ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс дисциплины для студентов АмГУ по направлению подготовки дипломированных специалистов по специальностям 010101 – «Математика» и 010501 – «Прикладная математика»

Благовещенск 2007

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное агентство по образованию

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АМГУ»)

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс дисциплины для студентов АмГУ по направлению подготовки дипломированных специалистов по специальностям 010101 – «Математика» и 010501 – «Прикладная математика»

Утвержден на заседании кафедры математического анализа и моделирования факультета математики и информатики
«___» __________2007г.,
(протокол № от)
Зав. кафедрой
_____________Т.В. Труфанова

Утвержден на заседании УМС специальностей 010101 – «Математика», 010501 – «Прикладная математика».
«___» __________2007г.,
(протокол № от)
Председатель УМС факультета
_____________ Е.Л. Еремин

ББК
К

Печатается по решению редакционно-издательского совета факультета математики и информатики Амурского государственного университета

Масловская А.Г.

Дискретная математика. Учебно-методический комплекс дисциплины для студентов АмГУ по направлению подготовки дипломированных специалистов по специальностям 010101 – «Математика» и 010501 – «Прикладная математика» – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2007 – 166с.

Учебно-методический комплекс по дисциплине содержит рабочую программу дисциплины, курс лекций, методические указания по изучению дисциплины, а также контролирующие материалы для осуществления текущего, промежуточного и итогового контроля усвоения знаний учащимися.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

1.1. Цели и задачи курса

Дискретная математика объединяет совокупность математических дисциплин, изучающих свойства абстрактных дискретных объектов, имеющих конечный характер – математических моделей объектов, процессов, зависимостей. Многие направления дискретной математики бурно развиваются в последние десятилетия, что обусловлено прогрессом компьютерной техники, необходимостью создания средств обработки и передачи информации, а также представления различных моделей на компьютерах, являющихся по своей природе конечными структурами.

Дискретный анализ объединяет отдельные разделы, ранее сформированные как самостоятельные теории, и занимает важное место в системе прикладного математического образования. Целью преподавания дисциплины является ознакомление с основными разделами современной математики, изучающими свойства различных дискретных структур и их приложений.

Задачей изучения курса является освоение математического аппарата дискретного анализа – взаимосвязанной совокупности языка, моделей и методов математики, ориентированных на решение различных, в том числе и прикладных, задач по основным разделам дисциплины: теория множеств, алгебра высказываний, булевы функции, теория графов, теория кодирования, теория автоматов.

1.2. Требования к уровню освоения содержания дисциплины

В результате освоения дисциплины студенты должны иметь четкое представление о понятиях, терминологии, объектах, специфичных методах исследования объектов, возможных приложениях и взаимосвязи основных разделов дискретной математики.

В процессе обучения студенты должны приобрести навыки применения методов дискретного анализа для решения задач, характеризовать информационные объекты («структура», «отношение», «связь»), самостоятельно осуществлять выбор методики решения и построения алгоритма той или иной задачи, давать полный анализ результатов решения и оценивать границы применимости выбранного метода.

1.3. Перечень дисциплин с указанием разделов (тем), усвоение которых студентами необходимо при изучении данной дисциплины

Данный курс базируется на ранее изученных дисциплинах: «Математический анализ», «Аналитическая геометрия и линейная алгебра», связан с дисциплинами компьютерного цикла.

2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Федеральный компонент

Дисциплина «Численные методы и математическое моделирование» является дисциплиной, входящей в блок общепрофессиональных дисциплин федерального компонента для специальностей 010101– «Математика», 010501 – «Прикладная математика».

Государственный стандарт для специальности 010501 – «Прикладная математика» – ОПД.Ф.02.

Функциональные системы с операциями; дискретные структуры (графы, сети, коды); дизъюнктивные нормальные формы и схемы из функциональных элементов.

Государственный стандарт для специальности 010101– «Математика»– ОПД.Ф.05.

Комбинаторика и графы: выборки, перестановки, сочетания, перестановки с повторениями; сочетания с повторениями; биномиальные коэффициенты, их свойства; биномиальная теорема; полиномиальная теорема; формула включения и исключения. Производящие функции и рекуррентные соотношения.

Графы: основные понятия; способы представления графов, перечисление графов; оценка числа неизоморфных графов с q ребрами; эйлеровы циклы; теорема Эйлера; укладки графов; укладка графов в трехмерном пространстве; планарность; формула Эйлера для плоских графов; деревья и их свойства; оценка числа неизоморфных корневых деревьев с q ребрами. Теорема Кюли о числе деревьев на нумерованных вершинах.

Потоки в сетях: теорема Форда-Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе; алгоритм нахождения максимального потока; теорема о целочисленности; задача о назначениях; паросочетания; теорема Холла о паросочетаниях в двудольном графе.

Дискретные экстремальные задачи, алгоритм Краскаля нахождения минимального основного дерева; метод ветвей и границ.

Булевы функции: булевы функции; табличный способ задания; существенные и несущественные переменные; формулы; эквивалентность формул; элементарные функции и их свойства; разложение функций по переменной; совершенная дизъюнктивная нормальная форма; полные системы функций; полиномы Жегалкина; представление булевых функций полиномами.

Замыкание; свойства операции замыкания; замкнутые классы; классы T_0 и T_1; линейные функции; лемма о нелинейной функции; самодвойственные функции; принцип двойственности; лемма о несамодвойственной функции; монотонные функции; лемма о немонотонной функции; теорема о неполноте систем функций алгебры логики; предполные классы; базисы; примеры базисов. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ); тупиковая, минимальная и сокращенная ДНФ; геометрическая интерпретация; алгоритм нахождения всех минимальных ДНФ; свойство сокращенной ДНФ для монотонных булевых функций; методы построения сокращенной ДНФ; градиентный алгоритм; локальные алгоритмы. Функции k - значной логики; элементарные функции; полнота систем; алгоритм распознавания полноты конечных систем функций в Pk ; представление функций из Pk полиномами. Особенности функций k-значной логики; пример замкнутого класса в Pk, не имеющего базиса; пример замкнутого класса в Pk , имеющего счетный базис; пример континуального семейства замкнутых классов в Pk **.** Теорема Кузнецова о функциональной полноте в Pk; существенные функции; теорема Слупецкого.

Теория кодирования: побуквенное кодирование; разделимые коды; префиксные коды; критерий однозначности декодирования; неравенство Крафта-Макмиллана для разделимых кодов; условие существования разделимого кода с заданными длинами кодовых слов; оптимальные коды; методы построения оптимальных кодов; метод Хафмана; самокорректирующиеся коды; коды Хэмминга, исправляющие единичную ошибку. Линейные коды и их простейшие свойства; коды Боуза-Чоудхури.

Синтез и сложность управляющих систем: схемы из функциональных элементов; сложность схем; синтез схем из функциональных элементов для индивидуальных функций; схемы сложения и умножения **n**-разрядных чисел; простейшие универсальные методы синтеза; метод Шеннона; мощностный метод получения низких оценок сложности; функция $L_{сфэ}(n)$; порядок роста функции $L_{сфэ}(n)$.

Асимптотически наилучший метод синтеза схем из функциональных элементов в базисе {v, &, -} ; асимптотика функции $L_{сфэ}(n)$; контактные схемы; простейшие методы синтеза; контактное дерево; универсальный многополюсник; метод Шеннона для контактных схем; функция $L_{кс}(n)$; порядок роста функции $L_{кс}(n)$; метод каскадов. Нижняя оценка сложности линейной функции в классе контактных схем (метод Кардо). Ограниченно-детерминированные функции: детерминированные функции; задание детерминированных функций при помощи деревьев; вес функций; ограниченно-детерминированные функции (ОДФ); задание ОДФ диаграммами переходов и каноническими уравнениями; конечные автоматы; автоматные функции;

состояние автомата; эквивалентность состояний; теорема об эквивалентности состояний конечного автомата. Эквивалентность автоматов; построение автомата, эквивалентного данному, с минимальным числом состояний. Преобразование автоматными функциями периодических последовательностей; операция суперпозиции; отсутствие полных относительно операции суперпозиции конечных систем автоматных функций; схемы из логических элементов и элементов задержки; реализация автоматных функций; события; операции над событиями; регулярные события и их представимость в автоматах; теорема Клини. Регулярные выражения; представимость событий регулярными выражениями; пример нерегулярного события.

2.2. Наименование тем, их содержание, объем в лекционных часах

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ

Наименование темы	Кол-во часов
1. Введение.	0,5
2. Основы теории множеств. Отношения и функции на множествах.	5,5
3. Элементы комбинаторного анализа.	4
4. Алгебра высказываний. Предикаты и кванторы. Аксиоматический метод. Виды теорем.	4
5. Булевы функции.	6
6. Элементы теории графов. Оптимизационные задачи на графах.	10
7. Элементы теории алгоритмов.	2
8. Элементы теории и практики кодирования.	2

9. Теория конечных автоматов.	2
ИТОГО	36

2.3. Практические занятия, их содержание и объем в часах

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

(для специальности 010101)

Наименование темы	Кол-во часов
1. Элементы теории множеств. Способы задания множеств. Операции над множествами. Доказательство равенств. Упорядоченная пара. Декартово произведение.	2
2. Бинарные отношения. Свойства отношений. Отношение эквивалентности, частичного и линейного порядка. Отображение множеств. Композиция отображений.	2
3. Комбинаторика. Правило суммы и произведения. Теория соединений. Бином Ньютона. Контрольная работа №1.	4
4. Высказывания. Логические операции над высказываниями. Предикаты и кванторы.	2
5. Булевы функции. Задание функции. Элементарные функции и их свойства. Совершенная конъюнктивная нормальная форма и совершенная дизъюнктивная нормальная форма . Полные системы. Полином Жегалкина, представление функций полиномами. Замыкание. Линейные функции. Самодвойственные функции. Монотонные функции. Применение булевых функций для синтеза релейно-контактных схем. Системы из функциональных элементов.	4
6. Элементы теории графов. Операции над графами. Свойства графов. Пути, цепи, контуры, циклы. Эйлеровы и гамильто-	2

новы графы. Задание графов. Планарность и укладка графов. Раскраска графов. Деревья. Сети.	
7. Элементы теории алгоритмов. Машины Тьюринга. Сочетания машин Тьюринга. Алгоритмически разрешимые и неразрешимые проблемы. Контрольная работа №2.	2
ИТОГО	18

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

(для специальности 010501)

Наименование темы	Кол-во часов
1. Элементы теории множеств. Способы задания множеств. Операции над множествами. Доказательство равенств. Упорядоченная пара. Декартово произведение.	2
2. Отношения на множествах. Свойства отношений. Отношение эквивалентности, частичного и линейного порядка.	2
3. Отображение множеств. Композиция отображений.	2
4. Комбинаторика. Правило суммы и произведения. Теория соединений.	2
5. Бином Ньютона, биномиальные коэффициенты.	2
6. Контрольная работа №1.	2
7. Алгебра высказываний. Высказывания и логические операции над высказываниями. Предикаты и кванторы.	2
8. Булевы функции. Задание функции. Элементарные функции и их свойства.	2
9. Совершенная конъюнктивная нормальная форма и совершенная дизъюнктивная нормальная форма. Полные системы.	4

Полином Жегалкина, представление функций полиномами. Замыкание. Линейные функции. Самодвойственные функции. Монотонные функции.	
10. Применение булевых функций для синтеза релейно-контактных схем. Системы из функциональных элементов.	2
11. Элементы теории графов. Операции над графами. Свойства графов. Пути, цепи, контуры, циклы.	2
12. Эйлеровы и гамильтоновы графы. Задание графов. Планарность и укладка графов. Раскраска графов. Деревья.	2
13. Представление и защита рефератов.	2
14. Оптимизационные задачи на графах. Алгоритм Дейкстры нахождения дерева кратчайших расстояний. Алгоритм Флойда. Задача китайского почтальона. Сети. Сетевые модели и представление информации. Алгоритм Форда нахождения максимального потока в сети (теорема о максимальном потоке).	4
15. Элементы теории алгоритмов. Машины Тьюринга. Сочетания машин Тьюринга. Алгоритмически разрешимые и неразрешимые проблемы.	2
16. Контрольная работа №2.	2
ИТОГО	36

2.4. Самостоятельная работа студентов (26 часов для специальности 010101, 81 часов для специальности 010501).

В качестве самостоятельной работы по дисциплине «Дискретная математика» и для промежуточного контроля приобретенных теоретических и практических навыков предусмотрены индивидуальные задания для типового расчета (по вариантам) по следующим темам: «Элементы теории множеств. Отношения. Отображения», «Комбинаторика», «Теория графов».

Для специальности 010501 также в качестве самостоятельной работы студентам предлагается

1. изучить дополнительный раздел и рассмотреть вопросы: биномиальные коэффициенты и их свойства, треугольник Паскаля.
2. подготовить к защите и оформить в реферативном виде доклад по выбранной теме: «Применение теории графов», «Задачи, решаемые с помощью теории графов», «Применение теории сетей».

2.5. Вопросы к экзамену

1. Теория множеств. Понятие множества. Способы задания множества. Операции над множествами. Мощность множества. Множество подмножеств.
2. Теория множеств. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна. Теоретико-множественные законы.
3. Отношения на множествах. Кортеж. Декартово произведение множеств. Область определения. Область значения. Обратное отношение. Композиция отношений.
4. Отношения на множествах. Свойства отношений. Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности. Отношение толерантности. Отношение порядка.
5. Функциональные отношения. Функция. Обратная функция. Образ и прообраз при отображении.
6. Функциональные отношения. Задание отображений. Функция нескольких переменных. Композиция отображений.
7. Функциональные отношения. Виды отображений. Примеры.
8. Комбинаторика. Основные комбинаторные правила.
9. Комбинаторика. Теория соединений. Соединений без повторений.
10. Комбинаторика. Теория соединений. Соединения с повторениями.
11. Алгебра высказываний. Высказывания и логические связки.

12. Алгебра высказываний. Условные и эквивалентные высказывания.
13. Булевы функции. Способы задания функции. Существенные и фиктивные переменные. Эквивалентность формул. Разложение функций по переменным. Элементарные функции и их свойства.
14. Совершенная конъюнктивная нормальная форма и совершенная дизъюнктивная нормальная форма. Карты Карно.
15. Полные системы. Полином Жегалкина, представление функций полиномами. Замыкание. Замкнутые классы. Линейные функции. Самодвойственные функции. Принцип двойственности. Монотонные функции. Теорема о неполноте систем функций алгебры логики.
16. Аксиоматические системы. Умозаключения и доказательства.
17. Применение булевых функций для синтеза релейно-контактных схем. Системы из функциональных элементов.
18. Исторические предпосылки развития теории графов.
19. Задание графов. Виды графов. Подграф. Маршруты и пути в графах. Компонента графа. Полные и двудольные графы.
20. Ориентированные графы.
21. Деревья.
22. Пути и циклы Эйлера. Задача о кенигсбергских мостах.
23. Алгебраические способы задания графов. Матрицы инцидентности и смежности.
24. Алгебраические свойства графов.
25. Планарные графы.
26. Раскраска графов. Задача о четырех красках.
27. Пути и циклы Гамильтона.
28. Оптимизационные задачи на графах. Алгоритм Дейкстры.
29. Оптимизационные задачи на графах. Алгоритм Флойда.
30. Оптимизационные задачи на графах. Задача китайского почтальона.
31. Сетевые модели и представление информации. Применение графов и сетей.

32. Понятие об алгоритме. Машины Тьюринга. Алгоритмически разрешимые и неразрешимые проблемы.
33. Кодирование. Защита информации. Системы счисления и представление информации в ЭВМ.
34. Обработка сообщений как кодирование. Шифрование.
35. Теория конечных автоматов. События, алгебра регулярных событий. Основная теорема теории конечных автоматов.
36. Практические методы анализа и синтеза конечных автоматов. Минимизация конечных автоматов без выходов. Алгоритмы построения конгруэнтных замыканий.

2.6. Виды контроля

Текущий контроль за аудиторной и самостоятельной работой обучаемых осуществляется во время проведения практических занятий посредством проведения и проверки контрольных и самостоятельных работ, а также проверки отчетов по индивидуальным заданиям. Промежуточный контроль осуществляется два раза в семестр в виде анализа ответов на аттестационные вопросы. Итоговый контроль осуществляется после успешного прохождения студентами текущего и промежуточного контроля в виде устного или письменного экзамена при ответах экзаменуемого на два вопроса в билете и дополнительные вопросы по желанию экзаменатора.

2.7. Требования к знаниям студентов, предъявляемые на экзамене

Необходимым условием допуска на экзамен является сдача трех расчетных работ и для специальности 010501 – представление реферата. В предлагаемый билет входят два вопроса: основной, дополнительный и три задания. Студент должен дать развернутый ответ на основной вопрос, и краткий – на дополнительный, решить предложенные задачи. Развернутый ответ предполагает полное знание теории по данной части курса, свободную ориентацию в материале, краткий ответ – основных теоретических моментов: понятий и терминологии.

Знания студента оцениваются «отлично» при полном изложении теоретического материала экзаменационного билета, ответах на дополнительные вопросы со свободной ориентацией в материале и других литературных источниках, при правильно выполненной практической части.

Оценка «хорошо» ставится при твердых знаниях студентом всех разделов курса (в пределах конспекта лекций) и при преимущественно правильно выполненной практической части (допускаются ошибки вычислительного характера, небольшие недочеты или неточности).

Оценку «удовлетворительно» студент получает, если дает неполные ответы на теоретические вопросы билета, показывая поверхностное знание учебного материала, владение основными понятиями и терминологией; при неверном ответе на билет или на дополнительные вопросы, при этом по крайней мере одно из практических заданий должно быть выполнено верно.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется за незнание студентом одного из разделов курса, если студент не дает ответы на теоретические вопросы билета, показывая лишь фрагментарное знание учебного материала, незнание основных понятий и терминологии, либо если не решена ни одна задача из трех предлагаемых в билете.

3. КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ

ТЕМА №1 ВВЕДЕНИЕ

Дискретная математика – часть математики, которая зародилась в глубокой древности. В широком смысле к дискретной математике относятся как классические разделы математики: алгебра, теория чисел, теория множеств, математическая логика и т.д., так и новые разделы, которые возникли в середине нашего столетия в связи с внедрением ЭВМ в практическую жизнь.

В настоящее время дискретная математика объединяет совокупность математических дисциплин, изучающих свойства абстрактных дискретных объектов, имеющих конечный характер – математических моделей объектов, процессов, зависимостей. Многие направления дискретной математики в последние десятилетия бурно развиваются, что обусловлено прогрессом компьютерной техники, необходимостью создания средств обработки и передачи информации, а также представления различных моделей на компьютерах, являющихся по своей природе конечными структурами.

Дискретная математика объединяет отдельные разделы, ранее сформированные как самостоятельные теории, и занимает важное место в системе прикладного математического образования.

Данный курс тесно связан с дисциплинами «Математический анализ», «Линейная алгебра», «Алгебра», «Теория вероятностей», «Математическая логика и теория алгоритмов», «Информатика» и др.

Основное отличие дискретной математики от классической заключается в отсутствии понятий предела и непрерывности, а основными носителями являются, например, целые числа и многочлены, векторы и матрицы, чертежи и рисунки, слова и команды и т. п. Элементы носителя формируют состав какой-либо системы, а отношения между ними – ее структуру. Отношения и элементы системы могут изменять свое значение в дискретные моменты времени.

Следовательно, состав и структура таких систем представляют дискретную модель, для описания которой привлекается аппарат дискретной математики.

Задачей изучения курса является освоение математического аппарата дискретного анализа – взаимосвязанной совокупности языка, моделей и методов математики, ориентированных на решение различных, в том числе и прикладных, задач по основным разделам дисциплины: теория множеств, алгебра высказываний, элементы комбинаторики, булевы функции, теория графов, теория кодирования, теория автоматов.

ТЕМА №2 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. ОТНОШЕНИЯ И ФУНКЦИИ НА МНОЖЕСТВАХ.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Теория множеств была создана немецким математиком Георгом Кантором (1845-1918) во второй половине XIX века. Большинство разделов современной математики обычно излагают на базе теории множеств.

1. Понятие множеств. Это понятие относится к основным, или фундаментальным понятиям математики, которые не могут иметь строгого определения как абстрактное математическое понятие. Математическое определение множества выделилось из привычных представлений о совокупности, классе, группе и т.д. Можно говорить о множестве студентов университета, о множестве целых чисел, о множестве точек плоскости и т.п.

Под множеством будем понимать любое собрание определенных и различных между собой объектов, мыслимое как единое целое.

Множество A считается заданным, если относительно любого предмета a можно установить, принадлежит ли этот предмет множеству A. Утверждение, что a принадлежит A (является элементом множества A) записывают так: $a \in A$. Если a не принадлежит A, то пишут: $a \notin A$. Формула $A \ni a$ означает, что множество A содержит элемент a.

Множество, содержащее конечное число элементов, называется конечным, в противном случае – бесконечным. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается $\varnothing$.

2. Способы задания множеств. Множество может быть задано или определено различными способами.

Задание множества перечислением всех его элементов. При определении множества все перечисляемые элементы заключают в фигурные скобки, подчеркивая тем самым, что данные элементы рассматриваются в совокупности.

Примеры.

Задание множества с помощью описания характеристического свойства, выделяющего элементы данного множества среди элементов основного множества.

Примеры.

Графическое задание множеств.

Примеры.

3. Диаграммы Эйлера – Венна. При рассмотрении множеств удобно пользоваться наглядными изображениями.

Картинки, интерпретирующие множества и операции над ними, называются *диаграммами Эйлера-Венна*. При составлении диаграмм пользуются следующей графической символикой. Множество изображается частью плоскости, ограниченной замкнутым контуром, чаще всего контуром круга, элемент множества обозначается точкой на плоскости.

4. Универсальное множество. Дополнение множества. Рассматривая какое-то конкретное множество, всегда можно указать, частью какого более широкого множества оно является. Элементы всех множеств, которые будем рассматривать, одновременно являются элементами этого широкого фиксированного множества, называемого *универсальным*. Универсальное множество обозначают через I и при геометрическом изображении ограничивают контуром прямоугольника.

Пример.

Дополнением множества A относительно универсального множества I называется множеством элементов из I, которые не входят в A.

Пример.

5. Включение. Равенство множеств. Пусть A и B – два множества. Говорят, что множество A содержится в множестве B, если любой элемент множества A является элементом множества B. В этом случае говорят также, что A является подмножеством B: $A \subset B$.

Пример.

Пусть одновременно справедливы утверждения $A \subset B$ и $B \subset A$. Тогда каждый элемент множества A является элементом множества B и каждый элемент множества B – элементом множества A, т.е. множества A и B. В таком случае говорят, что множества A и B совпадают, или равны: $A = B$.

Пример.

Очевидны следующие утверждения:

1) любое множество является своим подмножеством:

$$A \subset A$$

2) пустое множество содержится в любом множестве:

$$\varnothing \subset A$$

6. Множество подмножеств. Для каждого множества M существует множество, элементами которого являются подмножества множества M. Это множество $P(M)$ включает в качестве элементов и само множество M, и пустое множество $\varnothing$. Множество $P(M)$ называется *множеством всех подмножеств* множества M, или множеством-степенью. Введем обозначение $|M|$ для количества элементов конечного множества M, называемое *мощностью* множества.

Пример.

7. Операции над множествами. *Объединением* двух множеств A и B называется множество $A \cup B$, ссостоящее из всех элементов множеств A и B и несодержащее никаких других элементов.

Пример.

Пересечением двух множеств A и B называется такое множество $A \cap B$, которое состоит из всех элементов, содержащихся в обоих множествах A и B, и не содержит никаких других элементов.

Примеры.

Теорема. Множества относительно операций дополнения, объединения и пересечения образуют булеву алгебру множеств, т.е. для них выполнены 19 основных равенств:

0. $\overline{\overline{A}} = A$	Закон двойного дополнения
1. $A \cap B = B \cap A$	Коммутативный закон пересечения
2. $A \cup B = B \cup A$	Коммутативный закон объединения
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Ассоциативный закон пересечения
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Ассоциативный закон объединения
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Дистрибутивный закон относительно пересечения
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Дистрибутивный закон относительно объединения
7. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Первый закон де Моргана
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Второй закон де Моргана
9. $A \cap A = A$	Идемпотентность пересечения
10. $A \cup A = A$	Идемпотентность объединения

11. $A \cup I = I$

12. $A \cap I = A$

13. $A \cap \varnothing = \varnothing$

14. $A \cup \varnothing = A$

15. $A \cap (A \cup B) = A$

16. $\mathrm{A} \cup (A \cap B) = A$

17. $A \cap \overline{A} = \varnothing$

18. $A \cup \overline{A} = I$

Разностью двух множеств A и B называется множество $A \setminus B$, содержащее те и только те элементы множества A, которые не являются элементами множества B.

Очевидно, что справедливо равенство:

19. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

<u>Пример.</u>

Симметрической разностью множеств A и B называется множество:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Пример.

Задача 1. Обосновать равенство с помощью диаграмм Эйлера-Венна:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Задача 2. Доказать справедливость равенства методом двустороннего включения:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Задача 3. Доказать справедливость равенства, используя формулы алгебры множеств: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

2. ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВАХ

1. Понятие отношения. Понятие *отношения* относится к фундаментальным понятиям математики. Термин «отношение» впервые встречается в определении множества по Бурбаки: «Множество образуется из элементов, обладающих некоторыми свойствами и находящимися в некоторых отношениях между собой или с элементами других множеств».

Чтобы охарактеризовать отношение, необходимо перечислить все такие наборы элементов, в каждом из которых один элемент находится в рассматриваемом отношении с другими. Отношения, в котором участвуют два объекта, принято называть *бинарными*.

Можно определить и другие виды отношений: касающиеся трех объектов – тернарные, одного объекта – унарные и т.д.

2. Упорядоченная пара. Бинарные отношения. Введем понятие упорядоченного набора, имеющего конечное число элементов.

Упорядоченной парой (x, y) называется множество, состоящее из двух элементов x и y, расположенных в определенном порядке. Аналогично можно определить набор из n элементов: это множество, все элементы которого занумерованы натуральными числами $1, 2, \ldots, n$. Такой набор обозначают через: $(x_1, x_2,\ldots, x_n)$. Пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) считаются равными тогда и только тогда, когда $x_1=x_2$, $y_1=y_2$.

3. Декартово произведение множеств. Прямым (или декартовым) произведением двух множеств X и Y называется множество, состоящее из всевозможных упорядоченных пар элементов, в которых первый элемент принадлежит X, а второй – множеству Y. Прямое произведение обозначается: $X \times Y$, а его элементы (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$. Очевидно, если $X \neq Y$, то $X \times Y \neq Y \times X$.

Также можно определить прямое произведение $X_1 \times X_2 \times ,\ldots,\times X_n$ любого конечного семейства множеств $X_1, X_2,\ldots, X_n$. Оно состоит из всевозможных упорядоченных наборов $(x_1,\ldots, x_n)$, где $x_i \in X_i$, $i=\overline{1,n}$. Если $X_1 = X_2 =,\ldots,= X_n$, то $X_1 \times X_2 \times ,\ldots, \times X_n = X^n$.

Любое n – местное отношение – есть подмножество прямого произведения некоторых множеств $X_1, X_2,\ldots, X_n$.

Пример.

Бинарным (или двуместным) *отношением* ρ называется множество упорядоченных пар декартового произведения множеств. Если ρ есть некоторое отношение и пара (x, y) принадлежит этому отношению, то, наряду с записью $(x, y)\in\rho$, употребляется запись: $x\ \rho\ y$ («x находится в отношении ρ к y»). Часто в литературе для обозначения отношений используется буква R: $x\ R\ y$ (от английского relation – отношение). Элементы x и y называются координатными, или компонентами отношения.

Областью определения бинарного отношения ρ называется множество $D_\rho = \{x$: существует y, что $x\ \rho\ y\}$.

Областью значения бинарного отношения ρ называется множество $E_\rho = \{y$: существует x, что $x\ \rho\ y\}$.

Примеры.

Для бинарного отношения обычным образом определены теоретико-множественные операции объединения, пересечения и т.д.

Задача 1. Для бинарного отношения ρ $\{(x, y)$: $x^2+y^2< 1\}$ найдите D_ρ и E_ρ.

Задача 2. Пусть $A = \{0, 1\}$. Перечислите элементы множеств A^2, A^3.

Задача 3. Пусть $A \subseteq C$, $B \subseteq C$. Докажите, что $A \times B = (A \times C) \cap (C \times B)$.

Обратным отношением для ρ называется отношение:

$$\rho^{-1} = \{(x, y): (y, x) \in \rho\}$$

Композицией отношений ρ_1 и ρ_2 называется отношение $\rho_2 \circ \rho_1 = \{(x, z)$: существует y такое, что $(x, y) \in \rho_1$ и $(y, z) \in \rho_2\}$.

Для любых бинарных отношений выполняются следующие свойства:

1. $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.
2. $(\gamma \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \gamma^{-1}$.

Каждое отношение ρ есть подмножество декартового произведения некоторых множеств X и Y таких, что $D_\rho \leq X$, $E_\rho \leq Y$. Если $X = Y$, то говорят, что ρ есть отношение на множестве X.

Задача. Пусть $\rho_1 =\{(x, y) \in R\times R$: $x \cdot y > 0\}$ и $\rho_2 =\{(x,y) \in R\times R$: $(x+y) \in z\}$. Найдите $\rho_1 \circ \rho_2$.

4. Свойства отношений на множествах. Если для некоторой пары элементов x и y и некоторого отношения ρ одновременно $x\rho y$ и $y\rho x$, то такое отношение называется *симметричным*.

Пример.

Отношение ρ, для которого из выполнения условий $x\rho y$ и $y\rho x$ вытекает, что $x=y$, называется *антисимметричным*.

Пример.

Если элемент x находится в отношении ρ и самому себе: $x \rho x$, то такое отношение называется *рефлексивным*.

Пример.

Отношение ρ называется *транзитивным*, если из двух условий $x \rho y$ и $y \rho z$ вытекает, что справедливо $x \rho z$.

Пример.

Отношение ρ называется *ассиметричным*, если $x \rho y$ и $y \rho x$ не выполняются одновременно ни для одной пары (x, y), $x \in X$, $y \in Y$.

Пример.

Отношение ρ называется *связным*, если для любых x и y отношение $x \neq y$ влечет за собой: $x \rho y$ или $y \rho x$.

Пример.

5. Отношение эквивалентности. Отношение ρ, являющееся одновременно рефлексивным, симметричным и транзитивным отношением на множестве X, называется *отношением эквивалентности* на множестве X.

Примеры.

1. Отношение подобия на множестве треугольников есть отношение эквивалентности.

2. Отношение сравнимости по модулю натурального числа n на множестве целых чисел: $x \equiv y \bmod (n)$ тогда и только тогда, когда $(x - y)$ делится на n. Это отношение рефлексивно на Z, т.к. для любого $x \in Z$, $x - x = 0$, и, следовательно, делится на n. Это отношение симметрично, т.к. если $x - y$ делится на n, то и $y - x$ делится на n. Это отношение транзитивно, т.к. если $(x - y)$ делится на n, то для некоторого целого t имеем $x - y = t_1 n$, а если $(y - z)$ делится на n, то для некоторого целого t_2 имеем $y - z = t_2 n$. Отсюда $x - z = (t_1 + t_2) \cdot n$, т.е. $x - z$ делится на n.

Пусть ρ – отношение эквивалентности на множестве X. *Классом эквивалентности*, порожденным элементом x, называется подмножество множества X, состоящее из тех элементов $y \in X$, для которых $x \rho y$. Класс эквивалентности, порожденный элементом x, обозначается $[x]$:

$$[x] = \{y: y \in X, x \rho y\}.$$

Примеры.

Разбиением множества X называется совокупность попарно непересекающихся множеств X таких, что каждый элемент множества X принадлежит одному и только одному из таких подмножеств.

Пример.

Теорема. Всякое разбиение множества X определяет на X отношение эквивалентности ρ: $x \rho y \Leftrightarrow x$ и y принадлежит одному подмножеству разбиения.

Теорема. Всякое отношение эквивалентности ρ определяет разбиение множества X на классы эквивалентности относительно этого отношения.

Совокупность классов эквивалентности элементов множества X по отношению эквивалентности ρ называется фактор-множеством множества X по отношению ρ и обозначается X / ρ.

6. Отношение порядка. Часто приходится иметь дело с упорядоченными множествами – например, слова в словаре упорядочены лексикографически, ученики могут быть упорядочены по росту, упорядочен натуральный ряд чисел и т.д.

Рассмотрим множество X каких-либо элементов. Отношение ρ в X называется *отношением строгого порядка*, если оно асимметрично и транзитивно, и *отношением нестрогого порядка*, если оно антисимметрично и транзитивно.

Связное отношение порядка называется отношением *линейного* (или совершенного) *порядка*.

Каждому отношению порядка ρ в X соответствует обратное ему отношение ρ^{-1}, которое также является отношением порядка.

Пример.

Если отношение порядка ρ связано, то противоположное ему отношение $\bar{\rho}$ является отношением порядка. При этом, если ρ – строгое отношение порядка, то $\bar{\rho}$ – отношение нестрогого порядка, и обратно.

Пример.

Множество с заданным на нем отношением порядка ρ называют упорядоченным. Часто обозначают: $<$ - отношение строгого порядка; $\leq$ - нестрогого порядка.

Если A – подмножество множества X, на котором задано отношение порядка ρ, то на A также задано отношение порядка, индуцированное отношением ρ.

Пример.

Пусть A – подмножество упорядоченного множества X. Назовем элемент $a \in A$ наименьшим в A, если для любого $x \in A$ имеем $a \leq x$.

Очевидно, что в A может существовать не более одного наименьшего элемента.

Упорядоченное множество X называется вполне упорядоченным, если любое его непустое подмножество имеет наименьший элемент.

Пример.

Элемент $a \in X$ называется минимальным в X, если в X нет ни одного элемента x, такого, что $x < a$. Ясно, что если в X есть наименьший элемент, то он является единственным минимальным элементом в X. Вообще говоря, в X может не быть ни одного минимального элемента, а может быть бесконечно много таких элементов.

Пример.

Задача 1. Докажите, что для произвольных множеств A, B, C и D имеет место равенство: $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

Задача 2. Отношение R на множестве Z целых чисел определяется условием: $xRy \equiv$ разность $(x–y)$ делится на 5. Докажите, что R является отношением эквивалентности.

1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

1. Функциональные отношения. Обратимые функциональные отношения. Функциональные отношения связаны с понятием функции, заданной на некотором множестве X.

Функция f задана на некотором множестве X, если каждому элементу x из X поставлен в соответствие один определенный элемент $y = f(x)$ из некоторого множества Y.

Если множество Z содержит оба множества X и Y, то задание функции полностью определяется множеством всевозможных кортежей вида $<x, f(x)>$ из $Z \times Z$, где x – любой элемент из X , а $f(x)$ – соответствующий ему элемент из Y. Такое множество кортежей называется *графиком функции* f.

Пример.

Отношение, которому принадлежат в точности все кортежи графика функции f, называется *функциональным отношением* для функции f.

Основная особенность этого отношения состоит в том, что ему не могут принадлежать никакие два кортежа $<x, y_1>$, $<x, y_2>$, первые элементы которых равны, а вторые – нет (каждому $x \in X$ соответствует, по определению функции, в точности один элемент y из Y).

