Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Амурский государственный университет»

Кафедра математического анализа и моделирования

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Основной образовательной программы по направлению подготовки 010400.62 – Прикладная математика и информатика

Благовещенск 2012 г.

УМКД разработан канд. тех. наук, доцентом Труфановой Татьяной Вениаминовной

Рассмотрен и рекомендован на заседании кафедры
Протокол заседания кафедры от «___» ___________ 201_ г. №___
Зав. кафедрой _______________ / Н.Н.Максимова /

УТВЕРЖДЕН
Протокол заседания УМСС 010400.62– Прикладная математика и информатика
от «___» ___________ 201_ г. №___
Председатель УМСС ______________ / В.В.Сельвинский /

СОДЕРЖАНИЕ

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

1. 1 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Цель преподавания учебной дисциплины

Дисциплина " Краевые задачи и вариационное исчисление " изучает математические модели естественнонаучных явлений, которые приводят к задачам отыскания экстремальных значений функционалов при заданных ограничениях на множестве допустимых решений.

Целью дисциплины является знакомство с методами исследования математических моделей различных процессов и явлений естествознания, изучение основных методов решения возникающих при этом краевых задач и метод вариации в задачах с неподвижными и неподвижными границами и их решение, выяснение физического смысла полученного решения.

2. Задачи освоения дисциплины.

Дисциплина вырабатывает у студентов навыки построения математических моделей простейших физических явлений и решения (аналитического и численного) получающихся при этом математических задач. Студент должен свободно ориентироваться в основных разделах дисциплины, что включает: краевые задачи дифференциальных уравнений, классическое вариационное исчисление.

1.2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП ВПО

Дисциплина «Краевые задачи и вариационное исчисление» включена в профессиональный цикл (блок ДН (М).Р.2). Освоение краевых задач и вариационного исчисления необходимо для изучения многих дисциплин высшей математики и механики.

Дисциплина " Краевые задачи и вариационное исчисление " излагается на базе математического анализа, алгебры и аналитической геометрии, дифференциальных уравнений, в тесной связи с теорией функций комплексного переменного и с основами функционального анализа.

1.3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

знать: основные понятия, определения и свойства объектов краевых задач и вариационного исчисления, формулировки и доказательства утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их связи и приложения в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

уметь: доказывать утверждения, решать физические задачи с краевыми условиями, уметь применять полученные навыки в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

владеть: аппаратом вариационного исчисления, методами доказательства утверждений, решать физические задачи с применением вариационного исчисления, владеть навыками применения этого в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

Дисциплина " Краевые задачи и вариационное исчисление " вырабатывает у студентов навыки построения математических моделей простейших физических явлений и решения (аналитического и численного) получающихся при этом математических задач.

Студент должен свободно ориентироваться в основных разделах дисциплины, что включает: краевые задачи для дифференциальных уравнений, метод вариаций в задачах с неподвижными границами, вариационные задачи с подвижными границами, достаточные условия экстремума, вариационные задачи на условный экстремум, прямые методы в вариационных задачах.

Общекультурные компетенции:

способностью к интеллектуальному, культурному, нравственному и физическому и профессиональному саморазвитию, стремление к повышению своей квалификации и мастерства (ОК- 16).

научная и научно-исследовательская деятельность:

- способность демонстрации общенаучных базовых знаний естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов теории, связанных с прикладной математикой и информатикой ПК-1;

- способность приобретать новые научные и профессиональные знания, используя современные образовательные и информационные технологии ПК-2;

способностью понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат (ПК-3);

способностью критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности *(*ПК-*5);*

1.4.СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) «Краевые задачи и вариационное исчисление». Общая трудоемкость дисциплины составляет 4___ зачетных единиц, __144_часа.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)			Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)*
				Лек.	Пр. зан.	Сам. раб.	
1	Краевые задачи дифференциальных уравнений	4	1-2	4	4	4	Контрольная работа, устный опрос, домашние задания

2	Метод вариаций в задачах с неподвижными границами		2-6	8	8	8	Контрольная работа, устный опрос, рейтинговая оценка, индивидуальное задание домашние задания
3	Вариационные задачи с подвижными границами. Простейшая задача с подвижными границами	4	6 - 10	8	8	8	Контрольная работа, устный опрос, рейтинговая оценка, индивидуальное задание домашние задания
4	Достаточные условия экстремума	4	10-14	8	8	8	Контрольная работа, устный опрос, рейтинговая оценка, индивидуальное задание. Домашние задания.
5	Вариационные задачи на условный экстремум	4	14-16	4	4	4	Контрольная работа, устный опрос, индивидуальное задание домашние задания
6	Прямые методы в вариационных задачах	4	16-18	4	4	4	Устный опрос, домашнее задание.
				36	36	36	

1.5. СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ И ТЕМ ДИСЦИПЛИНЫ:

5.1. Лекции.

Раздел 1. Краевые задачи дифференциальных уравнений

Лекция 1. Введение. Основные примеры краевых задач. Практическое применение краевых задач для описания закономерностей различных физических явлений.

Лекция 2. Функция влияния или функция Грина рассматриваемых краевых задач.

Раздел 2. Метод вариаций в задачах с неподвижными границами

Лекция 3. Предмет вариационного исчисления. Вариация и ее свойства.

Лекция 4. Уравнение Эйлера.

Лекция 5. Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка .

Лекция 6. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных. Вариационные задачи в параметрической форме.

Раздел 3. Вариационные задачи с подвижными границами. Простейшая задача с подвижными границами

Лекция 7 .Простейшие задачи с подвижными границами

Лекция 8. Задачи с подвижными границами для функционалов.

Лекция 9. Экстремали с угловыми точками.

Лекция 10 Односторонние вариации

Раздел 4. Достаточные условия экстремума

Лекция 11. Поле экстремалей.

Лекция 12 Функция Вейерштрасса E(x,y,p,y').

Лекция 13. Преобразование уравнений Эйлера к каноническому виду.

Лекция 14. Исследовать на экстремум функционалы.

Раздел 5 Вариационные задачи на условный экстремум

Лекция15. Вариационные задачи на условный экстремум. Задачи с подвижными границами.

Лекция 16. Вариационные задачи на условный экстремум. Изопериметрические задачи.

Раздел 6. Прямые методы в вариационных задачах

Лекция 17. Конечно-разностный метод Эйлера. Метод Ритца.

Лекция 18. Метод Канторовича.

5.2. Практические занятия.

Занятие1Решение краевых задач.

Занятие 2. Построение функций Грина рассматриваемых краевых задач.

Занятие 3. Простейшая задача вариационного исчисления.

Занятие 4. Уравнение Эйлера. Граничные условия. Экстремали.

Занятие5. Различные случаи интегрируемости уравнений Эйлера.

Занятие 6. Примеры физических и геометрических экстремальных задач

Занятие 7. Задача на экстремум функционала, зависящего от производных высших порядков неизвестной функции

Занятие 8. Задача об экстремуме функционала, зависящего от нескольких функций

Занятие 9. Задачи с подвижными границами.

Занятие 10. Слабый экстремум. Условия трансверсальности.

Занятие11. Задача Больца.

Занятие12. Задачи на условный экстремум. Функция Лагранжа. Множители Лагранжа

Занятие 13. Изопериметрическая задача.

Занятие 14.Оптимальные функции.

Занятие 15. Прямые методы вариационного исчисления: метод Ритца.

Занятие 16 . Метод Канторовича.

Занятие 17. Метод Галеркина. Координатные функции.

Занятие 18. Контрольная работа.

1.6.САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Видами самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины являются освоение и проработка тем лекционного материала, решение задач по теме, выполнение и подготовка к защите индивидуальных работ. Формой итогового контроля является экзамен. Студенты допускаются до экзамена только после выполнения и защиты всех видов самостоятельной работы, предусмотренных рабочей программой.

№ п/п	№ раздела (темы) дисциплины	Форма (вид) самостоятельной работы	Трудоём-кость в часах
1	1	Домашнее задание: решение задач	4
2	2	Домашнее задание: решение задач	4
3	2	Домашнее задание: решение задач	4

4	3	Домашнее задание: решение задач	4
5	3	Домашнее задание: решение задач	4
6	4	Домашнее задание: решение задач	4
7	4	Домашнее задание: решение задач	4
8	5	Домашнее задание: решение задач	4
	6	Домашнее задание: решение задач	4

1.7. МАТРИЦА КОМПЕТЕНЦИЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ.

Разделы	Компетенции					*Итого* Σ общее количество компетенций
	ОК16	ПК1	ПК2	ПК3	ПК5	
1	+	+	+	+	+	4
2	+	+	+	+	+	4
3	+	+	+	+	+	4
4	+	+	+	+	+	4
5	+	+	+	+	+	4
6	+	+	+	+	+	4

1.8.ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Лекции: традиционное и проблемное изложение теоретического материала, текущий устный опрос, коллоквиумы, использование интерактивных обучающих мультимедиа средств; практические занятия: интерактивные методы решения задач, мозговой штурм, использование наглядных средств, контрольные работы; консультации, самостоятельная работа.

Не имитационные методы обучения: проблемная лекция.

Игровые имитационные методы обучения: мозговой штурм.

Неигровые имитационные методы обучения: метод группового решения задач.
Распределение образовательных технологий (не менее 20% от аудиторных занятий- 14 часов).

Занятия, проводимые в интерактивных формах, используются на лекциях и практических занятиях, темы которых приведены в таблице

Наименование тем:	Лек.	Прак.	Σ
1. Функция влияния или функция Грина рассматриваемых краевых задач. (Проблемная лекция). (Метод группового решения задач).	2	2	4
2 Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных. Вариационные задачи в параметрической форме. (Мозговой штурм).	2		2
3. Вариационные задачи с подвижными границами. Простейшая задача с подвижными границами. (Метод группового решения задач).		2	2
4. Вариационные задачи на условный экстремум (Метод группового решения задач); (Мозговой штурм).	2	2	4

5. Конечно-разностный метод Эйлера. Метод Ритца. Метод Канторовича. (Проблемная лекция).	2		2
Всего	8	6	14

1.9.ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

В течение семестра студенты разбирают и решают задачи, указанные преподавателем к каждому семинару, разбирают и повторяют основные понятия и теоремы, доказанные на лекциях. В семестре предусмотрен коллоквиум, домашние задания и контрольная работа. В самостоятельную работу включаются задачи и упражнения на основные понятия и приемы решения простейшей задачи вариационного исчисления и ее обобщений.

В итоговую контрольную работу включаются задачи на достаточные условия экстремума простейшего функционала, а также задачи на условный экстремум и изопериметрические задачи.

