определить относительную и абсолютную погрешности результата, считая все знаки исходных данных верными:

$$U=e^{x_1+x_2^2},\ \text{если}\ x_1=0{,}85,\ x_2=0{,}632.$$

Вариант № 2.

1. Определить относительную погрешность чисел

$a = 27684$, $в = 5{,}18$, если $\Delta a = 0{,}3 \cdot 10^{-1}$; $\Delta в = 0{,}4 \cdot 10^{-3}$.

2. Определить число верных значащих цифр в числах x_1, x_2:

$x_1 = 0{,}52432$, если $\delta x_1 = 0{,}002$ %;

$x_2 = 29{,}3846$ если $\delta x_2 = 0{,}34$ %.

3. Найти частное приближенных чисел 0,327 : 15,4236 (у делимого и делителя все знаки верные) и указать его погрешности.

4. Стороны прямоугольника равны $4{,}02 \pm 0{,}01$, $4{,}96 \pm 0{,}01$ м. Вычислить его площадь.

5. Вычислить значение функции при заданных значениях аргумента. Определить относительную и абсолютную погрешности результата, считая все знаки исходных данных верными:

$y = x \cdot \ln x$, если $x = \pi$, $\pi \approx 3{,}142$.

Вариант № 3.

1. Определить число верных значащих цифр в числах:

$a = 38441$; $в = 2{,}623$, если $\delta a = 0{,}5$, $\delta в = 0{,}8 \cdot 10^{-1}$.

2. Определить абсолютную погрешность следующих приближенных чисел:

$a = 17{,}296$; $в = 0{,}002968$, если $\delta a = 2$ %, $\delta в = 0{,}9$ %.

3. Найти произведение приближенных чисел $0{,}305 \cdot 264{,}8 \cdot 25{,}0543$ и указать его погрешности (считать в исходных данных все знаки верными).

4. Катеты прямоугольного треугольника равны $12{,}10 \pm 0{,}01$, $25{,}21 \pm 0{,}01$ см. Вычислить тангенс угла, противолежащего первому катету.

5. Вычислить значение функции при заданных значениях аргумента. Определить относительную и абсолютную погрешности результата, считая все знаки исходных данных верными:

$y = e^x \cdot \cos x$, если $x = \sqrt{3}$, $\sqrt{3} \approx 1{,}732$.

Вариант № 4.

1. Округляя следующие числа до трех значащих цифр, определить абсолютную Δ и относительную δ погрешности полученных приближенных чисел: 0,01204; 0,1545; -392,85.

2. Вычислить выражение

$Z = \dfrac{4{,}6 \cdot 293{,}28 \cdot 0{,}07625}{1{,}3846 + 19{,}423}$, считая, что все числа даны с верными знаками. Определить число верных значений результата.

3. Определить количество верных цифр в числе, если известна его относительная погрешность:

а) $a = 0{,}11456$, $\delta a = 10\%$;

б) $a = 14{,}9360$, $\delta a = 0{,}15$.

4. Найти абсолютную и относительную погрешности объема шара

$V = \dfrac{1}{6}\pi d^3$, если диаметр шара $d = 3{,}2 м \pm 0{,}04 м; \pi = 3{,}14$.

5. Вычислить значение функции при указанных значениях переменных. Определить относительную и абсолютную погрешности результата, считая все знаки исходных данных верными:

$$u = \frac{x_1 + x_2^2}{x_3}, \quad x_1 = 3{,}28, \quad x_2 = 0{,}932, \quad x_3 = 1{,}132.$$

Вариант № 5.

1. Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки. Определить абсолютную погрешность результата

а) $c = 0{,}2837$; $\delta c = 0{,}042\%$;

б) $d = 13{,}6253 \pm 0{,}0038$.

1. Округляя следующие числа до трех значащих цифр, определить абсолютную Δ и относительную δ погрешности полученных приближенных чисел: 94,525; 0,1545; – 0,0015281.
2. Найти сумму приближенных чисел, все знаки которых верны, и указать ее абсолютную и относительную погрешности:

398,5 – 72,28 + 0,34567.

4. Найти допустимую абсолютную погрешности для *cos* 1,244, считая, что в исходном числе 1,244 все знаки верные.

5. Вычислить и определить абсолютную и относительную погрешности результата

$$x = \frac{a \cdot b}{\sqrt[3]{c}}, \text{ если } a = 3{,}85 \pm 0{,}03;\ b = 2{,}0237 \pm 0{,}0005;\ c = 839{,}7 \pm 0{,}04.$$

Вариант № 6.

3. Определить, какое равенство точнее: $\frac{2}{21} \approx 0{,}095$; $\sqrt{22} \approx 4{,}69$.
4. Определить количество верных значащих цифр в числах и округлить их до верных цифр, если известна относительная погрешность:

а) $x = 197{,}3587$, $\delta x = 7\%$;

б) $a = 22,\ 351$, $\delta x = 0{,}1$.

3. Найти произведение приближенных чисел и указать его погрешности (считать в исходных данных все знаки верными):

1,78 · 9,1 · 1,183.

4. Высота h и радиус основания R цилиндра измерены с точностью до 0,5%. Какова относительная погрешность при вычислении объема цилиндра?

5. Вычислить абсолютную и относительную погрешности результата

$$Y = \frac{m^2 \cdot n}{e^x}, \quad \text{где } m = 1{,}6531 \pm 0{,}0003;\ \ n = 3{,}78 \pm 0{,}002;$$

$$x = 0{,}158 \pm 0{,}0005.$$

Вариант № 7.

1. Определить, какое равенство точнее:

$$\frac{6}{7} \approx 0{,}857; \qquad \sqrt{4{,}8} \approx 2{,}19.$$

2. Определить количество верных значащих цифр в числе, если известна его абсолютная погрешность:

а) $x = -246{,}02401$; $\Delta x = 0{,}5$;

б) $x = 0{,}1132$; $\Delta x = 0{,}27 \cdot 10^{-2}$.

3. Найти частное приближенных чисел и указать его погрешности (считать в исходных данных все знаки верными):

216 : 4,2 : 5,032.

4. При измерении радиуса R круга с точностью до 0,5 см получилось 12 см. Найти абсолютную и относительную погрешности при вычислении площади круга.

5. Вычислить и определить абсолютную и относительную погрешности результата $Y = \dfrac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$, где $a = 10{,}82 \pm 0{,}03$; $b = 2{,}786 \pm 0{,}0006$;

$m = 0{,}28 \pm 0{,}006$; $n = 14{,}7 \pm 0{,}006$.

Вариант № 8.

1. Определить абсолютную погрешность следующих приближенных чисел по их относительным погрешностям:

а) $a = 13{,}374$, $\delta = 0{,}1\%$;

б) $a = 0{,}004506$, $\delta = 10\%$.

2. Определить количество верных значащих цифр в числе, если известна его абсолютная погрешность:

а) $x = 14{,}07804$; $\Delta x = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$;

б) $x = -0{,}6783$; $\Delta x = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$.

3. Найти частное приближенных чисел 5,853 : 5,043 : 1,2 (у делимого и делителя все знаки верные) и указать его погрешности.

4. Корни уравнения $x^2 - 2 \cdot x + \lg 2 = 0$ нужно получить с четырьмя верными значащими цифрами. С каким числом верных значащих цифр надо взять свободный член уравнения?

5. Вычислить и определить абсолютную и относительную погрешности результата:

$$S = \frac{h^2}{18} : \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2},$$ если $a = 2{,}234$; $b = 4{,}518$; $h = 4{,}48$.

Вариант № 9.

1. Определить количество верных цифр в числе, если известна его относительная погрешность

а) $x = 485{,}623$, $\delta x = 0{,}2\ \%$,

б) $x = 4{,}376$, $\delta x = 0{,}76\ \%$.

2. Округляя следующие числа до трех значащих цифр, определить абсолютную Δ и относительную δ погрешности полученных приближенных чисел: 625,668; 0,006503; –15,281.

3. Найти сумму приближенных чисел и указать ее погрешность:

0,2434 + 3,2985 + 26,3768 + 7,65 + 25,7654 + 17,3507

(все знаки у слагаемых верны).

4. При измерении радиуса R круга с точностью 0,04 м получилось число 0,21 м. Найти абсолютную и. относительную погрешности при вычислении площади круга.

5. Вычислить значение функции при указанных значениях переменных. Определить относительную и абсолютную погрешности результата, считая все знаки исходных данных верными:

$$u = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3, \quad x_1 = 2{,}104, \quad x_2 = 1{,}935, \quad x_3 = 0{,}845.$$

Вариант № 10.

1. Определить относительную погрешность чисел

$a = 35{,}724$, $в = 0{,}06048$, если $\Delta a = 0{,}1 \cdot 10^{-1}$; $\Delta в = 0{,}6 \cdot 10^{-3}$.