Примеры.

Вторые элементы кортежей, принадлежащих некоторому функциональному отношению, могут и совпадать, поскольку различным элементам x_1 и x_2 из X функция f может ставить в соответствие один и тот же элемент y из Y .

В случае, когда разным элементам из X ставят в соответствие разные элементы из Y, можно определить так называемую обратную функцию f^{-1}.

Обратная функция f^{-1} – это функция, которая каждому значению функции f из Y ставит в соответствие единственный элемент x из X, такой, что $f(x) = y$.

Функция f при этом называется *обратимой*, а соответствующее функциональное отношение – *обратным*.

Пример.

2. Образ и прообраз множества при отображении. Две функции f_1 и f_2 называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов: f_1: $X_1 \to Y_1$ и f_2: $X_2 \to Y_2$, $f_1 = f_2 \Leftrightarrow X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$.

Область определения функции обозначается D_f, а *область значений* – R_f. Если $D_f = X$ и $R_f = Y$, то говорят, что функция f задана на множестве X со значениями во множестве Y и осуществляет отображение множества X во множество Y. Это отображение обозначается таким образом: $f\colon X \to Y$.

Элемент $y = f(x)$ называется *образом элемента* x при отображении f, а элемент x – *прообразом элемента* y.

Если множество $A \subset X$, то через $f(A)$ обозначается множество образов всех элементов множества A. Множество $f(A)$ называется *образом множества* A при отображении f. Пусть дано отображение $f\colon X \to Y$; множество всех элементов в X, образы которых при отображении f содержатся в данном множестве $B \subset Y$, называется *полным прообразом множества* B при отображении f и обозначается $f^{-1}(B)$.

Примеры.

3. Функция одной и нескольких переменных. Если задано отображение $f\colon A \to B$, где A и B – подмножества из R, то $f\colon A \to B$ называют вещественной функцией одной вещественной переменной. Для такой функции обычно применяют обозначение $y = f(x)$, $y = y(x)$ и т. п. Аналогично говорят, что отображение $f\colon A \to B$ является вещественной функцией двух переменных, если $A \subset \mathrm{R}^2$, $B \subset \mathrm{R}$. В этом случае для элементов множества A применяют обозначение вида (x,y) или (x_1, x_2), а функцию обозначают через $z = f(x, y)$ или $y = f(x_1, x_2)$.

Точно также, считая, что $A \subset \mathrm{R}^n$ и $B \subset \mathrm{R}$ можно дать определение вещественной функции $y = f(x_1, x_2,\ldots x_n)$, зависящей от n вещественных переменных $x_1, x_2,\ldots x_n$.

4. Композиция отображений. Пусть даны отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$. Композицией отображений f и g (сложным отображением) называется отображение $g\circ f\colon X \to Z$, определяемое следующим: $(g \circ f)(x) \equiv g(f(x))$.

Композицию отображений f и g иногда называют их произведением. В том случае, когда f и g именуются функциями, $g \circ f$ называют также сложной функцией, построенной по f и g.

Операция композиции отображений ассоциативна. Если даны отображения: f: $X \to Y$, g: $Y \to Z$ и h: $Z \to W$, то для любого x ($x \in X$): $(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$

Свойство ассоциативности позволяет опускать скобки при построении композиции нескольких отображений.

Коммутативностью операция композиции не обладает, т.е. можно построить такие отображения f и g, что $g \circ f \neq f \circ g$.

Пример.

5. Виды отображений. Выделяют три основных типа отображений: сюрьективные, инъективные и биективные.

Отображение $f: \ X \to Y$ называется *сюрьективным*, если $\forall y \in Y : f^{-1}(\{y\}) \neq 0$.

Отображение $f: \ X \to Y$ называется *инъективны*м, если $\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Отображение $f: \ X \to Y$ называется *биективным*, если оно сюрьективно и инъективно.

Примеры.

Задача 1. Постройте биективное отображение интервала $I = (0, 1)$ на множество всех действительных чисел R.

6. Эквивалентные множества. Множество A называется *эквивалентным*, или равномощным множеству B ($A \sim B$), если существует биективное отображение $f : A \mapsto B$. Из симметричности отношения эквивалентности вытекает, что, наряду с утверждением «множество A эквивалентно множеству B». можно заключить, что «A и B эквивалентны друг другу».

Задача 2. Докажите, что если множество A эквивалентно некоторому подмножеству $B_1 \subset B$, а множество B эквивалентно некоторому подмножеству $A_1 \subset A$, то множество A эквивалентно B (теорема Кантора - Бернштейна).

7. Счетные множества. Множества, эквивалентные множеству N всех натуральных чисел, называют *счетными*, или множествами счетной мощности. Другими словами, счетные множества – это такие множества, все элементы которых можно перенумеровать, присвоив каждому свой номер.

Примеры.

Справедливы следующие утверждения о счетных множествах.

1. Объединение конечного числа счетных множеств есть счетное множество.

2. Объединение счетного числа конечных множеств есть множество счетное, или конечное.

3. Объединение счетного числа счетных множеств есть счетное множество.

4. Прибавление к счетному множеству конечного множества не изменяет его мощности.

5. Любое бесконечное подмножество счетного множества счетно.

6. Во всяком бесконечном множестве имеется счетное подмножество.

7. Прибавление к бесконечному множеству счетного или конечного множества не изменяет его мощности.

8. Вычитание из бесконечного несчетного множества счетного или конечного множества не изменяет мощности исходного множества.

Задача 3. Докажите утверждение 7: прибавление к бесконечному множеству B счетного или конечного множества S не изменяет мощности B.

ТЕМА № 3 ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА

При решении многих практических задач приходится выбирать из некоторой совокупности объектов элементы, обладающие тем или иным свойством, располагать эти элементы в определенном порядке и т. д. Поскольку в задачах такого типа речь идет о тех или иных комбинациях объектов, их называют *комбинаторными задачами*. Область математики, в которой изучаются комбинаторные задачи, называют *комбинаторикой*.

Приведем несколько примеров комбинаторных задач.

1. Комбинаторные правила. Правило произведения. Если объект A_1 может быть выбран k_1 способами, затем для каждого из таких выборов объекта A_1 другой объект A_2 может быть выбран k_2 способами, затем для каждого из таких выборов и объекта A_1 и объекта A_2 третий объект A_3 может быть выбран k_3 способами и т. д., включая m-й объект A_m, который может быть выбран k_m способами, то объект, состоящий в выборе m объектов вместе, т. е. объект « A_1 и A_2 и A_3 и … и A_m», может быть выбран k_1 k_2 k_3 … k_m способами.

Пример.

На языке теории множеств это правило формулируется следующим образом: если множества A и B конечны, то число пар в их декартовом произведении $A \times B$ равно произведению чисел элементов этих множеств:

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B). \qquad (1)$$

Задача. В розыгрыше первенства по футболу принимают участие 18 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали, если любая команда может получить только одну медаль?

Правило суммы. Пусть даны m действий A_1, A_2, …, A_m таких, что выполнение любого их них не зависит от выполнения остальных действий. Если: действие A_1 можно выполнить k_1 способами, действие A_2 можно выполнить k_2 способами, …, действие A_m можно выполнить k_m способами, тогда действие, состоящее в том, что выполняется любое из действий, можно выполнить $k_1+k_2+…+k_m$ способами.

На языке теории множеств это правило формулируется следующим образом: если пересечение конечных множеств A и B пусто, $A \cap B=\varnothing$, то число элементов в их объединении равно сумме чисел элементов множеств A и B:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \qquad (2)$$

Пример.

Справедливо следующее утверждение: если конечные множества A_1, A_2, …, A_m попарно не пересекаются, т. е. если $A_j \cap A_k = \varnothing$ при $j \neq k$, то имеет место равенство:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_m) \qquad (3)$$

Рассмотрим теперь случай, когда множества могут иметь непустые пересечения. Для любых конечных множеств A и B верно равенство:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B). \qquad (4)$$

Формула (4) является частным случаем более общей формулы, которую называют *формулой перекрытий*, или *формулой включений и исключений.* В случае трех переменных она имеет вид:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(\mathrm{C}) - \mathrm{n}(A \cap \mathrm{B}) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + \\ + n(A \cap B \cap C).$$

Пример.

Задача. Каждый ученик класса – либо девочка, либо блондин, либо любит математику. В классе 20 девочек, из них 12 блондинок, и одна блондинка любит математику. Всего в классе 24 ученика – блондина, математику из них любят 12, а всего учеников (мальчиков и девочек), которые любят математику, 17, из них 6 девочек. Сколько учеников в данном классе?

4.2. Теория соединений. При выборе m элементов из n различных элементов принято говорить, что они образуют *соединение из n элементов по m*.

В зависимости от того, имеет ли значение порядок элементов в соединении или нет, а также от того, входят в соединение все n элементов или только часть их, различают три вида соединений.

Виды соединений.

1. Соединения, отличающиеся друг от друга составом элементов или их порядком, каждое из которых содержит m ($m \leq n$) элементов, взятых из n различных элементов, называют *размещениями* из n элементов по m.

2. Соединения, каждое их которых содержит n различных элементов взятых в определенном порядке, называют *перестановками* из n элементов.

3. Соединения, отличающиеся друг от друга по крайней мере одним элементом, каждое из которых содержит m элементов, взятых из n различных элементов, называют *сочетаниями* из n элементов по m. Порядок следования элементов не учитывается.

Соединения, в каждом из которых любой из n различных элементов входит один раз, называют *соединениями без повторений*.

Соединения, в каждом из которых из n различных элементов может входить более одного раза, называют *соединениями с повторениями*.

Соединения без повторений. Задача о числе размещений без повторений. Упорядоченное множество длины k, составленное из элементов m - элементного множества X, называют размещениями без повторений из m элементов множества X по k. Число таких размещений обозначают A_m^k и вычисляют как:

$$A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}.$$

Задача. Сколькими способами можно выбрать старосту и заместителя в группе из 20 студентов?

Задача о числе перестановок без повторений. Перестановкой без повторений из m элементов называют размещение без повторений из этих элементов по m.

Число перестановок из m элементов обозначают P_m. Так как $P_m = A_m^m$, то:

$$P_m = m!$$

Задача. Сколькими способами 6 человек могут сесть на 6 стульев?

Задача о числе сочетаний без повторений. k – элементные подмножества m – элементного множества X называют сочетаниями без повторений из элементов этого множества по k. Их число обозначают C_m^k и вычисляют по формуле:

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

Задача 1. Сколькими способами можно выбрать двух дежурных в группе из 20 студентов?

Пользуясь формулой числа сочетаний из n по m, можно заключить справедливость равенства: $C_n^m = C_n^{n-m}$, которое принято назвать *правилом симметрии*.

Одним из важных правил для числа сочетаний является *правило Паскаля*: $C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_n^m$.

Задача 2. Из двух математиков и десяти экономистов надо составить комиссию в составе восьми человек. Сколькими способами может быть составлена комиссия, если в нее должен входить хотя бы один математик?

<u>Соединение с повторениями.</u> <u>Задача о числе размещений с повторениями.</u> Кортежи длины k, составленные из элементов m - элементного множества X, называют размещениями с повторениями из m элементов по k. Число этих кортежей обозначают $\overline{A_m^k}$ и вычисляют как: $\overline{A_m^k} = m^k$.

Задача 3. На практическом занятии студентам было предложено решить у доски две задачи, по одному студенту на каждую. Сколькими способами преподаватель может вызвать студентов для решения этих двух задач?

Задача 4. Найдите число всех подмножеств n элементного множества X.

<u>Задача о числе перестановок с повторениями.</u> Перестановкой с повторениями состава (k_1, k_2,…, k_m) из элементов (a_1, a_2, …, a_m) называют любой кортеж длины $k=k_1+k_2+\ldots+k_m$, в который элемент a_1 входит k_1 раз, …, элемент a_m – k_m раз. Число таких перестановок обозначают $P(k_1, k_2,\ldots, k_m)$ и вычисляют как: $P(k_1,k_2,\ldots,k_m) = \dfrac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} = \dfrac{(k_1+k_2+\ldots+k_m)!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$.

Задача 5. Сколько «слов» можно получить, переставляя буквы в слове «математика»?

<u>Задача о числе сочетаний с повторениями.</u> Пусть имеются предметы m видов и из них составляется набор, содержащий k элементов. Два таких на-

бора считаются одинаковыми в том и только в том случае, когда они имеют одинаковый состав. Такие наборы называют сочетаниями с повторениями из m элементов по k элементам, обозначают $\overline{C_m^k}$ и вычисляют как: $\overline{C_m^k} = C_{m+k-1}^k$.

Задача 6. Сколько наборов из 7 пирожных можно составить, если в продаже имеются 4 сорта пирожных?

<u>3. Бином Ньютона.</u> Для каждого натурального *n* и любых *x* и *a* справедливо равенство – бином Ньютона:

$$(x+a)^n = C_n^0 x^{n-0} a^0 + C_n^1 x^{n-1} a^1 + \ldots + C_n^m x^{n-m} a^m + \ldots + C_n^n x^{n-n} a^n.$$

Это равенство принято называть *биномом Ньютона*, или формулой Ньютона, его правую часть – *биномиальным разложением* (в сумму), или разложением бинома, а коэффициенты $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^m$ – биномиальными коэффициентами.

Свойства разложения бинома:

1. Число всех членов разложения на единицу больше показателя степени бинома, т. е. равно $n+1$.

2. Сумма показателей степеней x и a каждого члена разложения равна показателю степени бинома, т. е. $(n-m)+m=n$.

3. Общий член разложения (обозначим его T_{m+1}) имеет вид: $T_{m+1} = C_n^m x^{n-m} a^m, m = 0,1,\ldots,n.$ Т обозначает член разложения, а индекс $m+1$ – его порядковый номер в разложении бинома, считая слева направо.

4. Биномиальные коэффициенты членов разложения, равноотстоящих от концов разложения, равны между собой. Это следует из правила симметрии: $C_n^m = C_n^{n-m}, m = 0,1,\ldots,n$.

5. Каждый биномиальный коэффициент C_n^m разложения, начиная со второго, равен предшествующему биномиальному коэффициенту C_n^{m-1}, умноженному на дробь $\frac{n-(m-1)}{m}, m=1,2,3,...,n.$

6. Если показатель степени бинома – четное число (n=2l), то число членов разложения равно 2l+1. Если показатель степени бинома – нечетное число (n = 2p+1), то число членов разложения равно 2p+2.

7. Сумма биномиальных коэффициентов членов разложения, стоящих на нечетных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, и равна 2^{n-1}: $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... = 2^{n-1}.$

Задача 7. Докажите, что для каждого b>1 и каждого натурального числа n>1 верно неравенство Бернулли: b^n>1+n(b-1).

Задача 8. Докажите тождество: $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = n2^{n-1}.$

Задача 9. Найти номер члена разложения бинома $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^{16}$, не содержащего x.

ТЕМА № 4 АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ. ПРЕДИКАТЫ И КВАНТОРЫ. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД. ВИДЫ ТЕОРЕМ.

1. ВЫСКАЗЫВАНИЯ

1. Понятие высказывания. Понятие «*высказывание»* является основным неопределяемым понятием математики. Под высказыванием понимают связное повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно.

Не являются высказываниями вопросительные и восклицательные предложения, а также определения.

Для высказываний выполняются следующие законы логики:

1. Высказывание может быть истинным, высказывание может быть ложным. Хотя бы одно из этих свойств должно иметь место.

2. Никакое высказывание не может быть одновременно и истинным, и ложным.

На совокупности всех высказываний определяется функция истинности, принимающая значения в двухэлементном множестве $\{0,1\}$:

$\lambda(P) = 1$, если высказывание P истинно,

и

$\lambda(P) = 0$, если высказывание P ложно.

Значение $\lambda(P)$ называется логическим значением, или значением истинности высказывания P.

Значок λ часто опускают, так как в алгебре высказываний полностью отвлекаются от содержания высказываний, а изучают их только в связи со свойством быть истинными или ложными.

Два высказывания называют *равносильными*, если они принимают одинаковые значения истинности.

Высказывание, представляющее собой одно утверждение, называют простым, или элементарным. Высказывания, которые получаются из элементарных с помощью некоторых стандартных связок «не», «и», «или», «если …, то …», «тогда и только тогда» называют сложными или составными. В алгебре высказываний этим связкам соответствуют логические операции. А так как нас не интересует содержательный смысл высказывания, а только значение истинности, то для определения операции достаточно определить истинность результата применения операции.

2. Операции над высказываниями.

1. *Отрицание* высказывания P – высказывание, обозначаемое $\neg P$, читаемое «не P» и определяемое таблицей:

$\lambda(P)$	$\lambda(\neg P)$
0	1
1	0

Очевидно, что двойное отрицание высказывания P ($\neg\neg P$) совпадает с самим высказыванием P.

Если высказывание является простым предложением, то его отрицание образуется добавлением частицы «не» перед сказуемым. Построение отрицания добавлением частицы «не» неприменимо, когда в сказуемом исходного высказывания уже имеется эта частица.

Высказывания P и $\neg P$ не могут быть одновременно истинными или ложными.

2. *Конъюнкция* двух высказываний A и B (логическое умножение) – высказывание, обозначаемое $A \wedge B$, читаемое «A и B» и определяемое таблицей:

$\lambda(A)$	$\lambda(B)$	$\lambda(A \wedge B)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. *Дизъюнкция* двух высказываний A и B (логическое сложение) – высказывание, обозначаемое $A \vee B$, читаемое «A или B» и определяемое таблицей:

$\lambda(A)$	$\lambda(B)$	$\lambda(A \vee B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

4. *Импликация* двух высказываний A и B – высказывание, обозначаемое $A \to B$, читаемое «если A, то B» и определяемое таблицей:

$\lambda(A)$	$\lambda(B)$	$\lambda(A \to B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

5. *Эквиваленция* двух высказываний A и B (равносильность)– высказывание, обозначаемое $A \leftrightarrow B$, читаемое «A тогда и только тогда, когда B» и определяемое таблицей:

$\lambda(A)$	$\lambda(B)$	$\lambda(A \leftrightarrow B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Из полученного запаса высказываний можно получить, применяя эти же операции, новые сложные высказывания.

3. Формулы алгебры высказываний. Всякое сложное высказывание, составленное из некоторых исходных высказываний посредством применения логических операций 1 – 5, называют *формулой алгебры высказываний*.

Исходные высказывания при этом могут быть постоянными, т. е. иметь определенное значение «истина» или «ложь», или они могут не иметь определенного значения. В первом случае исходные высказывания называют *постоянными элементарными высказываниями*, во втором – *переменными элементарными высказываниями*. Переменные элементарные высказывания обозначают $A, B, C, \ldots, A_1, A_2, A_3, \ldots, X, Y, Z, \ldots, X_1, X_2, X_3 \ldots, p, q, r, s\ldots$ и называют их *пропозициональными переменными*.

Если задать значения всех переменных элементарных высказываний, то сама формула примет определенное значение. Таким образом, каждая формула определяет некоторую функцию, аргументами которой являются переменные элементарные высказывания.

Если формула содержит n элементарных высказываний, то она принимает 2^n значений, состоящих из нулей и единиц.

Две формулы алгебры высказываний называются *равносильными*, если при любых значениях всех переменных элементарных высказываний, входящих в эти формулы, они принимают одинаковые значения.

Справедливы следующие равносильности для операций алгебры высказываний:

1. $\overline{\overline{A}} \equiv A$ – закон двойного отрицания;
2. $A \wedge B \equiv B \wedge A$ –коммутативный закон конъюнкции;
3. $A \vee B \equiv B \vee A$ – коммутативный закон дизъюнкции;
4. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ – ассоциативный закон конъюнкции;
5. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ – ассоциативный закон дизъюнкции;
6. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ – дистрибутивный закон конъюнкции относительно дизъюнкции;
7. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ – дистрибутивный закон дизъюнкции относительно конъюнкции;
8. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$ – первый закон поглощения де Моргана;
9. $A \vee (A \wedge B) \equiv A$– второй закон поглощения де Моргана;
10. $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$ – первый закон де Моргана;
11. $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$ – второй закон де Моргана;
12. $A \vee A \equiv A$ – идемпотентность дизъюнкции;
13. $A \wedge A \equiv A$ – идемпотентность конъюнкции;
14. $A \vee \overline{A} \equiv 1$;
15. $A \wedge \overline{A} \equiv 0$;
16. $A \vee 0 \equiv A$;
17. $A \wedge 1 \equiv A$;
18. $A \rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B$;

19. $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$.

Данные соотношения легко проверить на основе определений операций $\wedge, \vee$ и $\neg$.

Логические операции $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ и $\neg$ не являются независимыми друг от друга. Одни из них можно выражать через другие так, что при этом получаются равносильные формулы.

Говорят, что операция $\wedge$ *двойственна* операции $\vee$ и наоборот.

Две формулы алгебры высказываний *двойственны*, если одна получается из другой заменой каждой операции на двойственную.

Если формулы алгебры высказываний равносильны, то и двойственные им формулы также равносильны (*закон двойственности*).

Задача 1. Проверьте, равносильны ли данные формулы:

$$(A \to B) \vee C \text{ и } (A \wedge \neg C) \to B.$$

Формула алгебры высказывания называется *тождественно истинной* (*тавтологией,* или *законом логики*), если она при всех значениях входящих в нее переменных высказываний принимает значение «истина».

Например, формула $P \to Q \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ является тавтологией.

Формула алгебры высказывания называется *выполнимой,* если она принимает значение «истина» при некоторых значениях входящих в нее переменных высказываний.

Формула алгебры высказывания называется *опровержимой,* если она принимает значение «ложь» при некоторых значениях входящих в нее переменных высказываний.

Формула алгебры высказывания называется *тождественно ложной* (*противоречие*), если она при всех значениях входящих в нее переменных высказываний принимает значение «ложь».

Например, формула $(A \vee \neg A) \to (A \wedge \neg A)$ является противоречием.

Легко убедиться, что если формула является противоречием, то ее отрицание – тавтология.

Задача 2. Применяя равносильные преобразования, приведите формулу

$$\neg(\neg A \vee B) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow A)$$

к возможно более простой форме.

Задача 3. Докажите, что данная формула опровержима, указав какие-нибудь значения входящих в нее переменных, при которых эти формула обращается в ложное высказывание:

$$(A \vee B) \rightarrow ((\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)).$$

Для нахождения отрицания произвольной формулы, составленной из пропозициональных переменных и операций $\wedge, \vee$ и $\neg$, достаточно всюду заменить знак $\wedge$ на знак $\vee$, а знак $\vee$ – на знак $\wedge$ и всякую переменную, входящую в формулу без знака отрицания, заменить на ту же переменную со знаком отрицания, а все имевшиеся знаки отрицания уничтожить.

Для упрощения формул иногда удобно сначала найти ее отрицание, упростить его, а затем снова взять отрицание полученного результата.

2. ПРЕДИКАТЫ И КВАНТОРЫ

Средства, предоставляемые логикой высказываний, оказываются недостаточными для анализа многих математических рассуждений. Поэтому возникает необходимость в построении такой логической системы, средствами которой можно исследовать элементарные высказывания алгебры логики. Такой системой является логика предикатов.

Алгебра предикатов представляет собой дальнейшее развитие алгебры логики. Она содержит в себе всю алгебру высказываний. Но, помимо этого, алгебра предикатов вводит в рассмотрение новое понятие – понятие предиката.

1. Понятие предиката. Каждое элементарное высказывание можно расчленить на *субъект* (буквально – подлежащее) и *предикат* (буквально – сказуемое). *Субъект* – это то, о чем что-то утверждается в высказывании; *предикат* – это то, что утверждается о субъекте. Если субъект есть некоторая

переменная x из данного множества М, то предикат становится функцией субъекта на множестве М, принимающей значения из множества $\{0,1\}$, и выражает свойства субъекта.

Одноместным предикатом $P(x)$ называется функция переменной x, определенная на множестве M и принимающая значения на множестве $E = \{0,1\}$.

Переменную x называют свободной, а множество M – областью допустимых значений данного предиката.

По числу входящих переменных различают предикаты одноместные $P(x)$, двуместные $P(x, y)$, …, n - местные $P(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Множество всех элементов x из M, при которых предикат $P(x)$ принимает значение «истина», называется *множеством истинности предиката*.

Множество истинности предиката включается во множество M.

К предикатам применимы все операции алгебры высказываний, а следовательно, и равносильности алгебры высказываний.

Пусть даны два одноместных предиката $P(x)$ и $Q(x)$, области допустимых значений которых совпадают. Образуем из них новый предикат $P(x) \wedge Q(x)$ от двух свободных переменных x и y, истинностное значение которого на любом наборе (a, b) определяется как истинностное значение высказывания $P(a) \wedge Q(b)$. Аналогично определяются предикаты $P(x) \vee Q(x)$, $\neg P(x)$, $P(x) \rightarrow Q(x)$, $P(x) \leftrightarrow Q(x)$.Над многоместными предикатами определяются конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция и отрицание также.

Предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *тождественно истинным*, если для любого набора допустимых значений входящих в него свободных переменных его истинностным значением является 1 (истина).

Предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *тождественно ложным*, если для любого набора допустимых значений входящих в него свободных переменных его истинностным значением является 0 (ложь).

Предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *выполнимым*, если существует хотя бы один набор допустимых значений входящих в него свободных переменных, на котором его истинностным значением является 1.

Любой предикат либо тождественно истинен, либо тождественно ложен, либо выполним.

Предикаты $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ называются *равносильными,* если предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n) \leftrightarrow Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ является тождественно истинным. Нетрудно убедиться, что предикаты равносильны тогда и только тогда, когда их истинностные значения совпадают на любом наборе допустимых значений входящих в него свободных переменных.

2. Кванторы. Наряду с пропозициональными операциями, в логике высказываний рассматриваются кванторы, позволяющие из данной высказывательной формы получить высказывательную форму с меньшим числом параметров, в частности, из одноместного предиката – высказывание.

Квантор общности позволяет из данной высказывательной формы с единственным параметром *x* получить высказывание с помощью оборота «для всех *x* ... ». Результат применения квантора общности к высказывательной форме *A*(*x*) обозначают $\forall \ x \ A(x)$. (Знак $\forall$ происходит от первой буквы английского слова All – все). Высказывание $\forall \ x \ A(x)$ считается истинным тогда и только тогда, когда при подстановке в $A(x)$ вместо свободных вхождений переменной *x* имени любого объекта из области ее возможных значений всегда получается истинное высказывание. Высказывание $\forall \ x \ A(x)$ можно читать также «Для любого *x* имеет место $A(x)$», «Для всех *x* верно $A(x)$», «Каждый *x* обладает свойством $A(x)$» и т.п.

Квантор существования соответствует образованию из данной высказывательной формы с единственным параметром *x* высказывания с помощью оборота «Существует такой *x*, что … ». Результат применения квантора существования к высказывательной форме А(x) обозначается $\exists \ x \ \ A(x)$. (Знак $\exists$ происходит от первой буквы английского слова Exist – существовать). Высказывание $\exists \ x \ \ A(x)$ истинно тогда и только тогда, когда в области возможных значений переменной x найдется такой объект, что при подстановке его имени вместо свободных вхождений переменной x в А(x) получается истинное высказывание. Высказывание $\exists x \ \ A(x)$ можно читать также «Существует x, для которого $A(x)$», «Для некоторых x имеет место $A(x)$», «Хотя бы для одного x верно $A(x)$» и т.п.

Аналогично применяются кванторы для предикатов с большим числом переменных. В результате применения квантора к n- местному предикату получается (n – 1)-местный предикат.

К одному и тому же предикату можно применять кванторы несколько раз. Легко показать, что перестановка кванторов местами изменяет логическое значение высказывания.

Переменная, на которую навешен квантор, именуется связанной; несвязанная переменная называется свободной.

Рассмотрим запись четырех основных типов высказываний, часто встречающихся в математике, на языке логики предикатов.

1. Пусть $A(x)$ – обозначение предиката «x – нечетное число», а $B(x)$ – обозначение предиката «x – простое число», x – целочисленная переменная.

1. Высказывание «Всякое нечетное число является простым числом» можно переформулировать так: «Для всякого x, если x – нечетное, то x – простое число» и записать на языке предикатов так:

$$\forall \ x \ \ (A(x) \to B(x)).$$

2. Высказывание «Никакое нечетное число не является простым числом», или «Для всякого x, если x – нечетное, то x не является простым числом», в символической форме запишется следующим образом:

$$\forall\ x\ (A(x) \to \neg B(x)).$$

3. Следующий тип высказывания: «Некоторые нечетные числа – простые». Суть его в том, что существует такое x, которое одновременно является и нечетным числом, и простым. Поэтому на языке логики предикатов оно запишется в виде:

$$\exists\ x\ (A(x) \wedge B(x)).$$

4. К четвертому типу относится высказывание «Некоторые нечетные числа не являются простыми». Это высказывание записывается так:

$$\exists\ x\ (A(x) \wedge \neg B(x)).$$

Основные равносильности, содержащие кванторы:

1) $\neg(\exists x)(P(x)) \cong (\forall x)(\neg P(x))$;

2) $\neg(\forall x)(P(x)) \cong (\exists x)(\neg P(x))$;

3) $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \cong (\forall x)(P(x)) \wedge (\forall x)(Q(x))$;

4) $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \cong (\exists x)(P(x)) \vee (\exists x)(Q(x))$;

5) $H \wedge (\exists x)(P(x)) \cong (\exists x)(H \wedge P(x))$;

6) $H \wedge (\forall x)(P(x)) \cong (\forall x)(H \wedge P(x))$;

7) $H \vee (\exists x)(P(x)) \cong (\exists x)(H \vee P(x))$;

8) $H \vee (\forall x)(P(x)) \cong (\forall x)(H \vee P(x))$;

9) $H \to (\exists x)(P(x)) \cong (\exists x)(H \to P(x))$;

10) $H \to (\forall x)(P(x)) \cong (\forall x)(H \to P(x))$;

11) $(\exists x)(P(x)) \to H \cong (\forall x)(P(x) \to H)$;

12) $(\forall x)(P(x)) \to H \cong (\exists x)(P(x) \to H)$.

Задача 1. Даны предикаты $P(x)$: «x – четное число» и $Q(x)$: «x – кратно 5», определенные на множестве N. Найдите области истинности предикатов:

1) $P(x) \wedge Q(x)$; 2) $P(x) \vee Q(x)$; 3) $\neg P(x)$; 4) $P(x) \to Q(x)$.

Задача 2. Изобразите на кругах Эйлера – Венна область истинности для предиката $\neg A(x) \vee \neg B(x)$.

Задача 3. Введя подходящие предикаты на соответствующих областях, переведите следующие высказывания на язык алгебры предикатов:

а) некоторые числа не являются действительными;

б) всякое натуральное число, делящееся на 12, делится на 2, 4 и 6;

в) существуют по меньшей мере 2 различных числа, такие что $P(x)$.

Задача 4. Докажите, что формула

$$\exists x \forall y P(x, y) \to \forall y \exists x P(x, y)$$

тождественно-истинная.

3. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД. ВИДЫ ТЕОРЕМ

1. Аксиоматический метод. В современной математике для изложения любой математической теории применяется аксиоматический метод.

Впервые он был использован в математике Евклидом в III веке до н.э. в его книге «Начала» при изложении основ элементарной геометрии, теории чисел, алгебры и других разделов античной математической науки. В XIX в. аксиоматический метод стал широко применяться в математике. В 1891г. Дж. Пеано предложил аксиоматику для натурального ряда. Были построены аксиоматические теории для действительных чисел, а также выработана аксиоматика теории множеств (система Цермело - Френкеля). Особенно широкое распространение формальные аксиоматики получили в современной алгебре.

Суть аксиоматического метода состоит в следующем: сначала вводятся некоторые неопределяемые понятия, затем – основные, также неопределяемые отношения между выбранными основными понятиями. Через указанные основные понятия и основные отношения определяются другие понятия и отношения. С помощью введенных понятий и отношений, как основных, так и определенных через них, формулируются всевозможные высказывания, совокупность которых составляет язык *теории*. Из этой совокупности всех высказываний выделяется некоторый набор высказываний, истинность которых постулируется, т.е. они по определению считаются истинными. Эти высказывания называются *аксиомами теории*, а их совокупность – *системой аксиом* (или *аксиоматикой*).

Указание аксиоматики приводит к тому, что из совокупности всех высказываний теории выделяется некоторое более узкое множество высказываний, истинность которых может быть установлена чисто логическими выводами из аксиом, т.е. доказана. *Доказательством* называется конечная последовательность высказываний рассматриваемой теории, каждое из которых либо является аксиомой, либо выводится из одного или более предыдущих высказываний этой последовательности по логическим правилам вывода. *Теоремой* называется высказывание, которое можно доказать.

Любая аксиоматика должна быть непротиворечивой. Это означает, что среди теорем, выводимых из аксиоматики нет противоречащих друг другу высказываний A и $\neg A$.

Различные теории могут иметь одни и те же основные понятия и отношения, но различаться выбором аксиом. Например, таковы геометрии Евклида и Лобачевского в аксиоматиках, отличие которых лишь в одной аксиоме параллельности. С другой стороны, одна и та же теория может строиться исходя из различных выборов основных понятий, основных отношений и аксиоматик. Примерами могут служить различные аксиоматики евклидовой геометрии.

2. Виды теорем. В большинстве случаев в теоремах можно выделить условие и заключение. При этом условие и заключение теоремы являются некоторыми неопределенными высказываниями, заданными на каком-либо множестве. Краткой записью это выражается так: $A(x) \to B(x)$. Неопределенное высказывание $A(x)$ называют *условием* или *посылкой*, а $B(x)$ – *заключением.*

Существуют другие часто используемые выражения этой теоремы:

A является достаточным условием для B, а B является необходимым условием для A.

Пусть A – некоторое неопределенное высказывание. Всякое высказывание, из которого A следует, называется достаточным условием для A. Всякое высказывание, которое вытекает из A, называется необходимым условием для A.

Итак, если справедлива теорема $A \to B$, то можно сказать, что A является достаточным условием для B или что B является необходимым условием для A.

Необходимое условие B представляет собой то требование, которое непременно должно быть выполнено для справедливости высказывания A. Однако B не гарантирует справедливости высказывания A, не является достаточным для A. Достаточное же условие A содержит больше требований, чем нужно для справедливости высказывания B.

Теоремы $A \to B$ и $B \to A$ называются *обратными* друг другу. Нередко одну из них называют прямой теоремой, а другую – обратной к ней.

Часто из двух взаимно обратных теорем справедлива только одна. Например, теорема $A \to B$ имеет вид: если четырехугольник Q является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны. Эта теорема верна. Обратная же теорема $B \to A$: если диагонали четырехугольника Q взаимно перпендикулярны, то он является ромбом, неверна.

Если справедливы обе теоремы $A \to B$ и $B \to A$, то этот факт выражают сокращенной записью $A \leftrightarrow B$ и считают каждое высказывание необходимым и достаточным условием для другого. Например, для делимости числа $a > 9$ на 4 необходимо и достаточно, чтобы на 4 делилось двухзначное число, выраженное последними двумя цифрами числа a.

Если в некоторой теореме $A \to$ B заменить посылку и заключение их отрицаниями, то получится новая теорема $\neg A \to \neg B$, которая называется противоположной к исходной. Часто из двух взаимно противоположных теорем справедлива только одна.