Вопросы к экзамену:

1.Краевые задачи.
2.Функция Грина краевой задачи.
3.Собственные значения краевой задачи.
4.Предмет вариационного исчисления. Вариация и ее свойства.
5.Необходимое условие экстремума функционала.
6.Простейшая задача вариационного исчисления с неподвижными границами. Уравнение Эйлера. Экстремали.
7.Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера.
8.Задача о наименьшей площади поверхности вращения.
9.Задача о брахистохроне.
10.Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка.
11.Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных.
12.Простейшая задача с подвижными границами. Условие трансверсальности.
13. Экстремали с угловыми точками. Задача об отражении экстремалей.
14. Экстремали с угловыми точками. Задача о преломлении экстремалей.
15. Односторонние вариации.
16. Вариационные задачи на условный экстремум. Геометрические связи.
17. Вариационные задачи на условный экстремум. Кинематические связи.
18. Изопериметрические задачи.
19. Достаточные условия экстремума. Поле экстремалей.
20. Условие Якоби включения экстремали в поле экстремалей. Уравнение Якоби.
21. Функция Вейерштрасса. Достаточные условия существования слабого и сильного экстремума.
22. Условия Лежандра существования слабого и сильного экстремума.
23. Преобразование уравнений Эйлера к каноническому виду. Уравнения Гамильтона-Якоби.
24. Задача оптимального управления и ее связь с вариационной задачей.
25. Принцип максимума Понтрягина.
26. Задача о быстродействии.
27. Задача о подъеме ракеты на максимальную высоту.

1.10.УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ «Краевые задачи и вариационное исчисление».

а) основная литература:

1.10.1. Андреева Е. А. Вариационное исчисление и методы оптимизации : учеб. пособие: рек. УМО/ Е. А. Андреева, В. М. Цирулева. -М.: Высш. шк., 2006. -584 с.:а-рис.

1.10.2. Пантелеев А.В. Вариационное исчисление в примерах и задачах : учеб. пособие: рек. УМО/ А. В. Пантелеев. -М.: Высш. шк., 2006. -272 с.:а-рис.

10.3. Корнеенко В.П. Методы оптимизации: учебник: рек. УМО / В.П. Корнеенко. – М.: Высш. шк., 2007 – 664 с.

б) дополнительная литература:

1.10.4. Алексеев В.М. Оптимальное управление : учеб.: рек. УМС/ В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. -2-е изд., перераб. и доп.. -М.: Физматлит, 2005. -384 с.:а-рис.

1.10.5. Аттетков А.В. Методы оптимизации : учебник: рек. Мин. обр. РФ/ А. В. Аттетков, С. В. Галкин, В. С. Зарубин ; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. -2-е изд., стер.. -М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001, 2003. -440 с.

1.10.6. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: учебн.: доп. Мин. обр РФ / Л.Э.Эльсгольц.- 4-е изд.-М.: Эдиториал УРСС, 2000.- 319 с.

1.10.7. Вариационное исчисление **и** методы оптимизации : учеб.-метод. комплекс для спец.010101 "Математика"/ АмГУ, ФМиИ; сост. В. В. Сельвинский. -Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2007. -1 о=эл. опт. диск (CD-ROM)

1.10.8. Вариационное исчисление и вариационные принципы : [Сб. учебников]: 20 кн. в PDF - формате. -М.: Компьютерные информационные технологии: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. -1 о=эл. опт. диск (CD-ROM).

1.10.9. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения : справ. рук./ Л. Я. Цлаф. -3-е изд., стер.. -СПб.: Лань, 2005. -192 с.:а-рис.

в) Периодические издания:

1.10.10. Математика [Текст] : Реферативный журнал/ ВИНИТИ. - Систематическо-предметный указатель (выходит 1 раз в год). - Авторско-библиографический указатель (выходит 1 раз в год). - Выходит ежемесячно. - ISSN 0034-2467

10.11. Известия РАН. Серия математическая [Текст]. - Выходит раз в два месяца. - ISSN 0373-2436

г) программное обеспечение и Интернет ресурсы

№	Наименование ресурса	краткая характеристика
1	http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm	Учебно-образовательная физико-математическая библиотека, содержащая DjVu- и PDF-файлы учебников по теме: Методы оптимизации

1.11.МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Краевые задачи и вариационное исчисление" включена в профессиональный цикл (блок ДН (М).Р.2) и не требует специального лабораторного оборудования.

Материальное обеспечение дисциплины предполагает наличие учебных аудиторий для проведения лекционных и практических занятий с возможностью использования мультимедийных средств.

1.12. РЕЙТИНГОВАЯ ОЦЕНКА ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Проводится в соответствии с положением о балльно-рейтинговой системе оценки знаний студентов АмГУ и положением кафедры МАиМ по дисциплине.

Система оценки в баллах

№	Вид работы	Норма	Максимальное кол-во баллов
1	Посещение занятий	0,25 балла/2часа ауд.зан.	18 балл
2	Активность участия в занятиях	До 2 баллов за ответ	24 баллов
3	Самостоятельная работа	0-8 баллов	8 баллов
4	Контрольная работа	0-10 баллов	10 баллов
6	Экзамен	0 – 40 баллов	40 баллов
	Всего за семестр	0-100 баллов	100 баллов

2 Краткое изложение программного материала

Лекции №1. Название темы:

Лекция 1. Введение. Основные примеры краевых задач. Практическое применение краевых задач для описания закономерностей различных физических явлений

План лекции.

Цель лекции Ввести студентов в дисциплину «Краевые задачи и вариационное исчисление", обозначить структуру курса, содержание практического и лекционного материала по основным разделам, предусмотренным Государственным образовательным стандартом, показать междисциплинарные связи, правила организации аудиторной и самостоятельной работы студентов, дать методические рекомендации по изучению дисциплины, указать список основной и дополнительной литературы, рекомендуемой студентам, ознакомить студентов с формами текущего и итогового контроля по дисциплине. Краевые или граничные задачи

Ключевые вопросы

1) Дать определение краевой задачи.

2) Перечислить типы граничных условий и записать их математическое представление.

3)Что такое собственная функция и собственные значения.

4)Привести примеры краевых задач. 5) Записать основные типы граничных условий. 6)Постановка первой краевой задачи.

Ссылки на литературные источники:

1.10.1- 1.10.10

Лекция 2. Функция влияния или функция Грина рассматриваемых краевых задач.

План лекции. Функция влияния или функция Грина рассматриваемой краевой задачи. Основные свойства функция Грина. Метод построения функции Грина. Решение неоднородного уравнения с использованием функции Грина.

Цель и задачи лекции. Научить студентов наряду с основной начальной задачей решать так называемые краевые или граничные задачи. Дать метод построения функции Грина.

Ключевые вопросы: 1)Поставить краевую задачу для движущейся точки под действием заданной силы. 2) Какая функция называется функцией влияния или функцией Грина? 3) Сформулировать основные свойства функции Грина. 4)Как решить неоднородное уравнение с использованием функции Грина?

Ссылки на литературные источники:

1.10.1- 1.10.10

Лекция 3. Предмет вариационного исчисления. Вариация и ее свойства.

План лекции. Основные понятия. Определение функционала. Приращение функционала. Непрерывность функционала. Кривые близкие в смысле близости нулевого порядка, первого и т.д. порядков. Линейный функционал. Вариация функционала. Максимум и минимум функционала.

Задачей вариационного исчисления называется задача нахождения экстремума *интегрального функционала* $I[y(x)]$, например, функционала вида $\int_a^b f(x,y,y')dx$, $\int_a^b f(x,y,y',...,y^{(n)})dx$, $\int_a^b f(x,y,z,y'_x,z'_x)dx$ и т.п. Подынтегральная функция называется *интегрантом*.

Введем следующие определения.

Определение 1. Функционал $I[y(x)]$ называется *непрерывным*, если малому приращению функции y соответствует малое приращение функционала.

Предметом рассмотрения будут пространства C^0 и C^1. Пространство $C^0[a, b]$ состоит из непрерывных функций $y(x)$, определенных на отрезке $[a, b]$. Норма в этом пространстве вводится следующим образом: $\|y\|_0 = \max\limits_{x\in[a,b]} |y(x)|$.

Определение 2. ε-окрестностью нулевого порядка кривой $y^*(x)\in C^0[a,b]$ называется совокупность кривых $y(x)\in C^0[a,b]$, такая, что

$$\|y-y^*\|_0 = \max_{x\in[a,b]} |y(x)-y^*(x)| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0 - const. \quad (1.1)$$

Это означает, что расстояние от кривой $y^*(x)$ до кривых $y(x)$ мало, т.е. графики кривых $y(x)$ целиком лежат внутри полосы шириной 2ε, окружающей график функции $y^*(x)$. В данном случае можно считать близкими кривые, близкие по ординатам.

Пространство $C^1[a, b]$ состоит из непрерывных функций $y(x)$, определенных на отрезке $[a, b]$ и имеющих на данном отрезке непрерывную производную. Норма в этом пространстве вводится следующим образом: $\|y\|_1 = \max\limits_{x\in[a,b]} |y(x)| + \max\limits_{x\in[a,b]} |y'(x)|$.

Определение 3. ε-окрестностью первого порядка кривой $y^*(x)\in C^1[a,b]$ называется совокупность кривых $y(x)\in C^1[a,b]$, такая, что

$$\|y-y^*\|_0 = \max_{x\in[a,b]} |y(x)-y^*(x)| + \max_{x\in[a,b]} |y'(x)-y^{*}{}'(x)| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0 - const. \quad (1.2)$$

Это означает, что у кривой $y^*(x)$ и кривых $y(x)$ близки не только ординаты, но и значения производных. При этом следует отметить, что кривая, принадлежащая ε-окрестности первого порядка, принадлежит и ε-окрестности нулевого порядка.

Кривые $y(x)$, на которых сравнивают значения функционала, называют *допустимыми кривыми* или *кривыми сравнения*.

Обозначим через $y^*(x)$ допустимую кривую (под допустимостью понимается принадлежность тому или иному функциональному пространству), на которой функционал достигает экстремума, а через $y(x)$ произвольную допустимую кривую. Разность $\delta y(x) = y(x) - y^*(x)$ называется *вариацией* кривой $y^*(x)$.

Вариация $\delta y(x)$ есть функция аргумента x и принадлежит тому же функциональному пространству, что и функция $y(x)$. Используя вариацию, можно представить любую допустимую кривую $y(x)$ в виде

$$y(x) = y^*(x) + \delta y(x). \tag{1.3}$$

Однако будем использовать и другую запись

$$y(x) = y^*(x) + \alpha\,\delta y(x). \tag{1.4}$$

Здесь $\delta y(x)$ – фиксированная функция, α – числовой параметр.