2. Определить количество верных цифр в числах x_1, x_2, если известна их относительная погрешность:

$x_1 = 48361$, если $\delta x_1 = 1\ \%$,

$x_2 = 22{,}351$, если $\delta x_2 = 0{,}1$.

3. Найти сумму приближенных чисел и указать ее погрешность:

0,3014 + 193,2 + 26,37 + 17,307

(все знаки у слагаемых верны).

4. Катет прямоугольного треугольника равен 1,12 м ± 0,01 м, а гипотенуза – 2,420 м ± 0,01 м. Вычислить cos угла, прилежащего к катету, и относительную погрешность cos.

5. Даны: $x = 8{,}34 \pm 0{,}005;\ y = 7{,}2 \pm 0{,}05.$ Вычислить

$$Z = \frac{\sin(3 \cdot x + 0{,}7 \cdot y)}{e^{0{,}4 \cdot x + 0{,}5 \cdot y}} \cdot (7 \cdot x + \ln y).$$

Определить абсолютную и относительную погрешность результата, считая все знаки исходных данных верными.

Практическая работа № 2

1. Используя схему Гаусса, решить систему уравнений с точностью до 0, 0001. При решении выполнять контрольную проверку.
2. Вычислить невязку решения.
3. Найти абсолютную и относительную погрешности решения.
4. Вычислить определитель матрицы А по методу Гаусса.

<u>Вариант № I.</u>

1) $\begin{cases} 3{,}21x_1 - 4{,}25x_2 + 2{,}13x_3 = 5{,}06; \\ 7{,}09x_1 + 1{,}17x_2 - 2{,}23x_3 = 4{,}75; \\ 0{,}43x_1 - 1{,}4x_2 - 0{,}62x_3 = -1{,}05. \end{cases}$ 2) $A = \begin{vmatrix} 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}44 \\ 0{,}54 & 0{,}32 & 1{,}00 & 0{,}22 \\ 0{,}66 & 0{,}44 & 0{,}22 & 1{,}00 \end{vmatrix}.$

<u>Вариант № 2.</u>

1) $\begin{cases} 0{,}42x_1 - 1{,}13x_2 + 7{,}05x_3 = 6{,}15; \\ 1{,}14x_1 - 2{,}15x_2 + 5{,}11x_3 = -4{,}16; \\ -0{,}71x_1 + 0{,}81x_2 - 0{,}02x_3 = -0{,}17. \end{cases}$ 2) $A = \begin{vmatrix} 1{,}00 & 0{,}17 & -0{,}25 & 0{,}54 \\ 0{,}47 & 1{,}00 & 0{,}67 & -0{,}32 \\ -0{,}11 & 0{,}35 & 1{,}00 & -0{,}74 \\ 0{,}55 & 0{,}43 & 0{,}36 & 1{,}00 \end{vmatrix}.$

<u>Вариант № 3.</u>

1) $\begin{cases} 2{,}5x_1 - 3{,}12_2 - 4{,}03x_3 = -7{,}5; \\ 0{,}61x_1 + 0{,}71x_2 - 0{,}05_3 = 0{,}44; \\ -1{,}03x_1 - 2{,}05x_2 + 0{,}877x_3 = -1{,}16. \end{cases}$ 2) $A = \begin{vmatrix} 8{,}2 & 1{,}4 & -2{,}3 & 0{,}2 \\ -1{,}6 & 5{,}4 & -7{,}7 & 3{,}1 \\ 0{,}7 & 1{,}9 & -8{,}5 & 4{,}8 \\ 5{,}3 & -5{,}9 & 2{,}7 & -7{,}9 \end{vmatrix}.$

<u>Вариант № 4.</u>

1) $\begin{cases} 7{,}09x_1 + 1{,}17x_2 - 2{,}23x_3 = -4{,}75; \\ 0{,}43x_1 - 1{,}4x_2 - 0{,}62x_3 = -1{,}05; \\ 3{,}21x_1 - 4{,}25x_2 + 2{,}13x_3 = 5{,}06. \end{cases}$ 2) $A = \begin{vmatrix} 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}44 \\ 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 0{,}66 & 0{,}44 & 0{,}22 & 1{,}00 \\ 0{,}54 & 0{,}32 & 1{,}00 & 0{,}22 \end{vmatrix}.$

Вариант № 5.

$$1)\ \begin{cases} 1{,}14x_1 - 2{,}15x_2 - 5{,}11x_3 = -4{,}16; \\ -0{,}71x_1 + 0{,}81x_2 - 0{,}02x_3 = -0{,}17; \\ 0{,}42x_1 - 1{,}13x_2 + 7{,}05x_3 = 6{,}15. \end{cases} \qquad 2)\ A = \begin{vmatrix} 0{,}47 & 1{,}00 & 0{,}67 & -0{,}32 \\ 1{,}00 & 0{,}17 & -0{,}25 & 0{,}54 \\ 0{,}55 & 0{,}43 & 0{,}36 & 1{,}00 \\ -0{,}11 & 0{,}35 & 1{,}00 & -0{,}74 \end{vmatrix}.$$

Вариант № 6.

$$1)\ \begin{cases} 0{,}61\mathrm{x}_1 + 0{,}71x_2 - 0{,}05x_3 = 0{,}04; \\ -1{,}03x_1 - 2{,}05x_2 + 0{,}87x_3 = -1{,}16; \\ 2{,}5x_1 - 3{,}12x_2 - 5{,}03x_3 = -7{,}5. \end{cases} \qquad 2)\ A = \begin{vmatrix} -1{,}6 & 5{,}4 & -7{,}7 & 3{,}1 \\ 8{,}2 & 1{,}4 & -2{,}3 & 0{,}2 \\ 5{,}3 & -5{,}9 & 2{,}7 & -7{,}9 \\ 0{,}7 & 1{,}9 & -8{,}5 & 4{,}8 \end{vmatrix}.$$

Вариант № 7.

$$1)\ \begin{cases} 3{,}11x_1 - 1{,}66x_2 - 0{,}60x_3 = -0{,}92; \\ -1{,}65x_1 + 3{,}51x_2 - 0{,}78x_3 = 2{,}57; \\ 0{,}60x_1 + 0{,}78x_2 - 1{,}87x_3 = 1{,}65. \end{cases} \qquad 2)\ A = \begin{vmatrix} 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}44 \\ 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 0{,}66 & 0{,}44 & 0{,}22 & 1{,}00 \\ 0{,}54 & 0{,}32 & 1{,}00 & 0{,}22 \end{vmatrix}.$$

Вариант № 8.

$$1)\ \begin{cases} 0{,}10x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}13x_3 = 0{,}10; \\ 0{,}12x_1 + 0{,}71x_2 + 0{,}15x_3 = 0{,}26; \\ -0{,}13x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}63x_3 = 0{,}38. \end{cases} \qquad 2)\ A = \begin{vmatrix} 1{,}13 & 0{,}15 & 0{,}26 & -0{,}43 \\ 0{,}45 & 0{,}62 & -0{,}80 & 0{,}74 \\ 0{,}62 & -1{,}12 & 0{,}64 & 0{,}78 \\ -0{,}13 & 0{,}73 & 0{,}16 & -0{,}36 \end{vmatrix}.$$

Вариант № 9.

$$1)\ \begin{cases} 0{,}71x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}12x_3 = 0{,}29; \\ 0{,}10x_1 + 0{,}34x_2 - 0{,}04x_3 = -0{,}32; \\ 0{,}12x_1 - 0{,}04x_2 + 0{,}10x_3 = -0{,}10. \end{cases} \qquad 2)\ A = \begin{vmatrix} 0{,}47 & 1{,}00 & 0{,}67 & -0{,}32 \\ 1{,}00 & 0{,}17 & -0{,}25 & 0{,}54 \\ 0{,}55 & 0{,}43 & 0{,}36 & 1{,}00 \\ -0{,}11 & 0{,}35 & 1{,}00 & -0{,}74 \end{vmatrix}.$$

Вариант № 10.

1) $\begin{cases} 0{,}34x_1 - 0{,}04x_2 + 0{,}10x_3 = 0{,}33; \\ -0{,}04x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}12x_3 = -0{,}05; \\ 0{,}10x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}71x_3 = 0{,}28. \end{cases}$ 2) $A = \begin{vmatrix} 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}44 \\ 0{,}54 & 0{,}32 & 1{,}00 & 0{,}22 \\ 0{,}66 & 0{,}44 & 0{,}22 & 1{,}00 \end{vmatrix}$.

Практическая работа № 4

1. Используя первую или вторую интерполяционные формулы Ньютона, вычислить значения функции при данных значениях аргумента. При составлении таблицы разностей контролировать вычисления (см. табл. 1 – 10).