3. Доказательство «от противного». Замечательным является тот факт, что теорема $\neg B \to \neg A$, противоположная обратной, истинна в том и только

том случае, если истинна прямая теорема $A \to B$. Этот факт служит основой так называемого *метода доказательства «от противного»*: вместо нужной теоремы $A \to B$ доказывают теорему $\neg B \to \neg A$, противоположную обратной.

Метод доказательства от противного обычно применяют в следующей форме. Для доказательства теоремы $A \to B$ предполагают истинным высказывание $\neg B$ и пытаются отсюда вывести справедливость $\neg A$. Если это удается, то исходная теорема $A \to B$ также считается доказанной.

Задача 1. Для данной теоремы найдите все теоремы, т.е. верные утверждения, обратные и противоположные ей (если они есть), а также теорему, противоположную обратной:

Если *a* делится на *b* и *b* делится на *c*, то *a* делится на *c* (*a, b, c* – целые числа).

Таким образом, для данной теоремы получено пять не равносильных между собой обратных форм. В их неравносильности можно убедиться, составив таблицы истинности. Поскольку теоремы элементарной математики обычно формулируются так, чтобы их условия и заключения сами не содержали условной связки «если …,то …», будем называть обратными утверждениями для данной теоремы лишь утверждения:

$$B \to (A_1 \wedge A_2),\ (A_1 \wedge B) \to A_2, (A_2 \wedge B) \to A_1.$$

Произведя контрапозицию этих обратных форм, получим формы, противоположные данной теореме:

$$\neg(A_1 \wedge A_2) \to \neg B = (\neg A_1 \to \neg B) \wedge (\neg A_2 \to \neg B),$$

$$\neg A_2 \to \neg(A_1 \wedge B) = \neg A_2 \to (\neg A_1 \vee \neg B),$$

$$\neg A_1 \to \neg(A_2 \wedge B) = \neg A_1 \to (\neg A_2 \vee \neg B).$$

Наконец, произведя контрапозицию исходной теоремы, получим одну теорему, противоположную обратной:

$$\neg B \to \neg(A_1 \wedge A_2).$$

Найдем соответствующие утверждения для данной теоремы и выясним, какие из них сами являются теоремами.

$B \to (A_1 \wedge A_2)$: «Если a делится на c, то a делится на b и b делится на c»;

$(A_1 \wedge B) \to A_2$: «Если a делится на b и на c, то b делится на c»;

$(A_2 \wedge B) \to A_1$: «Если b делится на c *и* a делится на c, то a делится на b».

Эти утверждения не являются теоремами.

Утверждениями, противоположными данной теореме, являются:

$\neg(A_1 \wedge A_2) \to \neg B$: «Если одновременно не выполняются условия: a делится на b и b делится на c, то и неверно, что a делится на b»;

$\neg A_2 \to (\neg A_1 \vee \neg B)$: «Если b не делится на c, то или a не делится на b или a не делится на c»;

$\neg A_1 \to (\neg A_2 \vee \neg B)$: «Если a не делится на b, то или b не делится на c или a делится на c».

Эти утверждения также не являются теоремами.

Противоположное обратному утверждению, очевидно, теоремой является, поскольку мы можем доказать его истинность:

$\neg B \to \neg(A_1 \wedge A_2) = \neg B \to (\neg A_1 \vee \neg A_2)$: «Если a не делится на c, то или a не делится на b или b не делится на c».

Задача 2. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если …, то …»:

а) необходимым свойством прямоугольника является равенство его диагоналей;

б) для делимости многочлена $f(x)$ на двучлен $x\text{-}a$ достаточно, чтобы a было корнем этого многочлена;

в) на 5 делятся те числа, которые оканчиваются цифрой 0 или 5.

ТЕМА № 5 БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Обозначения: $E_2=\{0,1\}$; $E_2^n = E_2 \times E_2 \times ... \times E_2$ – прямое произведение n сомножителей; $|E_2|$ – мощность E_2, $|E_2|=2$, тогда $|E_2^n|=2^n$.

Определение 1. *Функцией алгебры логики* называется закон, осуществляющий отображение $E_2^n \Rightarrow E_2$, причем отображение всюду определено и функционально.

Так как множество E_2^n конечно, то задать отображение $E_2^n \rightarrow E_2$, означает задать множество наборов из E_2^n и для каждого набора указать его образ в E_2.

Пример 1.

Определение 2. Таблица, задающая функцию $f(x_1,x_2,...,x_n)$, называется *таблицей истинности* для этой функции.

Рассмотрим функции одной переменной. Их будет всего 4, они задаются следующими таблицами истинности:

x	$f_0(x)$
0	0
1	0

функция называется константой 0, записывается $f_0(x) \equiv 0$;

x	$f_1(x)$
0	0
1	1

функция называется тождественной, записывается $f_1(x)= x$;

x	$f_2(x)$
0	1
1	0

функция называется «не x» и записывается $f_2 (x)= \bar{x}$;

x	$f_3(x)$
0	1
1	1

функция записывается $f_3(x) \equiv 1$ и называется константой 1. Если стандартным расположением переменной x считать 0 в первой строке и 1 во второй, то функции f_0, f_1, f_2, f_3 определяются однозначно наборами значений: f_0=(0,0),

f_1=(0,1), f_2=(1,0) и f_3=(1,1). Наборы значений функций составляют множество $E_2 \times E_2$, поэтому количество функций одной переменной равно $|E_2 \times E_2|$=4. Для удобства функции пронумерованы так, что двоичный код номера совпадает с набором значений функции.

Рассмотрим функции двух переменных $f(x_1,x_2)$. Функции двух переменных определены на множестве E_2^2={(0 0),(0 1),(1 0),(1 1)}, эти наборы переменных из E_2^2 можно тоже рассматривать как двоичные коды чисел 0,1,2,3, именно такой порядок расположения наборов (x_1,x_2) будем считать стандартным. Тогда функции $f(x_1,x_2)$ определяются однозначно наборами значений $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, где каждое $\alpha_i \in E_2$, поэтому $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in E_2^4$. Следовательно, число функций двух переменных равно 2^4=16, занумеруем их числами от 0 до 15 так, чтобы двоичный код номера совпадал с набором значений функции.

x_1 x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Некоторые из этих функций носят специальные названия и играют такую же роль, как элементарные функции в анализе, поэтому называются элементарными функциями алгебры логики.

1) $f_1(x_1,x_2) = (x_1 \& x_2)$, читается «конъюнкция x_1 и x_2», иногда вместо знака & употребляют знак $\bullet$ или вообще его опускают, пишут (x_1x_2). (x_1x_2) совпадает с обычным произведением x_1x_2 и совпадает с $\min(x_1,x_2)$. Эту операцию называют также логическим умножением.

2) $f_6(x_1,x_2) = (x_1 \oplus x_2)$ – сложение x_1 и x_2 по модулю два, иногда пишут $(x_1+x_2)_{mod2}$.

3) $f_7(x_1,x_2) = (x_1 \vee x_2)$, читается «$x_1$ дизъюнкция x_2», она совпадает с $\max(x_1,x_2)$, ее называют логическим сложением.

4) $f_8(x_1,x_2) = (x_1 \downarrow x_2)$, читается «$x_1$ стрелка Пирса x_2» и совпадает с отрицанием дизъюнкции, другие названия: функция Вебба, функция Даггера.

5) $f_9(x_1,x_2)=(x_1 \leftrightarrow x_2)$, читается «$x_1$ эквивалентно x_2».

6) $f_{13}(x_1,x_2)=(x_1 \rightarrow x_2)$, читается «$x_1$ импликация x_2», иногда обозначается ($\mathrm{x}_1 \square \mathrm{x}_2$), т. е. x_1 влечет x_2 .

7) $f_{14}(x_1,x_2)=(x_1|x_2)$, читается «$x_1$ штрих Шеффера x_2», она является отрицанием конъюнкции.

Символы, участвующие в обозначениях элементарных функций, называются логическими связками или просто связками. Переменные 0 и 1 называются логическими или булевыми переменными, причем 0 соответствует «лжи» , а 1 – «истине», а функции алгебры логики называются еще и булевыми функциями.

Рассмотрим функции $f(x_1 \ldots x_n)$, где $(x_1 \ldots x_n) \in E_2^n$, тогда число наборов $(x_1 \ldots x_n)$,где функция $f(x_1 \ldots x_n)$ должна быть задана, равно $|E_2^n|=2^n$. Обозначим множество всех функций двузначной алгебры логики P_2. Обозначим через $P_2(n)$ число функций, зависящих от n переменных. Очевидно, $P_2(n)=2^{2^n}$.

С ростом n число $P_2(n)$ быстро растет: $P_2(1)=4$, $P_2(2)=16$, $P_2(3)=256$, $P_2(4)=65536$. При больших n табличный способ задания функций становится неприемлемым, используется формульное задание функций. Но прежде чем ввести понятие формулы, дадим определение существенной переменной.

Определение 3. Функция $f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$ существенно зависит от x_i, если существуют такие значения $\alpha_1, \ldots \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n$ переменных $x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n$, что $f(\alpha_1, \ldots \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1} \ldots \alpha_n) \neq f(\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1} \ldots \alpha_n)$. Тогда переменная x_i называется *существенной* переменной. В противном случае x_i называется *фиктивной* переменной.

Пример 2.

Пусть x_i является фиктивной переменной для функции $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$. Тогда ее можно удалить из таблицы истинности, вычеркнув все строки вида: $(\alpha_1, \ldots \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n)$ или, наоборот, все строки вида: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1},$

$\dots\alpha_n$) и столбец для переменной x_i. При этом получим таблицу для некоторой функции $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n)$. Будем говорить, что функция $g(x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n)$ получена из функции $f(x_1, \dots, x_\mathrm{i}, \dots x_n)$ путем удаления фиктивной переменной x_i или f получена из g путем введения фиктивной переменной x_i.

Определение 4. Функции f_1 и f_2 называются *равными*, если f_2 можно получить из f_1 путем добавления или удаления фиктивной переменной.

Примеры.

Особую роль играют константы 0 и 1, которые не имеют существенных переменных и которые можно рассматривать как функции от пустого множества переменных.

2. ФОРМУЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Дадим индуктивное определение формулы над множеством. Это определение несколько сложное по форме, но будет полезно в дальнейшем. С индуктивным определением мы встречались в математическом анализе при определении n-го дифференциала $d^n f(x)$: было введено понятие первого дифференциала $df(x)$, а затем n-й дифференциал определялся как первый дифференциал от $d^{(n-1)}f(x)$.

Определение 1. Пусть $M \subset P_2$, тогда:

1) каждая функция $f(x_1, \dots, x_\mathrm{n}) \in M$ называется формулой над M;

2) пусть $g(x_1, \dots, x_m) \in M$, $G_1, \dots, G_m$ – либо переменные, либо формулы над M. Тогда выражение $g(G_1 \dots G_n)$ – формула над M.

Формулы будем обозначать заглавными буквами: $N[f_1, \dots, f_s]$, имея в виду функции, участвовавшие в построении формулы, или $N(x_1, \dots, x_k)$ имея в виду переменные, вошедшие в формулу. G_i – формулы, участвовавшие в построении $g(G_1, \dots, G_n)$, называются подформулами.

Пример 1.

Сопоставим каждой формуле $N(x_1, \dots, x_n)$ функцию $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$. Сопоставление будем производить в соответствии с индуктивным определением формулы.

1) Пусть $N(x_1, ..., x_n)=f(x_1, ..., x_n)$, тогда формуле $N(x_1, ..., x_n)$ сопоставим функцию $f(x_1, ..., x_n)$.

2) Пусть $N(x_1, ..., x_n)=g(G_1, ..., G_m)$, где каждое G_i – либо формула над M, либо переменная, тогда по индуктивному предположению каждому G_i сопоставлена либо функция $f_i \in P_2$, либо переменная x_i , которую можно считать тождественной функцией. Таким образом, каждой формуле G_i сопоставлена функция $f_i(x_{i_1},\dots,x_{i_k})$, причем: $\{x_{i_1},\dots,x_{i_k}\} \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$, т.к. в формуле $N(x_1, ..., x_n)$ перечислены все переменные, участвовавшие в построении формулы. Можно считать, что все функции f_i зависят от переменных $(x_1, ..., x_n)$, причем какие-то переменные могут быть фиктивными. Тогда $N(x_1, ..., x_n) = g(G_1, ..., G_m) = g(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1,..,x_n))$. Сопоставим этой формуле функцию $h(x_1, ..., x_n)$ следующим образом: пусть $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ – произвольный набор переменных $(x_1, ..., x_n)$. Вычислим значение каждой функции f_i на этом наборе, пусть $f(\alpha_1, ..., \alpha_n)=\beta_i$, затем найдем значение функции $g(x_1, ..., x_m)$ на наборе $(\beta_1, ..., \beta_m)$ и положим $h(\alpha_1, ..., \alpha_n) = g(\beta_1, ..., \beta_m) = g(f_1(\alpha_1, ..., \alpha_n), ..., f_m(\alpha_1, ..., \alpha_n))$. Так как каждое $f_i(x_1, ..., x_n)$ есть функция, то на любом наборе $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ она определяется однозначно, $g(x_1, ..., x_m)$ – тоже функция, следовательно, на наборе $(\beta_1, ..., \beta_n)$ она определяется однозначно, где $h(x_1, ..., x_n)$ есть функция, определенная на любом наборе $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

Множество всех формул над M обозначим через $<M>$.

Определение 2. Две формулы N и D из $<M>$ называются *равными* $N=D$ или эквивалентными $N\sim D$, если функции, реализуемые ими, равны.

Пример 2. Доказать эквивалентность формул:

$(\overline{x}_1 \&(x_2 \oplus x_3)) \sim (\overline{x_1 \vee (x_2 \to x_3) \& (x_3 \to x_2)})$.

Упрощение записи формул:

1) внешние скобки можно отпускать;

2) приоритет применения связок возрастает в следующем порядке: $\sim, \to, \vee, \&$;

3) связка – над одной переменной сильнее всех связок;

4) если связка – стоит над формулой, то сначала выполняется формула, затем отрицание;

5) если нет скобок, то операции ~ и $\to$ выполняются в последнюю очередь.

Теорема о замене подформул на эквивалентные

Пусть $N\in<M>$ и имеет вид: $N(x_1, ..., x_n) = g(G_1, ...G_i, ...,G_m)$. Пусть подформула $G_i \sim G_i'$, тогда формула $N(x_1, ..., x_n) = g(G_1, ...,G_i,...,G_m)$ эквивалентна формуле $N'(x_1, ..., x_n) = g(G_1', ..., G_i', ...,G'_m)$.

Некоторые свойства элементарных функций

1. Идемпотентность & и $\vee$: $x\&x=x$, $x\vee x=x$.
2. Коммутативность $\&,\vee,\oplus,|,\sim,\downarrow$.
3. Ассоциативность $\&,\vee,\oplus,\sim$, поэтому в формулах вида xyz можно не ставить никаких скобок.
4. Дистрибутивность:

а) & по отношению к $\vee$: $x\&(y\vee z)=xy\vee xz$,

б) $\vee$ по отношению к &: $x\vee(y\&z)=(x\vee y)\&(x\vee z)$,

в) & по отношению к $\oplus$: $x(y\oplus z)=xy\oplus xz$.

5. Инволюция : $\overline{\overline{x}}=x$.
6. Правило де Моргана: $\overline{x\vee y}=\overline{x}\,\&\,\overline{y}$ и $\overline{xy}=\overline{x}\vee\overline{y}$.
7. Законы действия с 0 и 1:

$x\vee 0=x$, $x\vee 1=1$, $x\vee\overline{x}=1$, $x\&0=0$, $x\&1=x$, $x\&\overline{x}=0$, $x\oplus 1=\overline{x}$, $x\oplus 0=x$.

8. Самодистрибутивность импликации: $x\to(y\to z)=(x\to y)\to(x\to z)$.

Равенство всех этих формул доказывается по определению, т.е. по равенству функций, которые они реализуют.

Проверим для примера самодистрибутивность импликации : $x\to(y\to z)=(x\to y)\to(x\to z)$.

x	y	z	$y\to z$	$x\to(y\to z)$	$x\to y$	$x\to z$	$\to$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1

0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Следствия из свойств элементарных функций

1. Законы склеивания:

$xy\vee x\bar{y}=x(y\vee\bar{y})=x\bullet 1=x$ (дистрибутивность & относительно $\vee$);

$(x\vee y)\&(x\vee\bar{y})=x\vee\bar{y}\,y=x\vee 0=x$ (дистрибутивность $\vee$ относительно &).

2. Законы поглощения:

$x\vee xy=x(1\vee y)=x\bullet 1=x$; $x\&(x\vee y)=x\vee xy=x$.

Свойства элементарных функций и теорема о замене подформул на эквивалентные позволяют упрощать формулы.

Пример 3:

3. ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ

Определение 1. Функции $f^*(x_1, ..., x_n)$ называется двойственной к функции $f(x_1, ..., x_n)$, если $f^*(x_1, ..., x_n) = \overline{f}(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$.

Пример 1.

Определение 2. Если $f^*(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n)$, то $f(x_1, ..., x_n)$ называется самодвойственной.

Пример 2. Показать, что $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\oplus x_2\oplus x_3$ – самодвойственна:

Если f^*– самодвойственна, то $\overline{f}(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{\mathrm{n}}) = f(x_1, ..., x_n)$, т.е. на противоположных наборах функция принимает противоположные значения.

Пример 3. Показать, что функция $x_1\vee x_2$ двойственна к $x_1\&x_2$, функция $x_1\downarrow x_2$ двойственна к функции $x_1|x_2$.

Теорема о двойственных функциях

Если f^* двойственна к f, то f двойственна к f^*.

Теорема: Пусть функция $h(x_1, ..., x_n)$ реализована формулой $h(x_1, ..., x_n)$ = $=g(G_1, ..., G_m) = g(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$, где какие-то переменные могут быть фиктивными. Тогда $h^*(x_1, ..., x_n) = g^*(f_1^*(x_1, ..., x_n), ..., f_m^*(x_1, \ldots, x_n))$, это означает, что если функция задана некоторой формулой, то чтобы получить двойственную функцию, надо в этой формуле все знаки функций заменить на двойственные, 0 на 1, 1 на 0.

Пример 4. Построить формулу, реализующую f^*, если $f = ((x\to y) \vee z)$ $(y\bar{z} \to (x\oplus yz))$. Показать, что она эквивалентна формуле $N = z(x\oplus y)$.

Пример 5. Найти формулу для f^* и показать, что она эквивалентна формуле $N = (x\vee(z\oplus t))\,\bar{y}$, если $f = (xyz\sim(t\vee x\,\bar{y}\,))\vee \bar{y}\,t$.

Лемма о несамодвойственной функции

Подстановкой функций x и $\bar{x}$ в несамодвойственную функцию можно получить одну из констант.

4. РАЗЛОЖЕНИЕ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ПО ПЕРЕМЕННЫМ

Обозначим $x^{\sigma}=\begin{cases}\bar{x}, \sigma = 0,\\ x, \sigma = 1.\end{cases}$

Посмотрим, чему равно x^{σ} при разных значениях x и σ.

$x\backslash\sigma$	0	1
0	1	0
1	0	1

Из таблицы следует: $x^{\sigma}=1$ тогда и только тогда, когда $x=\sigma$.

Теорема о разложении функции по переменным

Пусть $f(x_1, ..., x_n) \in P_2$. Тогда для любого m: $1 \le m \le n$ допустимо представление:

$$f(x_1, ..., x_m, x_m+1, ..., x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)} x_1^{\sigma_1} \,\&\, x_2^{\sigma_2} \,\&\ldots\&\, x_m^{\sigma_m} \,\&\, f(\sigma_1,\ldots,\sigma_m,x_{m+1},\ldots,x_n),$$

где дизъюнкция берется по всем наборам из 0 и 1, которое называется разложением функции f по переменным $x_1, ..., x_n$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. $m = 1$, записать разложение по переменным x:

Пример 2. $m=2$, записать разложение по переменным x и $\bar{x}$.

Замечание. $x_1^{\sigma_1}...x_n^{\sigma_n}$ – элементарная конъюнкция ранга n по числу входящих переменных, предполагается, что при $i \neq j$, $x_i \neq x_j$. СДНФ для $f(x_1, ..., x_n)$ –дизъюнкция элементарных конъюнкций ранга n. Если функция представлена в виде дизъюнкций элементарных конъюнкций, где ранг хотя бы одной элементарной конъюнкции меньше n, то такая форма называется **дизъюнктивной нормальной формой** (**ДНФ**).

Следствие 2. Любая функция алгебры логики может быть представлена в виде формулы через отрицание, & и $\vee$.

а) Если $f \equiv 0$, то $f(x_1, ..., x_n) = x_1 \& \bar{x}_1$.

б) Если $f(x_1, ..., x_n) \neq 0$ тождественно, тогда ее можно представить в виде СДНФ, где используются только связки $\bar{\ }$, &, $\vee$. СДНФ дает алгоритм представления функции в виде формулы через &, $\vee$, $\bar{\ }$.

Пример 3. Пусть функция $f(x_1, x_2, x_3)$ задана таблицей истинности. Записать ее в виде СДНФ.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Следствие 3. *Мы умеем представлять функцию в виде* $\vee(x_1^{\sigma_1} \,\&\, x_2^{\sigma_2} \,\&\, \ldots)$. *Нельзя ли представить ее в виде* $\&(x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots)$. *Пусть функция* $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 1$ *тождественно. Тогда функция* $f^* \neq 0$ *тождественно, и ее можно представить в виде СДНФ:*

$$f(x_1,\ldots,x_n) = (f^*(x_1,\ldots,x_n))^* = \Bigl(\bigvee_{(\sigma_1\ldots\sigma_n):f^*(\sigma_1\ldots\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1}\ldots x_n^{\sigma_n}\Bigr)^*.$$

По принципу двойственности заменим & на $\vee$ и наоборот, получим

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \mathop{\&}_{(\sigma_1\ldots\sigma_n):\bar{f}(\bar{\sigma}_1\ldots\bar{\sigma}_n)=1} (x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}) = \mathop{\&}_{(\sigma_1\ldots\sigma_n):f(\bar{\sigma}_1\ldots\bar{\sigma}_n)=0} (x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}) =$$

$$= \mathop{\&}_{(\sigma_1\ldots\sigma_n):f(\sigma_1\ldots\sigma_n)=0} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}).$$

$(x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n})$ называется элементарной дизъюнкцией ранга n. Представление функции в виде (2) называется **совершенной конъюнктивной нормальной формой** или в краткой записи – **СКНФ**. СКНФ для $f(x_1, \ldots, x_n)$ – конъюнкция элементарных дизъюнкций ранга n. КНФ для $f(x_1, \ldots, x_n)$ – конъюнкция элементарных дизъюнкций, где ранг хотя бы одной элементарной дизъюнкции меньше n.

Пример 4. Пусть $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \to (x_2 \to (x_3 \sim x_1))$. Представить ее в виде СКНФ.

5. ПОЛНОТА, ПРИМЕРЫ ПОЛНЫХ СИСТЕМ

Определение. Система функций $\{f_1, f_2, \ldots, f_s, \ldots\} \subset P_2$ называется *полной* в P_2, если любая функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ может быть записана в виде формулы через функции этой системы.

Примеры полных и неполных систем

Лемма (достаточное условие полноты)

Пусть система $U = \{f_1, f_2, \ldots, f_s, \ldots\}$ полна в P_2. Пусть $B = \{g_1, g_2, \ldots, g_k, \ldots\}$ – некоторая система из P_2, причем любая функция $f_i \in U$ может быть выражена формулой над B, тогда система B полна в P_2.

Следствие. Полином Жегалкина.

$f(x_1, ..., x_n) \in P_2$, представим ее в виде формулы через конъюнкцию и сумму по модулю два, используя числа 0 и 1. Это можно сделать, так как $\{x_1\&x_2, x_1\oplus x_2, 0, 1\}$ полна в P_2. В силу свойства $x \& (y\oplus z) = xy \oplus xz$ можно раскрыть все скобки, привести подобные члены, и получится полином от n переменных, состоящий из членов вида $x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k}$, соединенных знаком $\oplus$. Такой полином называется полиномом Жегалкина.

Общий вид полинома Жегалкина:

$$f(x_1,...,x_n) = \sum_{(i_1, i_2, ..., i_s)} a_{i_1 i_2 ... i_s} x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_s},$$

где $a_{i_1 i_2 ... i_s} \in \{0,1\}$, $s = 0, 1, ..., n$, причем при $s = 0$ получаем свободный член a_0.

Представление функции в виде полинома Жегалкина

1. Представим любую функцию формулой над $\{x_1\&x_2, \bar{x}\}$ и сделаем замену $\bar{x} = x\oplus 1$. Этот способ удобен, если функция задана формулой.

Пример 2.

2. Метод неопределенных коэффициентов. Он удобен, если функция задана таблицей.

Пример 3.

3. Многочлен Жегалкина можно получить также с помощью треугольника Паскаля по единицам его левой стороны по таблице следующим образом. Построим многочлен Жегалкина для функции f = (10011110). Верхняя сторона треугольника есть функция f. Любой другой элемент треугольника есть сумма по модулю для двух соседних элементов предыдущей строки. Левая сторона треугольника для функции f содержит шесть единиц. Многочлен Жегалкина будет содержать шесть слагаемых. Первая единица треугольника соответствует набору (000). Первое слагаемое многочлена есть 1. Третья снизу единица в левой стороне треугольника соответсвует набору (101). В качестве слагаемого многочлена берем x_1x_3. Аналогично для других единиц треугольника. Слева от наборов показаны слагаемые многочлена Жегалкина.

Тогда $f(x_1, x_2, x_3) = 1 \oplus x_3 \oplus x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_2x_3$.

Теорема Жегалкина

Каждая функция из P_2 может быть представлена в виде полинома Жегалкина единственным образом.

Здесь единственность понимается с точностью до порядка слагаемых в сумме и порядка сомножителей в конъюнкциях:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_s)} a_{i_1 i_2 \ldots i_s} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_s},\ a_{i_1 i_2 \ldots i_s} \in \{0,1\},\ s = 0, 1, \ldots, n.$$

Определение. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, полином Жегалкина для которой имеет следующий линейный относительно переменных вид: $f = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \ldots \oplus a_nx_n$, называется *линейной*.

Лемма о нелинейной функции. Суперпозицией нелинейной функции, отрицания и константы 1 можно получить конъюнкцию.

Функция $f(x_1, \ldots, x_\text{n})$ сохраняет константу $a \in \{0, 1\}$, если $f(a, \ldots, a) = a$.

Пример 4.

6. ЗАМЫКАНИЕ И ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ

Определение 1. Пусть $M \subseteq P_2$. *Замыканием M* называется множество всех функций из P_2, которые можно выразить формулами над M. Замыкание M обозначается $[M]$.

Определение 2. Множество функций M называется замкнутым классом, если $[M]=M$.

Пример 1.

Замечание. В терминах замыкания и замкнутого класса можно дать другое определение полноты, эквивалентное исходному:

M – полная система, если $[M] = P_2$.

3) $A = \{f(x_1, \ldots, x_n) | f(1, 1, \ldots, 1) = 0\}$ – незамкнутый класс. Возьмем формулу над этим множеством. Пусть $f, g_1, \ldots, g_n \in A$, т.е. $f(1, 1, \ldots, 1) = 0$, $g_1(1, 1, \ldots, 1) = 0$, тогда $f(g_1, \ldots, g_n) \in [A]$. Посмотрим, принадлежит ли функция $f(g_1, \ldots, g_n)$ множеству A. $f(g_1(1, \ldots, 1), g_2(1, \ldots, 1), \ldots, g_n(1, \ldots, 1) = f(0, \ldots, 0))$, но $f(0,$

..., 0) не обязано быть равным 0. Действительно, пусть $g_1(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$, $g_2(x) = x \in A$. Возьмем $g_2(g_1(x_1, x_2)) = x_1 \oplus x_2 \in [A]$, $g_2(g_1(1, 1)) = 1 \oplus 1 = 0$, следовательно, $g_2(g_1(x_1, x_2)) \notin A$, отсюда $[A] \neq A$ и A – незамкнутый класс.

Важнейшие замкнутые классы в $\mathbf{P}_2$

1) T_0 - класс функций, сохраняющих константу 0.

2) T_1 – класс функций, сохраняющих константу 1.

3) S – класс самодвойственных функций.

4) L – класс линейных функций.

5) M – класс монотонных функций.

Определение. Набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ *предшествует* набору $\tilde{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_n)$ и обозначается $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$, если для $1 \leq i \leq n$ $\alpha_i \leq \beta_i$, например: $\tilde{\alpha} = (0010)$, $\tilde{\beta} = (0110)$, тогда $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$. Не любые два набора находятся в отношении предшествования, например, наборы (0110) и (1010) в таком отношении не находятся. Отношение предшествования ($\preceq$) является отношением порядка на множестве наборов длины n, множество таких наборов будет частично упорядоченным множеством по отношению к операции.

Определение. Функция $f(x_1, ..., x_n)$ называется *монотонной*, если для двух наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, таких что $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$, выполняется $f(\tilde{\alpha}) \preceq f(\tilde{\beta})$. Функции 0, 1, x, $x_1 \& x_2$, $x_1 \vee x_2 \in M$, $x_1 \downarrow x_2$, $x_1 \oplus x_2$, $x_1 \sim x_2 \notin M$.

Для числа монотонных функций, зависящих от n переменных, существуют оценки сверху и снизу, но точное число сосчитать не удается. Покажем, что M замкнутый класс. Рассмотрим функцию $\Phi \in [M]$, $\Phi = f(f_1, ..., f_m)$, где $f, f_1, ..., f_m \in M$, причем можем считать, что все они зависят от n переменных. Пусть набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\tilde{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_n)$. Рассмотрим $\Phi(\alpha_1, ..., \alpha_n) = f(f_1(\alpha_1, ..., \alpha_n), \ldots, f_m(\alpha_1, ..., \alpha_n))$ и $\Phi(\beta_1, ..., \beta_n) = f(f_1(\beta_1, ..., \beta_n), ..., f_m(\beta_1, ..., \beta_n))$. Здесь $f_1(\alpha) \preceq f_1(\beta), ..., f_m(\alpha) \preceq f_m(\beta)$, тогда набор $(f_1(\alpha), ..., f_m(\alpha)) \preceq (f_1(\beta), ..., f_m(\beta))$, но тогда $\Phi(\alpha) \preceq \Phi(\beta)$, так как $f \in M$, отсюда $\Phi = f(f_1, ...,)$ – монотонная функция.

Определение. Функция f есть *суперпозиция* над M, если f реализуется некоторой формулой над M.

Лемма о немонотонной функции. Отрицание можно получить суперпозицией констант 0 и 1, тождественной функции и немонотонной функции.

Задачи

1. Доказать, что пересечение любых двух замкнутых классов замкнуто.

2. Доказать, что объединение двух замкнутых классов не всегда замкнуто.

Теорема Поста о полноте

Для того чтобы система функций была полной, необходимо и достаточно, чтобы она не содержалась целиком ни в одном из классов T_0, T_1, L, S, M.

Следствие. Всякий замкнутый класс функций из P_2, не совпадающий с P_2 содержится, по крайней мере, в одном из замкнутых классов T_0, T_1, L, S, M. Действительно, если N не является подмножеством Q, то $[N] = P_2$, что неверно.

Примеры использования теоремы Поста.

Определение. Система функций $\{f_1, ..., f_s, ...\}$ называется *базисом* в P_2,если она полна в P_2, но любая ее подсистема не будет полной. Например, система функций $\{x_1\&x_2, 0, 1, x_1\oplus x_2\oplus x_3\}$ – базис.

Теорема о достаточности четырех функций.

Из любой полной в P_2 системы функций можно выделить полную подсистему, состоящую не более чем из четырех функций.

Следствие. Базис в P_2 может состоять максимум из четырех функций.

7. ФУНКЦИИ k - ЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

Введем обозначение: $E_к=\{0, 1, 2, ..., k–1\}$.

Функция k-значной логики, зависящая от n переменных, – это закон, отображающий $E_k^n \Rightarrow E_k$. Множество функций k-значной логики обозначается как P_k. Функция из P_k полностью определена, если задана ее таблица истинности, т.е. заданы значения на всех наборах. Наборы можно рассматривать как записи в k-ичной системе счисления чисел от 0 до k–1, всего наборов k^n. Функций из P_k, зависящих от n переменных, будет k^n. $|P_3(n)|$, например, будет 3, если $n = 2$, то $|P_3(2)| = 3^9 = 19683$ (k=3, n=2).

x_1	x_2	. . .	x_{n-1}	x_n	f
0	0	. . .	0	0	.
0	0	. . .	0	1	.
. . . .					.
0	0	. . .	0	k–1	.
0	0	. . .	1	0	.
. . . .					.
k–1	k–1	. . .	k–1	k–1	.

В k - значной логике также есть функции, которые называются элементарными. Приведем некоторые из них, примеры будем приводить для k = 3 и n = 2.

1. Циклический сдвиг или отрицание Поста: $\bar{x} = x+1(mod\ k)$.

2. Зеркальное отображение или отрицание Лукосевича: $N_x = k–1–x$.

Эти две функции являются обобщением отрицания.

3. $J_i(x)=\{к–1, x = i,\ I = 0, 1, 2, ..., k–1\}$.

x_1	x_2	N_x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$
0	1	2	2	0	0
1	2	1	0	2	0
2	0	0	0	0	2

4. $min(x_1,x_2)$ – обобщение конъюнкции;

5. $x_1 \cdot x_2(mod\ k)$ – второе обобщение конъюнкции;

6. $max(x_1,x_2)$ – обобщение дизъюнкции;

7. $x_1+x_2(mod$ k) – сумма по mod k.

x_1	x_2	$min(x_1,x_2)$	$x_1x_2(mod\ 3)$	$max(x_1x_2)$	$x_1+x_2(mod\ 3)$
0	0	0	0	0	0

0	1	0	0	1	1
0	2	0	0	2	2
1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	2
1	2	1	2	2	0
2	0	0	0	2	2
2	1	1	2	2	0
2	2	2	1	2	1

Принято $min(x_1,x_2)$ обозначать $x_1\&x_2$, $max(x_1,x_2)$ обозначать $x_1\vee x_2$**.** Как и в двузначной логике, можно ввести понятие формулы над множеством и ставить вопрос о полной в P_k системе функций.

Теорема о полной в P_k системе функций

Система функций $\{max(x_1,x_2), min(x_1,x_2), 0, 1, ..., k–1, J_0(x), J_1(x), ..., J_{k-1}(x)\}$ является полной в P_k и любая функция $f(x_1, ..., x_n) \in P_k$ выражается формулой над этой системой следующим образом:

$$f(x_1,...,x_n) = \max_{(i_1,...,i_n \in E_K^n} \{min\lfloor J_{i_1}(x_1), J_{i_2}(x_2),...,J_{i_n}(x_n), f(i_1,...,i_n)\rfloor\}.$$

Эта формула есть своеобразный аналог СДНФ.

8. КАРТЫ КАРНО

Для простых высказываний (булевых переменных) $p_1, p_2,...p_n$ существует 2^n различных элементарных конъюнкций, например, для p и q существует четыре элементарные конъюнкции: $p \wedge q, \overline{p} \wedge q, p \wedge \overline{q}, \overline{p} \wedge \overline{q}$.

Определение. Картой Карно называется таблица, каждый элемент которой является элементарной конъюнкцией.