Приращением функционала ΔI называется разность

$$\Delta I = I[y(x)] - I[y^*(x)] = I[y(x) + \alpha\,\delta y^*(x)] - I[y^*(x)]. \tag{1.5}$$

Первой вариацией функционала называют выражение

$$\delta I = \delta I[y^*(x), \delta y(x)] = \lim_{\alpha\to 0} \frac{I[y^*(x) + \alpha\,\delta y(x)] - I[y^*(x)]}{\alpha} =$$

$$= \frac{d}{d\alpha} I[y^*(x) + \alpha\,\delta y(x)]\Big|_{\alpha=0}. \tag{1.6}$$

Второй вариацией называют выражение

$$\delta^2 I = \delta^2 I[y^*(x), \delta y(x)] = \frac{d^2}{d\alpha^2} I[y^*(x) + \alpha\,\delta y(x)]\Big|_{\alpha=0}. \tag{1.7}$$

Говорят, что функционал $I[y(x)]$, определенный на некотором классе M функций, достигает на кривой $y^*(x)$ *глобального минимума* (*максимума*), если

$$I[y^*(x)] \le I[y(x)] \qquad (I[y^*(x)] \ge I[y(x)]) \qquad \forall y(x) \in M.$$

Понятие локального минимума (максимума) связано с исследованием поведения функционала на близких кривых.

Говорят, что функционал $I[y(x)]$ достигает на кривой $y^*(x)$ *сильного минимума* (*максимума*), если $I[y^*(x)] \le I[y(x)]$ ($I[y^*(x)] \ge I[y(x)]$) в ε-окрестности нулевого порядка кривой $y^*(x)$.

Говорят, что функционал $I[y(x)]$ достигает на кривой $y^*(x)$ *слабого минимума* (*максимума*), если $I[y^*(x)] \le I[y(x)]$ ($I[y^*(x)] \ge I[y(x)]$) в ε-окрестности первого порядка кривой $y^*(x)$.

Локальные минимумы и максимумы функционала называют его *локальными экстремумами*.

Необходимые условия локального экстремума одинаковы для сильного и слабого экстремума и определяются теоремой.

Теорема 1.1 *(необходимые условия локального экстремума).*

Если функционал $I[y(x)]$, имеющий вариацию, достигает минимума или максимума на кривой $y^*(x)$, где $y^*(x)$ есть внутренняя точка области определения функционала, то при $y(x) = y^*(x)$ первая вариация функционала равна нулю:

$$\delta I = 0. \tag{1.8}$$

При выводе необходимых условий экстремума для различных постановок вариационных задач применяется следующая важная теорема.

Теорема 1.2 *(основная лемма вариационного исчисления).*

Если для каждой непрерывной функции $\eta(x)$

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx = 0 \quad , \qquad (1.9)$$

где функция f(x) непрерывная на отрезке интегрирования, то f(x) ≡ 0 на этом отрезке.

Замечание 1.1. Утверждение основной леммы вариационного исчисления и ее доказательство не изменятся, если на функцию η(*x*) наложить следующие ограничения: η(*x*) имеет непрерывную производную; η(*a*) = η(*b*) = 0.

Замечание 1.2. Все изложенное в этом разделе без изменения переносится на функционалы $I[y(x)] = I[y_1(x),...,y_n(x)]$, зависящие от вектор-функций $y(x) = (y_1(x),...,y_n(x))^T$ одной переменной или зависящие от функций нескольких переменных. Для таких функционалов вариация также определяется как главная линейная часть приращения функционала и доказывается, что на функциях (вектор-функциях), на которых реализуется экстремум, вариация равна нулю.

Цель лекций состоит в том, чтобы ввести студентов в курс вариационного исчисления. Дать основные понятия вариационного исчисления.

Ключевые вопросы:1) Определение функционала. 2) Определение приращение функционала. 3)Определение непрерывности функционала. 4)Кривые близкие в смысле близости нулевого порядка, первого и т.д. порядков.5) Определение линейности функционала. 6)Определение вариация функционала. 7)Определение максимум и минимум функционала.

Ссылки на литературные источники:
1.10.1- 1.10.10

Лекция 4. Уравнение Эйлера.

План лекции. Функционалы $\int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx$, зависящие от одной функции. Задачей поиска безусловного экстремума. Уравнением Эйлера. $f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$. Его решение $y = y(x, C_1, C_2)$ зависит от двух произвольных постоянных и определяет двухпараметрическое *семейство экстремалей*.

Необходимые условия экстремума.

Теорема 2.2.

Пусть $y = y^*(x)$ *– решение уравнений Эйлера (2.4). Если функциия* $f(x, y(x), y'(x))$ *имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, то во всех точках* $(x, y^*(x))$*, где* $f_{y'y'}(x, y^*(x), y^{*}{'}(x)) \neq 0$*, функция* $y = y^*(x)$ *имеет непрерывную вторую производную.*

Уравнение Эйлера интегрируется в квадратурах лишь в исключительных случаях. Следует выделить некоторые простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера.

1) Функция *f*(*x*, *y*, *y'*) зависит только от *y'*. Тогда уравнение Эйлера записывается в виде $\frac{d}{dx} f_{y'} = 0$ и допускает понижение прядка: $f_{y'} = C$. Это уравнение является алгебраи-

ческим относительно производной *y'*. Все его решения можно записать в виде $y' = C_1$. Тогда экстремалями является семейство линейных функций $y(x) = C_1 x + C_2$.

2) Интеграл не зависит от *y*. В этом случае уравнение Эйлера также записывается в виде $\frac{d}{dx} f_{y'} = 0$ и допускает понижение порядка: $f_{y'} = C$. Последнее уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка или алгебраическим уравнением.

3) Интеграл не зависит от *x*. Тогда уравнение Эйлера, в предположении, что $f_{y'y'} \neq 0$, сводится к следующему:

$$f_y - f_{y'y} y' - f_{y'y'} y'' = 0.$$

Умножив его на *y'*, получим $\frac{d}{dx}\left(f - y' f_{y'}\right) = 0$. Таким образом, и в этом случае уравнение Эйлера допускает понижение порядка: $f - y' f_{y'} = C$

4) Интеграл не зависит от *y'*. Тем самым получаем уравнение $f_{y'}(x, y) = 0$, которое является алгебраическим относительно неизвестной функции $y(x)$. Решения этого уравнения могут и не удовлетворять поставленным краевым условиям.

5) Интеграл линейно зависит от *y'*, то есть может быть представлен в виде $f(x, y(x), y'(x)) = P(x, y) + Q(x, y) y'$. Этот случай, включающий в себя предыдущий, охватывает те функционалы, интеграл которых удовлетворяет условию $f_{y'y'} = 0$. Такие функционалы называют *вырожденными*. Уравнение Эйлера в этом случае принимает вид

$$\frac{dQ}{dx} - P_y - Q_y y' = 0, \text{ или } Q_x + Q_y y' - P_y - Q_y y' = 0,$$

откуда $Q_x - P_y = 0$. Это уравнение алгебраическое; его решения могут и не удовлетворять краевым условиям.

<u>Цель лекции</u>. Научить студентов исследовать на экстремум функционалы. Задачей поиска безусловного экстремума.

<u>Ключевые вопросы.</u> 1) Записать уравнение Эйлера. 2) Что называется экстремалями. 3) Где достигается экстремум функционала?. 4) Какие функционалы называют *вырожденными*?5) Простейшие случаи интегрирования уравнения Эйлера.

<u>Ссылки на литературные источники</u>:

10.1-10.10

<u>Лекция</u> 5. Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка .

<u>План лекции</u>. *Функционалы* $\int_a^b f(x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x))dx$ *, зависящие от нескольких функции*

Рассмотрим множество *M* допустимых вектор-функций $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))^T$, удовлетворяющих условиям:

а) функции $y_k(x)$, $k = 1, \ldots, n$, принадлежат функциональному пространству $C^1[a, b]$;

б) функции $y_k(x)$, удовлетворяют граничным условиям

$y_k(a) = y_{ka}$, $y_k(b) = y_{kb}$, $k = 1, \dots, n$, где значения y_a, y_b заданы, т.е. каждая из кривых $y_k(x)$ проходит через две закрепленные граничные точки. Среди допустимых вектор-функций $y(x)$, принадлежащих множеству M, требуется найти вектор-функцию $y^*(x) = (y_1^*(x), \dots, y_n^*(x))^T$, для которой выполнено условие

$$I[y_1^*(x), \dots, y_n^*(x)] = \underset{y(x)\in M}{extr} \int_a^b f(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x))dx$$

. Подынтегральная функция $f(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным. Эта задача также называется задачей поиска безусловного экстремума.

Стратегия поиска решения задачи опирается на теорему о необходимом условии экстремума функционала: $\delta I = 0$ на экстремали $y^*(x)$. Поскольку эта проблема сформулирована для скалярной функции $y(x)$, применим ее к функционалу

$$I[y_1(x), \dots, y_n(x)] = \int_a^b f(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x))dx$$

задачи, варьируя лишь функцию $y_k(x)$, а остальные оставляя неизменными. При этом функционал будет зависеть лишь от одной функции $y_k(x)$.

Функционалы $\int_a^b f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x))dx$***, зависящие от производных высшего порядка одной функции***

Рассмотрим множество M допустимых функций (кривых) $y(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $y(x)$ определены и m раз непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, где a и b заданы, т.е. $y(x) \in C^m[a,b]$;

б) функции $y(x)$ удовлетворяют граничным условиям

$$y(a) = y_a,\ y^{(i)}(a) = y_a^{(i)}, i = 1, \dots, m-1,$$
$$y(b) = y_b,\ y^{(i)}(b) = y_b^{(i)}, i = 1, \dots, m-1,$$

(2.10)

где y_a, $y_a^{(i)}$, y_b, $y_b^{(i)}$ заданы.

Среди допустимых кривых $y(x)$, принадлежащих множеству M, требуется найти кривую $y^*(x)$, для которой выполнено условие

$$I[y^*(x)] = \underset{y(x)\in M}{extr} \int_a^b f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x))dx.$$

Подынтегральная функция $f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x))$ имеет непрерывные частные производные до $(m+2)$-го порядка включительно.