2. Используя схему Эйткина, вычислить приближенное значение функции, заданной таблично, при данном значении аргумента (см. табл. 11 –16).

Таблица 1.

x	y	№ варианта	Значения аргумента			
			x_1	x_2	x_3	x_4
1,415	0,888551	1	1,4161	1,4625	1,4135	1,470
1,420	0,889599	11	1,4179	1,4633	1,4124	1,4655
1,425	0,890637	21	1,4263	1,4575	1,410	1,4662
1,430	0,891667					
1,435	0,892687					
1,440	0,893698					
1,445	0,894700					
1,450	0,895693					
1,455	0,896677					
1,460	0,897653					
1,465	0,898619					

Таблица 2.

x	y	№ варианта	Значения аргумента			
			x_1	x_2	x_3	x_4
0,115	8,65729	2	0,1217	0,1736	0,1141	0,185
0,120	8,29329	12	0,1168	0,1745	0,110	0,1825
0,125	7,95829	22	0,1175	0,1773	0,1134	0,190
0,130	7,64893					
0,135	7,36235					
0,140	7,09613					
0,145	6,84815					
0,150	6,61659					

0,155	6,39986
0,160	6,19658
0,165	6,00551
0,170	5,82558
0,175	5,65583
0,180	5,49543

Таблица 3.

x	y	№ варианта	Значения аргумента			
			x_1	x_2	x_3	x_4
0,15	0,860708	3	0,1511	0,7250	0,1430	0,80
0,20	0,818731	13	0,1535	0,7333	0,100	0,7540
0,25	0,778801	23	0,1525	0,6730	0,1455	0,85
0,30	0,740818					
0,35	0,704688					
0,40	0,670320					
0,45	0,637628					
0,50	0,606531					
0,55	0,576950					
0,60	0,548812					
0,65	0,522046					

Таблица 4.

x	y	№ варианта	Значения аргумента			
			x_1	x_2	x_3	x_4
0,180	5,61543	4	0,1817	0,2275	0,175	0,2375
0,185	5,46693	14	0,1827	0,2292	0,1776	0,240
0,190	5,32634	24	0,1873	0,2326	0,1783	0,245
0,195	5,19304					
0,200	5,06649					
0,205	4,94619					
0,210	4,83170					
0,215	4,72261					
0,220	4,61855					
0,225	4,51919					

0,230	4,42422
0,235	4,33337

Таблица 5.

x	y	№ варианта	Значения аргумента			
			x_1	x_2	x_3	x_4
3,50	33,1154	5	3,522	4,176	3,475	4,25
3,55	34,8133	15	3,543	4,184	3,488	4,30
3,60	36,5982	25	3,575	4,142	3,45	4,204
3,65	38,4747					
3,70	40,4473					
3,75	42,5211					
3,80	44,7012					
3,85	46,9931					
3,90	49,4024					
3,95	51,9354					
4,00	54,5982					
4,05	57,3975					
4,10	60,3403					
4,15	63,4340					
4,20	66,6863					

Таблица 6.

x	y	№ варианта	Значения аргумента			
			x_1	x_2	x_3	x_4
0,101	1,26183	6	0,1026	0,1440	0,099	0,161
0,106	1,27644	16	0,1035	0,1492	0,096	0,153
0,111	1,29122	26	0,1074	0,1485	0,1006	0,156
0,116	1,30617					
0,121	1,32130					
0,126	1,33660					
0,131	1,35207					
0,136	1,36773					
0,141	1,38357					
0,146	1,39959					

0,151	1,41579

Таблица 7.

x	y	№ варианта	Значения аргумента			
			x_1	x_2	x_3	x_4
1,340	4,25562	7	1,3617	1,3921	1,3359	1,400
1,345	4,35325	17	1,4363	1,3868	1,335	1,3990
1,350	4,45522	27	1,3432	1,3936	1,3365	1,3975
1,355	4,56184					
1,360	4,67344					
1,365	4,79038					
1,370	4,91306					
1,375	5,04192					
1,380	5,17744					
1,385	5,32016					
1,390	5,47069					
1,395	5,62968					

Таблица 8.

x	y	№ варианта	Значения аргумента			
			x_1	x_2	x_3	x_4
0,01	0,991824	8	0,027	0,525	0,008	0,61
0,06	0,951935	18	0,1243	0,492	0,0094	0,66
0,11	0,913650	28	0,083	0,5454	0,0075	0,573
0,16	0,876905					
0,21	0,841638					
0,26	0,807789					
0,31	0,775301					
0,36	0,744120					
0,41	0,714193					
0,46	0,685470					
0,51	0,657902					
0,56	0,631442					

Таблица 9.

x	y	№ варианта	Значения аргумента			
			x_1	x_2	x_3	x_4
0,15	4,4817	9	0,1539	0,2569	0,14	0,2665
0,16	4,9530	19	0,1732	0,2444	0,1415	0,27
0,17	5,4739	29	0,1648	0,2550	0,1387	0,28
0,18	6,0496					
0,19	6,6859					
0,20	7,3891					
0,21	8,1662					
0,22	9,0250					
0,23	9,9742					
0,24	11,0232					
0,25	12,1824					
0,26	13,4637					

Таблица 10.

X	y	№ варианта	Значения аргумента			
			x_1	x_2	x_3	x_4
0,45	20,1946	10	0,455	0,5575	0,44	0,5674
0,46	19,6133	20	0,4732	0,5568	0,445	0,57
0,47	18,9425	30	0,4675	0,5511	0,4423	0,58
0,48	18,1746					
0,49	17,3010					
0,50	16,3123					
0,51	15,1984					
0,52	13,9484					
0,53	12,5508					
0,54	10,9937					
0,55	9,2647					
0,56	7,3510					

Таблица 11.

x	y	№ варианта	x

0,2050	0,207921	1	0,2054
0,2052	0,208130	7	0,2063
0,2060	0,208964	13	0,2072
0,2065	0,209486	19	0,2079
0,2069	0,209904	25	0,2088
0,2075	0,210530		
0,2085	0,211575		
0,2090	0,212097		
0,2096	0,212724		
0,2100	0,213142		

Таблица 12.

x	y	№ варианта	x
0,8902	1,23510	2	0,8945
0,8909	1,23687	8	0,8973
0,8919	1,23941	14	0,8958
0,8940	1,24475	20	0,8948
0,8944	1,24577	26	0,8934
0,8955	1,24858		
0,8965	1,25114		
0,8975	1,25371		
0,9010	1,26275		
0,9026	1,26691		

Таблица 13.

x	y	№ варианта	x
0,6100	1,83781	3	0,6111
0,6104	1,83686	9	0,6124
0,6118	1,83354	15	0,6142
0,6139	1,82860	21	0,6163
0,6145	1,82720	27	0,6192
0,6158	1,82416		
0,6167	1,82207		

0,6185	1,81791
0,6200	1,81446
0,6225	1,80876

Таблица14.

x	y	№ варианта	x
0,5400	1,66825	4	0,5415
0,5405	1,66636	10	0,5424
0,5410	1,66448	16	0,5436
0,5420	1,66071	22	0,5452
0,5429	1,65734	28	0,5461
0,5440	1,65322		
0,5449	1,64987		
0,5455	1,64764		
0,5465	1,64393		
0,5473	1,64097		

Таблица 15.

x	y	№ варианта	x
0,62	0,537944	5	0,846
0,67	0,511709	11	0,864
0,74	0,477114	17	0,683
0,80	0,449329	23	0,785
0,87	0,418952	29	0,866
0,96	0,382893		
0,99	0,371577		

Таблица 16.

x	y	№ варианта	x
1,03	2,80107	6	1,277
1,08	2,94468	12	1,118
1,16	3,18993	18	1,204

1,23	3,42123	24	1,255
1,26	3,52542	30	1,282
1,33	3,78104		
1,39	4,01485		

Практическая работа № 5

1. Вычислить интеграл по формуле Гаусса.
2. Вычислить интеграл с помощью разложения подынтегральной функции в ряд.
3. Вычислить интеграл, применяя метод Канторовича или используя квадратурную формулу с весом.

Вариант № 1.

1) $\int\limits_{-0,5}^{1,3}\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}},\quad при\quad N=5;$ 2) $\int\limits_0^1\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx,\quad \varepsilon=10^{-4};$

3) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}\cdot(1+x)}\quad с\ точностью\ до\ 10^{-6}.$

Вариант № 2.

1) $\int\limits_2^{3,2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}dx,\quad при\quad N=5;$ 2) $\int\limits_0^1\frac{sh\,x}{x}dx,\quad \varepsilon=10^{-3};$

3) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{(1-x)^3}}\quad с\ точностью\ до\ 10^{-4}.$

Вариант № 3.