Применяются карты Карно преимущественно для минимизации нормальных форм.

Пример 1.

Пример 2. Упростим следующую булеву функцию, составленную из трех переменных:

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3)$.

Пример 3. Построить и упростить карту Карно для функции

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4) \vee$
$(x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_4) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_4) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee$
$(\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4)$

9. ПРИМЕНЕНИЕ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

1. Релейно-контактные схемы

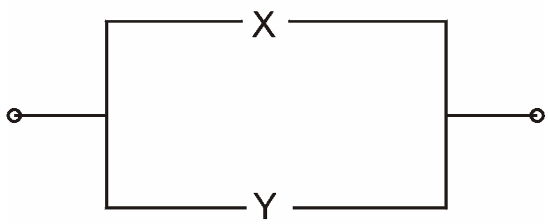
Определение 1. Под *релейно-контактной схемой* понимают устройство из проводников и двухпозиционных контактов. Контакты могут быть замыкающими и размыкающими, каждый контакт подключен к реле (переключателю), которому ставится в соответствие логическая переменная, которая принимает значение 1, если реле срабатывает и 0 в противном случае. Всей схеме ставится в соответствие булева функция (функция проводимости), принимающая на заданном наборе переменных значение 1, если схема проводит ток и 0 в противном случае.

Обозначим, например, x – замыкающий контакт, $\bar{x}$ – размыкающий, $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ – функция проводимости. Таблицу истинности для функции f также называют условиями работы схемы. Коммутационные схемы и логические функции, им соответствующие, принято выражать в обозначениях булевой алгебры. Исторически: в 1938г. Клод Шеннон заметил связь между таблицами истинности и электрическими цепями. Для графического обозначения РКС используют множество способов, в основе которых лежит физический аналог данных схем. (Функцию проводимости также называют функцией Шеннона).

Пример 1.

Функция $f(x, y) = x \wedge y$ соответствует последовательному соединению на схеме, изображенной на рисунке:

Функция $f(x,y)=x\vee y$ соответствует параллельному соединению на схеме, изображенной на рисунке:

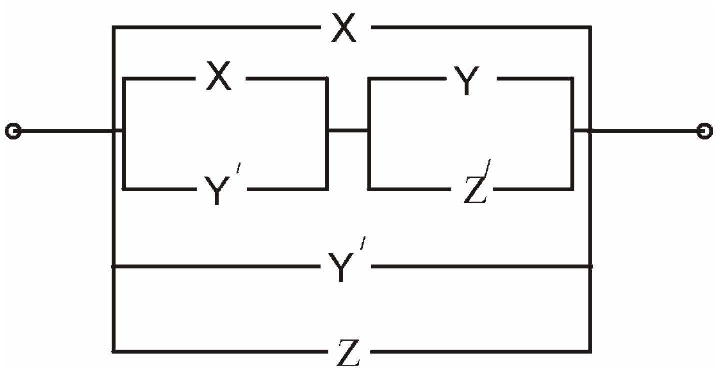


Логическую функцию, соответствующую схеме, можно упростить путем эквивалентных преобразований и построить новую схему, эквивалентную данной.

Определение 2. Две РКС называются эквивалентными, если они реализуют одну и ту же булеву функцию или систему функций.

Определение 3. Схема называется минимальной, если она содержит наименьшее возможное число контактов среди всех схем, имеющих ту же функцию проводимости.

Пример 2. Упростить релейно-контактную схему:



Если заданы условия работы схемы, то саму схему можно восстановить, составив функцию проводимости по правилам построения нормальных форм.

Пример 3. По заданным условиям работы построить РКС.

x	*y*	*f*(*x*,*y*)
0	0	0

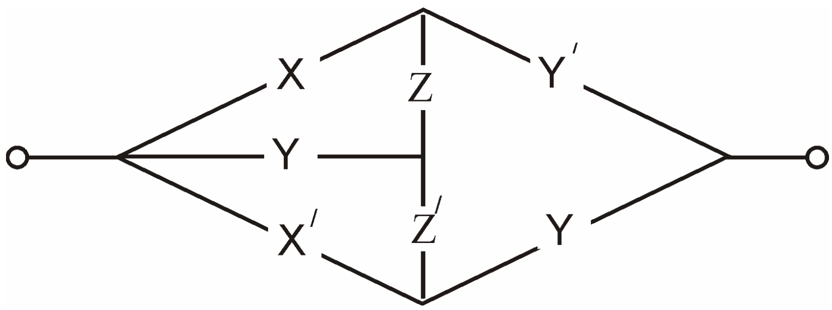
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Чтобы составить функцию проводимости можно воспользоваться формулой:

$$f_{a,b} = \underset{[a,b]}{\vee} K_{[a,b]},$$

где a и b – два полюса РКС, $[a,b]$ – некоторая цепь, соединяющая a и b и $K_{[a,b]}$ – конъюнкция «букв», приписанных ребрам цепи $[a,b]$, $f_{a,b}$ – функция проводимости.

Пример 4. Найти функции, реализуемые мостиковой схемой:



Если функция проводимости задана с помощью логических функций: импликации, эквиваленции, сложению по модулю два, штриха Шеффера, стрелки Пирса или других производных функций и требуется изобразить РКС, соответствующую этой функции, в этом случае необходимо с помощью основных логических законов перейти к представлению функции проводимости через основные операции: конъюнкцию и дизъюнкцию, по возможности упростить ее и затем изобразить схему.

Пример 5. Построить РКС, реализующую функцию:

$$f(x,y,z) = x\bar{y} \oplus \bar{y}z \oplus xz \oplus 1.$$

2. Решение логических задач

Логические задачи решаются методами алгебры логики. Для этого необходимо конкретные условия задачи записать в виде формулы алгебры логики, а затем упростить эту формулу путем эквивалентных преобразований. Чаще всего высказывания, истинность которых можно утверждать исходя из данных задачи, соединяют знаком конъюнкции для получения общей формулы.

Рассмотрим решение задачи.

Задача. Определить, кто из четырех студентов сдал экзамен, если известно, что:

a. Если первый сдал, то и второй сдал;
b. Если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал;
c. Если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал;
d. Если четвертый сдал, то и первый сдал.

ТЕМА № 6. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА ГРАФАХ.

1. ИСТОРИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

С помощью теории графов математика получила универсальный и наглядный графический язык, который применяется во многих областях науки и техники для изображения схем дорог, линий воздушных сообщений, газопроводов, теплотрасс, электросетей, микросхем и пр. Впервые понятие «граф» было введено в 1936г. венгерским математиком Денни Кенингом, однако отцом теории графов является Леонард Эйлер, решивший в 1736г. широко известную в то время задачу, называвшуюся проблемой кенигсбергских мостов.

В 1847г. Кирхгоф разработал теорию деревьев для решения совместной системы ЛАУ, позволяющих найти значение силы тока в каждом проводнике и в каждом контуре рассматриваемой электрической цепи. Занимаясь практическими задачами органической химии, Кэли в 1857г. открыл важный класс графов, называемых деревьями. Он стремился перечислить изомеры предельных (насыщенных) углеводородов C_nH_{2n+2} с данным числом n атомов углерода. Граф в виде додекаэдра использовался в игрушке, предложенной сэром Вильямом Гамильтоном в 1859г. Каждой вершине графа было приписано название известного города, играющий должен был обойти «вокруг света», найдя такой замкнутый путь, идущий по ребрам многогранника, который проходил бы через каждую вершину многогранника ровно один раз. В двадцатом веке теория графов продолжала бурно развиваться и находила все новые и новые приложения. В 1936г. психолог Левин высказал предположение, что «жизненное пространство» индивидуума можно представить с помощью планарной карты, другие психологи представляли людей – вершинами, а связывающие их отношения «дружба», «общение», «любовь» и др. – ребрами. Физики-теоретики «открывали» теорию графов независимо друг от друга множество раз. Уленбек обозначал точками (вершинами) молекулы, а смежность вершин толковал как взаимодействие наибольшей близости некоторого физического типа (например, магнитное притяжение или отталкивание). Фейнман предложил диаграмму, в которой вершины представляют собой физические частицы, а ребра – пути частиц после столкновений. Учение о цепях Маркова в теории вероятностей связано с понятием ориентированного графа: события представляются вершинами, а ориентированное ребро, идущее из одной вершины в другую, указывает на то, что вероятность прямого перехода от одного события к другому положительна.

Теоретико-графовый подход используется и в быстро развивающихся разделах линейного программирования. Вершинам графа соответствуют пункты размещения товара, ориентированное ребро указывает на возможность транспортировки товара из одного пункта в другой, а приписанные ребрам значения соответствуют пропускной способности ребра.

2. *ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ*

Определение 1. *Графом* $G(V,E)$ называют совокупность конечного множества *V*, называемого множеством вершин, и множества *E* двухэлементных подмножеств множества *V*, называемого множеством ребер.

Элементы *a* и *b* множества *V* называются соединенными или связанными ребром $\{a, b\}$ или $\{a, b\} \in E$. Конечный граф изображается диаграммой, на которой вершины обозначаются точками, а ребра – линиями, соединяющими эти точки.

Определение 2. Вершины *a* и *b* называют концами ребра $\{a, b\}$. Ребро $\{a, b\}$ называют также *инцидентным* к вершинам *a* и *b* и обратно. Две вершины называют *смежными*, если они инцидентны к одному ребру и два ребра называют смежными, если они инцидентны к общей вершине.

Приведем несколько примеров *простых графов*.

Определение 3. Ребро, соединяющее вершину саму с собой называется *петлей*. Граф, содержащий петлю, называется *графом с петлей*.

Определение 4. Если в графе допускается наличие одного или более ребра между двумя вершинами, то он называется *мультиграфом*. Если каждая вершина графа отмечена, то граф называется *размеченным*. Если допускается наличие как петель, так и существование одного и более ребра, то граф называется *псевдографом*.

Определение 5. *Степенью* вершины $deg(v)$ называется количество ребер, инцидентных этой вершине. Вершина степени 0 называется *изолированной*.

Пример 1.

Утверждение. Сумма степеней вершин графа всегда четная. В любом графе количество вершин нечетной степени – четно.

Определение 6. Граф $G'(V',E')$ называется *подграфом* графа $G(V,E)$: $G' \prec G$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. Таким образом, каждая вершина в G' является вершиной в G и каждое ребро в G' является ребром в G.

Определение 7. *Путем* (маршрутом) в графе называется совокупность ребер, которые объединены с вершинами так, что вдоль них можно двигаться по графу.

Определение 8. Пусть $G(V,E)$ – граф с вершинами $v_0, v_1, \dots v_k \in V$ и ребрами $e_1, e_2, \dots e_k \in E$. *Путем* длины k из v_0 в v_k называется последовательность $v_0, e_1, v_1, e_2 \dots v_k$ такая, что $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$. Таким образом, путь длины k имеет k ребер. *Простым путем* из v_0 в v_k называется путь, в котором нет повторяющихся вершин.

Пример 2.

Определение 9. Граф называется *связным*, если имеется путь между двумя его различными вершинами.

Пример 3.

Теорема 1. Если существует путь из вершины a в b, то существует простой путь из a в b.

Следствие. Граф G является связным тогда т только тогда, когда между двумя его любыми вершинами существует простой путь.

Определение 10. Пусть $G(V,E)$ – граф. Подграф G' графа G называется *компонентой* графа G если выполнены два условия:

1) G' – непустой связный граф.

2) G'' – связный подграф графа G и $G' \prec G''$, тогда $G' = G''$ и G' – максимальный связный подграф графа G. (на рис. Примера 3 несвязный граф состоит из двух компенент).

Определение 11. Пусть $G(V,E)$ – граф. *Циклом* называется путь ненулевой длины, соединяющий вершину саму с собой и не содержащий повторяющихся ребер. *Простым циклом* называется цикл, соединяющий вершину v саму с собой и не содержащий повторяющихся вершин, кроме вершины v. Цикл называется *n-циклом*, если он содержит n ребер и n различных вершин. (на рис. Примера 2 ***a b c f h g e d a*** – простой цикл).

Определение 12. Граф называется *полным*, если любые две его вершины соединены ребром. Полный граф с n-вершинами обозначается $\boldsymbol{K_n}$.

Пример 4.

Определение 13. Граф $G=G(V,E)$ называется *двудольным*, если множество V можно представить как объединение непересекающихся множеств $V = A \bigcup B$, так что каждое ребро имеет вид $\{a,b\}$, где $a \in A, b \in B$. Двудольный граф называется полным двудольным графом $K_{m,n}$, если множество А содержит m вершин, B – n вершин и для каждой $a \in A$ и $b \in B$ имеем $\{a,b\} \in E$ – связывающее их ребро.

Пример 5.

3. ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

Часто на практике используются ориентированные графы, т.е. графы, для вершин которых указаны направления.

Определение 1. *Ориентированный граф* G или орграф состоит из множества V вершин и множества E упорядоченных пар элементов из множества V – ориентированных ребер.

Понятие ориентированного графа допускает наличие петель. Ребра на графе отмечаются стрелкой.

Определение 2. Если $\{a,b\}$ – ребро ориентированного графа, вершины *a* и b *инцидентны* ребру $\{a,b\}$, вершина *a* называется *смежной* к вершине *b*.

Определение 3. *Степенью выхода* вершины *v* называется количество ребер, для которых *v* является начальной вершиной – *outdeg(v)*. *Степенью входа* вершины *v* называется количество ребер, для которых *v* является конечной вершиной – *indeg(v)*. Если *indeg(v)*=0, то вершина *v* называется источником, *outdeg(v)*=0 – стоком.

Часто дугам орграфа приписывают некоторые числовые значения, в этом случае граф называют *размеченным*. Для орграфа аналогичным образом определяют понятие подграфа, пути и цикла.

Определение 4. Неориентированный дубликат орграфа называют соотнесенным графом к данному.

4. ДЕРЕВЬЯ

Деревом называют граф, не содержащий циклов. *Лес* – граф, компонентами которого являются деревья. Деревья и леса являются одним из наглядных приложений теории графов, поскольку представляют удобный способ хранения и сортировки данных.

Ориентированным деревом называется свободный от петель орграф, соотнесенный граф которого является деревом.

Вершины степени 1 называются *листьями*. Другие вершины называют внутренними. Вершина в верхней части называется *корнем* дерева. Дерево можно «подвесить» за любую из вершин, сделав ее корнем дерева.

Высотой дерева называется длина самого длинного пути от корня до листа. Если наибольшая степень выхода для вершины дерева равна m, то дерево называют m-арным деревом.

Пример. Бинарное дерево.

Теорема 1. Для любых двух вершин a и b дерева T существует единственный путь из a в b.

Теорема 2. Если для любых двух вершин графа G существует единственный путь из a в b тогда G – дерево.

Теорема 3. Если у дерева T имеется e ребер и v вершин, тогда $v=e+1$. И обратно.

Определение. Дерево T называется остовным деревом графа G, если T – подграф графа G и каждая вершина в G является вершиной в T.

5. ПУТИ И ЦИКЛЫ ЭЙЛЕРА

Определение 1. Пусть $G(V,E)$ – граф. Цикл, который включает все ребра и вершины графа называется *эйлеровым циклом*.

(вершины могут повторяться, а ребра – нет)

Теорема. Граф с более чем одной вершиной имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связный и каждая его вершина имеет четную степень.

Определение 2. Пусть *G* – граф. Путь, который включает каждое ребро графа только один раз называется *эйлеровым путем*.

Пример 1.

Вернемся к задаче о Кенигсбергских мостах: начав путь с одного участка суши обойти все мосты, посетив каждый лишь однажды и вернуться в начальную точку, не переплывая реки. Соответствующий мультиграф не имеет эйлерова цикла, поэтому невозможно пройти по всем мостам один раз.

Теорема. Граф (мультиграф или псевдограф) имеет собственный эйлеров путь тогда и только тогда, когда он связный и ровно две его вершины имеют нечетную степень.

Задача о мостах: невозможно пройти каждый мост по одному разу, даже если не нужно возвращаться в исходную точку маршрута.

Определение 3. Пусть *G* – ориентированный граф. *Ориентированным циклом* называется ориентированный путь ненулевой длины из одной вершины в ту же вершину без повторения ребер.

Определение 4. Ориентированный цикл, который включает все ребра и вершины графа *G*, называется эйлеровым циклом.

Утверждение. Ориентированный граф имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связный и степень входа каждой вершины равна ее степени выхода.

Пример 2.

Алгоритм *нахождения Эйлерова цикла в графе:*

Начинать каждый раз с некоторой вершины Р и вычеркивать пройденное ребро. Не проходить по ребру, если удаление этого ребра приводит к разбиению графа на две несвязные компоненты, не считая изолированных вершин.

6. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФОВ

Задание графа с помощью матричного представления позволяет обрабатывать графы и однозначно восстанавливать их.

Определение 1. Пусть G – граф. Пусть B – матрица, строки которой обозначены вершинами графа, а столбцы ребрами графа. Будем считать, что вершины и ребра графа пронумерованы. Положим элемент $B_{ij} = 1$, если i-я вершина инцидентна j-му ребру и $B_{ij} = 0$ в противном случае. Матрица B называется *матрицей инцидентности*.

Пример 1.

Матрица инцидентности не содержит информации о том, как граф ориентирован, поэтому по этой матрице нельзя восстановить орграф.

Определение 2. Пусть G – граф. Пусть A – матрица, строки и столбцы которой обозначены вершинами графа. Будем считать, что вершины графа пронумерованы. Положим элемент $A_{ij} = 1$, если имеется ребро из i-ой вершины в j-ую и $A_{ij} = 0$ в противном случае. Матрица A называется *матрицей смежности*. (Диагональный элемент равен 1 в случае, если в графе имеется петля, в остальных случаях – ноль)

Пример 2.

Введем обозначения. Пусть $\Gamma(x_i)$ – множество вершин, достижимых из вершины x_i с длиной пути равной 1 (множество вершин, на которые отображается вершина x_i), $\Gamma^{-1}(x_i)$ – обратное соответствие, множество вершин для которых x_i является образом, $\Gamma^2(x_i)$ – множество вершин, достижимых из вершины x_i с длиной пути равной 2 и т.д. $\Gamma^p(x_i)$ – множество вершин, достижимых из вершины x_i с длиной пути равной p.

Теорема. Пусть G – орграф с вершинами $v_1, v_2, \dots v_n$ и матрицей смежности A. Путь длины k из v_i в v_j существует тогда и только тогда, когда $A_{ij}^{\otimes k} = 1$. ($A^{\otimes k}$ – матрица, полученная умножением матрицы A на себя k раз).

Определение 3. Пусть G – граф. Пусть R – матрица, строки и столбцы которой обозначены вершинами графа. Будем считать, что вершины графа пронумерованы. Положим элемент $R_{ij} = 1$, если вершина x_j достижима из вершины x_i и $R_{ij} = 0$ в противном случае. Матрица R называется *матрицей достижимости*. (Диагональные элементы матрицы равны 1 – каждая вершина достижима из себя самой и длина пути равна нулю).

Множество вершин, достижимых из вершины x_i:

$$R(x_i) = \Gamma(x_i) \cup \Gamma^2(x_i) \cup ... \cup \Gamma^p(x_i) \cup \{x_i\}.$$

Определение 4. Пусть G – граф. Пусть Q – матрица, строки и столбцы которой обозначены вершинами графа. Будем считать, что вершины графа пронумерованы. Положим элемент $Q_{ij} = 1$, если вершина x_i достижима из вершины x_j и $R_{ij} = 0$ в противном случае. Матрица Q называется *матрицей контрдостижимости*. (Диагональные элементы матрицы равны 1 – каждая вершина достижима из себя самой и длина пути равна нулю).

$$R(x_i) = \Gamma^{-1}(x_i) \cup \Gamma^{-2}(x_i) \cup ... \cup \Gamma^{-p}(x_i) \cup \{x_i\}$$

Матрицы достижимости и контрдостижимости связаны операцией транспонирования: $Q = R^T$.

7. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГРАФОВ

Определение 1. Функция f из графа $G(V, E)$ в граф $G'(V', E')$ называется *гомоморфизмом* из G в G' и обозначается $f : G \to G'$, если обладает следующими свойствами:

1) если $e \in E$, то $f(e) \in E'$. ($f(e) \subseteq E'$)

2) если $v \in V$, то $f(v) \in V'$. ($f(v) \subseteq V'$)

3) если вершины u и v инцидентны ребру e графа G, то вершины $f(u)$ и $f(v)$ инцидентны ребру $f(e)$ графа G'.

Утверждение.

Если функция f – гомоморфизм из G в G', то $f(G)$ – подграф графа G'.

Если граф G связный и f – гомоморфизм, то граф $f(G)$ также связный.

Если граф G полный и f – гомоморфизм, то граф $f(G)$ также полный.

Определение 2. Гомоморфизм $f: G \to G'$ является *изоморфизмом*, если $f: V \to V'$ и $f: E \to E'$ представляют собой взаимнооднозначные соответствия. Если f – изоморфизм, то графы G и G' изоморфные.

(Изоморфизм: переименование вершин и ребер графа, которое сохраняет свойство гомоморфности – если вершины *u* и *v* инцидентны ребру *e*, то вершины *f(u)* и *f(v)* инцидентны ребру *f(e)*. Простейший способ установить неизоморфизм графа – установить свойство, которым обладает один граф и не обладает другой).

Определение 3. Если граф $G(V,E)$ содержит ребро $e = \{v_1, v_2\}$ и граф $G'(V',E')$ получен из графа $G(V,E)$ добавлением новой вершины v в множество V и заменой ребра $\{v_1, v_2\}$ ребрами $\{v_1, v\}$ и $\{v, v_2\}$, то граф $G'(V',E')$ называется *расширением* графа $G(V,E)$. Если графы $G_1, G_2, ...G_n$ таковы, что граф G_{i+1} является расширением графа G_i, то граф G_n называется *производным* от графа G_1.

Определение 4. Графы G и G' называются *гомеоморфными*, если существует граф G'' такой, что оба графа G и G' являются производными от графа G''.

Если граф G' – расширение графа G, то новая добавленная вершина имеет степень 2, степени других вершин не изменились.

Теорема. Если графы G и G' гомеоморфны, то у них одинаковое количество вершин нечетной степени.

Теорема. Если графы G и G' гомеоморфны, то граф G имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда граф G' имеет эйлеров цикл.

Определение 5. Пусть $G(V,E)$ – граф и $G_1, G_2, ...G_n$ – подграфы графа G. Подграф G' графа G называется *объединением* графов $G_1, G_2, ...G_n$ и обозначается $\bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$, если

1) Вершина $v \in G'$ тогда и только тогда, когда $v \in G_i$, $1 \le i \le n$;

2) Ребро $e \in G'$ тогда и только тогда, когда $e \in G_i$, $1 \le i \le n$;

Определение 6. Пусть $G(V, E)$ – граф и $G_1, G_2, ...G_n$ – подграфы графа G. Подграф G' графа G называется *пересечением* графов $G_1, G_2, ...G_n$ и обозначается $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$, если

3) Вершина $v \in G'$ тогда и только тогда, когда $v \in G_i$, $1 \le i \le n$;

4) Ребро $e \in G'$ тогда и только тогда, когда $e \in G_i$, $1 \le i \le n$;

Определение 7. Пусть $G(V, E)$ – граф и $G_1, G_2, ...G_n$ – подграфы графа G. Подграфы $G_1, G_2, ...G_n$ являются попарно непересекающимися, если $G_i \cap G_j = 0$.

Теорема. Если G_1 и G_2 – различные компоненты графа G, то G_1 и G_2 – попарно непересекающиеся.

Определение 8. Пусть $G(V, E)$ – граф. *Дополнением* графа G – $G^C(V, E')$ называется граф такой, что для всех вершин $u, v \in V$ ребро между u и v в графе $G^C(V, E')$ существует тогда и только тогда, когда в графе G отсутствует ребро, соединяющее u и v.

Определение 9. Подграф $G'(V', E')$ является остовным графом для графа $G(V, E)$, если $V' = V$. Дерево называется остовным деревом графа G, если оно является остовным графом графа G.

Теорема. Если $T(V, E')$ – остовное дерево графа $G(V, E)$, то для любого цикла $v_0 v_1 v_2 ... v_n v_0$ по крайней мере одно из ребер принадлежит $E - E'$.

Определение 10. Множество ребер С связного графа $G(V, E)$ называется *разрешающим множеством*, если удаление ребер из множества C нарушает связность графа, а удаление собственного подмножества множества C оставляет граф связным. Если множество С состоит из одного ребра, то это ребро называется *разрешающим ребром.*

(минимальное множество ребер, удаление которых нарушает связность графа)

Пример 1.

Теорема. Если $T(V,E')$ – остовное дерево графа $G(V,E)$ и C – разрезающее множество графа *G*, то $C \cap E' = 0$. Ребро *e* графа *G* является разрезающим ребром графа *G* тогда и только тогда, когда оно не входит в цикл графа *G*.

Определение 11. Вершина $a \in V$ связного графа $G(V,E)$ является *разрешающей вершиной* или точкой сочленения, если удаление этой вершины и инцидентных ей ребер приводит к нарушению связности графа.

Определение 12. Граф $G(V,E)$ называется двусвязным, если он не содержит точек сочленения.

Теорема. Вершина *a* графа *G* является точкой сочленения тогда и только тогда, когда существуют различные вершины *u* и *w* такие, что каждый путь из *u* в *w* проходит через *a*.

Пример 2. На рис. Примера 1 – 3,4,6-я вершины являются разрезающими.

Теорема. Для связного графа *G* отношение *R* является отношением эквивалентности, если отношение *R* задано на множестве *E* $e_1 \mathrm{Re}_2$ тогда и только тогда, когда либо $e_1 = e_2$, либо в графе *G* существует простой цикл, содержащий e_1 и e_2 в качестве ребер.

Определение 13. Пусть для каждого класса эквивалентности E_i и отношения эквивалентности *R* V_i – множество вершин инцидентным ребрам из множества E_i и $G_i(V_i,E_i)$ – подграф графа *G* с вершинами из V_i и ребрами из E_i. Подграф $G_i(V_i,E_i)$ называется компонентой двусвязности графа *G*.

Утверждения.

Если $(a,b),(c,d)$ – различные ребра из компоненты двусвязности графа $G_i(V_i,E_i)$, то в подграфе G_i существует пройстой цикл, содержащий в качестве ребер $(a,b),(c,d)$.

Если компонента двусвязности G_i состоит из единственного ребра e_i, то e_i разрезающее ребро графа G.

Если два различных ребра входят в общий простой цикл граф G, то граф G – двусвязный.

Если $G_i(V_i, E_i)$ и $G_j(V_j, E_j)$ – компоненты двусвязности графа G, то $V_i \cap V_j$ содержит не более одной вершины.

Теорема. Вершина a является точкой сочленения тогда и только тогда, когда для некоторого $i \neq j$ эта вершина принадлежит $V_i \cap V_j$ для компонент двусвязности $G_i(V_i, E_i)$ и $G_j(V_j, E_j)$. Граф G является двусвязным тогда и только тогда, когда любые два различных ребра входят в один и тот же простой цикл графа G.

8. ПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ

Часто на практике возникает необходимость построения графа с непересекающимися ребрами.

Определение 1*. Планарным графом* называется граф, который может быть изображен в плоскости так, что его ребра не пересекаются.

Если планарный граф разрезать вдоль ребер, то полученные т.о. части называют гранями.

Определение 2. *Гранью* планарного графа называют максимальный участок плоскости такой, что любые две точки этого участка могут быть соединены кривой, не пересекающей ребро графа.

Теорема. (**Формула Эйлера**) Если G – связный планарный граф, содержащий v вершин, e ребер и f граней, то $v - e + f = 2$.

Пример.

Теорема. Полный двудольный граф $K_{3,3}$ не является планарным.

Лемма. В произвольном связном планарном графе G с количеством вершин не менее трех имеет место неравенство $3v - e \geq 6$.

Теорема. Полный граф K_5 нея является планарным.

Теорема. Если два связных графа гомеоморфны, то они либо оба планарны, либо оба непанарны.

9. РАСКРАСКА ГРАФОВ

Широко известна проблема четырех красок: раскрасить географическую карту четырьмя красками так, чтобы никакие две граничащие территории не имели одну раскраску. Доказана невозможность такой раскраски для 5 красок, для 3 красок доказана возможность, для 4 красок доказательство приведено для тора.

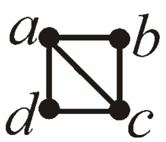
Удобнее работать с двойственным графом G' планарного графа, полученного заменой граней вершинами и соединяющими их ребрами, если грани в исходном графе смежные.

Имеет место ***концепция Биркгофа***.

Пусть имеется 5 цветов и требуется раскрасить граф:

. Существует 5*4=20 возможностей.

Пусть имеется 4 цвета и необходимо раскрасить граф:



для вершины a – 4 цвета, b – 3 цвета, c – 2 цвета, d – 2 цвета. Всего 4*3*2*2=48 способов раскраски графа.

Определение 1. Пусть G граф. *Раскраской* графа G называется окрашивание вершин графа такое, что никакие две смежные вершины не имеют один цвет. Пусть $C_G(\lambda)$ – количество способов раскраски графа G с использованием λ цветов так, что никакие две смежные вершины не имеют один цвет. Для фиксированного графа G функция $C_G(\lambda)$ является полиномиальной функцией от λ, называемой *хроматическим многочленом* графа G. *Хроматическое число* n – это наименьшее число цветов, которое используется для раскраски графа.

Пример 1.

Пример 2.

10.ПУТИ И ЦИКЛЫ ГАМИЛЬТОНА

По легенде сэр Уильям Гамильтон придумал игру, которую впоследствии продал производителю игрушек. Игра представляла додекаэдр, правильный многогранник, 12 граней которого представляли собой правильные пятиугольники. В каждом из 20 углов вставлялся колышек, который соответствовал определенному городу, используя натянутую веревку требовалось найти путь через города, посетив каждый город 1 раз и вернуться в исходную точку.

Определение 1. Пусть *G* – граф. *Гамильтонов путь* – это простой путь, который проходит через каждую вершину графа *G*. *Гамильтонов цикл* – это простой цикл, который проходит через каждую вершину графа *G*.

Теорема. Для любой вершины из цикла Гамильтона существует ровно два ребра из этого цикла, инцидентные данной вершине.

Пример.

11.ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА ГРАФАХ

Кратчайшие пути

Многие задачи либо непосредственно сводятся к нахождению в графах кратчайших путей, либо используют поиск путей на одном из этапов своего решения.

Пути с минимальным количеством промежуточных вершин

Задача: найти путь между двумя заданными вершинами графа (орграфа), количество промежуточных вершин (и, соответственно, ребер) в котором минимально.

Для решения данной задачи существует эффективный алгоритм, имеющий линейную сложность как по числу вершин, так и по числу ребер - волновой алгоритм (другие названия - поиск в ширину, алгоритм степного пожара).

***Пример прикладной задачи*:** необходимо добраться на самолете из города А в город В при условии, что между ними нет прямого авиационного сообщения, совершив при этом минимальное количество перелетов (при условии, что заданы возможные промежуточные аэропорты, и для каждой пары аэропортов известно, существует ли между ними прямой маршрут).

Решение: построим граф (орграф – если бывают «несимметричные» маршруты), вершины которого соответствуют всем возможным аэропортам, а ребра (дуги) – прямым маршрутам между ними. Задача сводится к нахождению маршрута с минимальным количеством промежуточных вершин между вершинами, соответствующими A и B.

Волновой алгоритм

Дано: непустой граф G=(V,E). Требуется найти путь между вершинами s и t графа (s не совпадает с t), содержащий минимальное количество промежуточных вершин (ребер).

I.

1. каждой вершине v_i приписывается целое число $T(v_i)$ – волновая метка (начальное значение $T(v_i)= -1$);

2. заводятся два списка OldFront и NewFront (старый и новый «фронт волны»), а также переменная T (текущее время);

3. OldFront:=$\{s\}$; NewFront:=$\{\}$; $T(s)$:=0; T:=0;

4. для каждой из вершин, входящих в OldFront, просматриваются инцидентные (смежные) ей вершины u_j, и если $T(u_j) = -1$, то $T(u_j)$:=T+1, NewFront:=NewFront + $\{u_j\}$;

5. если NewFront = $\{\}$, то ВЫХОД(«нет решения»);

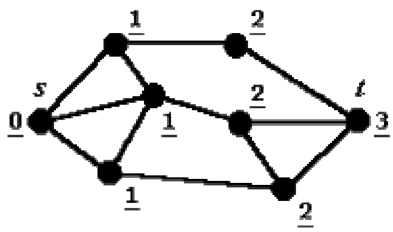
6. если $t \in$ NewFront (т.е. одна из вершин u_j совпадает t), то найден кратчайший путь между s и t с $T(t)$=T+1 промежуточными ребрами; ВЫХОД(«решение найдено»);

7. OldFront:=NewFront; NewFront:=$\{\}$; T:=T+1; goto (4).

Замечание: на шаге (4) «соседними» вершинами для неориентированных графов считаются все смежные вершины, а для орграфов – вершины, в которые из данной вершины ведут дуги.

II.

Если на шаге (6) была достигнута вершина t, то восстановить кратчайший путь можно следующим образом: среди соседей вершины t найдем любую вершину с волновой меткой $T(t)–1$, среди соседей последней - вершину с меткой $T(t)$-2, и т.д., пока не достигнем s. Найденная последовательность вершин определяет один из кратчайших путей из s в t. На практике выгодно сохранять на шаге (4) информацию о том, из какой вершины «волна» пришла в вершину u_j – тогда восстановление пути осуществляется быстрее.



Разметка графа после выполнения волнового алгоритма.

Существуют модификации приведенного здесь алгоритма, позволяющие находить:

1. кратчайшие пути между s и всеми другими вершинами графа;
2. все кратчайшие пути (либо не более чем заданное количество путей) между s и t.

Алгоритм Дейкстры нахождения дерева кратчайших расстояний.

Пути минимального суммарного веса во взвешенном графе

Задача: найти путь (один из путей) минимальной суммарной длины между двумя заданными вершинами взвешенного графа (орграфа) с неотрицательными весами ребер (дуг).

Классическим алгоритмом решения данной задачи является алгоритм Дейкстры.

Пример прикладной задачи: необходимо добраться на самолете из города А в город В при условии, что между ними нет прямого авиационного сообщения, затратив при этом минимальные средства (при условии, что заданы возможные промежуточные аэропорты, для каждой пары аэропортов известно, существует ли между ними прямой маршрут, и если да, то известна минимальная стоимость перелета по этому маршруту).

Решение: построим взвешенный граф (орграф – если бывают «несимметричные» маршруты), вершины которого соответствуют всем возможным аэропортам, ребра (дуги) - прямым маршрутам между ними, а веса ребер (дуг) равны стоимости перелета (очевидно, неотрицательной) между соответствующими аэропортами. Задача сводится к нахождению в графе (орграфе) пути минимального веса между вершинами, соответствующими A и B.

Алгоритм:

Дано: непустой взвешенный граф G=(V,E) с неотрицательными весами ребер (дуг). Требуется найти кратчайший путь от s к t.

Инициализация:

1. всем вершинам v_i приписывается метка – вещественное число: $d(s)=0$, $d(v_i)=+\infty$ для всех $v_i \in s$;
2. метки всех вершин, кроме s, считаются временными, метка s – постоянной;
3. вершина s объявляется текущей ($c:=s$);
4. все ребра (дуги) считаются непомеченными.