Стратегия поиска решения также состоит в нахождении первой вариации функционала и приравнивании его к нулю. Пусть $y^*(x) \in C^m[a,b]$ – кривая, на которой допускается экстремум функционала *I*. Тогда допустимая кривая $y(x)$ и ее производные $y^{(i)}(x)$, $i = 1,\ldots,m$, представляются в виде

$$y(x) = y^*(x) + \alpha\,\delta\,y(x),$$

$$y'(x) = y^{*}{}'(x) + \alpha\,\delta\,y'(x),$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ ,$$

$$y^{(m)}(x) = y^{*(m)}(x) + \alpha\,\delta\,y^{(m)}(x),$$

где $\delta\,y(x)$ – фиксированная вариация, удовлетворяющая условиям:

$$\delta\,y(a) = \delta\,y(b) = \delta\,y'(a) = \delta\,y'(b) = \ldots = \delta\,y^{(m-1)}(a) = \delta\,y^{(m-1)}(b) = 0.$$

Имеем

$$\delta I = \frac{d}{d\alpha} I\left[y^*(x) + \alpha\,\delta\,y(x)\right]\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x, y^*(x) + \alpha\,\delta\,y(x), \ldots, y^{*(m)}(x) + \alpha\,\delta\,y^{(m)}(x))\Big|_{\alpha=0} dx =$$

$$= \int_a^b \Big[f_y(x, y^*(x) + \alpha\,\delta\,y(x), \ldots, y^{*(m)}(x) + \alpha\,\delta\,y^{(m)}(x))\delta\,y(x) +$$

$$+ f_{y'}(x, y^*(x) + \alpha\,\delta\,y(x), \ldots, y^{*(m)}(x) + \alpha\,\delta\,y^{(m)}(x))\delta\,y'(x) + \ldots$$

$$\ldots + f_{y^{(m)}}(x, y^*(x) + \alpha\,\delta\,y(x), \ldots, y^{*(m)}(x) + \alpha\,\delta\,y^{(m)}(x))\delta\,y^{(m)}(x)\Big] dx,$$

Интегрируем по частям второе слагаемое один раз:

$$\int_a^b f_{y'}\delta\,y'(x)dx = f_{y'}\delta\,y(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} f_{y'}\delta\,y(x)dx;$$

третье слагаемое- два раза:

$$\int_a^b f_{y''}\delta\,y''(x)dx = f_{y''}\delta\,y'(x)\Big|_a^b - \left[\frac{d}{dt} f_{y''}\delta\,y(x)\right]_a^b + \int_a^b \frac{d^2}{dt^2} f_{y''}\delta\,y(x)dx;$$

и так далее до последнего слагаемого, которое интегрируем по частям *m* раз:

$$\int_a^b f_{y^{(m)}}\delta\,y^{(m)}(x)dx =$$

$$= f_{y^{(m)}}\delta y^{(m-1)}(x)\Big|_a^b - \left[\frac{d}{dt} f_{y^{(m)}}\delta y^{(m-2)}(x)\right]_a^b + \ldots + (-1)^{(m)}\int_a^b \frac{d^{(m)}}{dt^{(m)}} f_{y^{(m)}}\delta y(x)dx$$

.

получаем необходимые условия экстремума:

$$\delta I = \int_a^b \left[f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} + \frac{d^2}{dt^2} f_{y''} + \ldots + (-1)^{(m)} \frac{d^{(m)}}{dt^{(m)}} f_{y^{(m)}} \right] \delta y(x)dx = 0 .$$

Так как вариация $\delta y(x)$ может быть выбрана произвольно, а выражение в квадратных скобках является непрерывной по *x* функцией на $y^*(x)$, то по основной лемме вариационного исчисления имеем

$$f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} + \frac{d^2}{dt^2} f_{y''} + \ldots + (-1)^{(m)} \frac{d^{(m)}}{dt^{(m)}} f_{y^{(m)}} = 0 .$$

Это уравнение называется *уравнением Эйлера-Пуассона*. Оно имеет порядок $2m$, его общее решение $y = y(x, C_1, C_2, .., C_{2m})$ содержит $2m$ произвольных постоянных, которые могут быть определены из граничных условий.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Ключевые вопросы: 1) Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка. 2) В каком виде записывается уравнение Эйлера-Пуассона. 3)Экстремали уравнение Эйлера-Пуассона .

Ссылки на литературные источники:

10.1-10.10

Лекция 6. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных. Вариационные задачи в параметрической форме.

План лекции.

Функционалы $\int_a^b f(x, y_1(x), \ldots, y_1^{(m)}(x), \ldots, y_n(x), \ldots, y_n^{(m)}(x))dx$ *, зависящие от производных высшего порядка нескольких функций*

Рассмотрим множество *M* допустимых вектор-функций $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))^T$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $y_k(x)$ определены и *m* раз непрерывно дифференцируемы на отрезке [*a*, *b*], где *a* и *b* заданы, т.е. $y_k(x) \in C^m[a,b], k = 1, \ldots, n$;

б) функции $y_k(x)$ удовлетворяют граничным условиям

$$y_k(a) = y_{ka},\ y_k^{(i)}(a) = y_{ka}^{(i)},\ k = 1, \ldots, n,\ i = 1, \ldots, m-1,$$

$$y_k(b) = y_{kb},\ y_k^{(i)}(b) = y_{kb}^{(i)},\ k = 1, \ldots, n,\ i = 1, \ldots, m-1,$$

(2.14)

где $y_{ka}, y_{kb}, y_{ka}^{(i)}, y_{kb}^{(i)},\ k = 1, \ldots, n,\ i = 1, \ldots, m-1$, заданы.

Среди допустимых вектор-функций $y(x)$, принадлежащих множеству M, требуется найти вектор-функцию $y^*(x)=(y_1^*(x),\ldots,y_n^*(x))^T$, для которой выполнено условие

$$I[y^*(x)]=\underset{y(x)\in M}{extr}\int_a^b f(x,y_1(x),\ldots,y_1^{(m)}(x),\ldots,y_n(x),\ldots,y_n^{(m)}(x))dx.$$

Подынтегральная функция $f(x,y_1(x),\ldots,y_1^{(m)}(x),\ldots,y_n(x),\ldots,y_n^{(m)}(x))$ имеет непрерывные частные производные до (m+2)-го порядка включительно по всем переменным.

Стратегия поиска решения также состоит в нахождении первой вариации функционала и приравнивании его к нулю. Рассуждая аналогично предыдущему пункту, нетрудно получить, что вектор-функция $y^*(x)$, доставляющая экстремум функционалу, необходимо удовлетворяет системе уравнений Эйлера-Пуассона:

$$f_{y_k}-\frac{d}{dt}f_{y_k'}+\frac{d^2}{dt^2}f_{y_k''}+\ldots+(-1)^{(m)}\frac{d^{(m)}}{dt^{(m)}}f_{y_k^{(m)}}=0,\ k=1,\ldots,n.$$

Общее решение этой системы $y_k=y_k(x,C_1,C_2,..,C_{2mn})$ зависит от $2mn$ произвольных постоянных, которые могут быть определены из граничных условий.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы (необходимые условия экстремума).

Цель лекции: 1)Научить студентов получать уравнение Остроградского. Ознакомить с уравнением Лапласа, Пуассона и задачей Дирихле. Получить бигармоническое уравнение.

Ключевые вопросы: 1)Сформулировать общую первую краевую задачу для уравнений Лапласа. 2) Записать уравнение Остроградского 3) Уравнения Пуассона? 4) Получить бигармоническое уравнение.

Ссылки на литературные источники:

1.10.1-1.10.3, 1.10.4, 1.10.8; 1.109.

Лекци 7-8. Вариационные задачи с подвижными границами. Простейшая задача с подвижными границами. Задачи с подвижными границами для функционалов.

План лекции. Рассмотрим функционал у которого одна из граничных точек перемещается, а другая неподвижна или обе граничные точки подвижны.

Функционалы $\int_a^b f(x,y(x),y'(x))dx$***, зависящие от одной функции. Случай гладких экстремалей***

Рассмотрим множество M допустимых функций $y(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $y(x)$ непрерывно дифференцируемы, т.е. $y(x)\in C^1(\Delta)$, где Δ – некоторый конечный отрезок, внутренними точками которого являются точки a и b, которые заранее не заданы;

б) значения a, $y_a=y(a)$ и b, $y_b=y(b)$, определяющие концы допустимых кривых, удовлетворяют граничным условиям

$$\psi(a,y_a)=0,\ \varphi(b,y_b)=0. \qquad (3.1)$$

Среди допустимых кривых $y(x)$, принадлежащих множеству M, требуется найти кривую $y^*(x)$, для которой выполнено условие

$$I[y^*(x)]=\underset{y(x)\in M}{extr}\int_a^b f(x,y(x),y'(x))dx. \qquad (3.2)$$

Подынтегральная функция $f(x, y(x), y'(x))$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно.
Замечание 3.1.1. Условия (3.1) определяют подвижные границы. Таким образом, экстремум в поставленной задаче ищется на классе гладких функций, концы которых скользят по двум заданным линиям, описываемым уравнениями $\psi(a, y_a) = 0$ (для левого конца) и $\varphi(b, y_b) = 0$ (для правого конца).
Можно выделить следующие частные случаи общей постановки задачи:
1) концы допустимых кривых скользят по двум заданным вертикальным прямым, описываемыми уравнениями $x = a,\ x = b$;
2) концы допустимых кривых скользят по двум заданным кривым, описываемыми уравнениями $y = \psi(x),\ y = \varphi(x)$.
В рамках рассматриваемого частного случая можно выделить задачу, в которой заданные кривые являются прямыми линиями, параллельными оси абсцисс: $y = y_a,\ y = y_b$.
Замечание 3.1.2. В поставленной задаче наряду с поиском кривой $y^*(x)$ фактически производится выбор значений $a^*,\ b^*$, то есть ищется тройка $\left(y^*(x), a^*, b^*\right)$. При этом ε-окрестность первого порядка (ε > 0) образуется тройками $\left(y(x), a, b\right)$, удовлетворяющими условию

$$\left\| y(x) - y^*(x) \right\|_{C^1(\Delta)} < \varepsilon, \quad \left| a - a^* \right| < \varepsilon, \quad \left| b - b^* \right| < \varepsilon.$$

Функционал в задаче (3.2) точнее записывается в форме

$$I[y(x), a, b] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx$$

Функционал достигает на тройке $\left(y^*(x), a^*, b^*\right)$ слабый минимум, если $I[y(x), a, b] \geq I[y^*(x), a^*, b^*]$ в ε-окрестности первого порядка.