1) $\int\limits_{0,5}^{1,6}\frac{x^2+0,5}{\sqrt{x^2+1}}dx,\quad при\quad N=5;$ 2) $\int\limits_0^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}},\quad \varepsilon=10^{-3};$

3) $\int\limits_0^2\frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\left(e^{x/2}+3\right)}\quad с\ точностью\ до\ 10^{-5}.$

Вариант № 4.

1) $\int\limits_{2,2}^{3,4}\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}dx,\quad при\quad N=5;$ 2) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}},\quad \varepsilon=10^{-3};$

3) $\int\limits_{-1}^1\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1-x^2}},\quad при\ n=5.$

Вариант № 5.

1) $\int\limits_{1,2}^{2}\frac{x-0,5}{\sqrt{x^2-1}}dx,\quad при\quad N=5;$ 2) $\int\limits_0^{0,5}\frac{arctg\,x}{x}dx,\quad \varepsilon=10^{-3};$

3) $\int\limits_{-1}^1\frac{\left(x^2-5\right)dx}{(1-x^4)^{1/2}}\quad с\ точностью\ до\ 10^{-2}.$

Вариант № 6.

1) $\int\limits_{2,2}^{3,8} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}} dx,$ *при* $N=5;$ 2) $\int\limits_{0}^{0,25} \sqrt{x} \cdot e^{-\sqrt{x}} dx, \quad \varepsilon = 10^{-4};$

3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \left(e^{0,4x}+1,5\right)} dx$ *при* $n=4$.

Вариант № 7.

1) $\int\limits_{0,2}^{2,4} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2} dx,$ *при* $N=5;$ 2) $\int\limits_{0}^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx, \quad \varepsilon = 10^{-5};$

3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$ *с точностью до* 10^{-4}.

Вариант № 8.

1) $\int\limits_{1}^{2,6} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+3}},$ *при* $N=5;$ 2) $\int\limits_{0}^{1} \cos x^2 dx, \quad \varepsilon = 10^{-4};$

3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ *с точностью до* 10^{-3}.

Вариант № 9.

1) $\int\limits_{0,8}^{1,6} \frac{0,5 \cdot x+2}{\sqrt{x^2+1}} dx,$ *при* $N=5;$ 2) $\int\limits_{0}^{0,5} x^2 \cdot \sqrt{1+x^2} dx, \quad \varepsilon = 10^{-4};$

3) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2-1}}$ *с точностью до* 10^{-6}.

Вариант № 10.

1) $\int\limits_{-0,4}^{1,6} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx,$ *при* $N=5;$ 2) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \varepsilon = 10^{-3};$

3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx$ *с точностью до* 10^{-3}.

Вариант № 11.

1) $\int\limits_{-0,8}^{1,4} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+4}},$ *при* $N=5;$ 2) $\int\limits_{0}^{0,25} \ln(1+\sqrt{x}) dx, \quad \varepsilon = 10^{-4};$

3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x-2}{\sqrt{x}(x+2)} dx$ *с точностью до* 10^{-3}.

Вариант № 12.

1) $\int\limits_{2,6}^{3,4} \frac{x+0,5}{\sqrt{x^2+1,5}} dx,$ *при* $N=5;$ 2) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}/3} x^3 \cdot arctg\, x\, dx, \quad \varepsilon = 10^{-4};$

3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{0,6(x-1)}}{\sqrt{x}(x+2)} dx$ *с точностью до* 10^{-4}.

Вариант № 13.

1) $\int\limits_{0,8}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx, \quad при \quad N=5;$ 2) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt[3]{x}\cdot\cos x\, dx, \quad \varepsilon=10^{-4};$

3) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos 2{,}6x}{(0{,}3+x^2)\sqrt{1-x^2}}\, dx \quad с\ точностью\ до\ 10^{-3}.$

Вариант № 14.

1) $\int\limits_{2,4}^{3,2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx, \quad при \quad N=5;$ 2) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}\, dx, \quad \varepsilon=10^{-4};$

3) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xe^{-x}}{x+2}\, dx, \quad при \quad n=4.$

Вариант № 15.

1) $\int\limits_{0,2}^{2} \frac{x+0{,}5}{\sqrt{x^2+1}}dx, \quad при \quad N=5;$ 2) $\int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3}\, dx, \quad \varepsilon=10^{-4};$

3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x+2}e^{-x^2}\, dx, \quad при \quad n=4.$

Вариант № 16.

1) $\int\limits_{0,7}^{1,5} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}dx, \quad при \quad N=5;$ 2) $\int\limits_{0}^{1/9} \sqrt{x}\cdot e^{x}\, dx, \quad \varepsilon=10^{-4};$

3) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx \quad с\ точностью\ до\ 10^{-3}.$

Вариант № 17.

1) $\int\limits_{0,2}^{2,5} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x+2}dx, \quad при \quad N=5;$ 2) $\int\limits_{0,2}^{0,3} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}, \quad \varepsilon=10^{-4};$

3) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}} \quad сточностью\ до\ 10^{-3}..$

Вариант № 18.

1) $\int\limits_{1,4}^{2,6} \frac{x}{\sqrt{x^2+2{,}5}}\, dx, \quad при \quad N=5;$ 2) $\int\limits_{0,5}^{0,6} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad \varepsilon=10^{-4};$

3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(1+x)\cdot\sqrt{x}} \quad с\ точностью\ до\ 10^{-6}.$

Вариант № 19.

1) $\int\limits_{2,2}^{3,4} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx, \quad при \quad N=5;$ 2) $\int\limits_{0}^{0,5} \sqrt{1+x^5}\, dx, \quad \varepsilon=10^{-4};$

3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\left(e^{x/2}+3\right)}\, dx \quad с\ точностью\ до\ 10^{-5}.$

Вариант № 20.

1) $\int\limits_{0,4}^{1,6} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$, *при* $N=5$; 2) $\int\limits_{0}^{0,5} \sqrt{x-x^3}\,dx$, $\varepsilon=10^{-4}$;

3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ *с точностью до* 10^{-6}.

Вариант № 21.

1) $\int\limits_{-2,5}^{-1,3} \frac{x}{\sqrt{x^2+1,8}}\,dx$, *при* $N=5$; 2) $\int\limits_{0}^{2} \frac{\sin x}{x}\,dx$, $\varepsilon=10^{-5}$;

3) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{e^{2\cdot x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ *при* $n=5$.

Вариант № 22.

1) $\int\limits_{-0,4}^{1,8} \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$, *при* $N=5$; 2) $\int\limits_{0,5}^{0,8} \sqrt{1+x^3}\,dx$, $\varepsilon=10^{-4}$;

3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(1+x)\cdot\sqrt{x}}$ *при* $n=5$.

Вариант № 23.

1) $\int\limits_{0,6}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$, *при* $N=5$; 2) $\int\limits_{0,5}^{1} \sqrt{1+x^3}\,dx$, $\varepsilon=10^{-4}$;

3) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)\cdot\sqrt{1-x^4}}$ *при* $n=5$.

Вариант № 24.

1) $\int\limits_{1,6}^{2,7} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1,2}}\,dx$, *при* $N=5$; 2) $\int\limits_{0}^{0,2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\varepsilon=10^{-5}$;

3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{0,6\cdot(x-1)}}{\sqrt{x}\cdot(x+2)}\,dx$ *при* $n=5$.

Вариант № 25.

1) $\int\limits_{0,2}^{1,11} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2\cdot x+2,5}\,dx$, *при* $N=5$; 2) $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{\arcsin x}{x}\,dx$, $\varepsilon=10^{-3}$;

4) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot(1+x)}$ *с точностью до* 10^{-6}.

Вариант № 26.

1) $\int\limits_{0,6}^{1,8} \frac{x^2}{\sqrt{x+1,7}}\,dx$, *при* $N=5$; 2) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$, $\varepsilon=10^{-4}$;

3) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$ *с точностью до* 10^{-4}.

Вариант № 27.

1) $\int\limits_{0,4}^{1,8} \frac{x^2+1,4}{\sqrt{x^2+0,2}}dx$, *при* $N=5$; 2) $\int\limits_0^1 \cos(x^2)dx$, $\varepsilon = 10^{-3}$;

3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\left(e^{x/2}+3\right)}$ *с точностью до* 10^{-5}.

Вариант № 28.

1) $\int\limits_{2,2}^{2,8} \frac{4-x}{\sqrt{x^2+1}}dx$, *при* $N=5$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3+x^5}}$, $\varepsilon = 10^{-3}$;

3) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin 0,5x}{0,5+x}e^{-x}dx$ *при* $n=5$.

Вариант № 29.

1) $\int\limits_{0,8}^{1,5} \frac{x}{\sqrt{x^2+2,4}}dx$, *при* $N=5$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{arcctg\, x}{x}dx$, $\varepsilon = 10^{-3}$;

3) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{0,6+\sqrt{x}}$ *при* $n=5$.