Основная часть:

1. для всех вершин u_j, инцидентных текущей вершине c, метки которых являются временными, пересчитываем эти метки по формуле:

$$d(u_j):=\min\{d(u_j),\ d(c)+\mathrm{Weight}(c,u_j)\}, \quad (1)$$

где (c,u_j) – ребро (дуга), соединяющая вершины c и u_j, а $\mathrm{Weight}(c,u_j)$ – ее вес; при наличии кратных ребер выбирается ребро с минимальным весом;

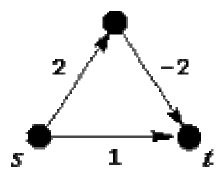
2. если метки всех вершин являются постоянными либо равны ∞, то путь не существует; ВЫХОД(«нет решения»);
3. иначе находим среди вершин с временными метками (среди всех таких вершин, а не только тех, чьи метки изменились в результате последнего выполнения шага (1)) вершину x с минимальной меткой, объявляем ее метку постоянной, помечаем ребро (дугу) (c',x), такое, что $d(x) = d(c')+\mathrm{Weight}(c',x)$,

где $c'=c$ либо c' – вершина, бывшая текущей на одном из предыдущих шагов ($c'=c$, если на шаге (1) при $u_j=x$ реализовалась вторая часть формулы (1)), и делаем эту вершину текущей ($c:=x$);

4. если $c=t$, то найден путь длины $d(t)$, который можно восстановить следующим образом: это тот путь между s и t, который состоит только из помеченных на шаге (3) ребер (дуг) (можно доказать, что он существует и единственен); ВЫХОД(«решение найдено»);

5. иначе переходим на шаг (1).

Замечание Алгоритм Дейкстры не всегда находит правильное решение в случае произвольных весов ребер (дуг) графа. Например, для орграфа, изображенного на рисунке, алгоритм Дейкстры найдет маршрут s(s,t)t длины 1 между вершинами s и t, а не минимальный маршрут длины 2+(-2)=0, проходящий через третью вершину графа. Пример орграфа, для которого неприменим алгоритм Дейкстры.



Кратчайшее остовное дерево

Задача: найти кратчайшее остовное дерево взвешенного графа.

Пример прикладной задачи: необходимо проложить линии коммуникаций (дороги, линии связи, электропередач и т.п.) между n заданными «точечными» объектами, при условии, что, во-первых, известны «расстояния» между каждой парой объектов (это может быть геометрическое расстояние или стоимость прокладки коммуникаций между ними), и, во-вторых, объекты могут быть связаны как непосредственно, так и с участием произвольного количества промежуточных объектов.

При допущении, что разветвления возможны только в этих же n объектах, задача сводится к нахождению кратчайшего остовного дерева (SST - shortest spanning tree, или MST - minimal spanning tree) во взвешенном графе, вершины которого соответствуют заданным объектам, а веса ребер равны «расстояниям» между ними. Если каждая пара вершин соединена ребром, то граф является полным и решение существует всегда, в противном случае решение существует тогда и только тогда, когда граф связен (отсутствие ребра между двумя вершинами означает невозможность прямой связи между соответствующими объектами).

Замечание: в случае введения дополнительных точек разветвления, длина кратчайшего дерева, включающего все исходные точки, а также некоторое количество новых, может быть меньше длины кратчайшего дерева, построенного только на исходных точках. Если допустить, что точки разветвления не произвольны, а берутся из некоторого множества, то задачу можно сформулировать так: построить кратчайшее дерево, покрывающее заданное подмножество вершин взвешенного графа. Данная задача, называемая задачей Штейнера, является чрезвычайно сложной с вычислительной точки зрения и может быть практически решена только при небольшом количестве дополнительных вершин. В то же время, существует эффективный приближенный алгоритм, строящий дерево, длина которого превышает длину кратчайшего дерева не более чем в два раза.

В отличие от задачи Штейнера, задача поиска кратчайшего остовного дерева допускает эффективное решение. Ниже будут рассмотрены два алгоритма решения этой задачи.

Алгоритм Краскала

Вход: связный взвешенный граф $G=(V,E)$, $n=|V|$, $m=|E|$.

Выход: SST – кратчайшее остовное дерево G.

1. SST'=<пустой граф с n вершинами>;
2. k=0;
3. если |E(SST')|=n–1, то SST=SST'; КОНЕЦ;
4. k=k+1;
5. e=<k-ое по возрастанию весов ребро графа G>;

6. если добавление e в SST' не приводит к появлению цикла, то добавить его в SST';

7. перейти на шаг 3.

Алгоритм построения остовного дерева графа (алгоритм ST)

Вход: связный граф $G=(V,E)$, $n=|V|$, $m=|E|$.

Выход: ST – остовное дерево графа G.

1. Занумеровать произвольным образом ребра графа G;
2. ST'=<пустой граф с n вершинами>;
3. $k=0$;
4. если |E(ST')|=n–1, то ST=ST'; КОНЕЦ;
5. $k=k+1$;
6. e=<k-ое ребро графа G>;
7. если добавление e в ST' не приводит к появлению цикла, то добавить его в ST';
8. перейти на шаг 4.

Алгоритм Прима

Определим расстояние между произвольной вершиной v взвешенного графа $G=(V,E)$ и некоторым его подграфом $G'\subseteq G$ как минимальный вес ребра, одним из концов которого является v, а другой лежит в G': $d(v,G')=\min_{(v,\mathbf{w})\in E(G),w\in G'}\mathrm{Weight}(v,w)$.

1. SST'=<граф, состоящий из одной произвольной вершины графа G>;
2. если |E(SST')|=n–1, то SST=SST'; КОНЕЦ;
3. среди множества I вершин графа G, не входящих в SST', но инцидентных хотя бы одной вершине из SST', найти вершину w∈I, расстояние которой до SST' минимально: $d(w,\mathrm{SST'})=\min_{v\in I}d(v,\mathrm{SST'})$;
4. добавить ребро (w,u), на котором достигается минимальное расстояние $d(w,\mathrm{SST'})$, в SST';
5. перейти на шаг 2.

Алгоритм Флойда

Дано: непустой взвешенный граф $G=(V, E)$ с произвольными весами ребер (дуг). Требуется найти длины кратчайших путей между всеми парами вершин графа, если в графе нет циклов (контуров) отрицательной суммарной длины, либо обнаружить наличие таких контуров.

Инициализация:

1. Построим матрицу D^0 размерности $|V|$ х $|V|$, элементы которой определяются по правилу:

1. $d_{ii}^0 = 0$;

2. $d_{ij}^0 =$ Weight(v_i, v_j), где $i<>j$, если в графе существует ребро (дуга) (v_i, v_j);

3. $d_{ij}^0 =$ бесконечность , где $i<>j$, если нет ребра (дуги) (v_i, v_j).

2. $m:=0$.

Основная часть:

1. Построим матрицу D^{m+1} по D^m, вычисляя ее элементы следующим образом:

$$d_{ij}^{m+1}=\min\{d_{ij}^m, d_{i(m+1)}^m + d_{(m+1)j}^m\}, \text{ где } i<>j;\ d_{ii}^{m+1}=0\ (*). \quad (1)$$

Если $d_{im}^m + d_{mi}^m < 0$ для какого-то i, то в графе существует цикл (контур) отрицательной длины, проходящий через вершину v_i; ВЫХОД.

2. $m:=m+1$; если $m<|V|$, то повторяем шаг (1), иначе элементы последней построенной матрицы $D^{|V|}$ равны длинам кратчайших путей между соответствующими вершинами; ВЫХОД.

Если требует найти сами пути, то перед началом работы алгоритма построим матрицу P с начальными значениями элементов $p_{ij}=i$. Каждый раз, когда на шаге (1) значение d_{ij}^{m+1} будет уменьшаться в соответствие с (1) (т.е. когда $d_{i(m+1)}^m + d_{(m+1)j}^m<d_{ij}^m$), выполним присваивание $p_{ij}:=p_{(m+1)j}$. В конце работы алгоритма матрица P будет определять кратчайшие пути между всеми парами вершин: значение p_{ij} будет равно номеру предпоследней вершины в пути между i и j (либо $p_{ij}=i$, если путь не существует).

Примечание: если граф – неориентированный, то все матрицы D^m являются симметричными, поэтому достаточно вычислять элементы, находящиеся только выше (либо только ниже) главной диагонали.

ТЕМА №7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ.

Понятие «алгоритм» принадлежит к числу основных понятий математики и занимает одно из центральных мест в вычислительной математике и проектировании разнообразных дискретных устройств.

Еще в IX веке узбекский ученый Мухаммед бен-муса аль-Хорезми разработал систему правил четырех арифметических действий над числами в десятичной позиционной системе счисления. Эти правила предписывали строгую последовательность действий над числами для получения искомого результата. Эти правила получили название "алгоритм" в честь арабского имени аль-Хорезми.

В XX веке в связи с развитием вычислительных машин и техники управления понятие алгоритма расширило свои границы. Так, основными объектами алгоритма стали разнообразные данные. Для уточнения понятия ***данные*** фиксируют конечный алфавит исходных символов (цифр, букв и т.п.) и правил построения ***алгоритмических объектов***. Такими объектами стали числа и многочлены, кортежи и матрицы, графы и автоматы, слова и тексты.

Процесс преобразования алгоритмических объектов от исходных данных до искомого результата выполняется ***дискретно***, как говорят, "по шагам". Происходящее за один шаг преобразование алгоритмического объекта носит локальный характер, т.е. преобразованию подвергается не весь объект, а лишь часть: член многочлена, компонента кортежа, столбец или строка матрицы, фрагмент графа или автомата, часть слова или текста и т.п. Процесс преобразования алгоритмического объекта, включающий в себя заданную последовательность шагов, называют ***алгоритмическим процессом***.

В процессе развития теории алгоритмов были сформулированы основные свойства алгоритма:

- ***Свойство дискретности***: алгоритм состоит из отдельных элементарных действий, выполняемых по шагам; множество элементарных шагов, из которых состоит алгоритмический процесс, конечно и счетно; типичным примером элементарных шагов является система команд компьютера.

- ***Свойство детерминированности***: после каждого шага дается точное указание, как и в какой последовательности выполнять следующие шаги алгоритмического процесса.

- ***Свойство массовости***: использование алгоритма допустимо для множества алгоритмических объектов заданного типа и заданного класса задач.

- ***Свойство результативности***: обязательна остановка алгоритмического процесса после конечного числа шагов с указанием искомого результата.

Механизм алгоритмического процесса использует конечный набор элементарных объектов и конечный набор элементарных шагов. Эти наборы составляют основу ***алгоритмической модели***. Для различных наборов элементарных действий могут быть сформированы различные алгоритмические модели.

Выделяют три основных типа алгоритмических моделей.

Первый тип — ***рекурсивные функции*** — связывает понятие алгоритма с числовыми функциями на множестве целых положительных чисел и принимающими значения на том же множестве.

Второй тип — ***машина Тьюринга*** — связывает понятие алгоритма с механическим устройством, способным выполнять дискретно элементарные действия над элементарными объектами.

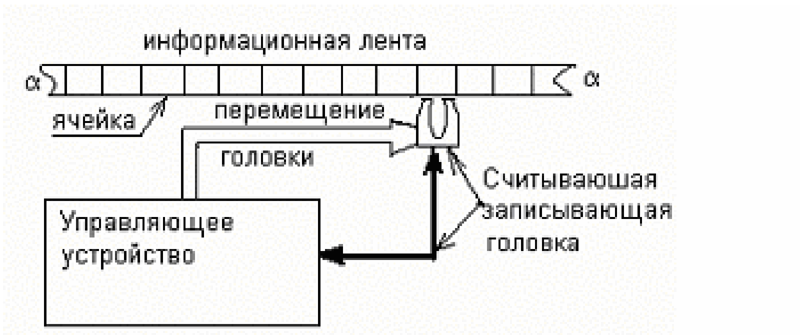
Третий тип — ***нормальный алгоритм Маркова*** — связывает понятие алгоритма с классом словарных преобразований в результате замены части слова или всего слова другим.

В теории вычислительных алгоритмов доказана сводимость одного типа модели к другой, т.е. всякий алгоритм, описанный средствами одной модели, может быть описан средствами другой.

МАШИНА ТЬЮРИНГА

Основные свойства алгоритма дискретности, детерминизма, массовости и результативности позволяют представить процесс вычисления какой-либо числовой функции с помощью математической машины. Эта машина за конечное число шагов из исходных числовых данных в соответствии с заданными правилами может получить искомый числовой результат.

Такая модель алгоритма была предложена английским математиком Тьюрингом в конце 30-х годов прошлого столетия, что почти на два десятилетия опередило появление электронных вычислительных машин и послужило их теоретическим прообразом.



Машина Тьюринга

Машина Тьюринга состоит из информационной ленты, считывающей и записывающей головки и управляющего устройства (рис.).

Информационная лента бесконечной длины представляет собой последовательность ячеек, в каждую из которых записан в точности только один символ из множества символов алфавита $V_T=\{a_1, a_2...a_n\}$. Последовательность символов на ленте формирует слово $\alpha=(a_1\ a_2\ ...\ a_l)$. Пробел между словами также является символом множества V_T. Например, $\# \in V_T$.

С точки зрения формальных грамматик множество символов алфавита V_t есть множество ***терминальных символов***.

Информационная лента исполняет функции ***внешней памяти*** машины Тьюринга.

Считывающая - записывающая головка обозревает одну ячейку информационной ленты, передает информацию о ее содержимом в управляющее устройство, и по указанию последнего сохраняет или изменяет содержимое ячейки.

Управляющее устройство представляет собой механизм, который на каждом шаге вычисления находится в одном из множества состояний $Q = \{q_1, q_2,...q_m\}$. В зависимости от состояния q_i и считанного символа a_j управляющее устройство формирует команду на стирание или запись нужного символа в обозреваемую ячейку, перевод управляющего устройства в новое состояние и перемещение головки на соседнюю ячейку информационной ленты. Понятие "состояние" формирует "память машины Тьюринга", т.е. учет всех промежуточных состояний, которые привели машину в текущее состояние q_i. Поэтому множество состояний управляющего устройства называют ***внутренней памятью*** машины Тьюринга. С позиции формальных грамматик множество символов состояний управляющего устройства есть множество ***нетерминальных символов***. Среди всех состояний управляющего устройства следует выделить q_o— начальное состояние ("старт") и q_k — конечное состояние, ("стоп"), что облегчит формализацию протоколов машин Тьюринга и их композицию.

Для формализации перемещений головки относительно информационной ленты введем дополнительный алфавит D = {П, Л, С}, где П — означает перемещение головки вправо на одну ячейку информационной ленты, Л — влево на одну ячейку и С — останов.

Работа машины Тьюринга состоит в многократном повторении следующего цикла элементарных действий:

действие первое: считывание символа a_j, находящегося под считывающей головкой;

действие второе: поиск команды, отвечающей текущему состоянию управляющего устройства q_i, и считанному символу a_j , т.е.

$$q_j\, a_j \Rightarrow q_l\, a_m\, D;$$

действие третье: исполнение найденной команды, т.е. запись в обозреваемую ячейку символа a_m, перевод управляющего устройства в состояние q_i и перемещение головки на соседнюю ячейку информационной ленты D.

Эти три действия формируют элементарный шаг алгоритмического процесса.

Последовательность команд для реализации процесса вычисления формирует ***протокол*** машины Тьюринга или ***программу алгоритмического процесса.***

Следует отметить, что никакие две команды не могут иметь одинаковую пару текущего состояния q_i и считываемого символа a_j, т.е. (q_i a_j). Машина Тьюринга останавливается только в том случае, если на очередном шаге управляющее устройство генерирует состояние q_k Результатом работы машины Тьюринга будет заключительное слово на информационной ленте

НОРМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ МАРКОВА

Понятие "нормальный алгоритм" ввел в 1947 г. советский ученый А.А. Марков в качестве одного из уточнений представления об алгоритме. Он положил, что ***нормальный алгоритм***, являясь алгоритмом в некотором алфавите V_T, порождает в нем некоторый детерминированный процесс переработки только одного слова P_o и только в одном алфавите.

Словами P_i в алгоритме Маркова могут быть арифметические, алгебраические или логические выражения. Но это оказалось удобным средством в формировании алгоритмических процессов для слов нематематической природы.

Нормальный алгоритм Маркова есть указание использовать упорядоченный список правил подстановки:

$$\alpha_i \Rightarrow \beta_i,$$

где α_i и β_i — слова в алфавите V_T.

Множество правил и порядок их использования формируют детерминированный процесс преобразования исходного слова P_o в заключительное слово Q, т.е.

$$P_o \to P_1 \to P_2 \to \ldots \to P_i \to \ldots \to Q.$$

Для организации последовательного использования правил вывода заключительного слова все они должны быть индексированы
$i \in [1, 2, 3 \ldots]$.

Если P_i - цепочка подслов $(\gamma_1\alpha\gamma_2)$ в алфавите $V_т$ (γ_1 и γ_2 слова, возможно, пустые в алфавите V_T) и среди множества правил есть подмножество $\{\alpha \Rightarrow \beta_l\}$, то выбрать правило, имеющее наименьший номер и выполнить подстановку в слово $(\gamma_1\alpha\gamma_2) \Rightarrow (\gamma_1\beta_i\,\gamma_2)$.

Суть упорядоченного использования правил состоит в том, что каждое переработанное слово вновь поступает в "начало" работы алгоритма и вновь проверяется на подстановку правил в соответствии с протоколом.

Среди множества правил подстановки есть простые правила, которые обозначают так: $\alpha_1 \to \beta_1$ и заключительные: $\alpha_i \to \bullet\, \beta_i$.

Так будет до тех пор, пока ни одно из правил подстановки не может быть использовано, а заключительной подстановкой будет дано указание об окончании работы алгоритма.

Процесс может оборваться самостоятельно на некотором слове, в которое не входит ни одна из левых частей правил. Так формируется "тупик".

Для того, чтобы построить модель нормального алгоритма, необходимо в соответствии с правилами подстановки найти множество распознавателей вхождения слов α_i в слово P_i и множество операторов подстановки слова β_l в слово $P_{i+1\ i}$.

4. СЛОЖНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЙ

При реализации алгоритма с привлечением одной из трех моделей возникает задача оценки сложности алгоритма. Выделяют ***сложность в описании алгоритма*** и ***сложность в вычислении алгоритма***.

Сложность описания алгоритма есть величина, характеризующая длину описания алгоритма. Для рекурсивных функций — это число букв и символов, используемых в описании операторов. Для машин Тьюринга —

это число команд. Для нормального алгоритма Маркова — это число правил подстановки.

Сложность вычисления алгоритма есть функция, дающая числовую оценку трудоемкости применения алгоритма к исходным данным для получения искомого результата. Чаще всего рассматриваются время и объем памяти, необходимые для вычисления. Среднее физическое время зависит от типа компьютера, способов хранения и выборки данных и скорости обработки информации.

Время вычисления характеризуется произведением числа шагов от исходных данных до искомого результата на среднее физическое время реализации одного шага алгоритма. Число шагов алгоритма определяется его описанием в данной алгоритмической модели. Среднее физическое время зависит от типа компьютера, способов хранения и выборки данных и скорости обработки информации.

Объем памяти, как количественная характеристика алгоритма, определяется количеством единиц памяти, используемых в процессе вычисления алгоритма. Эта величина не может превосходить максимального числа единиц памяти, используемых в данном компьютере на одном шаге алгоритма.

ТЕМА №8. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ И ПРАКТИКИ КОДИРОВАНИЯ.

ДВОИЧНОЕ КОДИРОВАНИЕ

В информационных системах для двоичной записи целых чисел обычно используют фиксированное число двоичных разрядов (позиций для двоичных цифр) n. Если число имеет в своей записи $m \le n$ двоичных цифр, в первые n-m позиций вписываются нули, а в оставшиеся m позиций цифры числа. Таким образом, используя n двоичных разрядов, можно представить все числа от 0 до 2^n-1.

Всякое сообщение, записанное с использованием символов некоторого алфавита, можно представить в виде некоторой последовательности из нулей и единиц. В самом деле, пусть $A=\{a,b,\ldots\}$ – конечный алфавит. Выберем число n так, чтобы 2^n было не меньше, чем число его символов. Перенумеруем символы алфавита (начиная нумерацию с нуля) и припишем каждому из них его двоичный код – двоичную запись номера символа с использованием n двоичных разрядов (битов). Текст $ab\ldots$, представляется последовательностью блоков

$$\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}...\alpha_1\alpha_0\beta_{n-1}\beta_{n-2}...\beta_1\beta_0...,$$

где $\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}...\alpha_1\alpha_0$ – двоичная запись номера символа a, $\beta_{n-1}\beta_{n-2}...\beta_1\beta_0...$,– двоичная запись номера символа b, и т.д.

В информатике распространены системы кодирования символов алфавита с использованием 8-разрядных блоков – байтов. Это позволяет работать с алфавитами, содержащими до 256 символов. Обычно используемые алфавиты содержат латинские буквы, буквы национального алфавита, цифры, знаки препинания и некоторые специальные знаки.

ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО {0,1}^{N}

На множестве n-мерных двоичных векторов определим операцию $\oplus$ – сложение по модулю 2. Сумма двоичных векторов $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2...\alpha_n)$ и $\beta=(\beta_1,\beta_2...\beta_n)$ определяется формулой

$$\alpha\oplus\beta=(\alpha_1\oplus\beta_1,\alpha_2\oplus\beta_2,...,\alpha_n\oplus\beta_n).$$

Вектор $\alpha\oplus\beta$ содержит единицы на тех местах, где координаты векторов α и β различаются, и нули – на тех, где совпадают.

Примеры.

Операция $\oplus$ обладает важными свойствами обычного сложения: она коммутативна и ассоциативна, нулевой вектор является нейтральным элементом. Кроме того, $\alpha\oplus\alpha$ является нулевым вектором для любого вектора α.

Система n-мерных двоичных векторов *линейно зависима*, если сумма (по модулю 2) нескольких векторов из этой системы равна 0 (мы используем один и тот же символ «0» для обозначения числа «ноль» и нулевого вектора, когда из контекста ясно, о чем идет речь). На двоичные векторы распространяются стандартные свойства линейной зависимости:

в пространстве $\{0,1\}^n$ *любая система, содержащая более n векторов, линейно зависима*;

любые n линейно независимых векторов образуют базис пространства $\{0,1\}^n$; *всякий вектор из* $\{0,1\}^n$ *может быть единственным образом представлен в виде суммы нескольких базисных векторов.*

Двоичные векторы (0,0,…,0,1), (0,0,…,1,0),…, (1,0,…,0,0) образуют базис пространства $\{0,1\}^n$, называемый *каноническим*.

Число единичных координат двоичного вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n)$ обозначают через $w(\alpha)$ и называют *весом* вектора α. Очевидно,

$$w(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$$

Формулой $d(\alpha,\beta) = w(\alpha \oplus \beta)$ определяется расстояние между двоичными векторами α и β, называемое *расстоянием Хемминга*. Расстояние Хемминга обладает следующими свойствами:

1) $d(\alpha,\alpha) = 0$ и $d(\alpha,\beta) > 0$ при $\alpha \neq \beta$

2) $d(\alpha,\beta) = d(\beta,\alpha)$

3) $d(\alpha,\beta) + d(\alpha,\gamma) \geq d(\alpha,\gamma)$ (*неравенство треугольника*).

ОТОБРАЖЕНИЯ {0,1}^{n} В {0,1}^{m}

Произвольное отображение из $\{0,1\}^n$ в $\{0,1\}^m$, $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \rightarrow$ $(y_1,y_2,\ldots,y_m)$,

задается набором булевых функций

$$y_1=f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ y_2=f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ \ldots,y_m=f_m(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Чтобы задать такое отображение, требуется указать m двоичных векторов размерности 2^n. Таким образом, для задания произвольного отображения необходимо $m\times 2^n$ бит информации. Например, отображение из $\{0,1\}^2$ в $\{0,1\}^3$ задается вектором размерности 12 (составленным из трех векторов размерности 4). Общее число отображений из $\{0,1\}^2$ в $\{0,1\}^3$ равно 2^{12}=4096.

Напомним, что линейной называется функция вида

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 \oplus c_2x_2 \oplus ... \oplus c_nx_n,$$

где $c=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ – произвольный двоичный вектор.

Булева функция $f{:}\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ *является линейной, если*

$$f(\alpha \oplus \beta) = f(\alpha) \oplus f(\beta)$$

для любых α *и* β *из* $\{0,1\}^n$.

В самом деле, так как

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1\cdot(1,0,\ldots,0) \oplus x_2\cdot(0,1,\ldots,0)\oplus\ldots. \oplus x_n\cdot(0,0,\ldots,1),$$

то

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1\cdot f(1,0,\ldots,0) \oplus x_2\cdot f(0,1,\ldots,0)\oplus\ldots. \oplus x_n\cdot f(0,0,\ldots,1),$$

Вектор $c=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ имеет следующий вид:

$$c_1 = f(1,0,\ldots,0),\ c_2= f(0,1,\ldots,0),\ \ldots,\ c_n= f(0,0,\ldots,1).$$

Общее число линейных функций от n переменных равно числу n-мерных двоичных векторов, то есть равно 2^n.

Как видно из предыдущего, линейная функция f является суммой нескольких своих аргументов. Например, x_1 входит слагаемым в эту сумму, если $f(1,0,\ldots,0)=1$, и не входит, если $f(1,0,\ldots,0)=0$.

Пример.

Отображение $f{:}\{0,1\}^n\to\{0,1\}^m$ называется *линейным*, если $f(\alpha \oplus \beta) = f(\alpha) \oplus f(\beta)$ для любых α и β из $\{0,1\}^n$. Отображение

$$f{:}\{0,1\}^n\to\{0,1\}^m,\ (x_1,x_2,\ldots,x_n) \to (y_1,y_2,\ldots,y_m),$$

линейно тогда и только тогда, когда линейны все его компоненты

$$y_1=f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ y_2=f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,\ y_m=f_m(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Отсюда следует, что линейное отображение из $\{0,1\}^n$ в $\{0,1\}^m$ однозначно определяется набором, содержащим m двоичных векторов размерности n, то есть некоторой матрицей из нулей и единиц размера $m\times n$. Для задания линейного отображения необходимо $m \times n$ бит информации. Общее число линейных функций из $\{0,1\}^n$ в $\{0,1\}^m$ равно 2^{mn}.

Пример.

БЛОЧНЫЕ ДВОИЧНЫЕ КОДЫ

При передаче информации в каналах связи возможно появление помех. Передаваемые сигналы могут искажаться. Чтобы обеспечить надежную передачу информации, применяют различные методы кодирования информации. Вместе с основной информацией пересылают некоторую дополнительную, позволяющую судить об искаженности принятых сообщений. Коды делятся на два больших класса: коды с обнаружением ошибок и коды с исправлением ошибок.

Пример.

Сообщение $E(\alpha) \in \{0,1\}^7$ передается по каналам связи. Пусть $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7)$ – принятое сообщение. Вычислим следующие суммы:

$$\sigma_1 = \beta_4 \oplus \beta_5 \oplus \beta_6 \oplus \beta_7;$$

$$\sigma_2 = \beta_2 \oplus \beta_3 \oplus \beta_6 \oplus \beta_7;$$

$$\sigma_3 = \beta_1 \oplus \beta_3 \oplus \beta_5 \oplus \beta_7.$$

Если сообщение передано без ошибки, то все три суммы нулевые. В самом деле, при безошибочно $\beta_i = \alpha_i$ для i=1,2,…,7. Легко видеть, что после замены $\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$ их выражениями через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, каждая из сумм $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ содержит четное число слагаемых α_i, i=1,2,3,4, и потому равна 0. Верно и обратное. Если все три суммы нулевые, сообщение передано без ошибки. В противном случае число j, $1 \le j \le 7$, с двоичной записью $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ указывает номер позиции, в которой произошла ошибка. Пусть, например, ошибка произошла в первой позиции. Тогда $\beta_1 = 1 \oplus \alpha_1$ и $\beta_i = \alpha_i$ при i=2,3,…,7. Имеем

$\sigma_3 = 1 \oplus \alpha_1 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_5 \oplus \alpha_7 = 1 \oplus \alpha_1 \oplus \alpha_3 \oplus (\alpha_2 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_4) \oplus (\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_4) = 1$

Так как в вычислении σ_1 и σ_2 ошибочный бит не участвует, то эти суммы равны 0. Значит, $j=001_2=1$.

Для исправления ошибки в принятом сообщении β, нужно заменить β_j на $1 \oplus \beta_j$ и отбросить последние три бита. Первые четыре бита исправленного сообщения дают исходное сообщение α. Этот алгоритм реализует функцию декодирования $\alpha = D(\beta)$.

В общем случае (n,m)-*блочный двоичный код* определяется двумя функциями: функцией кодирования $E:\{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ и функцией декодирования $D:\{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$, где $m \le n$. Векторы вида $E(\alpha) \in \{0,1\}^m$ называются кодовыми словами. Интуитивно ясно, что код тем лучше приспособлен к обнаружению и исправлению ошибок, чем больше различаются его кодовые слова.

Кодовым расстоянием блочного двоичного кода называется величина $d(E)$, равная наименьшему расстояние между различными кодовыми словами:

$$d(E) = \min\{d(E(\alpha),E(\beta)) \mid \alpha,\beta \in \{0,1\}^m, \alpha \ne \beta\}.$$

Пример.

Теорема. 1) Код позволяет обнаруживать ошибки в k (или менее) позициях тогда и только тогда, когда его кодовое расстояние превышает k.

2) Код позволяет обнаруживать и исправлять ошибки в k (или менее) позициях тогда и только тогда, когда его кодовое расстояние превышает 2k.

КОДЫ ХЕММИНГА

Начнем с нескольких определений и конструкций общего характера.

Если функция кодирования блочного кода $E:\{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ линейна, то код называется *линейным*. В дальнейшем мы рассматриваем только линейные коды. Назовем *проверочным* такое линейное отображение $S:\{0,1\}^m \to \{0,1\}^k$, что $S(\beta)=0$ тогда и только тогда, когда β является кодовым словом. Для произвольного $\beta \in \{0,1\}^m$ вектор $S(\beta)$ называется *синдромом*. Нулевой синдром имеют кодовые слова, и только они.

Предположим, что в зашумленном канале передаваемое кодовое слово $E(\alpha)$ исказилось, к нему добавился вектор ошибок δ, так что на выходе принято слово $\beta=\delta\oplus E(\alpha)$. Тогда

$$S(\beta)=S(\delta\oplus E(\alpha))=S(\delta)\oplus S(E(\alpha))=S(\delta).$$

Для того чтобы правильно декодировать передаваемое сообщение, нужно уметь определять вектор ошибок по его синдрому. Если вектор ошибок определен, то исправить их несложно: $E(\alpha)=\delta\oplus\beta$. Ограничившись случаем одиночных ошибок, можно привести сравнительно несложное построение кода, исправляющего ошибки.

Вектор одиночной ошибки имеет всего одну ненулевую координату, то есть является одним из векторов канонического базиса пространства $\{0,1\}^m$. Линейный код позволяет исправлять все одиночные ошибки тогда и только тогда, когда синдромы всех векторов из канонического базиса пространства $\{0,1\}^m$ отличны от нуля и друг от друга. Поскольку пространство $\{0,1\}^k$ содержит всего 2^k-1 ненулевых векторов, используя проверочное отображение $S:\{0,1\}^m\to\{0,1\}^k$, можно исправлять одиночные ошибки лишь в том случае, когда длины кодовых слов ограничены числом 2^k-1, то есть $m\le 2^k$-1. Оказывается, что можно построить коды с исправлением ошибок, в которых $m=2^k$-1. В таких кодах их «исправляющие» возможности используются с максимальной эффективностью. К их числу относятся рассматриваемые ниже коды Хемминга.

Перейдем к описанию кода Хемминга. Пусть $m=2^k$-1. Среди m позиций кодового слова k позиций являются контрольными, а $n = 2^k-k-1$ – информационными. Матрица H (размерности $k\times(2^k-1)$), задающая проверочное отображение, содержит в качестве столбцов все ненулевые векторы пространства $\{0,1\}^k$. Порядок столбцов не важен, но технически удобнее считать, что в каждом столбце записан его номер в двоичном формате. Строки матрицы H

определяют коэффициенты системы из k однородных линейных уравнений с $2^k–1$ неизвестными. Множество кодовых слов совпадает с множеством решений этой системы. Выражая последние k неизвестных через первые $2^k–k–1$, мы получаем уравнения для вычисления контрольных битов. Вектор с нулевым синдромом является кодовым и его декодирование сводится просто к отбрасыванию контрольных битов. Если синдром отличен от нуля, он представляет собой двоичную запись номера позиции, в которой произошла ошибка. В этом случае при декодировании ошибка исправляется. Доля информационных позиций в коде Хемминга составляет

$$\frac{2^k - k - 1}{2^k - 1} = 1 - \frac{k}{2^k - 1}$$

и стремится к 1 с ростом k.

Пример.

ТЕМА №9. ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ.

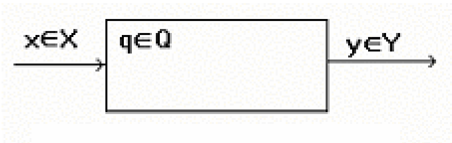
Теория автоматов наиболее тесно связана с теорией алгоритмов. Это объясняется тем, что автомат преобразует дискретную информацию по шагам в дискретные моменты времени и формирует результирующую информацию по шагам заданного алгоритма. Эти преобразования возможны с помощью технических и/или программных средств.

Единый подход в описании технических и программных средств определил понятие *автомат*, как математическую модель системы, обеспечивающей прием, хранение и обработку информации. Ограничение числа параметров математической модели определило другое понятие – «***конечный автомат»***.

При анализе автоматов изучают их поведение при различных возмущающих воздействиях и минимизируют число состояний автомата для работы по заданному алгоритму. Такой автомат называют ***абстрактным***.

При синтезе автоматов формируют автомат называют ***структурным***.

Абстрактным автоматом называют математическую модель дискретного устройства, имеющего один входной канал, куда поступают последовательности символов какого-то языка, один выходной канал, с которого снимают последовательности символов, возможно, другого языка и находящегося в каждый из моментов дискретного времени в каком-либо состоянии.



Абстрактный автомат

Слова входного языка можно представить символами множества $X=\{x_1,x_2,...x_n\}$, который называют входным алфавитом, а слова выходного языка - символами множества $Y=\{y_1,y_2,...y_p\}$, который называют выходным алфавитом.

Множество состояний автомата $Q=\{q_1,q_2,...q_m\}$ называют алфавитом состояний. Понятие состояние автомата используют для того, чтобы установить функциональную зависимость генерируемых автоматом символов от символов входного языка при реализации автоматом заданного алгоритма. Для каждого состояния автомата $q\in Q$ и для каждого символа входного языка $x\in X$ в момент дискретного времени $[\tau]$ на выходе устройства генерируется символ $y\in Y$. Эту зависимость определяет функция выходов автомата – φ. Для каждого текущего состояния автомата $q\in Q$ и для каждого символа $x\in X$ в момент дискретного времени $[\tau]$ автомат переходит в очередное состояние $q\in Q$. Эту зависимость определяет функция переходов автомата – ψ.