Стратегия поиска решения задачи (3.2) строится на использовании необходимого условия экстремума функционала: $\delta I = 0$.
Пусть на тройке $\left(y^*(x), a^*, b^*\right)$ функционал $I[y(x), a, b]$ достигает экстремум. Тогда допустимые кривые определяются соотношениями

$$y(x) = y^*(x) + \alpha\,\delta y(x),\quad y'(x) = y^*{}'(x) + \alpha\,\delta y'(x),$$

где $\delta y(x)$ – фиксированная вариация кривой, α – числовой параметр, а допустимые значения пределов интегрирования – формулами $a = a^* + \alpha\,\delta a,\quad b = b^* + \alpha\,\delta b$.
Найдем первую вариацию функционала. Для этого воспользуемся определением:

$$\delta I = \frac{d}{d\alpha} \int_{a^* + \alpha\delta a}^{b^* + \alpha\delta b} f(x, y^*(x) + \alpha\,\delta y(x), y^*{}'(x) + \alpha\,\delta y'(x))dx \Bigg|_{\alpha=0}.$$

Воспользуемся формулой дифференцирования по параметру:

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x, \alpha)dx = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}dx + f(v(\alpha), \alpha)\frac{dv}{d\alpha} - f(u(\alpha), \alpha)\frac{du}{d\alpha}.$$

Тогда получаем

$$\delta I = \left\{ \int\limits_{a^*+\alpha\delta a}^{b^*+\alpha\delta b} \Big[f_y(x, y^*(x)+\alpha\,\delta y(x), y^*{}'(x)+\alpha\,\delta y'(x))\Big|_{\alpha=0} \delta y(x) + \right.$$

$$+ f_{y'}(x, y^*(x)+\alpha\,\delta y(x), y^*{}'(x)+\alpha\,\delta y'(x))\Big|_{\alpha=0} \delta y'(x) \Big] dx +$$

$$+ f(x, y^*(x)+\alpha\,\delta y(x), y^*{}'(x)+\alpha\,\delta y'(x))\Big|_{x=b^*+\alpha\delta b} \cdot \delta b -$$

$$\left. - f(x, y^*(x)+\alpha\,\delta y(x), y^*{}'(x)+\alpha\,\delta y'(x))\Big|_{x=a^*+\alpha\delta a} \cdot \delta a \right\}_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_{a^*}^{b^*} \big[f_y \delta y(x) + f_{y'} \delta y'(x) \big] dx + f(b^*, y^*(b^*), y^*{}'(b^*))\delta b - f(a^*, y^*(a^*), y^*{}'(a^*))\delta a .$$

Вычислив второе слагаемое в интеграле по частям, получим необходимое условие экстремума в виде

$$\delta I = \int\limits_{a^*}^{b^*} \left[f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right] \delta y(x) dx + f_{y'} \delta y(x) \Big|_{a^*}^{b^*} + f\big|_{x=b^*} \delta b - f\big|_{x=a^*} \delta a = 0 . \qquad (3.3)$$

Из выражения (3.3) видно, что вариация функционала δI состоит из интегральной части, которая определяется вариацией кривой $\delta y(x)$ при фиксированных значениях $a^*,\ b^*$, и трех слагаемых, зависящих от вариаций $\delta a,\ \delta b$ концов интервала интегрирования и вариаций $\delta y(x)$ концов экстремали при $x = a^*,\ x = b^*$.

Из условия $\delta I = 0$ следуют два равенства:

1. $\displaystyle\int\limits_{a^*}^{b^*} \left[f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right] \delta y(x) dx = 0$,

то есть экстремаль $y^*(x)$ в задаче (3.2) должна быть решением уравнения Эйлера

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0 .$$

2. $f_{y'} \delta y(x) \Big|_{a^*}^{b^*} + f\big|_{x=b^*} \delta b - f\big|_{x=a^*} \delta a = 0$. (3.4)

Заметим, что $\delta y(x)\big|_{x=a^*}$ не совпадает с δy_a, а $\delta y(x)\big|_{x=b^*}$ не совпадает с δy_b.

Рисунок

На рисунке $BD = \delta y(x)\big|_{x=b^*}$, $FC = \delta y_b$, $DE = \delta b$, $EC \cong y'(b^*) \cdot \delta b$, $BD = FC - EC$, то есть $\delta y(x)\big|_{x=b^*} \cong \delta y_b - y'(b^*) \cdot \delta b$.

Заметим, что приближенное равенство справедливо с точностью до бесконечно малых величин более высокого порядка.

Аналогично $\delta y(x)\big|_{x=a^*} \cong \delta y_a - y'(a^*) \cdot \delta a$.

Поэтому равенство (3.4) можно переписать в форме

$$f_{y'}\big|_{x=b^*} \delta y_b + \big[f - y' f_{y'} \big]_{x=b^*} \delta b - f_{y'}\big|_{x=a^*} \delta y_a - \big[f - y' f_{y'} \big]_{x=a^*} \delta a = 0 . \qquad (3.5)$$

Заметим, что с учетом замены (3.4) на (3.5) вариация функционала и соответствующее необходимое условие экстремума записывается в форме

$$\delta I = \int_{a^*}^{b^*} \left[f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right] \delta y(x) dx +$$
$$+ f_{y'}\Big|_{x=b^*} \delta y_b + \left[f - y' f_{y'} \right]_{x=b^*} \delta b - f_{y'}\Big|_{x=a^*} \delta y_a - \left[f - y' f_{y'} \right]_{x=a^*} \delta a = 0. \quad (3.6)$$

В силу наличия граничных условий вариации δy_b и δb, а также δy_a и δa связаны:

$$\delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{\left(a^*, y^*(a^*)\right)} \delta a + \frac{\partial\psi}{\partial y}\Big|_{\left(a^*, y^*(a^*)\right)} \delta y_a = 0,$$

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{\left(b^*, y^*(b^*)\right)} \delta b + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{\left(b^*, y^*(b^*)\right)} \delta y_b = 0. \quad (3.7)$$

Однако, вариации δy_b, δb не связаны с вариациями δy_a, δa. Поэтому (3.5) можно переписать в виде

$$f_{y'}\Big|_{x=b^*} \delta y_b + \left[f - y' f_{y'} \right]_{x=b^*} \delta b = 0,$$
$$f_{y'}\Big|_{x=a^*} \delta y_a + \left[f - y' f_{y'} \right]_{x=a^*} \delta a = 0. \quad (3.8)$$

Условия (3.8), (3.7) называются *условиями трансверсальности*.
Запишем полученный результат в виде теоремы.
Теорема 3.1 *(необходимые условия экстремума в задаче (3.2)).*
Если на функции $y^*(x) \in C^1(\Delta)$*, удовлетворяющей граничным условиям (3.1), достигается слабый экстремум в задаче (3.2), то она необходимо удовлетворяет уравнению Эйлера*

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$$

и условиям трансверсальности (3.8), (3.7).
Замечание 3.1.3. Если один из концов допустимых кривых закреплен, то условия трансверсальности для него не записываются, поскольку в этом случае соответствующие вариации равны нулю.
Замечание 3.1.4. Если рассматривается задача, в которой концы кривых скользят по двум заданным вертикальным прямым $x = a,\ x = b$, поскольку *a* и *b* заданы, то вариации $\delta a = 0,\ \delta b = 0$. Следовательно, условия трансверсальности имеют вид

$$f_{y'}\Big|_{x=b^*} \delta y_b = 0, \qquad f_{y'}\Big|_{x=a^*} \delta y_a = 0,$$

и в силу произвольности вариаций $\delta y_b,\ \delta y_a$ получаем условия трансверсальности

$$f_{y'}\Big|_{x=b^*} = 0, \qquad f_{y'}\Big|_{x=a^*} = 0, \quad (3.9)$$

Условия (3.7) выполняются, так как уравнения прямых можно записать в виде
$\psi(a) = a - a^*,\ \varphi(b) = b - b^*$.

Замечание 3.1.5. Если концы допустимых кривых скользят по двум заданным кривым $y = \psi(x),\ y = \varphi(x)$, то условия (3.1) можно записать в виде

$$\psi(a, y_a) = y_a - \psi(a) = 0, \qquad \varphi(b, y_b) = y_b - \varphi(b) = 0.$$

Следовательно, из (3.7) получаем

$$-\psi'(a^*)\delta a + 1\cdot\delta y_a = 0, \quad -\varphi'(b^*)\delta b + 1\cdot\delta y_b = 0,$$

или $\delta y_a = \psi'(a^*)\delta a,\ \delta y_b = \varphi'(b^*)\delta b$.

Тогда из (3.8) следует

$$\left[f + (\varphi' - y')\, f_{y'}\right]_{x=b^*} \delta b = 0, \qquad \left[f + (\psi' - y')\, f_{y'}\right]_{x=a^*} \delta a = 0.$$

В силу произвольности вариаций $\delta a,\ \delta b$ получаем условия трансверсальности для данного случая:

$$\left[f + (\varphi' - y')\, f_{y'}\right]_{x=b^*} = 0,$$

$$\left[f + (\psi' - y')\, f_{y'}\right]_{x=a^*} = 0. \qquad (3.10)$$

Если рассматривается случай задания кривых в виде $y = y_a = \psi(x) = const$, $y = y_b = \varphi(x) = const$, то условия (3.10) упрощаются

$$\left[f - y' f_{y'}\right]_{x=b^*} = 0, \qquad \left[f - y' f_{y'}\right]_{x=a^*} = 0. \qquad (3.11)$$

Замечание 3.1.6. Если условия (3.1) отсутствуют, то вариации $\delta y_b, \delta b, \delta y_a, \delta a$ произвольны. Тогда из условия (3.8) следует, что

$$f_{y'}\big|_{x=b^*} = 0, \qquad \left[f - y' f_{y'}\right]_{x=b^*} = 0,$$

$$f_{y'}\big|_{x=a^*} = 0, \qquad \left[f - y' f_{y'}\right]_{x=a^*} = 0. \qquad (3.12)$$

Замечание 7. Если условия (3.1) записаны в форме $y(a) = y_a, y(b) = y_b$, то есть рассматривается задача с неподвижными границами, то, поскольку вариации $\delta y_b = \delta b = \delta y_a = \delta a = 0$, условия трансверсальности (3.8) выполняются, а произвольные постоянные в общем уравнении Эйлера определяются граничными условиями.

Цель лекции: состоит в том, чтобы научить студентов исследовать на экстремум функционалы с подвижными границами.

Ключевые вопросы : 1)Записать условия трансверсальности для функционала.2) Записать необходимые условия экстремума в задаче с подвижными границами. 3)Найти экстремальное расстояние между двумя поверхностями.

Ссылки на литературные источники:

1.10.1- 1.10.10

Лекция 9-10. Экстремали с угловыми точками. Односторонние вариации

План лекции. Задача об отражении экстремалей. Основное необходимое условие экстремума. Преломление экстремалей. Нахождение ломаных экстремали. Односторонние вариации.