Вариант № 30.

1) $\int\limits_{0,4}^{1,7} \frac{x+2,2}{\sqrt{x^2+1}}$, *при* $N=5$; 2) $\int\limits_0^1 \cos(2\cdot x^3)dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$;

3) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$ *с точностью до* 10^{-3}.

Практическая работа № 6

а. Используя метод конечных разностей, составить решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, шаг $h=0,1$.

б. Найти три последовательных приближения решений следующего дифференциального уравнения, полагая $y_0(x) \equiv y_0$.

в. Найти три последовательных приближения решений следующей системы дифференциальных уравнений, полагая $y_0(x) \equiv y_0$, $z_0(x) \equiv z_0$.

Вариант № 1.

а) $\begin{cases} y'' + \dfrac{y'}{x} + 2y = x; \\ y(0,7) = 0,5; \\ 2y(1) + 3y'(1) = 1,2. \end{cases}$

б) $y' = x^2 - y^2$, $y(0)=0$.

в) $\begin{cases} y' = x + y + z, \\ z' = y - z, \quad y(0)=1, z(0)=-2. \end{cases}$

Вариант № 2.

а) $\begin{cases} y'' - xy' + 2y = x+1; \\ y(0,9) - 0,5y'(0,9) = 2; \\ y(1,2) = 1 \end{cases}$

б) $y' = e^{-x} - y^2$, $y(0)=1$.

в) $\begin{cases} y' = xy + z, \\ z' = y + xz, \quad y(0)=0, z(0)=1. \end{cases}$

Вариант № 3.

Вариант № 4.

а) $\begin{cases} y'' + xy' + y = x + 1; \\ y(0{,}5) - 2y'(0{,}5) = 1; \\ y'(0{,}8) = 1{,}2. \end{cases}$

б) $y' = 2x - 1 + y^2$, $y(0) = 1$.

в) $\begin{cases} y' = x - z^2, \\ z' = x + y, \quad y(0) = 0, z(0) = 1. \end{cases}$

а) $\begin{cases} y'' - 2y' - \dfrac{y}{x} = 3; \\ 0{,}5y(0{,}5) - y'(0{,}5) = 1; \\ y(0{,}2) = 2. \end{cases}$

б) $y' = \sqrt{x} + y^2$, $y(0) = 0$.

в) $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = yz, \quad y(0) = 0, z(0) = 0{,}5. \end{cases}$

Вариант № 5.

а) $\begin{cases} y'' + 2y' - xy = x^2; \\ y(0{,}9) - 0{,}5y'(0{,}9) = 1; \\ y'(0{,}6) = 0{,}7. \end{cases}$

б) $y' = xy + \sqrt{x}$, $y(0) = 0$.

в) $\begin{cases} y' = -xz, \\ z' = \dfrac{y}{x}, \quad y(0) = 0, z(0) = 1. \end{cases}$

Вариант № 6.

а) $\begin{cases} y'' - y' - \dfrac{2y}{x} = x + 0{,}4; \\ y(1{,}1) - 0{,}5y'(1{,}1) = 2; \\ y'(1{,}4) = 4. \end{cases}$

б) $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$.

в) $\begin{cases} y' = (z - y)x, \\ z' = (z + y)x, \quad y(0) = 1, z(0) = 1. \end{cases}$

Вариант № 7.

а) $\begin{cases} y'' + xy' + y = x + 1; \\ y(0{,}5) - 2y'(0{,}5) = 1; \\ y'(0{,}8) = 1{,}2. \end{cases}$

б) $y' = 4{,}5x + 0{,}1y^2$, $y(0) = 0$.

в) $\begin{cases} y' = x + y + z, \\ z' = y - z, \qquad y(0) = 1, z(0) = -2. \end{cases}$

Вариант № 8.

а) $\begin{cases} y'' - 2y' - \dfrac{y}{x} = 3; \\ 0{,}5y(0{,}5) - y'(0{,}5) = 1; \\ y(0{,}2) = 2. \end{cases}$

б) $y' = 2y - 2x^2 - 3$, $y(0) = 2$.

в) $\begin{cases} y' = xy + z, \\ z' = y + xz, \quad y(0) = 0, z(0) = 1. \end{cases}$

Вариант № 9.

а) $\begin{cases} y'' - 0{,}5y' + 3y = 2x^2; \\ y(1) + 2y'(1) = 0{,}6; \\ y(1{,}3) = 1. \end{cases}$

б) $y' = x + y\sqrt{x}$, $y(0) = 0$.

в) $\begin{cases} y' = x - z^2, \\ z' = x + y, \quad y(0) = 0, z(0) = 1. \end{cases}$

Вариант № 10.

а) $\begin{cases} y'' + 1{,}5y' - xy = 0{,}5; \\ 2y(1{,}3) - y'(1{,}3) = 1; \\ y(1{,}6) = 3. \end{cases}$

б) $xy' = 2x - y$, $y(1) = 2$.

в) $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = yz, \quad y(0) = 0, z(0) = 0{,}5. \end{cases}$

Вариант № 11.

Вариант № 12.

а) $\begin{cases} y'' + 2xy' - y = 0{,}4; \\ 2y(0{,}3) + y'(0{,}3) = 1; \\ y'(0{,}6) = 2. \end{cases}$

б) $y' = 2x - 0{,}01y^2,\ y(0) = 1.$

в) $\begin{cases} y' = -xz, \\ z' = \dfrac{y}{x}, \quad y(0) = 0, z(0) = 1. \end{cases}$

а) $\begin{cases} y'' - 0{,}5y' + y = 2; \\ y(0{,}7) + 2y'(0{,}7) = 1{,}4; \\ y(0{,}4) = 1{,}2. \end{cases}$

б) $xy' = x + y,\ y(0) = 1.$

в) $\begin{cases} y' = (z - y)x, \\ z' = (z + y)x, \quad y(0) = 1, z(0) = 1. \end{cases}$

Вариант № 13.

а) $\begin{cases} y'' + \dfrac{2}{x}y' - 3y = 2; \\ 2y(1{,}1) + y'(1{,}1) = 3; \\ y'(0{,}8) = 1{,}5. \end{cases}$

б) $y' = x^2 - y^2,\ y(0) = 0.$

в) $\begin{cases} y' = x + y + z, \\ z' = y - z, \qquad y(0) = 1, z(0) = -2. \end{cases}$

Вариант № 14.

а) $\begin{cases} y'' + 2x^2y' + y = x; \\ 2y(0{,}5) - y'(0{,}5) = 1; \\ y(0{,}8) = 3. \end{cases}$

б) $y' = e^{-x} - y^2,\ y(0) = 1.$

в) $\begin{cases} y' = xy + z, \\ z' = y + xz, \quad y(0) = 0, z(0) = 1. \end{cases}$

Вариант № 15.

а) $\begin{cases} y'' + 3xy' + 2y = 1{,}5; \\ 0{,}5y(1) + y'(1) = 2; \\ y'(0{,}7) = 1{,}3. \end{cases}$

б) $y' = 2x - 1 + y^2,\ y(0) = 1.$

в) $\begin{cases} y' = x - z^2, \\ z' = x + y, \quad y(0) = 0, z(0) = 1. \end{cases}$

Вариант № 16.

а) $\begin{cases} y'' + 2xy' - 2y = 0{,}6; \\ 0{,}4y(2{,}3) - y'(2{,}3) = 1; \\ y'(2) = 1. \end{cases}$

б) $y' = \sqrt{x} + y^2,\ y(0) = 0.$

в) $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = yz, \quad y(0) = 0, z(0) = 0{,}5. \end{cases}$

Вариант № 17.

а) $\begin{cases} y'' + \dfrac{1}{x}y' - 0{,}4y = 2x; \\ y(0{,}6) - 0{,}3y'(0{,}6) = 0{,}6; \\ y'(0{,}9) = 1{,}7. \end{cases}$

б) $y' = xy + \sqrt{x},\ y(0) = 0.$

в) $\begin{cases} y' = -xz, \\ z' = \dfrac{y}{x}, \quad y(0) = 0, z(0) = 1. \end{cases}$

Вариант № 18.

а) $\begin{cases} y'' - \dfrac{1}{2x}y' + 0{,}8y = x; \\ y(1{,}7) + 1{,}2y'(1{,}7) = 2; \\ y'(2) = 1. \end{cases}$

б) $y' = x + y^2,\ y(0) = 0.$

в) $\begin{cases} y' = (z - y)x, \\ z' = (z + y)x, \quad y(0) = 1, z(0) = 1. \end{cases}$

Вариант № 19.

Вариант № 20.