Функционирование автомата есть последовательность состояний автомата ($q_1[[1]q_2[2]q_3[3]...$) и выходных символов ($y_1[1]y_2[2]y_3[3]...$) под влиянием последовательности символов на входе автомата ($x_1[1]x_2[2]x_3[3]...$). Каждый символ входной последовательности считывается в дискретный моменты времени $[\tau]$=1, 2, 3,...Поэтому в прямых скобках. указывают моменты дискретного времени, которые называют тактами,

Математическая модель конечного автомата есть

$$M = <X; Y; Q; \varphi; \psi>,$$

где $X=\{x_1, x_2,...x_n\}$- множество символов входного алфавита;

$Y=\{y_1, y_2, ..y_p\}$- множество символов выходного алфавита;

$Q=\{q_1, q_2,...q_m\}$- множество символов состояний автомата;

ψ: $(Q\otimes X) \to Q$ – функция переходов автомата для отображения пары $(q; x)$ текущего момента времени $[\tau]$ в состояние q очередного момента времени $[\tau+1]$;

φ: $(Q\otimes X) \to Y$ – функция выходов автомата для отображения пары $(q; x)$ текущего момента времени $[\tau]$ в символ y выходного канала этого же момента времени $[\tau]$.

Так как области определения функций переходов и выходов совпадают, то обобщенный оператор поведения автомата можно описать так:

$$<\psi, \varphi>: (Q\otimes X) \to (Q\otimes Y).$$

Функционирование автомата в дискретные моменты времени может быть описано системой рекуррентных соотношений:

$$\begin{cases} q[\tau+1] = \psi(q[\tau]; x[\tau]); \\ y[\tau] = \varphi(q[\tau], x[\tau]). \end{cases}$$

Если на входе автомата слово $\alpha = (x_1,x_2,x_3,...x_\tau)$, то, считывая последовательно символы этого слова, на выходе автомата генерируется последовательность символов слова β по схеме:

$\beta[1]=(\varphi(q[1]; x_1[1]))$;

$\beta[2]=(\varphi(q[1]; x_1[1])\ \varphi(q[2]; x_2[2])) = (\varphi(q[1]; x_1[1])\varphi(q[1]; (x_1[1]x_2[2])))$;

……………………………………………………......................................

$\beta[\tau]=(\varphi(q[1];x_1[1])\varphi(q[2];x_2[2])...\varphi(q[s];x_\tau[\tau])) =$

$=(\varphi(q[1];x_1[1])\varphi(q[1];(x_1[1]x_2[2]))...\varphi(q[1];(x_1[1]x_2[2] \ ... \ x_\tau[\tau])))$;

Так как на каждом i-ом такте к слову длины $(i$-1) приписывается справа очередной символ $\varphi(q[1]; (x_1[1]x_2[2]...x_i[i]))$, то последовательность символов выходного слова можно записать так:

$$\beta= (\varphi(q;x_1)\varphi(q;(x_1x_2))...\varphi(q;(x_1x_2...x_s)))=(\varphi(q; \alpha)).$$

Если считывание символов входного слова α выполняется последовательно слева направо, то всегда найдется такая последовательность $(x_1x_2...x_{s}$-$1)=\gamma$, для которой $\alpha = ((x_1x_2...x_{s-1})x_s) =(\gamma xs)$, где $\gamma =(x_1x_2...x_{s-1})$ – «голова» слова α, а x_s –«хвост» слова α.

Поэтому если входное слово $\alpha = (\gamma x_s)$, то выходное слово β можно записать так $\beta=\varphi(q; \alpha) = \varphi(\psi(q;\gamma);x_s$

Это означает, что последний символ слова β есть результат работы автомата, начавшего работу в состоянии q и считавшего последний символ слова α, но значение этого символа зависит от всей входной последовательности γ.

Длина выходного слова всегда равна длине входного слова.

Изменение состояний автомата для последовательности символов слова $\alpha = (x_1x_2...x_s)$ может быть описано следующей схемой:

$q[2] = \psi(q[1];x_1[1]);$

$q[3] = \psi(q[2];x_2[2]) = \psi(\psi(q[1];(x_1[1]);x_2[2]));$

....

$q[\tau+1] =\psi(q[s];x_\tau[\tau])=\psi(\psi..(\psi\ (\psi\ (q[1];x_1[1]);x_2[2]);..x_{\tau-1}[\tau-1]);x_\tau\ [\tau]),$

где $q[1]$ –начальное состояние автомата.

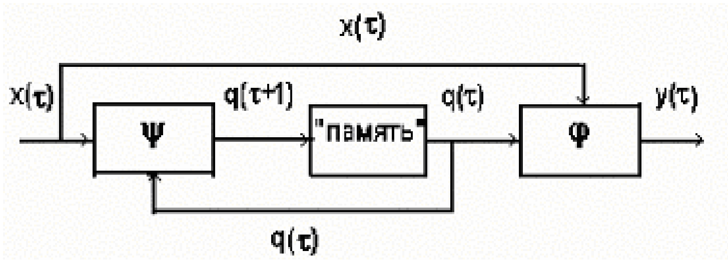
Так как за один такт автомат считывает один символ входного слова, то в последовательности состояний автомата можно не указывать номер такта, т. е. описывать так:

$q[\tau+1] = \psi(\psi...\ (\psi(\psi(\psi(q;x_1);x_2);x_3)...x_{\tau-1});x_\tau).$

Если входное слово $\alpha =(\gamma x_\tau)$, то изменение состояния автомата может быть описано так:

$q[\tau+1] = \psi(\psi(q, \gamma);x_\tau).$

Это означает, что $q[\tau+1]$ есть последнее состояние автомата, начавшего работу в состоянии q и считавшего последний символ слова α в момент дискретного времени τ.



Функциональная схема абстрактного автомата

Если функции переходов и выходов однозначно определены для каждой пары $(q;\ x)\in(Q\otimes X)$, то автомат называют *детерминированным*. В противном случае автомат называют *недетерминированным* или частично определенным.

Если функция переходов и/или функция выходов являются случайными, то автомат называют вероятностным.

Если у автомата задано начальное состояние $q=q_0\in Q$, в котором он находится всегда до приема первого символа входного слова, то автомат называют инициальным.

В этом случае модель автомата записывают так:

$$M=<X;\ Y;\ Q;\ \varphi;\ \psi; q_0>.$$

Последовательность символов в слове β и последовательность состояний автомата q однозначно определяются начальным состоянием автомата $q=q_0$ и последовательностью символов во входном слове α.

Отображение входного слова α на выходное слово β называют автоматным отображением, то есть $\beta=M(q_0;\ \alpha)$, а M называют *автоматным оператором*.

Автоматное отображение обладает свойствами:

входное и выходное слова имеют одинаковую длину;

y_i-ый символ выходного слова зависит от всей последовательности символов входного слова, до x_i-го включительно.

ТИПЫ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

По способу формирования функций выхода выделяют автоматы Мили и Мура.

В автомате Мили функция выходов φ определяет значение выходного символа по классической схеме абстрактного автомата. Математическая модель, схема рекуррентных соотношений и функциональная схема автомата Мили не отличаются от одноименных модели, соотношений и схемы абстрактного автомата, т.е.

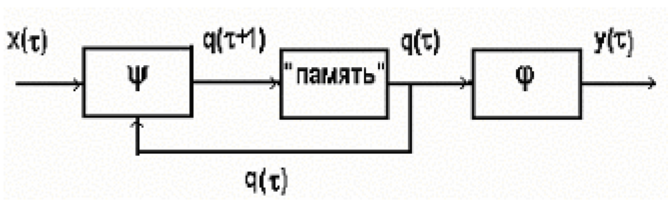
$$\begin{cases} M = < X; Y; Q; \psi; \varphi >; \\ \psi : (Q \otimes X) \to Q; \\ \varphi : (Q \otimes X) \to Y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} q[\tau+1] = \psi(q[\tau]; x[\tau]); \\ y[\tau] = \varphi(q[\tau]; x[\tau]). \end{cases}$$

В автомате Мура функция φ определяет значение выходного символа только по одному аргументу - состоянию автомата. Символ $y[\tau]$ в выходном канале существует пока автомат находится в состоянии $q[\tau]$.
Математическая модель, схема рекуррентных соотношений и функциональная схема автомата Мура имеют вид:

$$\begin{cases} M = < X; Y; Q; \psi; \varphi >; \\ \psi : (Q \otimes X) \to Q; \\ \varphi : Q \to Y. \end{cases}$$

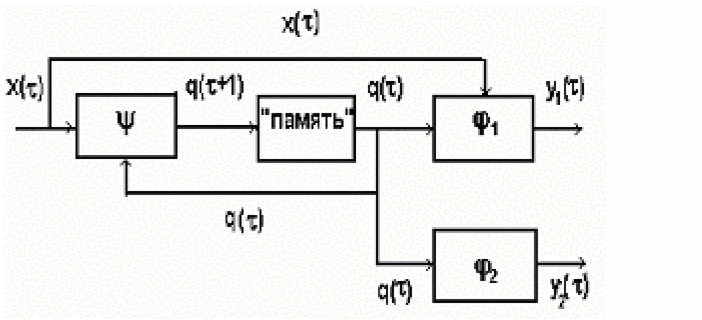
$$\begin{cases} q[\tau+1] = \psi(q[\tau]; x[\tau]); \\ y[\tau] = \varphi(q[\tau]). \end{cases}$$



Функциональная схема автомата Мура

Объединение автоматов Мили и Мура представляет С-автомат:

$$\begin{cases} q[\tau+1] = \psi(q[\tau]; x[\tau]); \\ y_1[\tau] = \varphi_1(q[\tau]; x[\tau]); \\ y_2[\tau] = \varphi_2(q[\tau]). \end{cases}$$



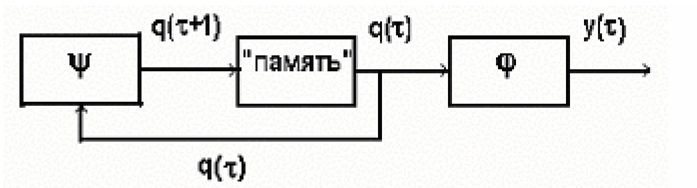
Функциональная схема С-автомата

Математические модели, опирающиеся только на два носителя алгебры, представляют особые классы автоматов.

Если $X=\varnothing$, то математическая модель и система рекуррентных соотношений абстрактного автомата имеют вид:

$$\begin{cases} M =< Y; Q; \psi; \varphi >; \\ \psi : Q \to Q; \\ \varphi : Q \to Y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} q[\tau + 1] = \psi(q[\tau]); \\ y[\tau] = \varphi(q[\tau]). \end{cases}$$



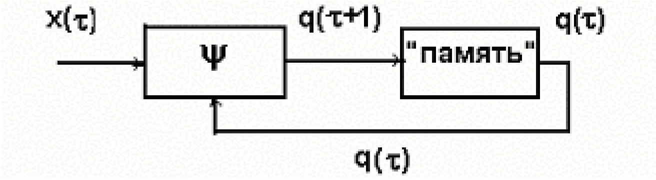
Функциональная схема порождающего автомата

Особенностью такого автомата является генерация последовательности символов выходного слова только в зависимости от одного аргумента - состояний автомата. Такие автоматы называют порождающими или автономными. С помощью такого автомата генерируется последовательность управляющих команд.

Если $Y=\varnothing$, то математическая модель и система рекуррентных соотношений имеют вид:

$$\begin{cases} M =< X; Q; \psi >; \\ \psi : (Q \otimes X) \to Q; \end{cases}$$

$q[\tau+1] =\psi(q[\tau];x[\tau])$;



Функциональная схема распознающего автомата

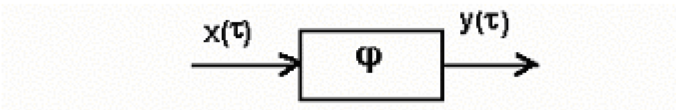
Особенностью такого автомата является распознавание в последовательности изменений аргументов функции переходов
($q_i[\tau]$; $x_i[\tau]$) и перевод автомата в заключительное состояние q_k.

С помощью такого автомата обнаруживают возмущения со стороны внешней среды или распознают последовательность входных символов. Поэтому такие автоматы называют распознающими.

Если Q=∅, то математическая модель и система рекуррентных соотношений имеют вид:

$$\begin{cases} \mathrm{M} =< \mathrm{X}; \mathrm{Y}; \varphi >; \\ \varphi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}; \end{cases}$$

$y[\tau] = \varphi(x[\tau])$.



Функциональная схема комбинационного автомата

Особенностью функционирования такого автомата является отсутствие «памяти», т.е. на каждый символ входного алфавита автомат генерирует символ выходного алфавита без учета состояния автомата. Такие автоматы чаще всего называют комбинационными автоматами.

СТРУКТУРНЫЙ АВТОМАТ

Если элементарный автомат представляет собой устройство, имеющее один вход и один выход, то последовательное и/или параллельное соединение нескольких автоматов формирует сеть. Под действием входных сигналов происходит изменение внутренних состояний автоматов, что порождает изменение состояния всей сети. При описании сети необходимо также вводить понятие дискретного времени τ. Функция ψ каждого автомата реализует задержку на один такт изменения внутреннего состояния, что формирует задержку изменения состояния всей сети. Совокупность функций φ автоматов, принадлежащих сети, формирует выходной сигнал всей сети.

Сеть автоматов, вход которой есть $(x_1, x_2,..x_n)\in X_n$, а выход – $(y_1, y_2, \ldots y_p)\in Y_p$, называют структурным автоматом. Структурный автомат содержит m элементарных автоматов с одним входом и одним выходом, множество состояний которых в момент времени τ формируют состояние сети $(q_1,q_2,..q_m)\in Q_m$.

Одновременное изменение внутренних состояний всех автоматов формирует синхронный режим работы сети. В этом случае состояние сети из m автоматов $M_1, M_2,...M_m$ может быть представлено для каждого момента времени τ вектором $q[\tau]=(q_1[\tau];q_2[\tau];...q_m[\tau])$. Каждая компонента этого вектора описывает внутреннее состояние соответствующего автомата, то есть $q_1\in Q_1$, $q_2\in Q_2,...q_m\in Q_m$. Число состояний сети равно произведению числа состояний составляющих его автоматов, так как $Q=(Q_1\otimes Q_2\otimes...\otimes Q_m)$. Поэтому синхронный режим работы сети часто называют произведением автоматов.

Разновременное и последовательное изменение внутренних состояний автоматов формирует асинхронный режим работы сети. Изменение состояния такой сети из m автоматов $M_1, M_2,...M_m$ для каждого момента времени τ может быть описано изменением внутреннего состояния только одного автомата, то есть $q[\tau]=q_i[\tau]$ где $q_i\in Q_i$. Число состояний сети равно сумме числа внутренних состояний составляющих его автоматов, так как $Q=(Q_1\cup Q_2\cup...\cup Q_m)$. Поэтому асинхронный режим работы сети часто называют суммой автоматов.

ЛОГИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ АВТОМАТОВ

Основными этапами логического проектирования конечного автомата являются:

1) кодирование алфавитов абстрактного автомата;

2) выбор комбинационных автоматов и формирование оператора φ;

3) выбор элементов задержки и формирование оператора ψ;

4) построение логической схемы структурного автомата.

4. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

4.1. КОНТРОЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

4.1.1. Текущий и промежуточный контроль знаний

Текущий контроль знаний проводится в рамках практических занятий в форме проверочных, контрольных работ, домашних заданий (по изучаемым разделам курса) и индивидуальных расчетных работ с целью выявления подготовленности студентов и своевременного выполнения заданий, а также проверки уровня саморазвития студентов.

Промежуточный контроль осуществляется два раза в семестр в виде контрольных точек по результатам текущей успеваемости студентов и итогам текущего контроля знаний. Результаты промежуточного контроля учитываются при допуске к сдаче экзамена.

Тема №2 «Элементы теории множеств».

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАСЧЕТНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Докажите теоретико-множественное тождество методом двухстороннего включения. Обоснуйте равенство с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

$$(A \cup B) \setminus M = (A \setminus M) \cup (B \setminus M).$$

2. Упростите выражение:

$$\left(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}\right) \cup \left(\overline{\overline{A} \cup B}\right).$$

3. Докажите, что для любых множеств A, B, C справедливо равенство:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

4. Для следующего бинарного отношения выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность). Дайте обоснование ответа.

Отношение ρ задано на множестве R

$$x\,\rho\,y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

5. Для следующего отображения исследуйте, является ли оно инъективным, сюрьективным, биективным. Ответ обоснуйте.

$$f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto \frac{x^3}{8}.$$

Вариант 2

1. Докажите теоретико-множественное тождество методом двухстороннего включения. Обоснуйте равенство с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

2. Упростите выражение:

$$\left(\overline{\overline{\overline{P} \cup K} \cup P}\right) \cup P.$$

3. Докажите, что для любых множеств A, B, C справедливо равенство:

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A).$$

4. Для следующего бинарного отношения выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность). Дайте обоснование ответа.

Отношение ρ задано на множестве Z:

$$x\,\rho\,y \Leftrightarrow 7 \mid (x + y).$$

5. Для следующего отображения исследуйте, является ли оно инъективным, сюрьективным, биективным. Ответ обоснуйте.

$$f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x+2}.$$

Вариант 3

1. Докажите теоретико-множественное тождество методом двухстороннего включения. Обоснуйте равенство с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C).$$

2. Упростите выражение:

$$\overline{\left(\left(\overline{x} \cup y\right) \cap \left(\overline{y} \cup z\right)\right)} \cup \left(\overline{x} \cup z\right).$$

3. Докажите, что для любых множеств A, B, C справедливо равенство:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

4. Для следующего бинарного отношения выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность). Дайте обоснование ответа.

Отношение ρ задано на множестве Z^+:

$$x \,\rho\, y \Leftrightarrow y = x + 1.$$

5. Для следующего отображения исследуйте, является ли оно инъективным, сюрьективным, биективным. Ответ обоснуйте.

$$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto x^2 - 4x + 7.$$

Вариант 4

1. Докажите теоретико-множественное тождество методом двухстороннего включения. Обоснуйте равенство с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

2. Упростите выражение:

$$\overline{\left(\left(\overline{P} \cup Q\right) \cap \left(\overline{Q} \cup \overline{P}\right)\right)}.$$

3. Докажите, что для любых множеств A, B, C справедливо равенство:

$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A).$$

4. Для следующего бинарного отношения выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность). Дайте обоснование ответа.

Отношение ρ задано на множестве R:

$$x \,\rho\, y \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y.$$

5. Для следующего отображения исследуйте, является ли оно инъективным, сюрьективным, биективным. Ответ обоснуйте.

$$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto 5^x + x.$$

Вариант 5

1. Докажите теоретико-множественное тождество методом двухстороннего включения. Обоснуйте равенство с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

$$A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{C}).$$

2. Упростите выражение:

$$(\overline{A} \cup B) \cap (\overline{B} \cup A) \cap ((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)).$$

3. Докажите, что для любых множеств M, N, P, Q справедливо равенство:

$$(M \cap N) \times (P \cap Q) = (M \times P) \cap (N \times Q).$$

4. Для следующего бинарного отношения выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность). Дайте обоснование ответа.

Отношение ρ задано на множестве Z:

$$x \,\rho\, y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

5. Для следующего отображения исследуйте, является ли оно инъективным, сюрьективным, биективным. Ответ обоснуйте.

$$f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto e^x + 5.$$

Вариант 6

1. Докажите теоретико-множественное тождество методом двухстороннего включения. Обоснуйте равенство с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

$$\overline{A} \cup (A \cap B) = B \cap \overline{A}.$$

2. Упростите выражение:

$$\overline{(\overline{P} \cup Q) \cap (P \cup \overline{Q})} \cup (\overline{P} \cup Q).$$

3. Докажите, что для любых множеств A, B, C справедливо равенство:

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C).$$

4. Для следующего бинарного отношения выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность). Дайте обоснование ответа.

Отношение ρ задано на множестве Z^+:

$$x \rho y \Leftrightarrow \text{НОД}(x, y) \neq 1.$$

5. Для следующего отображения исследуйте, является ли оно инъективным, сюрьективным, биективным. Ответ обоснуйте.

$$f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto \lg\left(x^2 + 1\right).$$

Вариант 7

1. Докажите теоретико-множественное тождество методом двухстороннего включения. Обоснуйте равенство с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

$$\left(A \setminus \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \setminus B\right) = \left(B \cup \overline{A}\right) \cap \left(A \cup \overline{B}\right).$$

2. Упростите выражение:

$$\overline{\left(\overline{\mathrm{P}} \cup \mathrm{Q}\right)} \cup \left(\overline{\left(\overline{\mathrm{P}} \cup \overline{\mathrm{Q}}\right)} \cup \overline{\mathrm{P}}\right).$$

3. Докажите, что для любых множеств X, Y, Z справедливо равенство:

$$X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z).$$

4. Для следующего бинарного отношения выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность). Дайте обоснование ответа.

Отношение ρ задано на множестве R:

$$x \rho y \Leftrightarrow x - y \in \mathrm{Z}.$$

5. Для следующего отображения исследуйте, является ли оно инъективным, сюрьективным, биективным. Ответ обоснуйте.

$$f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto \sin 2x + 1.$$

Вариант 8

1. Докажите теоретико-множественное тождество методом двухстороннего включения. Обоснуйте равенство с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

2. Упростите выражение:

$$\overline{\left(\left(\overline{P} \cup Q\right) \cap \left(\overline{P} \cup \overline{Q}\right)\right)} \cup \overline{P}.$$

3. Докажите, что для любых множеств X, Y, Z справедливо равенство:

$$(X \times Z) \cap (Z \times Y) = (X \cap Y) \times Z.$$

4. Для следующего бинарного отношения выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность). Дайте обоснование ответа.

Отношение ρ задано на множестве Z:

$$x \,\rho\, y \Leftrightarrow 5 \mid (x - y).$$

5. Для следующего отображения исследуйте, является ли оно инъективным, сюрьективным, биективным. Ответ обоснуйте.

$$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto 3^{x^2 + x}.$$

Вариант 9

1. Докажите теоретико-множественное тождество методом двухстороннего включения. Обоснуйте равенство с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

$$(A \setminus B) \cup \left(\overline{A} \setminus \overline{B}\right) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

2. Упростите выражение:

$$\left(\overline{\overline{\overline{P} \cup Q}}\right) \cup \left(\left(\overline{P \cup Q}\right) \cup P\right).$$

3. Докажите, что для любых множеств E, F, G справедливо равенство:

$$(E \times F) \cup (E \times G) = E \times (F \cup G).$$

4. Для следующего бинарного отношения выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность). Дайте обоснование ответа.

Отношение ρ задано на множестве Z^+:

$$x \,\rho\, y \Leftrightarrow x \neq y.$$

5. Для следующего отображения исследуйте, является ли оно инъективным, сюрьективным, биективным. Ответ обоснуйте.

$$f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto tg\frac{x}{2}.$$

Вариант 10

1. Докажите теоретико-множественное тождество методом двухстороннего включения. Обоснуйте равенство с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

$$\left(\overline{A} \setminus \overline{B}\right) \cup \left(\overline{B} \setminus \overline{A}\right) = \left(A \cup B\right) \setminus \left(A \cap B\right).$$

2. Упростите выражение:

$$\left(\overline{\overline{P} \cap \overline{Q}}\right) \cup \left(\left(\overline{P} \cup Q\right) \cap P\right).$$

3. Докажите, что для любых множеств A, B, C справедливо равенство:

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$$

4. Для следующего бинарного отношения выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность). Дайте обоснование ответа.

Отношение ρ задано на множестве Z:

$$x \,\rho\, y \Leftrightarrow y \le x + 3.$$

5. Для следующего отображения исследуйте, является ли оно инъективным, сюрьективным, биективным. Ответ обоснуйте.

$$f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto x^3 + 3x^2 - 3x + 1.$$

ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА №1

1 Вариант

1. Докажите тождество:

$$(B \bigcup C) \times A = (B \times A) \bigcup (C \times A)$$

2. Перечислите все элементы бинарного отношения ρ: $x\rho y \Leftrightarrow x < y$

$$A = \{1,2,3,4\}$$

3. Для каждого бинарного отношения определить, какими из свойств рефлективность, симметричность, антисимметричность, транзитивность оно обладает:

$$1)\ x\rho y \Leftrightarrow y = |x| \text{ на } R;$$

$$2)\ x\rho y \Leftrightarrow 3/(x+y) \text{ на } Z;$$

$$3)\ x\rho y \Leftrightarrow x \neq y \text{ на } Z^{+};$$

4. Задано множество кортежей из $A \times A$, где $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. Указать, на какие классы эквивалентности разбивается множество A. Проверить, что множество кортежей задает отношение эквивалентности:

$$\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 5,6\rangle, \langle 6,5\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 6,6\rangle, \langle 2,2\rangle\}.$$

2 Вариант

1. Докажите тождество:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

2. Перечислите все элементы бинарного отношения ρ: $x\rho y \Leftrightarrow x \mid y$

$$A = \{5,6,\ldots,15\}$$

3. Для каждого бинарного отношения определить, какими из свойств рефлективность, симметричность, антисимметричность, транзитивность оно обладает:

$$1)\ x\rho y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \text{ на } R;$$

$$2)\ x\rho y \Leftrightarrow 3/(x-y) \text{ на } Z;$$

$$3)\ x\rho y \Leftrightarrow x \text{ и } y \text{ - четные числа на } Z^{+};$$

4. Задано множество кортежей из $A \times A$, где $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. Указать, на какие классы эквивалентности разбивается множество A. Проверить, что множество кортежей задает отношение эквивалентности:

$$\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 5,4\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 6,6\rangle\}.$$

ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА №2

1 Вариант

1. Какие из следующих бинарных отношений являются функциональными, а какие из функциональных обратимы:

$$1)\ \{\langle x, y\rangle \in Z \times Z, y = |x+1|\}$$

$$2)\ \{\langle x, y\rangle \in N \times N, y \vdots x\}$$

2. Найдите образ множества $[1, s]$ при отображении $f: R \to R$, $f: x \to \ln x$

3. Найдите прообраз множества $[-1,1]$ при отображении f: $(-\pi/2, \pi/2) \to R$, $f: x \to tgx$

4. Для отображений исследуйте, является ли они сюрьективными, инъективными, биективными:

$$1)\ f: R \to R$$

$$x \to x^3 - 1$$

$$2)\ f: R \to R$$

$$x \to \ln(x-1)$$

5. Найти композиции $\alpha \circ \beta \circ \gamma$, $\gamma \circ \beta \circ \alpha$ для отображений: $\alpha: x \to e^x$, $\beta: x \to x^2$, $\gamma: x \to x - 1$

2 Вариант

1. Какие из следующих бинарных отношений являются функциональными, а какие из функциональных обратимы:

$$1)\ \{\langle x, y\rangle \in R \times R, x^2 + y^2 = 1\}$$

$$2)\ \{\langle x, y\rangle \in Z \times N, y = x^2 + x + 1\}$$

2. Найдите образ множества $[1, s]$ при отображении $f: R \to R$, $f: x \to x^2$

3. Найдите прообраз множества $[-1,1]$ при отображении f: $[-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$, $f: x \to \sin x$

4. Для отображений исследуйте, является ли они сюрьективными, инъективными, биективными:

$$1)\ f : R \to R$$

$$x \to 3^{x+2}$$

$$2)\ f : R \to R$$

$$x \to \sin x$$

5. Найти композиции $\alpha \circ \gamma \circ \beta$, $\beta \circ \gamma \circ \alpha$ для отображений: $\alpha : x \to e^x$, $\beta : x \to x^2$, $\gamma : x \to x - 1$

Тема №3 «Элементы комбинаторного анализа»

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАСЧЕТНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Вычислите:

$$a)\ \frac{(n-2)!}{n!};$$

$$б)\ \frac{\frac{1}{3}C_6^2 - \frac{1}{28}C_8^3 + \frac{1}{65}C_{15}^3}{P_3 \cdot A_5^3}.$$

2. Решите уравнение:

$$\frac{C_{2n}^{n+1}}{C_{2n+1}^{n-1}} = \frac{16}{29}.$$

3. Найдите все $n \in \mathrm{N}$, удовлетворяющие условию:

$$\frac{A_{n+2}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_{n-1}} < 0.$$

4. Найдите все n и $m \in \mathrm{N}$, удовлетворяющие условию:

$$C_{n+2}^m : C_{n+2}^{m+1} : C_{n+2}^{m+2} = 0{,}6 : 1 : 1.$$

5. Разложите по формуле бинома Ньютона и упростите: $\frac{1}{27}\left(\sqrt{3} - \sqrt{15}\right)^6$.

6. Сумма биномиальных коэффициентов разложения $\left(2nx+\frac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$ равна 64. Определите слагаемое, не содержащее x.

7. Собрание из 80 человек избирает председателя, секретаря и трех членов ревизионной комиссии. Сколькими способами это можно сделать?

8. Из вазы, где стоят 10 красных и 4 розовые гвоздики, выбирают один красный и два розовых цветка. Сколькими способами это можно сделать?

9. Сколькими способами можно разместить семерых гостей по 3 комнатам?

10. В языке одного древнего племени было 6 гласных и 8 согласных, причем при составлении слов гласные и согласные чередовались. Сколько слов из 9 букв могло быть в этом языке?

Вариант 2

1. Вычислите:

$$а)\ \left(\frac{P_5}{A_5^4}+\frac{P_4}{A_5^3}+\frac{P_3}{A_5^2}+\frac{P_2}{A_5^1}\right)A_5^2;$$

$$б)\ \frac{50!}{48!}-\frac{30!}{28!}.$$

2. Решите уравнение: $A_{x+1}^{x-1}+2P_{x-1}=\frac{30}{7}P_x$.

3. Найдите все $n \in$ N, удовлетворяющие условию: $C_{n+5}^4-\frac{143}{96}\cdot\frac{P_{n+5}}{P_{n+3}}<0$.

4. Найдите все n и $m \in$ N, удовлетворяющие условию: $C_{n+1}^{m+1}:C_{n+1}^{m}:C_{n+1}^{m-1}=5:3:3$.

5. Найдите в биномиальном разложении $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^{18}$ член, не содержащий x.

6. В разложении $\left(a+\frac{1}{a}\right)^{12}$ по формуле бинома Ньютона найдите коэффициент при a^8.

7. Двадцать человек надо разбить на три группы соответственно по 5, 7, 8 человек в группе. Сколькими способами это можно сделать?

8. Сколькими способами из группы в 30 человек можно выбрать 5 в актив университета?

9. Из 5 красных и 2 желтых роз нужно составить букет из 3 цветков, в который должна входить хотя бы одна желтая роза. Сколькими способами это можно сделать?

10. Сколькими способами 28 учеников могут выстроиться в очередь в столовую?

Вариант 3

1. Вычислите:

$$a)\ \frac{(m+2)!}{m!};$$

$$б)\ \frac{C_n^3 C_n^1}{\left(C_n^2\right)^2}+\frac{P_n P_{n+1}\left(n^2-n\right)^2}{4\left(C_n^2\right)^2 (n!)^2}.$$

2. Решите уравнение: $\frac{P_{n+5}}{A_{n+4}^k \cdot P_{n+4-k}}=15$.

3. Докажите справедливость равенства: $n \cdot C_{2n}^n=(n+1)\cdot C_{2n}^{n+1}$.

4. Найдите все $n \in \mathrm{N}$, удовлетворяющие условию: $C_{13}^n < C_{13}^{n+2}$.

5. Найдите два средних члена разложения: $\left(a^3+ab\right)^{21}$.

6. В разложении $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)^{12}$ по формуле бинома Ньютона найдите коэффициент при x^4.

7. В студенческой конференции участвуют 25 студентов. Сколькими способами могут быть распределены три призовых места?

8. Сколькими способами можно распределить 120 комплектов игрушек по трем детским садам, которым соответственно их требуется 20, 30 и 70?

9. Сколько делителей у числа 105 ?

10. Сколько существует ожерелий, составленных из 17 различных бусинок?

Вариант 4

1. Вычислите:

$$a)\ \frac{C_{21}^{4}}{C_{19}^{3}+C_{19}^{4}+C_{20}^{3}};$$

$$б)\ \left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)n!.$$

2. Решите уравнение: $A_x^{x-3}=x\cdot P_{x-2}$.

3. Докажите справедливость равенства: $C_{n+1}^{k+1}=C_n^k+C_n^{k+1}$.

4. Найдите все $n\in \mathrm{N}$, удовлетворяющие условию:

$$C_{n+5}^{4}-\frac{143}{96}\cdot\frac{P_{n+5}}{P_{n+3}}<0.$$

5. Разложите по формуле бинома Ньютона и упростите: $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^{8}$.

6. Найдите два средних члена разложения: $\left(a^3-ab\right)^{23}$.

7. Сколько существует пятизначных чисел, которые делятся на два?

8. Пять учеников следует разделить по трем параллельным классам. Сколькими способами это можно сделать?

9. Десять групп занимаются в десяти расположенных подряд аудиториях. Сколько существует вариантов расписания, при которых группы № 1 и 2 находились бы в соседних аудиториях?

10. Алфавит племени мумбо-юмбо состоит из трех букв. Словом является любая последовательность, состоящая не более чем из четырех букв. Сколько слов в языке племени мумбо-юмбо?

Вариант 5

1. Вычислите:

$$a)\ (m+1)!\cdot\left(\frac{1}{m!}+\frac{1}{(m+1)!}\right);$$

$$b)\ \frac{A_5^2}{P_2}+\frac{A_{10}^5}{7P_5}.$$

2. Решите уравнение: $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$.

3. Найдите все $n \in \mathrm{N}$, удовлетворяющие условию: $C_{n+5}^4 - \frac{143}{96}\frac{P_{n+5}}{P_{n+3}} < 0$.

4. Докажите справедливость равенства: $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 = C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$.

5. Разложите по формуле бинома Ньютона и упростите: $\left(\sqrt{6}+\sqrt{12}\right)^4$.

6. Найдите в биномиальном разложении $\left(z+\frac{1}{z^3}\right)^{16}$ член, не содержащий z.

7. Поезд метро делает 16 остановок, на которых выходят все пассажиры. Сколькими способами могут распределиться между этими остановками 100 пассажиров, вошедших в поезд на конечной остановке?

8. Сколькими способами можно разложить три различных шара по трем корзинам?

9. Сколько всего четырехзначных чисел, делящихся на 2 ?

10. Из класса, в котором учатся 28 человек, назначаются на дежурство в столовую 4 человека. Сколькими способами можно набрать команду дежурных, если в нее должен обязательно попасть ученик этого класса Коля Васин?

Вариант 6

1. Вычислите:

$$а)\ \frac{100!}{99!} - \frac{99!}{98!};$$

$$б)\ C_5^3 C_4^2 + C_4^2 C_3^1 + C_3^1 C_3^0.$$

2. Решите уравнение: $A_n^3 + 3A_n^2 = \frac{1}{2} P_{n+1}$.

3. Найдите все $n \in \mathrm{N}$, удовлетворяющие условию: $C_{n+1}^{n-1} < 21$.

4. Найдите x и y, если: $A_x^{y-1} : A_{x-1}^{y} : \left(C_{x-2}^{y} + C_{x-2}^{y-1}\right) = 21 : 60 : 10$.

5. Разложите по формуле бинома Ньютона и упростите: $(1+2x)^5$.

6. Найдите два средних члена разложения: $\left(a^3 + ab\right)^{31}$.