Цель лекции: Научить студентов решать задачи на отражение и преломление экстремалей, являющихся обобщением соответствующих задач на отражение и преломление света.

Ключевые вопросы: 1) Сформулировать задачу об отражения экстремалей. 2) Сформулировать основную задачу преломления экстремалей. 3) Записать условия, которые должны выполняться в точках перелома. 4) Дать понятие односторонней вариации.

Ссылки на литературные источники:

1.10.1- 1.10.10

Лекция 11-12. Поле экстремалей. Функция Вейерштрасса E(x,y,p,y').

План лекции. Рассмотрим собственное поле. Центральное поле, наклон поля в точке. Поле экстремалей. Функции наклона поля. Условие построения поля экстремалей- условия Якоби. Уравнение Якоби.

Цель лекции: Познакомить студентов с полем экстремалей. Научить студентов строить центральное поле экстремалей на основе условия Якоби.

Ключевые вопросы: 1)Что называется собственным полем? 2)Что называется центральным полем, наклоном поля в точке? 3)Что называется полем экстремалей? 4)Функции наклона поля. 5)Условие построения поля экстремалей - условия Якоби. 6) Записать уравнение Якоби. 7) Как исследовать на экстремум функционал?

Ссылки на литературные источники:

1.10.1- 1.10.10

Лекция 13. Преобразование уравнений Эйлера к каноническому виду.

План лекции. Преобразование уравнений Эйлера к каноническому виду. Вывод уравнения Гамильтона – Якоби.

Цель лекции: Показать, как уравнение Эйлера преобразуется к каноническому виду. Научить студентов интегрировать каноническую систему. Уметь интегрировать уравнение Гамильтона - Якоби.

Ключевые вопросы: 1)Записать каноническое уравнение Эйлера. 2)Записать уравнение Гамильтона - Якоби

Ссылки на литературные источники:

1.10.1- 1.10.10

Лекция 14-16. Исследовать на экстремум функционалы. Вариационные задачи на условный экстремум. Задачи с подвижными границами. Вариационные задачи на условный экстремум. Изопериметрические задачи

План лекции. Рассмотреть вариационные задачи на условный экстремум при различных связях. Голономные и неголономные связи. Задачи на условный экстремум с конечными связями. Задачи на условный экстремум с дифференциальными связями. Задачи на условный экстремум с интегральными связями. Изопериметрические задачи.

Цель лекции: Научить студентов решать вариационные задачи на условный экстремум.

Ключевые вопросы: 1) Сформулировать вариационную задачу на условный экстремум. 2) Записать уравнение голономных и неголономных связей. 3) Сформулировать изопериметрическую задачу.

Ссылки на литературные источники:

1.10.1- 1.10.10

.

Лекция 17-18. Конечно-разностный метод Эйлера. Метод Ритца. Метод Канторовича.

План лекции. Рассмотрим вариационную задачу как предельную. Конечно- разностный метод Эйлера. Метод Ритца. Метод Канторовича.

Цель лекции: Научить студентов, интегрировать дифференциальные уравнения вариационных задач прямыми методами.

Ключевые вопросы: 1) Сформулировать идею конечно-разностного метода. 2) Сформулировать идею метода Ритца. 3 Сформулировать идею метод Канторовича.

Ссылки на литературные источники:

1.10.1- 1.10.10

3. Методические указания

3.1 Методические указания к практическим занятиям

Для оптимальной организации изучения дисциплины студентам рекомендуется следовать следующим методическим указаниям.

Студенты очной формы обучения обязаны присутствовать на занятиях и выполнять все предусмотренные учебно-методическим комплексом дисциплины формы учебной работы; проходить промежуточный и итоговый контроль в виде защит индивидуальны и практических работ, аттестации в форме тестового контроля знаний; сдачи экзаменов в предлагаемой преподавателем форме.

Дисциплина « Краевые задачи и вариационное исчисление» изучается студентами в 4 семестре. 4 семестр включает 36 часов лекционных занятий, 36 часов практических занятий и заканчивается экзаменом. На самостоятельную работу студентов отводится 36 часов и 36 часов на экзамен.

Теоретическая часть курса включает следующие разделы тем .

Каждая лекция содержит необходимый объем теоретического материала, изучение которого предусмотрено государственным образовательным стандартом дисциплины, а также некоторые дополнительные главы, необходимые для дальнейшего изучения прикладных дисциплин. В дополнение к лекционному материалу, студентам рекомендуется использовать основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в п.1.10.

Студенты в рамках аудиторных занятий должны, в целом, владеть понятийным аппаратом, основанном на ранее изученных дисциплинах, воспринимать теоретический материал основного содержания лекции, видеть причинно-логические связи в лекции, понимать алгоритм решения задач, приводимых в лекции. Для освоения темы каждой лекции на более глубоком уровне требуется дополнительная работа с теоретическим материалом в форме прочтения и изучения основной и дополнительной литературы, самостоятельной работы с лекцией.

Практические занятия направлены на закрепление теоретического материала на практическом уровне и предусматривают реализацию аналитических методов по вариантам индивидуальных заданий. Для выполнения индивидуальных заданий необходимо освоить теоретические основы соответствующего раздела, закрепить теорию на практических занятиях и пользоваться методической литературой по данной теме. Каждое индивидуальное задание оформляется в соответствии с требованиями преподавателя и защищается на консультациях. При возникновении проблемных ситуаций в ходе решения практических задач (неясен алгоритм решения задачи, появились затруднения, связанные с решением данной задачи пр.) или освоения теоретического материала, преподаватель, при необходимости отводит дополнительное время – в рамках консультаций во внеаудиторное время.

Перед практическим занятием разобрать материал, изложенный на лекции и выполнить самостоятельную работу, предусмотренную рабочим планом. Для этого используются: конспект лекций, соответствующие разделы печатных и электронных учебников, ответы на вопросы для самоконтроля знаний. После практического занятия самостоятельно решить рекомендованные задачи на дом и индивидуальные задания.

Если у студента возникают вопросы по выполнению индивидуальных заданий или домашних заданий, то он может обратиться к преподавателю за консультацией, которая проводится один раз в неделю в заранее установленное время. Кроме этого по выполнению домашнего задания и освоению лекционного курса, вопросы желательно задавать и на практических и на теоретических занятиях.

Студент обязан проходить промежуточный и итоговый контроль в виде защит индивидуальных и практических работ, аттестации в форме тестового контроля знаний; сдачи экзамена в предлагаемой преподавателем форме.

Практический курс предусматривает практические (в 4-семестре) занятия по следующим темам (объем в часах – 2, отводимый на выполнение каждой работы).

Номера задач для аудиторных и домашних занятий из сборника 1.10.2.

Занятие1Решение краевых задач.

Вопросы для подготовки: 1) Дать определение краевой задачи.

2) Перечислить типы граничных условий и записать их математическое представление.

3)Что такое собственная функция и собственные значения.

4)Привести примеры краевых задач. 5) Записать основные типы граничных условий.

6)Постановка первой краевой задачи.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №751-756; 782-785. Филиппов А.Ф. «Сборник задач по дифференциальным уравнениям».

Занятие 2. Построение функций Грина рассматриваемых краевых задач.

Вопросы для подготовки. 1)Поставить краевую задачу для движущейся точки под действием заданной силы. 2) Какая функция называется функцией влияния или функцией Грина? 3) Сформулировать основные свойства функции Грина. 4)Как решить неоднородное уравнение с использованием функции Грина?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №764-771 Филиппов А.Ф. «Сборник задач по дифференциальным уравнениям».

Занятие 3. Простейшая задача вариационного исчисления.

Вопросы для подготовки: 1) Определение функционала. 2) Определение приращение функционала. 3)Определение непрерывности функционала. 4)Кривые близкие в смысле близости нулевого порядка, первого и т.д. порядков.5) Определение линейности функционала. 6)Определение вариация функционала. 7)Определение максимум и минимум функционала.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач № №1.1-1.8

Занятие 4. Уравнение Эйлера. Граничные условия. Экстремали.

Вопросы для подготовки: 1) Записать уравнение Эйлера. 2) Что называется экстремалями. 3) Где достигается экстремум функционала?. 4) Какие функционалы называют *вырожденными*?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №2.1-2.22.

Занятие5. Различные случаи интегрируемости уравнений Эйлера.

Вопросы для подготовки. 1) Простейшие случаи интегрирования уравнения Эйлера.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №2.23-2.40.

Занятие 6. Примеры физических и геометрических экстремальных задач

Вопросы для подготовки: 1)Сформулировать задачу Штурма-Лиувилля. 2) В каком виде Фурье представил решение уравнения свободных колебаний струны? 3)Какое движение струны называется стоячей волной? 4) Чему равна собственная частота колебаний струны? 5)В чем заключается принцип суперпозиции? Имеет ли он место для нелинейных уравнений?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №2.41-2.46.

Занятие 7. Задача на экстремум функционала, зависящего от производных высших порядков неизвестной функции

Вопросы для подготовки: 1)В чем заключается метод решения неоднородной смешанной задачи? 2) Какие неоднородности называются стационарными? 3) В каком виде ищем решение неоднородного уравнения? 4) Как обнулить граничные условия?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №2.35-2.39; 38-44.

Занятие 8. Задача об экстремуме функционала, зависящего от нескольких функций

Вопросы для подготовки: 1) Записать систему уравнений Эйлера- Пуассона. 2)Необходимые условия экстремума.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №2.40;27-31.

Занятие 9. Задачи с подвижными границами.
Вопросы для подготовки: 1) Записать условия трансверсальности для функционала.2) Записать необходимые условия экстремума в задаче с подвижными границами. 3)Найти экстремальное расстояние между двумя поверхностями.
Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач № 2.41-2.46.

Занятие 10. Слабый экстремум. Условия трансверсальности.
Вопросы для подготовки: 1)Записать систему уравнений Эйлера. 2) Найти общее решение системы. 3) Записать условие трансверсальности.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №2.49-2.54..

Занятие11. Задача Больца.

Вопросы для подготовки: 1) Записать функционал Больца. 2) Записать систему уравнений Эйлера. 3) Найти общее решение системы. 4) Записать условие трансверсальности.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №2.55-2.57.

Занятие12. Задачи на условный экстремум. Функция Лагранжа. Множители Лагранжа
Вопросы для подготовки: 1)Дайте определение условного экстремума. 2)Что называется функцией Лагранжа? 3)Что называется множителями Лагранжа?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №3.1-3.6.

Занятие 13. Изопериметрическая задача.