а) $\begin{cases} y'' - \dfrac{1}{3}y' + xy = 2; \\ 3y(1{,}1) - 0{,}5y'(1{,}1) = 1; \\ y(0{,}8) = 1{,}6. \end{cases}$

б) $y' = 2y - 2x^2 - 3,\ y(0) = 2.$

в) $\begin{cases} y' = x + y + z, \\ z' = y - z, \qquad y(0) = 1, z(0) = -2. \end{cases}$

а) $\begin{cases} y'' + 0{,}8y' - xy = 1{,}4; \\ 2y(2{,}1) + y'(2{,}1) = 1{,}7; \\ y(1{,}8) = 0{,}5. \end{cases}$

б) $xy' = 2x - y,\ y(1) = 2.$

в) $\begin{cases} y' = xy + z, \\ z' = y + xz, \quad y(0) = 0, z(0) = 1. \end{cases}$

Вариант № 21.

а) $\begin{cases} y'' + 2y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{x}; \\ 0{,}5y(0{,}9) + y'(0{,}9) = 1; \\ y(1{,}2) = 0{,}8. \end{cases}$

б) $y' = 4{,}5x + 0{,}1y^2,\ y(0) = 0.$

в) $\begin{cases} y' = x - z^2, \\ z' = x + y, \quad y(0) = 0, z(0) = 1. \end{cases}$

Вариант № 22.

а) $\begin{cases} y'' - \dfrac{1}{4}y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{x}{2}; \\ 1{,}5y(1{,}3) - y'(1{,}3) = 0{,}6; \\ 2y(1{,}6) = 0{,}3. \end{cases}$

б) $y' = x^2 - y^2,\ y(0) = 0.$

в) $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = yz, \quad y(0) = 0, z(0) = 0{,}5. \end{cases}$

Вариант № 23.

а) $\begin{cases} y'' - 0.5y' + 0.5xy = 2x; \\ 2y(1{,}3) - y'(1{,}3) = 2; \\ y'(1) = 0{,}5. \end{cases}$

б) $y' = x + y\sqrt{x},\ y(0) = 0.$

в) $\begin{cases} y' = -xz, \\ z' = \dfrac{y}{x}, \quad y(0) = 0, z(0) = 1. \end{cases}$

Вариант № 24.

а) $\begin{cases} y'' + 2y' - 1.5xy = \dfrac{2}{x}; \\ y(1{,}1) + 2y'(1{,}1) = 1; \\ y'(0{,}8) = 1. \end{cases}$

б) $y' = \sqrt{x} + y^2,\ y(0) = 0.$

в) $\begin{cases} y' = (z - y)x, \\ z' = (z + y)x, \quad y(0) = 1, z(0) = 1. \end{cases}$

Вариант № 25.

а) $\begin{cases} y'' + 2xy' - 1{,}5y = x; \\ 1{,}4y(1{,}1) + 0{,}5y'(1{,}1) = 2; \\ y'(1{,}4) = 2{,}5. \end{cases}$

б) $y' = 2x - 0{,}01y^2,\ y(0) = 1.$

в) $\begin{cases} y' = x + y + z, \\ z' = y - z, \qquad y(0) = 1, z(0) = -2. \end{cases}$

Вариант № 26.

а) $\begin{cases} y'' - \dfrac{x}{2}y' + 0{,}5y = 2x; \\ 0{,}4y(0{,}2) - y'(0{,}2) = 1{,}5; \\ y(0{,}5) = 0{,}4. \end{cases}$

б) $xy' = x + y,\ y(0) = 1.$

в) $\begin{cases} y' = xy + z, \\ z' = y + xz, \quad y(0) = 0, z(0) = 1. \end{cases}$

Вариант № 27.

а) $\begin{cases} y'' + 0{,}6xy' - 2y = 1; \\ 2y(1{,}8) - 0{,}8y'(1{,}8) = 3; \\ y(1{,}5) = 0{,}6. \end{cases}$

б) $y' = 2x - 1 + y^2$, $y(0) = 1$.

в) $\begin{cases} y' = x - z^2, \\ z' = x + y, \quad y(0) = 0, z(0) = 1. \end{cases}$

Вариант № 28.

а) $\begin{cases} y'' + \dfrac{1}{2x}y' - y = \dfrac{2}{x}; \\ 0{,}5y(0{,}9) - 1{,}2y'(0{,}9) = 1; \\ y(0{,}6) = 1{,}3. \end{cases}$

б) $y' = e^{-x} - y^2$, $y(0) = 1$.

в) $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = yz, \quad y(0) = 0, z(0) = 0{,}5. \end{cases}$

Вариант № 29.

а) $\begin{cases} y'' - 0{,}5x^2y' + 2y = x^2; \\ y(1{,}6) + 0{,}7y'(1{,}6) = 2; \\ y(1{,}9) = 0{,}8. \end{cases}$

б) $y' = xy + \sqrt{x}$, $y(0) = 0$.

в) $\begin{cases} y' = -xz, \\ z' = \dfrac{y}{x}, \quad y(0) = 0, z(0) = 1. \end{cases}$

Вариант № 30.

а) $\begin{cases} y'' - xy' + 2xy = 0{,}8; \\ y(1{,}2) - 0{,}5y'(1{,}2) = 1; \\ y'(1{,}5) = 2. \end{cases}$

б) $y' = x + y\cos x$, $y(0) = 0$.

в) $\begin{cases} y' = (z - y)x, \\ z' = (z + y)x, \quad y(0) = 1, z(0) = 1. \end{cases}$

Практическая работа № 8

Используя метод Галеркина, найти решение уравнений с граничными условиями:

1	$y'' - 2xy' + 2y = 3x^2 + x - 1$ $y(0) = 0, \quad y'(1) = 1$	2	$y'' - 2xy' + 2y = 5x^3 - 3x + x$ $y(0) = 0, \quad y'(1) = 1$
3	$y'' - 2xy' + 2y = x$ $y(0) = 0, \quad y'(1) = 1$	4	$y'' + y = \sin(x)$ $y(0) = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1$
5	$y'' + 4y' + 4y = 8$ $y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$	6	$y'' + 3y' + y = 1$ $y(0) = 0, \quad y(1) = 1$
7	$y'' + 3y' + y = 2x$ $y(0) = 0, \quad y(1) = 1$	8	$y'' - \cos(x) \cdot y' + \sin(x) \cdot y = \cos(x)$ $y(-\pi) = y(\pi) = 2$
9	$y'' - \frac{1}{x}y' + y = 1$ $y(0) = y(1) = 1$	10	$y'' - 2xy' + 2y = x^2 - 1$ $y(0) = 0, \quad y(1) = 2$
11	$y'' - 3y' + 2y = x + 1$ $y(0) = 1; y(1) = 0$	12	$y'' + 2xy' + y = x$ $y(0) = 1, \quad y(1) = 0$

13	$y'' - 2y' + y = x + 1$ $y(0) = 1, y(1) = 2$	14	$y'' - \cos(x) \cdot y' + \sin(x) \cdot y = \sin(2x)$ $y(-\pi) = y(\pi) = 1$
15	$y'' + 2xy' + 2y = x - 1$ $y(0) = y(1) = 0$	16	$y'' + xy' + y = 2x$ $y(0) = 1, \quad y(1) = 0$
17	$y'' + (1 + x^2)y = 1$ $y(-1) = y(1) = 0$	18	$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$ $y(0) = 1, y(1) = 0$
19	$y'' - 3y' + 2y = x + 1$ $y(0) = 1; y(1) = 0$	20	$y'' + y = x^2 + 1$ $y(0) = y(1) = 0$
21	$y'' - \frac{1}{x}y' + y = 1$ $y(0) = 0, y(1) = 0$	22	$y'' - \cos(x) \cdot y' + \sin(x) \cdot y = \cos(2x)$ $y(-\pi) = y(\pi) = 1$
23	$y'' + 2xy' + y = x^2$ $y(0) = 0, y(1) = 1$	24	$y'' - 3y' + 2y = 2x$ $y(0) = 0, \quad y(1) = 1$
25	$y'' + (1 + x^2)y = 1$ $y(-1) = y(1) = 0$	26	$y'' + 2xy' + y = 1$ $y(-1) = y(1) = 0$
27	$y'' + 4y' + 4y = 1$ $y(0) = y(1) = 2$	28	$y'' + 2xy' + y = x$ $y(0) = y(1) = 0$
29	$y'' - 2xy' - y = 2x$ $y(-1) = y(1) = 1$	30	$y'' - xy' + y = x + 1$ $y(0) = 1, y(1) = 0$

Практическая работа № 9

Задание № 1. Используя метод сеток, составить решение дифференциального уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ с заданными начальными условиями; шаг $h = 1$. Уточнение решения производить до сотых долей при помощи процесса Либмана.