7. Из группы студентов, в которой 10 хорошистов и 5 отличников, выбирают 5 хорошистов и 3 отличников. Сколькими способами это можно сделать?

8. Сколькими способами можно расположить в ряд три белых и пять черных шаров?

9. Сколькими способами можно разместить 10 книг по 4 полкам?

10. На плоскости дано n точек. Сколько имеется отрезков с концами в этих точках?

Вариант 7

1. Вычислите:

$$а)\ \frac{A_{12}^6 \cdot 5!}{A_{11}^9};$$

$$б)\ \frac{n!}{(n-3)! \cdot A_n^2} - \frac{P_{n+1}}{(n+2)!}.$$

2. Решите уравнение: $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^{3} = 7(x-1)$.

3. Найдите все $n \in \mathrm{N}$, удовлетворяющие условию: $5C_n^3 < C_{n+2}^4$.

4. Найдите x и y, если: $\left(A_{x-1}^{y} + yA_{x-1}^{y-1}\right) : A_x^{y-1} : C_x^{y-1} = 10 : 2 : 1$.

5. Найдите два средних члена разложения: $\left(a^3 + ab\right)^{30}$.

6. Найдите пятый член разложения: $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{13}$.

7. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 2, 3, 4?

8. Сколькими способами можно разместить 10 различных книг по 5 полкам?

9. Из семи солдат и трех офицеров необходимо составить патруль из 4 человек, включающий хотя бы одного офицера. Сколькими способами это можно сделать?

10. Сколькими способами можно разделить на команды по 6 человек для игры в волейбол группу из 12 спортсменов?

Вариант 8

1. Вычислите:

$$a)\ \frac{A_{12}^4 - A_{11}^4}{A_{10}^3};$$

$$б)\ \frac{1 + C_7^4 + C_7^3 - C_8^4}{1 + C_{10}^5 + C_{10}^6 - C_{11}^6} + \frac{A_3^2}{P_2}.$$

2. Решите уравнение: $\dfrac{P_{n+5}}{A_{n+3}^{k+3} \cdot P_{n-k}} = 240$.

3. Найдите все $n \in \mathrm{N}$, удовлетворяющие условию: $\dfrac{C_{n-1}^{n-3}}{A_{n+1}^4} < \dfrac{1}{14P_3}$.

4. Найдите x и y, если: $C_{x+1}^{y} : C_x^{y+1} : C_x^{y-1} = 6 : 5 : 1$.

5. Найдите пятый член разложения: $\left(\sqrt{z}+z\right)^{10}$.

6. При каких значениях x четвертое слагаемое разложения $(5+2x)^{16}$ больше двух соседних с ним слагаемых?

7. Сколько всего шестизначных телефонных номеров, в каждом из которых ни одна цифра не повторяется?

8. Сколькими способами можно выбрать два блюда из 10 предложенных в меню?

9. У одного коллекционера 25 монет, у другого – 15. Сколькими способами они могут поменять друг с другом по 10 монет?

10. Кодовый замок состоит из четырех разрядов, в каждом разряде независимо от других могут быть выбраны цифры от 0 до 9. Сколько возможных комбинаций?

Вариант 9

1. Вычислите:

$$a)\ \frac{C_{100}^{98}+C_{1000}^{998}}{C_{1000}^{2}+C_{100}^{2}};$$

$$б)\ \frac{A_5^3-A_5^2}{P_2}+\frac{P_5}{P_2}.$$

2. Решите уравнение: $A_x^2\cdot C_x^{x-1}=48$.

3. Найдите все $n\in \mathrm{N}$, удовлетворяющие условию:

$$C_{n-1}^{4}-C_{n-1}^{3}-\frac{5}{4}A_{n-2}^{2}<0.$$

4. Решите систему уравнений: $\begin{cases} A_x^y+3C_x^y=90 \\ A_x^y-2C_x^y=40 \end{cases}$.

5. Найдите шестой член разложения: $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{15}$.

6. Сумма коэффициентов 2-го и 3-го слагаемых разложения $\left(\sqrt[5]{x^2}-\frac{1}{2\sqrt[6]{x}}\right)^n$ равна 25,5. Напишите член, не содержащий *x*.

7. Два почтальона должны разнести 10 писем по 10 адресам. Сколькими способами они могут распределить эту работу?

8. Сколькими способами можно составить список из 10 учеников?

9. Из 7 мужчин и 4 женщин надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее двух женщин. Сколькими способами это можно сделать?

10. На книжной полке помещается 30 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы первый и второй тома не стояли рядом?

Вариант 10

1. Вычислите:

$$a)\ \frac{A_{12}^4-A_{11}^4}{A_{10}^3};$$

$$б)\ \frac{1}{n+2}\cdot\left(C_{n+3}^2-2C_{n+2}^3+C_{n+2}^2\right)+\frac{n^2-5n}{6}.$$

2. Решите уравнение: $P_{n+3}=720A_n^5\cdot P_{n-5}$.

3. Найдите все $n\in N$, удовлетворяющие условию:

$$C_{n+1}^{n-2}-C_{n+1}^{n-1}\le 0.$$

4. Решите систему уравнений: $\begin{cases}\dfrac{A_y^x}{P_{x-1}}+C_y^{y-x}=126\\ P_{x+1}=720\end{cases}.$

5. Найдите шестой член разложения: $(1-2z)^{21}$.

6. Сумма биномиальных коэффициентов с нечетными номерами в разложении $\left(ax+x^{-\frac{1}{4}}\right)^n$ равна $5/2$. Найдите слагаемое, не содержащее *x*.

7. Сколько способами можно переставить буквы в словах *а*) алгебра, *б*) геометрия, чтобы получились всевозможные различные наборы букв?

8. Сколькими способами можно рассадить на скамейке 6 человек?

9. В отделе работают 10 географов, 7 геологов и 3 метеоролога. Сколькими способами можно сформировать экспедицию, состоящую из 3 географов, 2 геологов и метеоролога?

10. Сколькими способами библиотекарь может расставить 15 книг по 15 местам на полке?

Тема №4 «Алгебра высказываний. Предикаты и кванторы. Аксиоматический метод. Виды теорем.»

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАСЧЕТНАЯ РАБОТА

1 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры высказываний:

$$\neg(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\neg(A \to B) \vee \neg(B \to A).$$

2. Упростите формулу:

$$(x \wedge z) \vee (x \wedge \neg z) \vee (y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z).$$

3. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$[(\exists x)(P(x)) \to Q] \leftrightarrow (\forall x)(P(x) \to Q).$$

4. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если …, то …»: чтобы функция была дифференцируемой в точке, необходимо, чтобы она была непрерывной в этой точке.

5. В данном высказывании вместо многоточия вставьте одно из выражений: «необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», «недостаточно и не необходимо», чтобы получилось истинное высказывание: a – четное целое число … для того, чтобы $3a$ было четным числом.

2 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры высказываний:

$$(A \to B) \wedge (C \to D) \to (A \wedge C \to B \wedge D).$$

2 Упростите формулу:

$$(x \to y) \wedge (y \to z) \to (x \to z).$$

3. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$(\forall x)[P(x) \vee Q] \leftrightarrow [(\forall x)(P(x)) \vee Q].$$

4. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если …, то …»: равенство треугольников есть достаточное условие их равновеликости.

5. В данном высказывании вместо многоточия вставьте одно из выражений: «необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», «недостаточно и не необходимо», чтобы получилось истинное высказывание: *a* и *b*делятся на *c* … для того, чтобы *a*+*b* делилось на *c* (*a, b, c* - целые числа).

3 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры высказываний:

$$(A \to B) \to (A \wedge C \to B \wedge C).$$

2. Упростите формулу:

$$(x \wedge (y \vee z \to y \vee z)) \vee (y \wedge x \wedge \neg y) \vee x \vee (y \wedge \overline{x \wedge \bar{x}}).$$

3. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$(\exists x)[P(x) \wedge Q] \leftrightarrow [(\exists x)(P(x)) \wedge Q].$$

4. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если …, то …»: четность суммы есть необходимое условие четности каждого слагаемого.

5. В данном высказывании вместо многоточия вставте одно из выражений: «необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», «недостаточно и не необходимо», чтобы получилось истинное высказывание: совпадение центров вписанной и описанной около треугольника окружностей … для того чтобы, треугольник был правильным.

4 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры высказываний:

$$A \to (B \to C) \leftrightarrow B \to (A \to C).$$

2. Упростите формулу:

$$(x \wedge \overline{x \wedge \overline{x} \to y \wedge \overline{y}} \to z) \vee x \vee (y \wedge z) \vee (y \wedge z).$$

3. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$\neg(\exists x)(P(x)) \leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x)).$$

4. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если …, то ...»: из того, что четырехугольник – ромб, следует, что каждая из его диагоналей служит осью симметрии.

5. В данном высказывании вместо многоточия вставьте одно из выражений: «необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», «недостаточно и не необходимо», чтобы получилось истинное высказывание: x>1 … для того, чтобы x^2-1>0.

5 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры высказываний:

$$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

2. Упростите формулу:

$$(x \vee \overline{y} \to (z \to y \vee \overline{y} \vee x)) \wedge (x \vee \overline{x \to (x \to x)}) \to y.$$

3. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$\neg(\forall x)(P(x)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x)).$$

4. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если …, то …»: всякое квадратное уравнение с действительными коэффициентами имеет не более двух действительных корней.

5. В данном высказывании вместо многоточия вставьте одно из выражений: «необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», «недостаточно и не необходимо», чтобы получилось истинное высказывание: чтобы четырехугольник был прямоугольником …, чтобы его диагонали были равны.

6 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры высказываний:

$$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

2. Упростите формулу:

$$(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z).$$

3. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$[(\forall x)(P(x)) \vee (\forall x)(Q(x))] \rightarrow (\forall x)[P(x) \vee Q(x)].$$

4. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если …, то ...»: комплексные числа равны, только если равны соответственно их действительные и мнимые части.

5. В данном высказывании вместо многоточия вставьте одно из выражений: «необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», «недостаточно и не необходимо», чтобы получилось истинное высказывание: чтобы четырехугольник был параллелограммом …, чтобы все его стороны были равны.

7 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры высказываний:

$$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \rightarrow (A \leftrightarrow C).$$

2. Упростите формулу:

$$(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \rightarrow (z \rightarrow x) \vee (y \wedge z).$$

3. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)] \to [(\exists x)(P(x)) \wedge (\exists x)(Q(x))]$$

4. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если …, то …»: две прямые на плоскости тогда параллельны, когда они перпендикулярны одной и той же прямой.

5. В данном высказывании вместо многоточия вставьте одно из выражений: «необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», «недостаточно и не необходимо», чтобы получилось истинное высказывание: $\alpha = \beta$ … для того, чтобы $\sin\alpha = \sin\beta$.

8 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры высказываний:

$$(A \to C) \wedge (B \to C) \to (A \vee B \to C).$$

2. Упростите формулу:

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z).$$

3. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$(\exists x)[P(x) \vee Q(x)] \leftrightarrow [(\exists x)(P(x)) \vee (\exists x)(Q(x))].$$

4. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если …, то ...»: на 5 делятся те числа, которые оканчиваются цифрой 0 или цифрой 5.

5. В данном высказывании вместо многоточия вставьте одно из выражений: «необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», «недостаточно и не необходимо», чтобы получилось истинное высказывание: для того чтобы четырехугольник был прямоугольником …, чтобы все его углы были равны.

9 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры высказываний:

$$A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C.$$

2. Упростите формулу:

$$(y \wedge (x \vee z \to x \vee z)) \vee (x \wedge y \wedge \neg x) \vee y \vee (x \wedge \overline{y \wedge \overline{y}}).$$

3. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)] \leftrightarrow [(\forall x)(P(x)) \wedge (\forall x)(Q(x))].$$

4. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если …, то ... »: для делимости многочлена на двучлен *x-a* достаточно, чтобы число *a* было корнем этого многочлена.

5. В данном высказывании вместо многоточия вставьте одно из выражений: «необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», «недостаточно и не необходимо», чтобы получилось истинное высказывание: для того чтобы четырехугольник был параллелограммом …, чтобы его диагонали в точке пересечения делились пополам.

10 вариант

1. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры высказываний:

$$A \wedge (B \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C.$$

2. Упростите формулу:

$$(y \wedge \overline{y \wedge \overline{y} \to z \wedge \overline{z}} \to x) \vee x \vee (y \wedge x) \vee (y \wedge x).$$

3. Докажите, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$(\exists x)(\exists y)(Q(x, y)) \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)(Q(x, y)).$$

4. Выделив условие и заключение теоремы, сформулируйте ее посредством связки «если …, то … »: необходимым свойством прямоугольника является равенство его диагоналей.

5. В данном высказывании вместо многоточия вставьте одно из выражений: «необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», «недостаточно и не необходимо», чтобы получилось истинное высказывание: $\sin\alpha = \sin\beta$ … для того, чтобы $\alpha = \beta$.

Тема №5 «Булевы функции»

ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА

1 Вариант

1. Найдите формулу трех переменных, которая принимает такие же значения, как и большинство ее аргументов.

2. Составить карту Карно для следующей булевой функции, и упростить эту функцию.

$$f(x,y,z) = (xyz) \vee (x\bar{y}z) \vee (xy\bar{z}) \vee (\bar{x}yz) \vee (\overline{xyz}) \vee (\bar{x}y\bar{z})$$

3. С помощью таблиц истинности доказать справедливость равенств:

1) $x \leftrightarrow y \equiv (x+y)+1$

2) $x \downarrow y = \overline{(x \vee y)}$

4. Выяснить, будут ли равны следующие булевы функции

$$f(x,y,z) = (\bar{x} \vee y)(y \vee z)$$

$$g(x,y,z) = (x \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$$

5. С помощью таблицы истинности найти СДНФ и СКНФ (формы):

$$x \vee (y \to (z \leftrightarrow (x \wedge y)))$$

2 Вариант

1. Найдите формулу трех переменных, которая принимает значение 1 тогда и только тогда, когда точно две ее переменные принимают значение 0.

2. Составить карту Карно для следующей булевой функции, и упростить эту функцию.

$$f(x,y,z)=(xyz)\vee(\bar{x}yz)\vee(x\bar{y}\bar{z})\vee(\bar{x}\bar{y}z)\vee(\bar{x}\bar{y}\bar{z})\vee(\bar{x}y\bar{z})$$

3. С помощью таблиц истинности доказать справедливость равенств:

1) $x\rightarrow y\equiv(xy+x)+1$

2) $x+y=\overline{(\bar{x}\vee y)}\vee\overline{(x\vee\bar{y})}$

4. Выяснить, будут ли равны следующие булевы функции

$f(x,y,z)=((x\vee y)\vee z)\rightarrow((x\vee y)\wedge(x\vee z)$

$g(x,y,z)=x\leftrightarrow z$

5. С помощью таблицы истинности найти СДНФ и СКНФ (формы):

$\overline{(\bar{x}\vee\bar{y})}\wedge(x\rightarrow(y\wedge z))$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

1 вариант

1. Выяснить, равны ли следующие булевы функции *(воспользоваться любым из способов)* :

$$f(x,y)=((x+y)\rightarrow(x\vee y))((\bar{x}\rightarrow y)\rightarrow(x+y))$$
$$g(x,y)=x|y$$

2 балла

2. Для формулы алгебры высказываний найти СДНФ или СКНФ (*выбор обосновать)* :

$$x\vee(y\rightarrow(z\leftrightarrow(x\wedge y)))$$

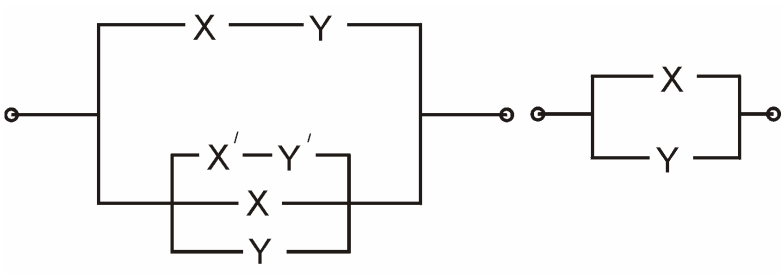
2 балла

3. Постройте наиболее простые релейно-контактные схемы по заданным значениям функции проводимости *(для упрощения π-функции использовать карту Карно)*:

$$\pi(110)=\pi(111)=\pi(001)=\pi(000)=1$$

2 балла

4. Проверить равносильность релейно-контактных схем:



1 балл

5. Представить полиномом Жегалкина функцию:

$$f(x,y) = x \leftrightarrow y$$

3 балла

6. На вопрос, кто из трех студентов изучал логику, был получен ответ: если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий. Кто изучал логику?

3 балла

2 вариант

1. Выяснить, равны ли следующие булевы функции *(воспользоваться любым из способов)* :

$$f(x,y) = ((x+z) \to (x \vee z))((\bar{x} \to \bar{z}) \to (x+z))$$
$$g(x,y) = x \vee z$$

2 балла

2. Для формулы алгебры высказываний найти СДНФ или СКНФ (*выбор обосновать)* :

$$x(y \to (z \to (x \wedge \bar{y})))$$

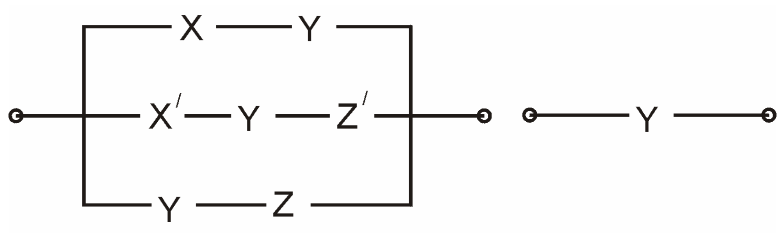
2 балла

3. Постройте наиболее простые релейно-контактные схемы по заданным значениям функции проводимости *(для упрощения π-функции использовать карту Карно)*:

$$\pi(110) = \pi(010) = \pi(111) = \pi(101) = 1$$

2 балла

4. Проверить равносильность релейно-контактных схем:



1 балл

5. Представить полиномом Жегалкина функцию:

$$f(x, y, z) = x \vee y \vee z$$

3 балла

6. Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастие в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники были на синем «Бьюике», Джонс сказал, что это был черный «Крайслер», а Смит утверждал, что это был «Форд», но ни в коем случае не синий. Стало известно, что желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо только марку машины, либо только ее цвет. Какого цвета был автомобиль и какой марки?

3 балла

3 вариант

1. Выяснить, равны ли следующие булевы функции *(воспользоваться любым из способов)* :

$$f(x, y) = ((x \vee \bar{y})z) \vee (x\bar{z}) \vee (z(y \vee \bar{z}))$$
$$g(x, y) = x \vee z$$

2 балла

2. Для формулы алгебры высказываний найти СДНФ или СКНФ (*выбор обосновать)* :

$$(\overline{\bar{x} \vee \bar{y}})(x \to (yz))$$

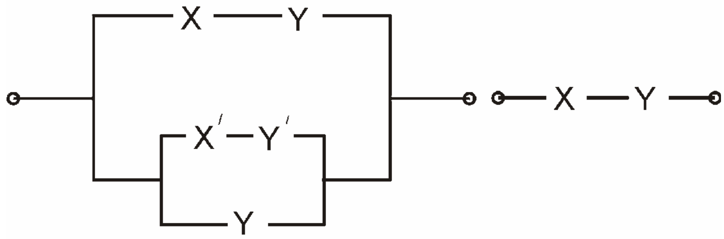
2 балла

3. Постройте наиболее простые релейно-контактные схемы по заданным значениям функции проводимости *(для упрощения π-функции использовать карту Карно)*:

$$\pi(010) = \pi(011) = \pi(101) = \pi(100) = 1$$

2 балла

4. Проверить равносильность релейно-контактных схем:



1 балл

5. Представить полиномом Жегалкина функцию:

$$f(x, y, z) = xy \vee yz \vee xz$$

3 балла

6. На вопрос, кто из трех студентов изучал логику, был получен ответ: если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий. Кто изучал логику?

3 балла

4 вариант

1. Выяснить, равны ли следующие булевы функции *(воспользоваться любым из способов)* :

$$f(x, y) = ((x \vee \bar{z})y) \vee (x\bar{y}) \vee (y(z \vee \bar{y}))$$
$$g(x, y) = x \vee y$$

2 балла

2. Для формулы алгебры высказываний найти СДНФ или СКНФ (*выбор обосновать)* :

$$(\overline{\bar{x} \vee z})(y \to (y \vee z))$$

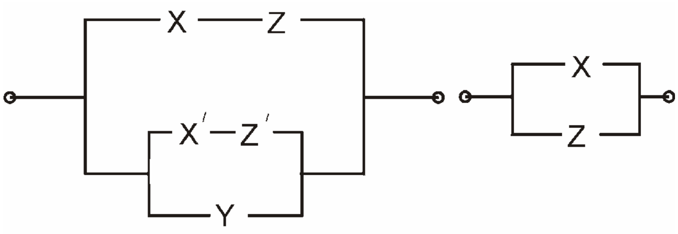
2 балла

3. Постройте наиболее простые релейно-контактные схемы по заданным значениям функции проводимости *(для упрощения π-функции использовать карту Карно)*:

$$\pi(000) = \pi(100) = \pi(101) = \pi(111) = 1$$

2 балла

4. Проверить равносильность релейно-контактных схем:



1 балл

5. Представить полиномом Жегалкина функцию:

$$f(x, y, z) = \overline{x} \wedge \overline{y} \vee z$$

3 балла

6. Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастие в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники были на синем «Бьюике», Джонс сказал, что это был черный «Крайслер», а Смит утверждал, что это был «Форд», но ни в коем случае не синий. Стало известно, что желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо только марку машины, либо только ее цвет. Какого цвета был автомобиль и какой марки?

3 балла

Баллы	Оценка
12-13	5
10-11	4
7-9	3

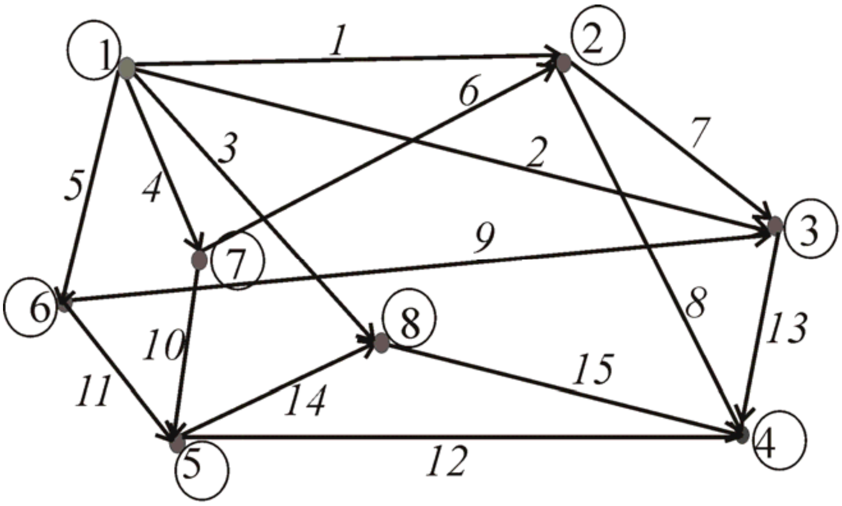
Тема №6 «Элементы теории графов. Оптимизационные задачи на графах»

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАСЧЕТНАЯ РАБОТА №1 – «АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ГРАФОВ»

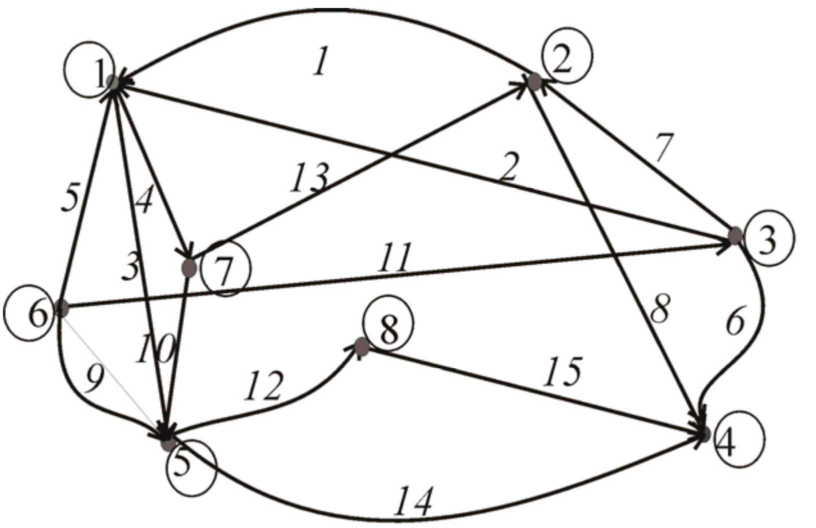
1. Задать граф, изображенный на рисунке. (Составить матрицы инцидентности, смежности.)

2. По матрице смежности составить матрицу достижимости и контрдостижимости. Определить матрицу расстояний.
3. По матрице смежности найти множества вершин, соответствующих отображениям: $\Gamma(x_3), \Gamma^2(x_5), \Gamma^{-1}(x_1), \Gamma^{-2}(x_8)$.
4. По матрице смежности определить степени вершин x_1, x_3, x_8.
5. Определить вид графа.

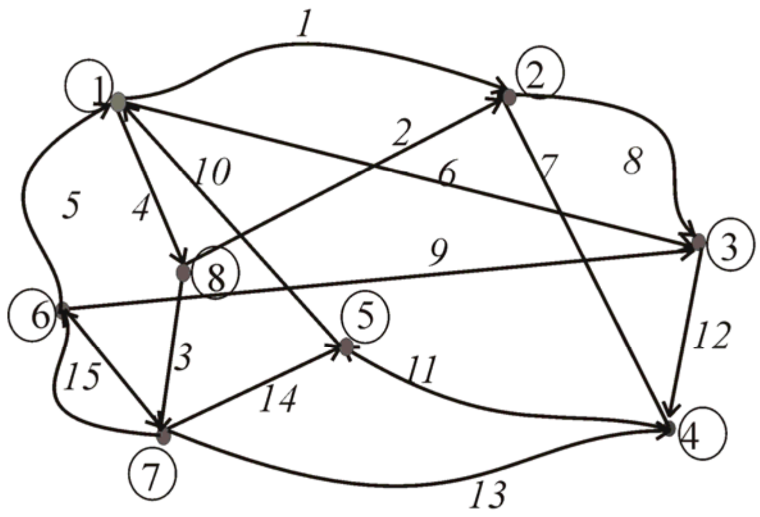
1 вариант



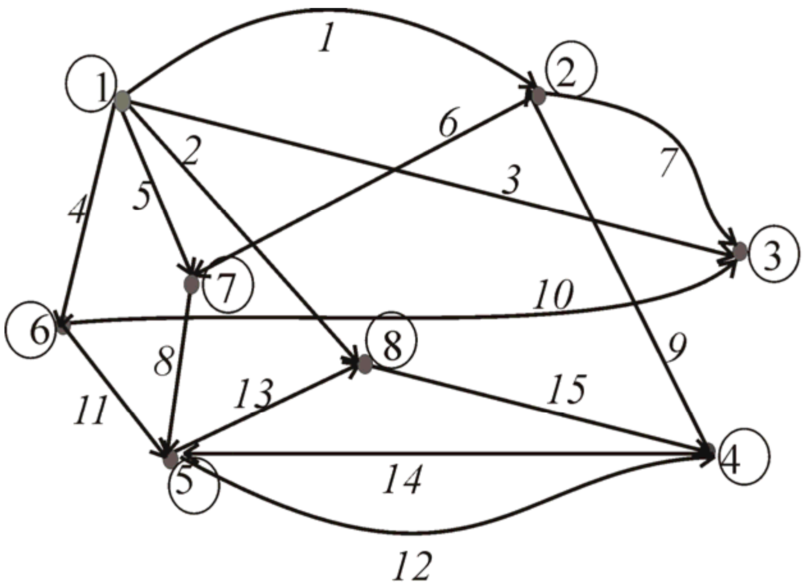
2 вариант



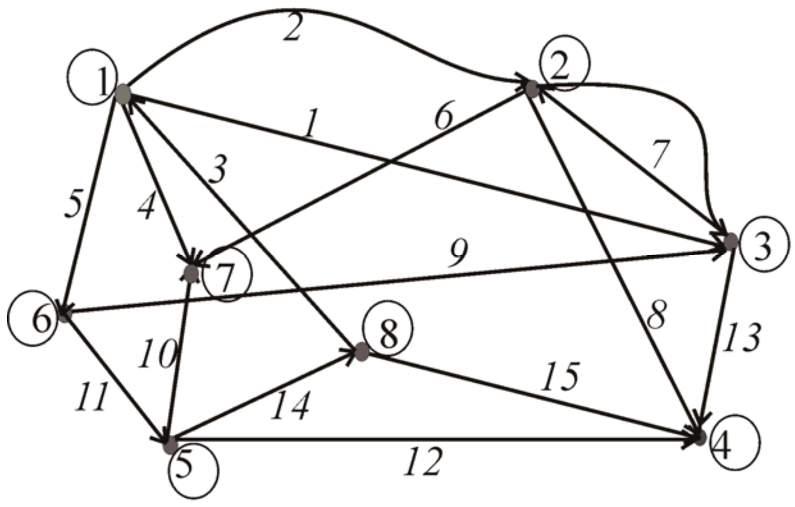
3 вариант



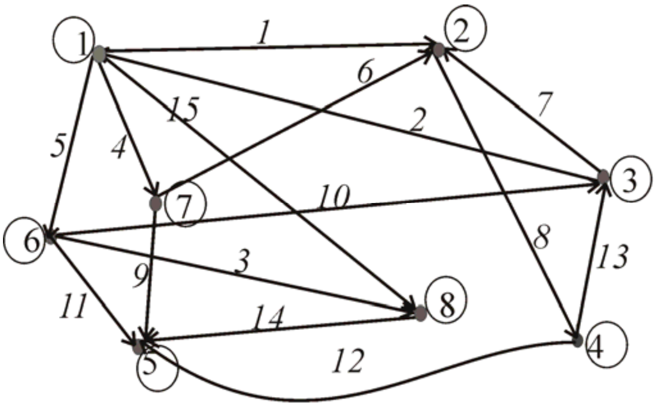
4 вариант



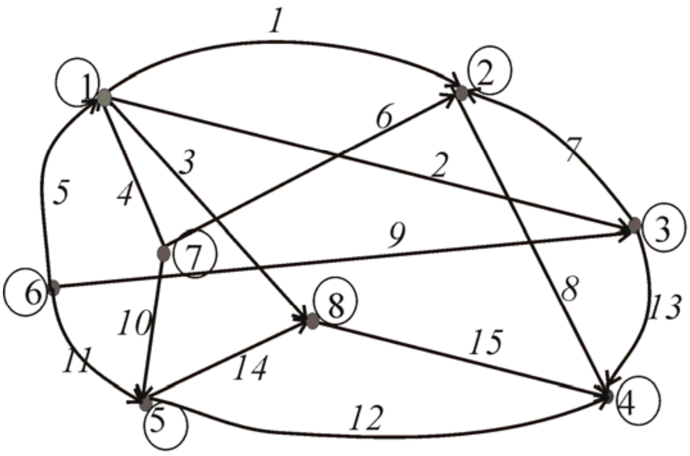
5 вариант



6 вариант



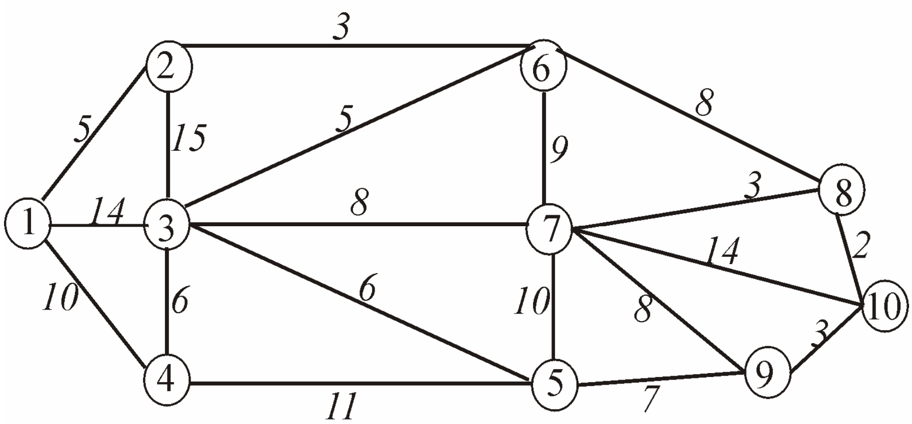
7 вариант



ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАБОТА № 2 –

«АЛГОРИТМ ДЕЙКСТРЫ»

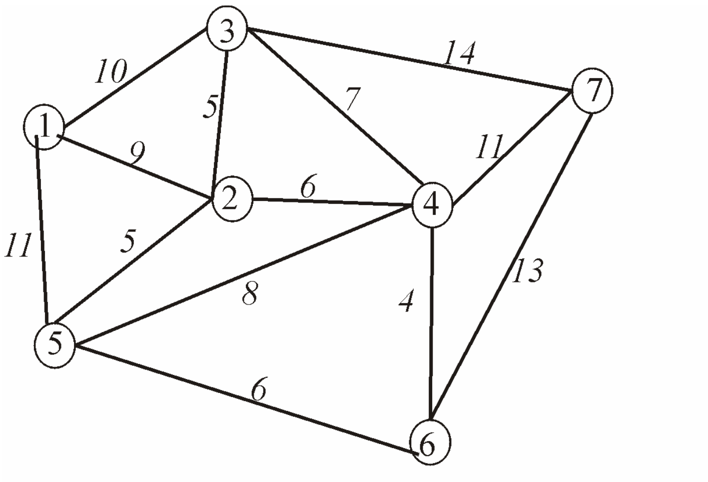
Дана сеть городов и затраты на перевозку некоторого груза из одного пункта в другой. Построить дерево наиболее экономичной доставки груза из пункта *X* (*X* – номер варианта) во все другие. Выполнить реализацию согласно модифицированному алгоритму Дейкстры.



ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАБОТА № 3 – «АЛГОРИТМЫ ОБЩЕЙ МАТРИЦЫ ВЕСОВ, ФЛОЙДА, КИТАЙСКОГО ПОЧТАЛЬОНА, ФОРДА»

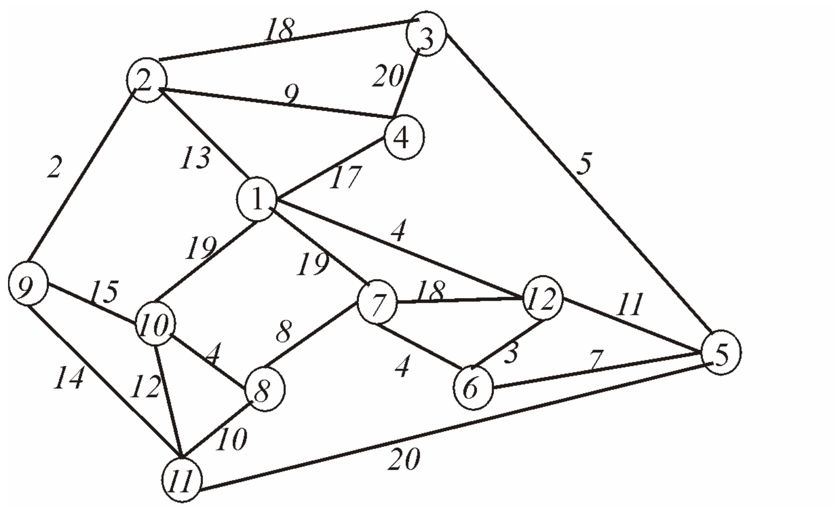
1 вариант

Дана сеть населенных пунктов и соответствующие расстояния между ними по существующим маршрутам (в км.). Потребление определенной группы товаров в пунктах (i=1,2….7) задается числами S=(80,100,140,90,60,50,40). Необходимо найти оптимальное место (пункт, вершину) для расположения оптовой базы по распределению этих товаров. Выполнить реализацию алгоритма Флойда для нахождения кратчайших расстояний между пунктами и минимизировать сумму единиц потребления товара-километров.