Вопросы для подготовки: 1)Составить функцию Лагранжа. 2) Записать систему уравнений Эйлера и уравнений связей. 3) Найти общее решение системы и выражения для множителей Лагранжа.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №3.7-3.13.

Занятие 14.Оптимальные функции.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №.

Занятие 15. Прямые методы вариационного исчисления: метод Ритца.

Вопросы для подготовки: 1)Записать частные решения уравнения Лапласа, обладающие сферической симметрией. 2) Записать частные решения уравнения Лапласа, обладающие цилиндрической симметрией.3) какие решения называются фундаментальными?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №188-190.

Занятие 16 . Метод Канторовича.

Вопросы для подготовки: 1)Как решить уравнение Лапласа в прямоугольнике? 2)Каким методом решить уравнение Лапласа вне круга?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №717-722.

Занятие 17. Метод Галеркина. Координатные функции.

Вопросы для подготовки1) Сформулировать внутреннюю задачу Дирихле. 2) Сформулировать внутреннюю задачу Неймана. 3) Сформулировать внешнюю задачу Дирихле. 4) Сформулировать внешнюю задачу Неймана. 5)Сформулировать теорему единственности для первой краевой задачи.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач .

Занятие18. Контрольная работа

Практическая часть курса методически поддержана пособиями, указанными в п.1.10.2-1.10.8.

Кроме методического пособия, студентам рекомендуется использовать также основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в п.1.10, при этом обращая внимание на практические аспекты использования алгоритмов и реализацию методов.

3.2 Методические указания по самостоятельной работе студентов

Объем самостоятельной работы студентов определяется учебным планом.

На самостоятельную работу студента по дисциплине « Краевые задачи и вариационное исчисление» отводится 36 часов и 36 часов для подготовки к экзамену.

В качестве самостоятельной работы по дисциплине « Краевые задачи и вариационное исчисление» студентам предлагается выполнять домашние задания по разделам дисциплины; заниматься подготовкой к контрольным работам, выполнять индивидуальные домашние задания по всем темам практических занятий; заниматься подготовкой к экзамену.

Для промежуточного контроля приобретенных практических навыков предусмотрены контрольная работа. (по вариантам).

Для промежуточного контроля усвоения теоретического материала предусмотрены коллоквиумы, которые проводятся по различным разделам дисциплины по вопросам к экзамену.

Контрольная работа.

Варианты контрольных заданий

Вариант№1.

1. Построить функцию Грина для $y''+y'=f(x), y(0)=0, y'(1)=0$

Варианты ответов:

a) $\begin{array}{l} G=e^{s}(e^{-x}-1),(0\le x\le s) \\ G=1-e^{s},(s\le x\le 1) \end{array}$

b) $\begin{array}{l} G=e^{-s}(e^{x}-1),(0\le x\le s) \\ G=1-e^{-s},(s\le x\le 1) \end{array}$

c) $\begin{array}{l} G=e^{s}(e^{-x}+1),(0\le x\le s) \\ G=1-e^{-s},(s\le x\le 1) \end{array}$

d) $\begin{array}{l} G=e^{s}(e^{x}-1),(0\le x\le s) \\ G=1-e^{s},(s\le x\le 1) \end{array}$

2. Найти собственные значения и собственные функции $y''=\lambda y, y(0)=0, y(l)=0$

Варианты ответов:

a) $\begin{array}{l} \lambda_k=\dfrac{-k^2\pi^2}{l^2}, \\ y_k=\sin(\dfrac{k\pi x}{l}), \end{array}$ k=1,2,…

b) $\begin{array}{l} \lambda_k=\dfrac{k\pi}{l}, \\ y_k=\cos(\dfrac{k\pi x}{l}), \end{array}$ k=1,2,…

c) $\begin{array}{l} \lambda_k = \dfrac{-k^2\pi^2}{l^2}, \\ y_k = \cos(\dfrac{k\pi x}{l}), \end{array}$ k=1,2,…

d) $\begin{array}{l} \lambda_k = \dfrac{-k^2\pi^2}{l^2}, \\ y_k = \sin(\dfrac{k^2\pi^2}{l^2}), \end{array}$ k=1,2,…

Вариант№2.

1. Построить функцию Грина для $y''-y = f(x), y'(0)=0, y'(2)+y(2)=0$
Варианты ответов:

a) $\begin{array}{l} G = -e^{s} ch(x), (0 \le x \le s) \\ G = -e^{x} ch(s), (s \le x \le 2) \end{array}$

b) $\begin{array}{l} G = e^{s} ch(x), (0 \le x \le s) \\ G = e^{x} ch(s), (s \le x \le 2) \end{array}$

c) $\begin{array}{l} G = -e^{-s} ch(x), (0 \le x \le s) \\ G = -e^{-x} ch(s), (s \le x \le 2) \end{array}$

d) $\begin{array}{l} G = -e^{-s} sh(x), (0 \le x \le s) \\ G = -e^{-x} sh(s), (s \le x \le 2) \end{array}$

2. Найти собственные значения и собственные функции $y''=\lambda y, y(0)=0, y'(l)=0$
Варианты ответов:

a) $\begin{array}{l} \lambda_k = (k-\dfrac{1}{2})^2 \dfrac{\pi^2}{l^2}, \\ y_k = \sin(k-\dfrac{1}{2})\dfrac{\pi x}{l}, \end{array}$ k=1,2,…

b) $\begin{array}{l} \lambda_k = -(k-\dfrac{1}{2})\dfrac{\pi}{l}, \\ y_k = \sin(k-\dfrac{1}{2})\dfrac{\pi x}{l}, \end{array}$ k=1,2,…

c) $\begin{array}{l} \lambda_k = -(k-\dfrac{1}{2})\dfrac{\pi}{l}, \\ y_k = \sin(k-\dfrac{1}{2})^{1/2}(\dfrac{\pi x}{l})^{1/2}, \end{array}$ k=1,2,…

d) $\lambda_k = -(k-\frac{1}{2})^2(\frac{\pi}{l})^2, \quad y_k = \sin(k-\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l},$ k=1,2,…

Вариант№3.

1. Построить функцию Грина для $y'' = f(x), y(0)=0, y(1)=0$

Варианты ответов:

a) $G=(s-1)x, (0 \le x \le s)$
$G=s(x-1), (s \le x \le 1)$

b) $G=(s-1)x, (0 \le x \le s)$
$G=s(x-1), (s \le x \le 1)$

c) $G=(s-1)x, (0 \le x \le s)$
$G=s(x-1), (s \le x \le 1)$

d) $G=(s-1)x, (0 \le x \le s)$
$G=s(x-1), (s \le x \le 1)$

2. Найти собственные значения и собственные функции $x^2 y'' = \lambda y, y(1)=0, y(a)=0, a>0$

Варианты ответов:

a) $\lambda_k = -(\frac{k\pi}{\ln(a)})^2 - \frac{1}{8}, \quad y_k = \sqrt{a}\sin(k\pi\frac{\ln(a)}{\ln(x)}),$ k=1,2,…

b) $\lambda_k = (\frac{k\pi}{\ln(a)})^2 + \frac{1}{4}, \quad y_k = \sqrt{x}\sin(k\pi\frac{\ln(a)}{\ln(x)}),$ k=1,2,…

c) $\lambda_k = -(\frac{k\pi}{\ln(a)})^2 - \frac{1}{4}, \quad y_k = \sqrt{x}\sin(k\pi\frac{\ln(x)}{\ln(a)}),$ k=1,2,…

d) $\lambda_k = -(\frac{k\pi}{\ln(a)})^2 - \frac{1}{4}, \quad y_k = \sqrt{a}\sin(k\pi\frac{\ln(x)}{\ln(a)}),$ k=1,2,…

Вариант№4.

1. Построить функцию Грина для $x^2 y''-2y = f(x), y(1)=0, y(2)+2y'(2)=0$
Варианты ответов:

a) $$G=\frac{1-x^3}{3s^3x}, (0\le x\le s)$$
$$G=\frac{1-s^3}{3s^3x}, (s\le x\le 2)$$

b) $$G=\frac{1-x^3}{3s^3x}, (1\le x\le s)$$
$$G=\frac{1-s^3}{3s^3x}, (s\le x\le 2)$$

c) $$G=\frac{1+x^3}{3s^3x}, (0\le x\le s)$$
$$G=\frac{1-s^3}{3s^3x}, (s\le x\le 2)$$

d) $$G=\frac{1-x^3}{3x^3s}, (1\le x\le s)$$
$$G=\frac{1+s^3}{3s^3x}, (s\le x\le 2)$$

2. Найти собственные значения и собственные функции $y''=\lambda y, y(0)=0, y(l)=0$
Варианты ответов:

a) $$\lambda_k=\frac{-k^2\pi^2}{l^2}, \quad y_k=\sin(\frac{k\pi x}{l}),$$ k=1,2,…

b) $$\lambda_k=\frac{k\pi}{l}, \quad y_k=\cos(\frac{k\pi x}{l}),$$ k=1,2,…

c) $$\lambda_k=\frac{-k^2\pi^2}{l^2}, \quad y_k=\cos(\frac{k\pi x}{l}),$$ k=1,2,…

d) $$\lambda_k=\frac{-k^2\pi^2}{l^2}, \quad y_k=\sin(\frac{k^2\pi^2}{l^2}),$$ k=1,2,…

4. Контроль знаний.

4.1 Текущий контроль знаний

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и для промежуточной аттестации: зачетная система оценки знаний учащихся. (Пункт рабочей программы 1.12)

Проверка остаточных знаний у студентов по вопросам, которые будут использоваться для изучения данной дисциплины, проводится при помощи входящих тестов. Пример входящего теста.

Амурский Государственный Университет

Входящие тестовые задания по проверке остаточных знаний для дисциплины «Краевые задачи и вариационное исчисление».

для направления подготовки 010400.62 – Прикладная математика и информатика.

Вариант №1

1. Чему равна производная функции $y(x)=\int_0^x \sin\frac{x-\xi}{a}d\xi$?

   a) $\cos\frac{x}{a}$

   b) $\sin\frac{x}{a}$

   c) 0

   d) $-\sin\frac{x-\xi}{a}$

2. Чему равен вектор градиента в точке $M_0(x,y,z)$ для функции $u=1/r$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$?

   a) $grad(u)=(-\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};-\frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};-\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}})$

   b) $grad(u)=(-\frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}};-\frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}};-\frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}})$

   c) $grad(u)=(\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};\frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}})$

   d) $grad(u)=(-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}})$

3. Для скалярной функции $\varphi(x,y,z)$ определить чему равна операция $rot(grad(\varphi))$.

   a) 0

   b) $(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z})\cdot\vec{i}+(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y})\cdot\vec{j}+(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z})\cdot\vec{k}$

   c) $(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2})\cdot\vec{i}+(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2})\cdot\vec{j}+(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2})\cdot\vec{k}$

   d) Правильного ответа нет.