№ 1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad (\Gamma), \qquad u(xy)\big|_{\Gamma} = |x| + |y|.$

№ 2. $\big(|x| + 2\big) \cdot \big(|y| + 2\big) = 12 \quad (\Gamma), \qquad u(xy)\big|_{\Gamma} = 2|x| + |y|.$

№ 3. $\left.\begin{matrix} |y| = 4 - x^2 \\ x \in [-2{,}2] \end{matrix}\right\} \quad (\Gamma), \qquad u(xy)\big|_{\Gamma} = |x| \cdot |y|.$

№ 4. $x^2 + y^2 = 16 \quad (\Gamma), \qquad u(xy)\big|_{\Gamma} = |x| + 2|y|.$

№ 5. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{1}=1 \quad (\varGamma), \qquad u(xy)\big|_{\varGamma}=|x|\cdot|y|.$

№ 6. $(|x|+2)\cdot(|y|+2)=12 \quad (\varGamma), \qquad u(xy)\big|_{\varGamma}=|x|\cdot|y|.$

№ 7. $\left.\begin{matrix}|x|=4-y^2\\ x\in[-4,4]\end{matrix}\right\} \quad (\varGamma), \qquad u(xy)\big|_{\varGamma}=|x|+|y|.$

№ 8. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1 \quad (\varGamma), \qquad u(xy)\big|_{\varGamma}=2|x|+|y|.$

№ 9. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1 \quad (\varGamma), \qquad u(xy)\big|_{\varGamma}=|x|\cdot|y|.$

№ 10. $\left.\begin{matrix}|y|=4-x^2\\ x\in[-2,2]\end{matrix}\right\} \quad (\varGamma), \qquad u(xy)\big|_{\varGamma}=|x|+|y|.$

№ 11. $x^2+y^2=16 \quad (\varGamma), \qquad u(xy)\big|_{\varGamma}=0{,}5|x|+|y|.$

№ 12. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \quad (\varGamma), \qquad u(xy)\big|_{\varGamma}=|x|+0{,}5|y|.$

№ 13. $\left.\begin{matrix}|x|=4-y^2\\ x\in[-4,4]\end{matrix}\right\} \quad (\varGamma), \qquad u(xy)\Big|_{\varGamma}=|x|+\dfrac{y^2}{2}.$

№ 14. $(|x|+2)\cdot(|y|+2)=12 \quad (\varGamma), \qquad u(xy)\big|_{\varGamma}=2|x|+0{,}5|y|.$

№ 15. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1 \quad (\varGamma), \qquad u(xy)\big|_{\varGamma}=|x|+|y|.$

№ 16. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1 \quad (\varGamma), \qquad u(xy)\big|_{\varGamma}=2|x|+0{,}5|y|.$

№ 17. $\left.\begin{matrix}|y|=9-x^2\\ x\in[-3,3]\end{matrix}\right\} \quad (\varGamma), \qquad u(xy)\Big|_{\varGamma}=|x|+\dfrac{1}{2}|y|.$

№ 18. $x^2+y^2=16 \quad (\varGamma), \qquad u(xy)\big|_{\varGamma}=0{,}5|x|+2|y|.$

№ 19. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \quad (\varGamma), \qquad u(xy)\big|_{\varGamma}=0{,}5|x|+|y|.$

№ 20. $\left.\begin{matrix}|x|=9-y^2\\ x\in[-9,9]\end{matrix}\right\} \quad (\varGamma), \qquad u(xy)\big|_{\varGamma}=0{,}5|x|+|y|.$

№ 21. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1 \quad (\varGamma), \qquad u(xy)\big|_{\varGamma}=0{,}5|x|+2|y|.$

№ 22. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1 \quad (\Gamma), \qquad u(xy)\big|_{\Gamma}=0{,}5|x|\cdot|y|.$

№ 23. $(|x|+3)\cdot(|y|+2)=18 \quad (\Gamma), \qquad u(xy)\big|_{\Gamma}=|x|+0{,}5|y|.$

№ 24. $\left.\begin{array}{l}|y|=9-x^2\\ x\in[-3{,}3]\end{array}\right\} \quad (\Gamma), \qquad u(xy)\big|_{\Gamma}=2|x|+0{,}5|y|.$

№ 25. $x^2+y^2=16 \quad (\Gamma), \qquad u(xy)\big|_{\Gamma}=0{,}5|x|+0{,}5|y|.$

№ 26. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1 \quad (\Gamma), \qquad u(xy)\big|_{\Gamma}=0{,}5|x|+|y|.$

№ 27. $\left.\begin{array}{l}|x|=9-y^2\\ x\in[-4{,}4]\end{array}\right\} \quad (\Gamma), \qquad u(xy)\big|_{\Gamma}=|x|+0{,}5|y|.$

№ 28. $(|x|+2)\cdot(|y|+3)=18 \quad (\Gamma), \qquad u(xy)\big|_{\Gamma}=2|x|+0{,}5|y|.$

№ 29. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1 \quad (\Gamma), \qquad u(xy)\big|_{\Gamma}=|x|+0{,}5|y|.$

№ 30. $(|x|+5)\cdot(|y|+5)=45 \quad (\Gamma), \qquad u(xy)\big|_{\Gamma}=|x|+0{,}5|y|.$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Последовательность действий:

1. Изучить математическую постановку задачи.
2. В соответствии с вариантом задания, определенным преподавателем, составить программу задания с использованием любого языка программирования..
3. Оформить отчет с указанием варианта задания, текста программы и протокола выполнения программы.

Лабораторная работа № 1. Решение СЛАУ методом Гаусса, вычисление определителя методом Гаусса

Лабораторная работа № 2. Решение уравнений наивысших порядков и трансцендентных уравнений методом хорд, методом касательных, методом Ньютона

Лабораторная работа № 3. Интегрирование функций по формулам трапеций и Симпсона

Лабораторная работа № 4. Дифференцирование функций методом Эйлера

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ МЕЖСЕССИОННОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ

1. Межсессионная аттестация студентов проводится дважды в семестр на 7 и 13 неделях 5-го семестра.
2. Аттестационная оценка складывается из оценок, полученных по результатам промежуточного тестирования.
3. Организация аттестации студентов, проводится в соответствии с положением АмГУ о курсовых экзаменах и зачетах.

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

КОМПЛЕКТ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС

Утверждено на заседании кафедры Факультет МиИ

«____»__________________200_г. Курс II Заведующий кафедрой

Дисциплина

Утверждаю _____________ Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Содержание предмета "Вычислительная математика". Основные этапы численного решения задач.
2. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Теоремы о разрешимости задачи Коши.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС

Утверждено на заседании кафедры Факультет МиИ

«____»__________________200_г. Курс II

Заведующий кафедрой Дисциплина

Утверждаю _____________ Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2

1. Обратная задача для оценки погрешности функции на погрешности аргументов. Допустимые погрешности аргументов.
2. Метод сеток для уравнений гиперболического типа.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС

Утверждено на заседании кафедры Факультет МиИ

«____»__________________200_г. Курс II

Заведующий кафедрой Дисциплина

Утверждаю _____________ Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 3

1. Сложение и вычитание приближенных чисел. Оценка погрешности результата.
2. Интегралы от разрывных функций. Аддитивный способ выделения особенностей.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС

Утверждено на заседании кафедры Факультет МиИ

«____»__________________200_г. Курс II Заведующий кафедрой

Дисциплина

Утверждаю _____________ Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 4

1. Постановка задачи интерполирования. Интерполирование для случая равноотстоящих узлов. Вторая интерполяционная формула Ньютона.
2. Метод сеток для уравнений параболического типа.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС

Утверждено на заседании кафедры — Факультет МиИ

«____»__________________200_г. — Курс II

Заведующий кафедрой — Дисциплина

Утверждаю _____________ — Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 5

1. Применение метода простой итерации для уточнения элементов обратной матрицы.
2. Границы расположения корней алгебраических и трансцендентных уравнений.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС

Утверждено на заседании кафедры — Факультет МиИ

«____»__________________200_г. — Курс II

Заведующий кафедрой — Дисциплина

Утверждаю _____________ — Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 6

1. Решение СЛАУ методом простой итерации (второй способ).
2. Простейшие формулы численного дифференцирования. Вычисление второй производной по формулам численного дифференцирования.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС

Утверждено на заседании кафедры — Факультет МиИ

«____»__________________200_г. — Курс II

Заведующий кафедрой — Дисциплина

Утверждаю _____________ — Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 7

1. Вычисление определителя методом Гаусса.
2. Интегралы от разрывных функций. Мультипликативный способ выделения особенностей.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС

Утверждено на заседании кафедры Факультет МиИ

«____»__________________200_г. Курс II

Заведующий кафедрой Дисциплина

Утверждаю _____________ Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 8

1. Умножение и деление приближенных чисел. Оценка погрешности вычислений.
2. Число действительных корней алгебраических и трансцендентных уравнений.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС

Утверждено на заседании кафедры Факультет МиИ

«____»__________________200_г. Курс II

Заведующий кафедрой Дисциплина

Утверждаю _____________ Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 9

1. Неустранимая погрешность
2. Итерационный метод решения системы конечно – разностных уравнений.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС

Утверждено на заседании кафедры Факультет МиИ

«____»__________________200_г. Курс II

Заведующий кафедрой Дисциплина

Утверждаю _____________ Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 10

1. Погрешности арифметических операций над приближенными числами.
2. Метод сеток для задачи Дирихле.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС

Утверждено на заседании кафедры Факультет МиИ

«____»__________________200_г. Курс II

Заведующий кафедрой Дисциплина

Утверждаю _____________ Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 11

1. Метод Гаусса для решения СЛАУ с выбором главного элемента по всей матрице.
2. Метод хорд для решения алгебраических и трансцендентных уравнений.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС

Утверждено на заседании кафедры — Факультет МиИ

«____»__________________200_г. — Курс II

Заведующий кафедрой — Дисциплина

Утверждаю _____________ — Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 12

1. Обратное интерполирование. Нахождение корней уравнения методом обратного интерполирования.