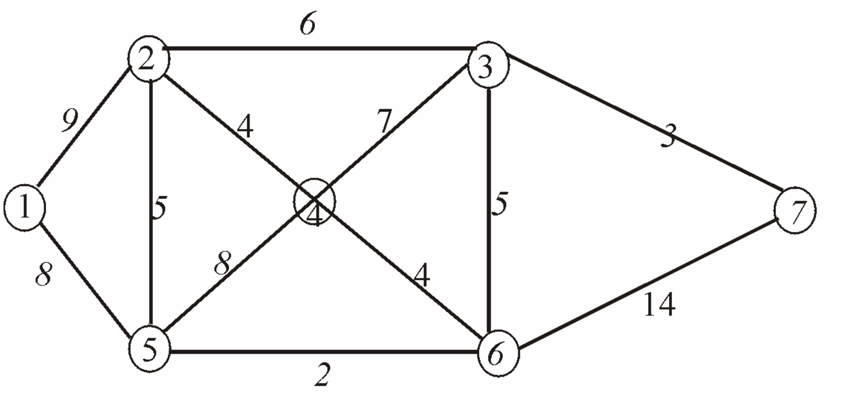
2 вариант

Решить задачу китайского почтальона для сети населенных пунктов, представленных графом:



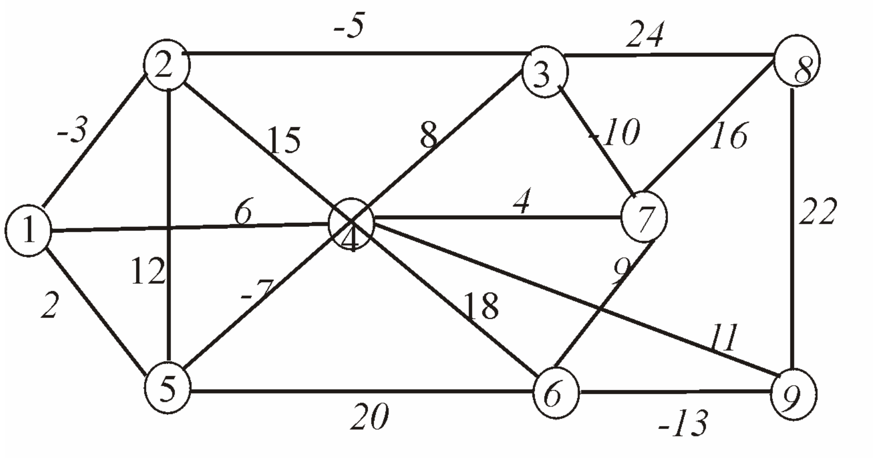
3 вариант

Дана сеть некоторых коммуникаций, связывающих пункты 1-7. Сеть представлена графом на рисунке. Найти величину максимального потока в сети от пункта 1 к пункту 7 (реализовать алгоритм Форда).



4 вариант

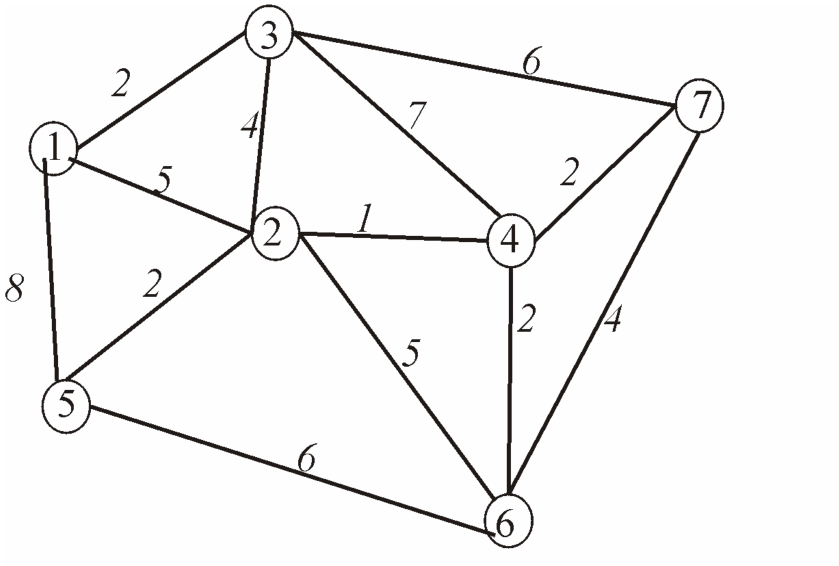
Дана сеть городов и затраты на перевозку некоторого груза из одного пункта в другой. Построить дерево наиболее экономичной доставки груза из пункта 1 во все другие. Выполнить программную реализацию согласно алгоритму Общей матрицы весов.



5 вариант

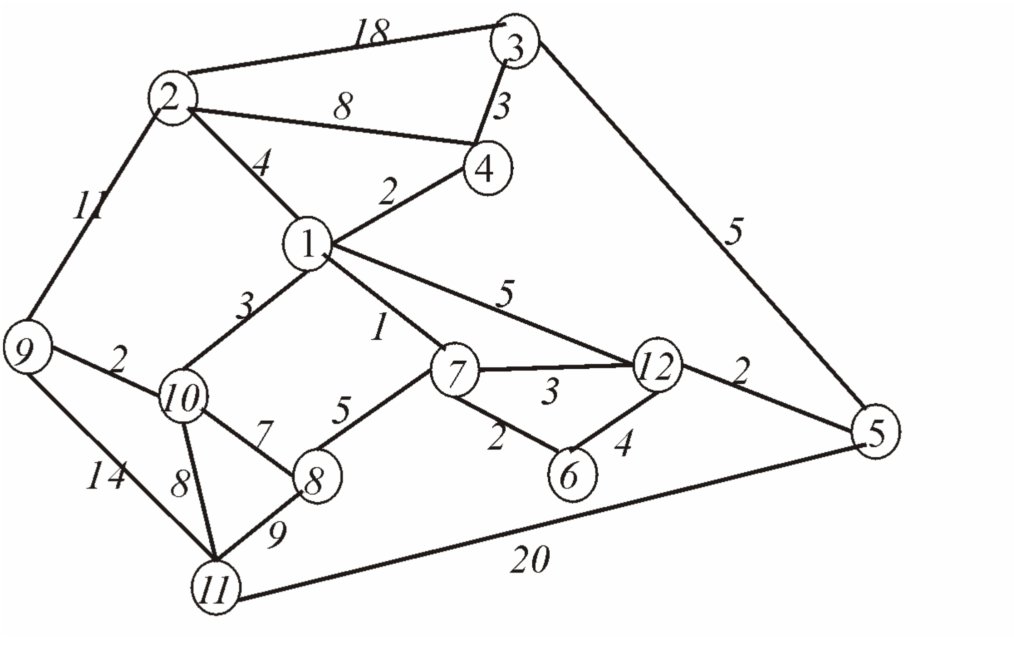
В некотором мегаполисе дана сеть аптек одной фирмы и соответствующие расстояния между ними по существующим маршрутам (в км.). Реализация медикаментов в пунктах (i = 1,2….7) задается числами S =

(50,80,100,40,20,70,80). Необходимо найти оптимальное место (пункт, вершину) для расположения аптеки-склада. Выполнить программную реализацию алгоритма Флойда для нахождения кратчайших расстояний между пунктами и минимизировать сумму единиц объема реализации - расстояний.



6 вариант

Решить задачу китайского почтальона для сети населенных пунктов, представленных графом:



4.1.2. Итоговый контроль

Итоговый контроль осуществляется на зачетно-экзаменационной сессии по факту изучения дисциплины студентом в данном семестре с целью оценки знаний студента. Проводится в форме экзамена.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ БИЛЕТЫ

Экзаменационный билет №1

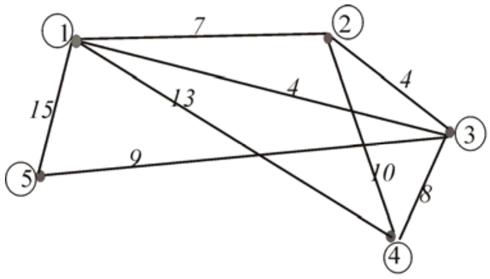
1. Теория множеств. Понятие множества. Способы задания множества. Операции над множествами. Мощность множества. Множество подмножеств.

2. Применение булевых функций. Коммутационные схемы. Решение логических задач.

3. Является ли отношение функциональным? $\{(x, y) \in R^{+} \times R, y^{2} = x\}$

4. Найти дерево кратчайших расстояний по алгоритму Дейкстры от вершины 1

ко всем остальным для графа, изображенного на рисунке.



5. *а*) Найти СДНФ для формулы:

$$(\overline{x \wedge y}) \rightarrow (\overline{x \vee y})$$

б) Составить полином Жегалкина для функции:

$$f(x, y, z) = (x \rightarrow \overline{y}) \leftrightarrow (\overline{x} \wedge y \wedge z) \oplus x \oplus 1$$

Экзаменационный билет №2

1. Теория множеств. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна. Теоретико-множественные законы.

2. Исторические предпосылки развития теории графов.

3. Найти пятый член разложения: $\left(\sqrt{z} + z\right)^{10}$.

4. Из семи белых гвоздик и пяти красных нужно составить букет, содержащий 3 белые и 2 красные гвоздики. Сколькими способами это можно сделать?

5. *а*) Составить РКС по заданной функции проводимости:

$$\pi(x, y, z, t) = (x \to t) \vee (\overline{y} \downarrow z),$$

б) Для формулы алгебры высказываний найти СДНФ или СКНФ (*выбор обосновать)* :

$$x(y \to (z \to (x \wedge \overline{y}))).$$

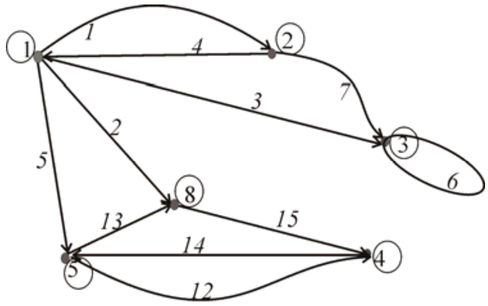
Экзаменационный билет №3

1. Отношения на множествах. Кортеж. Декартово произведение множеств. Область определения. Область значения. Обратное отношение. Композиция отношений.

2. Комбинаторика. Основные комбинаторные правила.

3. Какими свойствами обладают отображения:

а) $f : R \to R, \;\; x \to \ln(x)$; б) $f : R \to R, \;\; x \to x^3$



4. Составить матрицу смежности и достижимости. Определить матрицу расстояний. Найти множества вершин, соответствующих отображениям: $\Gamma(x_3), \Gamma^{-2}(x_8)$. Определить степень вершин x_3, x_8. Определить вид графа.

5. Постройте наиболее простые релейно-контактные схемы по заданным значениям функции проводимости *(для упрощения π-функции использовать карту Карно)*: $\pi(110) = \pi(010) = \pi(111) = \pi(101) = 1$

Экзаменационный билет №4

1. Отношения на множествах. Свойства отношений. Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности. Отношение толерантности. Отношение порядка.

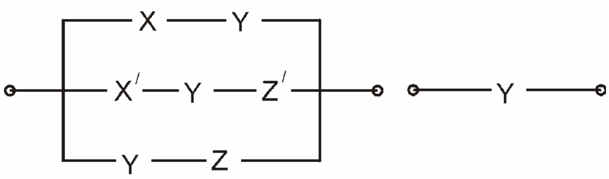
2. Булевы функции. Основные операции. Таблицы истинности.

3. Сколькими способами Маша и Саша могут поменяться 5 книгами, если у Маши имеется 8 книг по физике, а у Саши – 10 книг по математике?

4. Доказать, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$(\exists x)[P(x) \vee Q(x)] \leftrightarrow [(\exists x)(P(x)) \vee (\exists x)(Q(x))].$$

5. *а*) Проверить равносильны ли релейно-контактные схемы:



б) Представить полиномом Жегалкина функцию:

$$f(x, y, z) = (x \to y) \vee yz \vee xz \oplus x \oplus 1$$

Экзаменационный билет №5

1. Функциональные отношения. Функция. Обратная функция. Образ и прообраз при отображении.

2. Ориентированные графы. Отображения и обратные отображения: $\Gamma(x_i)$, $\Gamma^{-1}(x_j)$.

3. Для следующих бинарных отношений определить, какими из свойств оно обладает:

1) $x\rho y \Leftrightarrow y = |x|$ на R; 2) $x\rho y \Leftrightarrow 3/(x+y)$ на Z; 3) $x\rho y \Leftrightarrow x \neq y$ на Z^+;

4. Найти в разложении $\left(z + \dfrac{1}{z^3}\right)^{16}$ член, не содержащий z.

5. *а*) Постройте наиболее простые релейно-контактные схемы по заданным значениям функции проводимости *(для упрощения π-функции использовать карту Карно)*:

$$\pi(000) = \pi(100) = \pi(101) = \pi(111) = 1$$

б) Представить полиномом Жегалкина функцию:

$$f(x, y, z) = (\bar{z} \leftrightarrow y) \vee y \vee z \vee xy \oplus \bar{z} \oplus 1$$

Экзаменационный билет №6

1. Функциональные отношения. Задание отображений. Функция нескольких переменных. Композиция отображений.

2. Деревья.

3. Доказать, что данная формула является тавтологией алгебры высказываний:

$$(A \to C) \wedge (B \to C) \to (A \vee B \to C).$$

4. *а*) Для формулы алгебры высказываний найти СДНФ или СКНФ (*выбор обосновать)* :

$$(\overline{\bar{x} \vee z})(y \to (y \vee z))$$

б) Составить карту Карно для следующей булевой функции, и упростить эту функцию.

$$f(x,y,z) = (xyz) \vee (x\bar{y}z) \vee (xy\bar{z}) \vee (\bar{x}yz) \vee (\bar{x}\bar{y}\bar{z}) \vee (\bar{x}y\bar{z})$$

5. Из 2 шахматистов и 5 шашистов нужно выбрать 5 человек для участия в соревнованиях, причем в команду должен входить хотя бы 1 шахматист. Сколькими способами это можно сделать?

Экзаменационный билет №7

1. Функциональные отношения. Виды отображений. Примеры.

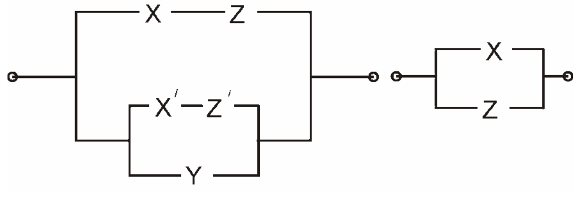
2. Пути и циклы Эйлера. Задача о кенигсбергских мостах. Алгоритм нахождения эйлерова цикла. Пример.

3. Сколько членов разложения бинома $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[3]{7})^{36}$ являются целыми числами?

4. Проверить, что множество кортежей задает отношение эквивалентности:

$$\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 5,4\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 6,6\rangle\}.$$

5. *а*) Проверить равносильность релейно-контактных схем:



б) Выяснить, равны ли следующие булевы функции *(воспользоваться любым из способов)* **:**

$$f(x,y,z) = ((x \vee \bar{z})y) \vee (x\bar{y}) \vee (y(z \vee \bar{y}))$$

$$g(x,y,z) = x \vee y \vee z$$

Экзаменационный билет №8

1. Алгебраические способы задания графов. Матрицы инцидентности, смежности, достижимости, контрдостижимости, расстояний.

2. Нормальные формы и одночлены. Совершенные нормальные формы. Способы составления и упрощения нормальных форм. Карты Карно. Примеры.

3. Методом двустороннего включения докажите тождество:

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

4. *а*) Для следующего отображения исследовать, является ли оно инъективным, сюрьективным, биективным. Ответ обосновать.

$$1)\ f: R \to R, \quad x \mapsto x^3/8; \quad 2)\ f: R \to R, \ \ x \to \log_2(x+2)$$

б) Найдите прообраз множества $[-1{,}1]$ при отображении f:

$$\left(-\pi/2, \pi/2\right) \to R \ \ f: x \to tgx$$

5. Из 3 роз и 8 хризантем необходимо составить цветочную композицию, содержащую 6 цветов и не менее 2 роз. Сколькими способами это можно сделать?

Экзаменационный билет №9

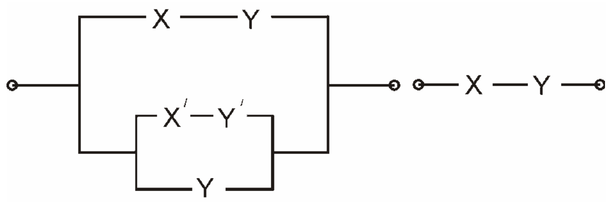
1. Комбинаторика. Теория соединений. Соединений без повторений. Примеры.

2. Планарные графы.

3. *а*) Проверить равносильность релейно-контактных схем:

б) Представить полиномом Жегалкина функцию:

$$f(x,t,z) = (\bar{z} \to \bar{t}) \vee tzx \vee (x \to t) \oplus \bar{t} \oplus 1$$



4. Найти композиции $\alpha: x \to e^x$, $\beta: x \to x^2$, $\gamma: x \to x-1$ $\alpha \circ \beta \circ \gamma$, $\gamma \circ \beta \circ \alpha$.

5. Доказать теоретико-множественное тождество методом двухстороннего включения. Обосновать равенство с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

$$(A \cup B) \setminus M = (A \setminus M) \cup (B \setminus M).$$

Экзаменационный билет №10

1. Алгебраические свойства графов.

2. Комбинаторика. Теория соединений. Соединения с повторениями.

3. Какие из следующих бинарных отношений является функциональными, а какие из функциональных обратимы:

$$1)\ \{\langle x, y\rangle \in R\times R, x^2 + y^2 = 1\},\ 2)\ \{\langle x, y\rangle \in Z\times N, y = x^2 + x + 1\}$$

4. Доказать, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$[(\exists x)(P(x)) \to Q] \leftrightarrow (\forall x)(P(x) \to Q).$$

5. *а*) Выяснить, равны ли следующие булевы функции *(воспользоваться любым из способов)* :

$$f(x, y) = ((x \vee \bar{y})z) \vee (x\bar{z}) \vee (z(y \vee \bar{z}))$$
$$g(x, y) = x \vee z$$

б) Постройте наиболее простые релейно-контактные схемы по заданным значениям функции проводимости *(для упрощения π-функции использовать карту Карно)*:

$$\pi(010) = \pi(011) = \pi(101) = \pi(100) = 1$$

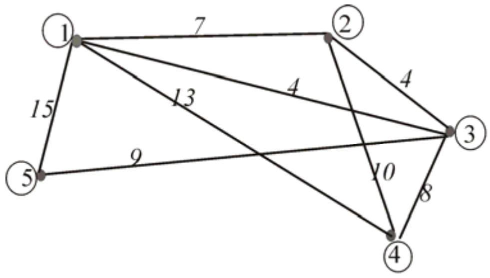
Экзаменационный билет №11

1. Алгебра высказываний. Высказывания и логические связки.
2. Раскраска графов. Задача о четырех краск
3. Найти дерево кратчайших расстояний

по алгоритму Дейкстры от вершины 3

ко всем остальным для графа, изображенного

на рисунке.



4. *а*) найти образ множества [-2,2] при

отображении $f : R \to R, x \to x^2$,

б) Найдите прообраз множества $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ при отображении

$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1], x \to \sin(x)$.

5. *а*) Выяснить, будут ли равны следующие булевы функции

$$f(x,y,z) = (\bar{x} \vee y)(y \vee z)$$

$$g(x,y,z) = (x \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$$

б) С помощью таблицы истинности найти СДНФ и СКНФ:
$x \vee (y \to (z \leftrightarrow (x \wedge y)))$

Экзаменационный билет №12

1. Оптимизационные задачи на графах. Алгоритм Дейкстры.
2. Условные и эквивалентные высказывания. Аксиоматические системы. Умозаключения и доказательства. Необходимое и достаточное условия. Примеры.
3. *а*) Для формулы алгебры высказываний найти СДНФ или СКНФ (*выбор обосновать)*

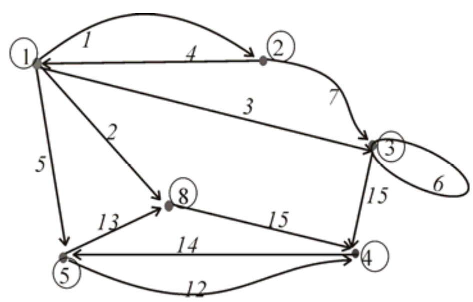
$$x(y \to (z \to (x \wedge \bar{y})))$$

б) Постройте наиболее простые релейно-контактные схемы по заданным значениям функции проводимости *(для упрощения π-функции использовать карту Карно)*: $\pi(110) = \pi(010) = \pi(111) = \pi(101) = 1$

4. *а*) Для любых из отображений исследуйте, является ли оно сюрьективным, инъективным, биективным: 1) $f: R \to R$, $x \to 3^{x+2}$, 2) $f: R \to R$, $x \to \sin x$
5. Из семи солдат и трех офицеров необходимо составить патруль из четырех человек, включающий хотя бы одного офицера. Сколькими способами это можно сделать?

Экзаменационный билет №13

1. Предикаты и кванторы.
2. Пути и циклы Гамильтона.
3. Для графа, изображенного на рис., составить матрицы смежности и достижимости. Определить матрицу расстояний. Найти множества вершин, соответствующих отображениям:



$\Gamma(x_2), \Gamma^{-2}(x_2)$. Определить степень вершин x_4, x_1.

Определить вид графа.

4. Для любых из отображений исследуйте, является ли оно сюрьективным, инъективным, биективным: 1) $f : R \to R$, $x \to x^3$, 2) $f : R \to R$, $x \to \ln(x+5)$

5. Сколько делителей у числа 105?

Экзаменационный билет №14

1. Оптимизационные задачи на графах. Алгоритм Форда.

2. Полнота в логике высказываний.

3. Решить уравнение: $\dfrac{P_{n+5}}{A_{n+4}^{k} \cdot P_{n+4-k}} = 15$.

4. *а*) Найдите образ множества $[1, e]$ при отображении $f : R \to R$ $f : x \to \ln x$;

б) Найдите прообраз множества $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ при отображении f: $\left(-\pi/2, \pi/2\right) \to R$ $f : x \to tgx$

5. *а*) Составить карту Карно для следующей булевой функции, и упростить эту функцию: $f(x,y,z) = (xyz) \vee (\bar{x}yz) \vee (x\bar{y}\bar{z}) \vee (\bar{x}\bar{y}z) \vee (\bar{x}\bar{y}\bar{z}) \vee (\bar{x}y\bar{z})$

б) С помощью таблиц истинности доказать или опровергнуть справедливость равенств:

$$1)\ x \to y \equiv (xy + x) + 1$$

$$2)\ x + y = \overline{(\bar{x} \vee y)} \vee \overline{(x \vee \bar{y})}$$

Экзаменационный билет №15

1. Оптимизационные задачи на графах. Задача китайского почтальона.

2. Представление булевых функций полиномом Жегалкина. Способы. Пример.

3. Сколько всего четырехзначных чисел, делящихся на 2?

4. Для любых из отображений исследуйте, является ли оно сюрьективным, инъективным, биективным: 1) $f : R \to R$ $x \to \sqrt{x-1}$ 2) $f : R \to R$ $x \to 5^{x-1}$

5. *а*) Для формулы алгебры высказываний найти СДНФ или СКНФ (*выбор обосновать)* $(\overline{\overline{x} \vee \overline{y}})(x \to (yz))$

б) Постройте наиболее простые релейно-контактные схемы по заданным значениям функции проводимости *(для упрощения π-функции использовать карту Карно)*:

$\pi(010) = \pi(011) = \pi(101) = \pi(100) = 1$

Экзаменационный билет №16

1. Задание графов. Виды графов. Подграф. Маршруты и пути в графах. Компонента графа. Полные и двудольные графы.
2. Комбинаторика. Бином Ньютона. Свойства бинома. Пример.
3. Для бинарных отношений определить, какими из свойств оно обладает:

1) $x\rho y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ на R; 2) $x\rho y \Leftrightarrow 3/(x - y)$ на Z;

4. *а*) Постройте наиболее простые релейно-контактные схемы по заданным значениям функции проводимости *(для упрощения π-функции использовать карту Карно)*: $\pi(010) = \pi(011) = \pi(101) = \pi(100) = 1$

б) Представить полиномом Жегалкина функцию:

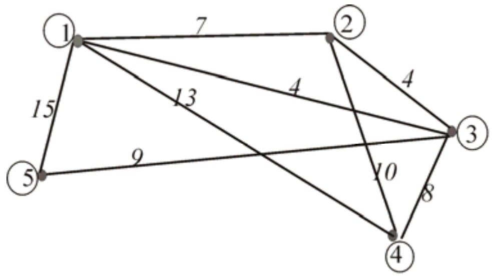
$$f(x, y, z) = (x \to y) \vee yz \vee (x \to z) \oplus 1$$

5. В данном высказывании вместо многоточия вставить одно из выражений: «необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», «недостаточно и не необходимо», чтобы получилось истинное высказывание: $\alpha = \beta$ … для того, чтобы $\sin\alpha = \sin\beta$.

Экзаменационный билет №17

5. Теория множеств. Понятие множества. Способы задания множества. Операции над множествами. Мощность множества. Множество подмножеств.
6. Применение булевых функций. Коммутационные схемы. Решение логических задач.
7. Является ли отношение функциональным? $\{(x, y) \in R \times R, y = |x|\}$, обратимым?

8. Найти дерево кратчайших расстояний по алгоритму Дейкстры от вершины 3 ко всем остальным для графа, изображенного на рисунке.



5. *а*) Найти СКНФ для формулы:

$$(\overline{x \wedge y}) \to (\overline{x \vee y})$$

б) Составить полином Жегалкина для функции:

$$f(x, y) = (x \leftrightarrow \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge yz) \oplus \overline{x} \oplus 1$$

Экзаменационный билет №18

1. Теория множеств. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна. Теоретико-множественные законы.

2. Исторические предпосылки развития теории графов.

3. Найти два средних члена разложения бинома: $(a^3 - ab)^{23}$

4. Из 3 роз и 8 хризантем необходимо составить цветочную композицию, содержащую 6 цветов и не менее 2 роз. Сколькими способами это можно сделать?

5. *а*) Составить РКС по заданной функции проводимости:

$$\pi(x, y, z, t) = (x \to t) | (\overline{y} \wedge z),$$

б) Для формулы алгебры высказываний найти СДНФ или СКНФ (*выбор обосновать)* :

$$x(y \leftrightarrow (z \to (x \vee \overline{y}))).$$

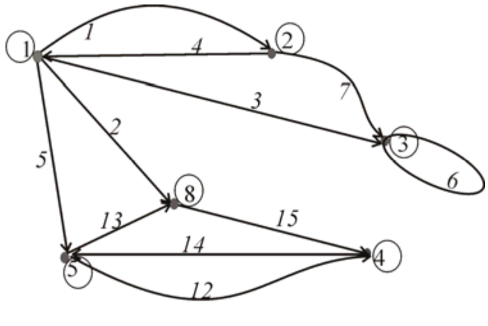
Экзаменационный билет №19

1. Отношения на множествах. Кортеж. Декартово произведение множеств. Область определения. Область значения. Обратное отношение. Композиция отношений.

2. Комбинаторика. Основные комбинаторные правила.

3. Какими свойствами обладают отображения:

а) $f : R \to R, \quad x \to e^x$) ; б) $f : R \to R, x \to \sin(x)$



4. Составить матрицу смежности и достижимости. Определить матрицу расстояний. Найти множества вершин, соответствующих отображениям: $\Gamma(x_2), \Gamma^{-2}(x_5)$. Определить степень вершин x_2, x_8. Определить вид графа.

5. Постройте наиболее простые релейно-контактные схемы по заданным значениям функции проводимости *(для упрощения π-функции использовать карту Карно)*: $\pi(110) = \pi(010) = \pi(101) = \pi(100) = 1$

Экзаменационный билет №20

1. Отношения на множествах. Свойства отношений. Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности. Отношение толерантности. Отношение порядка.

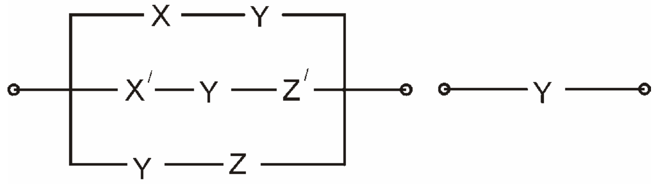
2. Булевы функции. Основные операции. Таблицы истинности.

3. Сколькими способами Маша и Саша могут поменяться 5 книгами, если у Маши имеется 8 книг по физике, а у Саши – 10 книг по математике?

4. Доказать, что данная формула является тавтологией алгебры предикатов:

$$(\exists x)[P(x) \vee Q(x)] \leftrightarrow [(\exists x)(P(x)) \vee (\exists x)(Q(x))].$$

5. *а*) Проверить равносильны ли релейно-контактные схемы:



б) Представить полиномом Жегалкина функцию:

$f(x, y, z) = (x \to y) \vee yz \vee xz \oplus x \oplus 1$

4.2. Перечень обязательной (основной) литературы

1. Спирина М.С., Спирин П.А. Дискретная математика. – М.: Академия, 2004.– 368 с.
2. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Элементы дискретной математики. – М.: ИНФРА-М, 2002.– 280 с.
3. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения. – М.: Вузовская книга, 2000.– 280 с.

4. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Высшая школа, 2002.– 384 с.
5. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2001.– 304 с.
6. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженеров. – М.: Энергия, 1996.– 360 с.

4.3. Перечень дополнительной литературы

1. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. – М.: МАИ, 1992.– 384 с.
2. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. – М.: Высшая школа, 1996.– 360 с.
3. Лекции по дискретной математике. / Под ред. Капитоновой Ю.В. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004.– 624 с.
4. Шапорев С.Д. Математическая логика. Курс лекций и практических занятий. – СПб.: БХВ - Петербург, 2005.– 416 с.
5. Филд А., Харрисон П. Функциональное программирование. – М.: Мир, 1993.– 638 с.
6. Евстегнеев В.А., Касьянов В.Н. Теория графов (Алгоритмы обработки деревьев). – Новосибирск.: Наука, 1994.– 360 с.
7. Ежов И.И., Скороход А.И., Ядренко М.И. Элементы комбинаторики. – М.: Мир, 1995.– 79 с.
8. Емеличев В.А., Мельников О.И. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1994.– 382 с.
9. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. – М.: Мир, 1990.– 383 с.
10. Куратовский К., Мостовой А. Теория множеств. – М.: Мир, 1993.– 416 с.
11. Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 1992.– 336 с.
12. Уилсон Р. Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1997.– 207 с.
13. Сачков В.Н. Комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1997.– 384 с.

14. Холл М. Комбинаторика. – М.: Мир, 1995.– 234 с.
15. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Мир, 1998.– 320 с.
16. Уилсон Р. Введение в теорию графов – М.: Мир, 1977
17. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975
18. Липский В. Комбинаторика для программистов – М.: Мир, 1988
19. Зыков А. А. "Теория конечных графов", Новосибирск, "Наука", 1969;
20. Берж К. "Теория графов и ее применение", М., ИЛ, 1962;
21. Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы: Учеб. Пособие. – Изд. 2-е, испр. – М.:ФИЗМАЛИТ, 2003. – 240с.

4.4. Перечень методических пособий

1. Кван Н.В., Масловская А.Г. Организация самостоятельной работы студентов по дискретной математике. Уч.-мет. пособие. Часть I. – Благовещенск, 2003. – 60 с. (электронный вариант)
2. Кван Н.В., Масловская А.Г. Ведение в дискретную математику. Учебное пособие. – Благовещенск, 2006. – 120с.

5. НЕОБХОДИМОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Лекции и практические занятия проводятся в стандартной аудитории, оснащенной в соответствии с требованиями преподавания теоретических дисциплин.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ (ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ) КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ

для специальности 010101

Номер недели	Номер темы	Вопросы, изучаемые на лекции	Занятия (номера)		Используемые нагляд. и метод пособия	Самостоятельная работа студентов		Форма контроля
			Практич. (семин.)	Лабораторные		Содержание	часы	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1-2			лекция, доп. литература			
2	2	1-3	1		лекция			
3	2	4-6			лекция	индивид. задание №1	8	отчет по индивид. заданию №1
4	3	1-3	2		лекция			
5	3	4-5			лекция	индивид. задание №2	8	отчет по индивид. заданию №2
6	4	1-3	3		лекция			
7	5	1-3			лекция			
8	5	4-6	3		лекция			Контрольная работа №1
9	5	7-9			лекция	индивид. задание №3	10	отчет по индивид. заданию №3
10	6	1-3	4		лекция			
11	6	4-6			лекция			
12	6	7-9	5		лекция			
13	7	10-12			лекция			
14	7	13-14	5		лекция			
15	8	1-3			лекция			
16	9	1-2	6		лекция			
17	9	3-4			лекция			
18	10	1-2	7		лекция			Контрольная работа №2

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ (ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ) КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ
для специальности 010501

Номер недели	Номер темы	Вопросы, изучаемые на лекции	Занятия (номера)		Используемые нагляд. и метод пособия	Самостоятельная работа студентов		Форма контроля
			Практич. (семин.)	Лабораторные		Содержание	часы	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1-2	1		лекция, доп. литература		2	
2	2	1-3	2		лекция		2	
3	2	4-6	3		лекция	индивид. задание №1	8/2	отчет по индивид. заданию №1
4	3	1-3	4		лекция		2	
5	3	4-5	5		лекция	индивид. задание №2	8/2	отчет по индивид. заданию №2
6	4	1-3	6		лекция		2	Контрольная работа №1
7	5	1-3	7		лекция		2	
8	5	4-6	8		лекция	Доп. Раздел Комбинаторики	10/2	опрос
9	5	7-9	9		лекция		2	
10	6	1-3	9		лекция		2	
11	6	4-6	10		лекция	индивид. задание №3	10/2	отчет по индивид. заданию №3
12	6	7-9	11		лекция		2	
13	7	10-12	12		лекция		2	
14	7	13-14	13		лекция	реферат	9/2	Защита рефератов
15	8	1-3	14		лекция		2	

16	9	1-2	14		лекция		2	
17	9	3-4	15		лекция		2	
18	10	1-2	16		лекция		2	Контрольная работа №2

Примечание

Индивидуальное задание №1 – «Элементы теории множеств. Отношения. Отображения».

Индивидуальное задание №2 – «Комбинаторика».

Индивидуальное задание №3 – «Теория графов».