2. Метод касательных для решения алгебраических и трансцендентных уравнений.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС

Утверждено на заседании кафедры — Факультет МиИ

«____»__________________200_г. — Курс II

Заведующий кафедрой — Дисциплина

Утверждаю _____________ — Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 13

1. Основные источники и классификация погрешностей численного решения задач.
2. Метод Крылова для вычисления собственных значений матриц.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС

Утверждено на заседании кафедры — Факультет МиИ

«____»__________________200_г. — Курс II

Заведующий кафедрой — Дисциплина

Утверждаю _____________ — Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 14

1. Постановка задачи интерполирования. Интерполирование для случая равноотстоящих узлов. Первая интерполяционная формула Ньютона.
2. Метод Крылова для вычисления собственных векторов матриц.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС

Утверждено на заседании кафедры   Факультет МиИ

«____»__________________200_г.   Курс II

Заведующий кафедрой   Дисциплина

Утверждаю _____________   Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 15

1. Метод Гаусса для решения СЛАУ с выбором главного элемента по столбцу.
2. Кратные интегралы. Метод повторного применения квадратурных формул.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС

Утверждено на заседании кафедры   Факультет МиИ

«____»__________________200_г.   Курс II

Заведующий кафедрой   Дисциплина

Утверждаю _____________   Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 16

1. Вычислительная погрешность метода Гаусса. Выбор ведущего элемента исключения.
2. Приближенное вычисление интегралов. Формулы Ньютона – Котеса.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС

Утверждено на заседании кафедры   Факультет МиИ

«____»__________________200_г.   Курс II

Заведующий кафедрой   Дисциплина

Утверждаю _____________   Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 17

1. Вычислительная погрешность
2. Метод Галеркина.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС

Утверждено на заседании кафедры   Факультет МиИ

«____»__________________200_г.   Курс II

Заведующий кафедрой   Дисциплина

Утверждаю _____________   Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 18

1. Оценка погрешности функции на погрешность аргумента.

2. Интегралы с бесконечными пределами. Метод усечения.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС

Утверждено на заседании кафедры — Факультет МиИ

«____»__________________200_г. — Курс II

Заведующий кафедрой — Дисциплина

Утверждаю _____________ — Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 19

1. Обратная задача для оценки погрешности функции на погрешности аргументов. Допустимые погрешности аргументов.
2. Метод конечных разностей для линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС

Утверждено на заседании кафедры — Факультет МиИ

«____»__________________200_г. — Курс II

Заведующий кафедрой — Дисциплина

Утверждаю _____________ — Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 20

1. Решение СЛАУ методом простой итерации (первый способ).
2. Приближенное вычисление интегралов. Квадратурные формулы Гаусса.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС

Утверждено на заседании кафедры — Факультет МиИ

«____»__________________200_г. — Курс II

Заведующий кафедрой — Дисциплина

Утверждаю _____________ — Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 21

1. Постановка краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка
2. Интерполяционная формула Лагранжа.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС

Утверждено на заседании кафедры Факультет МиИ
«____»__________________200_г. Курс II
Заведующий кафедрой Дисциплина
Утверждаю _____________ Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 22

1. Интерполяционная схема Эйткена.
2. Выбор шага интегрирования. Принцип Рунге для оценки погрешностей интегралов.

МУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра ИУС
Утверждено на заседании кафедры Факультет МиИ
«____»__________________200_г. Курс II
Заведующий кафедрой Дисциплина
Утверждаю _____________ Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 23

1. Интегрирование с помощью степенных рядов. Оценка погрешности результата.
2. Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра ИУС
Утверждено на заседании кафедры Факультет МиИ
«____»__________________200_г. Курс II
Заведующий кафедрой Дисциплина
Утверждаю _____________ Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 24

1. Метод конечных разностей для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.
2. Отделение корней при нахождении приближенных значений корней алгебраических и трансцендентных уравнений.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра ИУС
Утверждено на заседании кафедры Факультет МиИ
«____»__________________200_г. Курс II
Заведующий кафедрой Дисциплина
Утверждаю _____________ Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 25

1. Неустранимая и вычислительная погрешности.
2. Численное решение уравнений с частными производными методом сеток.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС

Утверждено на заседании кафедры
«____»__________________200_г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю _____________

Факультет МиИ
Курс II
Дисциплина
Вычислительная математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 26

1. Метод Рунге – Кутта для решения задачи Коши
2. Решение краевых задач для криволинейных областей.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ:

1. Содержание предмета “Вычислительная математика”. Основные этапы численного решения задач на ЭВМ.
2. Основные источники и классификация погрешностей численного решения задач.
3. Вычислительная погрешность
4. Неустранимая погрешность
5. Погрешности арифметических операций над приближенными числами.
6. Сложение и вычитание приближенных чисел. Оценка погрешности результата.
7. Умножение и деление приближенных чисел. Оценка погрешности вычислений.
8. Оценка погрешности функции на погрешность аргумента.
9. Обратная задача для оценки погрешности функции на погрешности аргументов. Допустимые погрешности аргументов.
10. Вычислительная погрешность метода Гаусса. Выбор ведушего элемента исключения.
11. Метод Гаусса для решения СЛАУ с выбором главного элемента по столбцу.
12. Метод Гаусса для решения СЛАУ с выбором главного элемента по всей матрице.
13. Вычисление определителя методом Гаусса.
14. Вычисление элементов обратной матрицы методом Гаусса.
15. Решение СЛАУ методом простой итерации. (первый способ).
16. Решение СЛАУ методом простой итерации. (второй способ).
17. Применение метода простой итерации для уточнения элементов обратной матрицы
18. Постановка задачи интерполирования. Интерполирование для случая равноотстоящих узлов. Первая интерполяционная формула Ньютона.
19. Постановка задачи интерполирования. Интерполирование для случая равноотстоящих узлов. Вторая интерполяционная формула Ньютона.
20. Интерполяционная формула Лагранжа.
21. Интерполяционная схема Эйткена.
22. Обратное интерполирование. Нахождение корней уравнения методом обратного интерполирования.
23. Выбор шага интегрирования. Принцип Рунге для оценки погрешностей.
24. Приближенное вычисление интегралов. Формулы Ньютона – Котеса.
25. Приближенное вычисление интегралов. Квадратурные формулы Гаусса.
26. Интегрирование с помощью степенных рядов. Оценка погрешности результата.
27. Кратные интегралы. Метод повторного применения квадратурных формул.
28. Интегралы с бесконечными пределами. Метод усечения.

29. Интегралы от разрывных функций. Аддитивный способ выделения особенностей.
30. Интегралы от разрывных функций. Мультипликативный способ выделения особенностей.
31. Метод Люстерника – Диткина для вычисления двойного интеграла.
32. Простейшие формулы численного дифференцирования.
33. Вычисление второй производной по формулам численного дифференцирования.
34. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Теоремы о разрешимости задачи Коши
35. Метод Эйлера для решения задачи Коши
36. Метод Рунге – Кутта для решения задачи Коши
37. Постановка краевой задачи для обыкновенных дифферинциальных уравнений второго порядка
38. Метод конечных разностей для линейных дифференциальных уравнений второго порядка
39. Метод конечных разностей для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка
40. Метод Галеркина.
41. Численное решение уравнений с частными производными методом сеток.
42. Метод сеток для задачи Дирихле.
43. Итерационный метод решения системы конечно – разностных уравнений.
44. Решение краевых задач для криволинейных областей.
45. Метод сеток для уравнений параболического типа.
46. Метод сеток для уравнений гиперболического типа.