4. Для скалярной функции $\varphi(x,y,z)$ и векторной функции $\vec{a}(x,y,z)$ определить чему равна операция $rot(\varphi\cdot\vec{a})$.
   a) $\varphi\cdot rot(\vec{a})+rot(\varphi)\cdot\vec{a}$
   b) $\vec{a}\cdot rot(\varphi)+\left[\varphi, \overrightarrow{grad(\vec{a})}\right]$
   c) $rot(\varphi)+\overrightarrow{grad(\vec{a})}$
   d) $\varphi\cdot rot(\vec{a})+\left[grad(\varphi),\vec{a}\right]$

5. Применяя формулу Остроградского, найдите поток вектора $\vec{r}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ через поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.
   a) 0
   b) $\frac{4}{9}\pi R^3$
   c) $4\pi R^3$
   d) $12\pi R^3$

6. Найдите решение неоднородного дифференциального уравнения первого порядка $y'+y\cdot tgx=\sec x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.
   a) $y=\sin x+\cos x$
   b) $y=-\sin x+\sec x$
   c) $y=\sin x$
   d) $y=-\cos x$

7. Найдите решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y''+y=1$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y(\frac{\pi}{2})=0$.
   a) $y=\sin x-\cos x$
   b) $y=1-\sin x-\cos x$
   c) $y=1-\cos x$
   d) $y=1+\sin x+\cos x$

8. Найдите решение дифференциального уравнения $y''-a^2y=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y(1)=1$.
   a) $y=\frac{1}{e^a-e^{-a}}+\frac{e^{-ax}}{e^a-e^{-a}}$
   b) $y=\frac{e^{ax}}{e^a-e^{-a}}-\frac{e^{-ax}}{e^a-e^{-a}}$
   c) $y=\frac{e^{ax}}{e^a-e^{-a}}-\frac{1}{e^a-e^{-a}}$
   d) $y=\frac{e^{ax}}{e^a-e^{-a}}+\frac{e^{-x}}{e^a-e^{-a}}$

9. Найдите коэффициенты разложения функции $u(x)=x$ на отрезке [0,1] в тригонометрический ряд Фурье по косинусам.

a) $\dfrac{1}{\pi^2(2m+1)^2}$

b) $\dfrac{-4}{\pi^2(2m)^2}$

c) $\dfrac{4}{\pi^2(2m+1)}$

d) $\dfrac{-4}{\pi^2(2m+1)^2}$

10. Найдите коэффициенты разложения функции $u(x)=1$ на отрезке [0,1] в тригонометрический ряд Фурье по синусам.

a) $\dfrac{4}{\pi(2m+1)}$

b) $\dfrac{1}{(2m+1)}$

c) $\dfrac{1}{\pi(m+1)}$

d) $\dfrac{4}{\pi(2m)}$

11. Найти решение уравнения $y''-y=2x$, удовлетворяющего краевым условиям $y(0)=0$, $y(1)=-1$:

a) $y=(shx/sh1)-2x$

b) $y=shx-2x$

c) $y=2x$

d) $y=\dfrac{1}{2}(shx/sh1)-2x$

12. Найти решение уравнения $y''+y'=1$, удовлетворяющего краевым условиям $y'(0)=0$, $y(1)=1$:

a) $y=x+e^{-x}-e^{-1}$

b) $y=e^{-x}-e^{-1}$

c) $y=x+e^{-x}$

d) $y=e^{-x}$

13. Найти решение уравнения $y''+y=1$, удовлетворяющего краевым условиям $y(0)=0$, $y(\dfrac{\pi}{2})=0$:

a) $y=1-\sin x$

b) $y=1-\sin x-\cos x$

c) $y=1-\sin 2x-\cos 3x$

d) Нет решений

14. Найти решение уравнения $y''-y'=0$, удовлетворяющего краевым условиям $y(0)=-1$, $y'(1)-y(1)=2$:

a) $y = e^x$
b) $y = e^x - 2$
c) $y = 2e^x - 4$
d) Решений нет

15. Найти решение уравнения $y' + y = 2x - \pi$, удовлетворяющего краевым условиям $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$:
a) $y = 2x - \pi + \pi\cos x + C\sin x$, где C – произвольное
b) $y = 2x - \pi$
c) $y = 2x - \pi + \pi\cos x$
d) Решений нет
16. Найти решение уравнения $y'' - y' - 2y = 0$, удовлетворяющего краевым условиям $y'(0) = 2$, $y(+\infty) = 0$:
a) $y = -2e^{-x}$
b) $y = 2e^{-x}$
c) $y = -2e^x$
d) Решений нет

17. Найти решение уравнения $y'' + y = 1$, удовлетворяющего краевым условиям $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$:
a) $y = 2e^{-x}$
b) $y = e^x$
c) $y = 2x$
d) Решений нет

18. Найти решение уравнения $y'' - y = 1$, удовлетворяющего краевым условиям $y(0) = 0$, $y(x)$ ограничено при $x \to +\infty$:
a) $y = e^{-x}$
b) $y = e^{-x} - 1$
c) $y = e^{-x} - 5e$
d) Решений нет

Текущий контроль за аудиторной и самостоятельной работой обучаемых осуществляется во время проведения практических занятий посредством устного опроса по контрольным вопросам соответствующего раздела, а также проверки домашних задач, проверкой контрольных работ. Промежуточный контроль осуществляется три раза в семестр в виде контрольных точек при анализе оценок и посещаемости студента. Приведем примеры аудиторных контрольных работ по всем разделам изучаемой дисциплины.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите расстояние между функциями $y_1(x)=x^2$, $y_2(x)= x^3$ по норме пространства: а) $C^0[0,1]$; б) $C^1[0,1]$.
2. Найдите расстояние между функциями $y_1(x)=xe^{-x}$, $y_2(x)=0$ по норме пространства: $C^0[0,2]$; б) $C^1[0,2]$.
3. Найдите расстояние между функциями $y_1(x)=x$, $y_2(x)=\ln x$ по норме пространства: $C^0[e^{-1},e]$; б) $C^1[e^{-1},e]$.

4. Покажите, что функционал $I[y]=\int_0^1 (y-y')dx$, определенный на $C^1[0,1]$ с нормой $\|\cdot\|_1$, является непрерывным на функции $y_0(x)=x^3$.

5. Покажите, что функционал $I[y]=\int_0^1 (y')^2 dx$, определенный на $C^1[0,1]$, разрывен на функции $y_0(x)\equiv 0$ в случае нормы $\|\cdot\|_0$, но непрерывен на этой функции в случае нормы $\|\cdot\|_1$.

6. Покажите, что функционал $I[y]=\int_0^1 x^3\sqrt{1+y^2}dx$, определенный на пространстве $C[0,1]$, непрерывен на функции $y_0(x)=x^2$ по норме $\|\cdot\|_0$.

7. Докажите, что любой линейный непрерывный функционал в нормированном пространстве является дифференцируемым. Запишите его дифференциал.

8. Докажите, что функционал $I[y]=\int_a^b y^2 dx$, определенный в $C^0[a,b]$, является всюду дифференцируемым. Запишите его дифференциал.

9. Проверьте, являются ли дифференцируемыми следующие функционалы: а) $I[y]=y(a)$ в $C^0[a,b]$; б) $I[y]=y(a)$ в $C^1[a,b]$; в) $I[y]=|y(a)|$ в $C^0[a,b]$; г) $I[y]=\sqrt{1+y'(a)}$, в $C^1[a,b]$.

10. Найдите первую вариацию функционала, определенного на нормированном пространстве непрерывно дифференцируемых функций:
а) $I[y]=\int_0^1 x^2\sqrt{1+y^2}dx$; б) $I[y]=\int_{-1}^1 (y'e^y+xy^2)dx$; в) $I[y]=\int_0^\pi y'Sinydx$;
г) $I[y]=y^2(0)+\int_0^1 (xy+(y')^2)dx$.

11. Найти приращение и вариацию следующих функционалов:
а) $I[y]=\int_{-1}^e (yy'+xy'^2)dx$, если $y=\ln x,\ \delta y=\dfrac{\alpha(x-1)}{e-1}$;
б) $I[y]=\int_0^\pi y'^2 Sinxdx$, если $y=Sinx$, $\delta y=\alpha Cosx$.

Найдите все экстремали функционала $I[y]$, удовлетворяющие заданным краевым условиям (№№12-20):

12. $I[y]=\int_0^{\pi/2}((y')^2-y^2)dx,\ y(0)=0,\ y(\pi/2)=1$. Отв. $y(x)=Sinx$.

13. $I[y]=\int_0^1 ((y')^2+12xy)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1$. Отв. $y(x)=x^3$.

14. $I[y]=\int_\pi^{2\pi}(4(y')^2-7yy'-y^2)dx,\ y(\pi)=0,\ y(2\pi)=0$. Отв. $y(x)=0$

15. $I[y]=\int_0^{\pi/8}(16y^2+(y')^2+2y(Sin2x+16x))dx,\ y(0)=0,\ y(\pi/8)=-\pi/8$. Отв. $y(x)=\dfrac{\sqrt{2}Sh4x}{40Sh(\pi/2)}-\dfrac{1}{20}Sin2x-x$.

16. $I[y]=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}(3x^2y^2+Cos\,y+y'(2x^3y - xSin\,y))dx, \quad y(\pi/4)=0,\ y(\pi/2)=1.$

Отв. $y(x)\in C^1[\pi/4,\pi/2]$

17. $I[y]=\int\limits_2^4(x(y')^4-2y(y')^3)dx,\ y(2)=4,\ y(4)=5$. Отв. $y(x)=0.5x+3$

18. $I[y]=\int\limits_0^1((y')^2-2x^6y'-2xy)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=-1/6$. Отв. $y(x)=2\cdot x^7/7-x^3/3-5x/42$

19. $I[y]=\int\limits_0^1 tg\ y'dx,\ y(0)=0,\ y(1)=2$. Отв. $y(x)=2x$

20. $I[y]=\int\limits_0^1((y')^2+\dfrac{2xy}{1+x^2})dx,\ y(0)=0,\ y(1)=-1$. Отв. $y(x)=05xln(x^2+1)-x+arctgx-0.25(2ln2-\pi)$

21. Покажите, что функционал

$$I[y]=\int\limits_a^b(p(x)y'+q(x)y+r(x))\,dx,$$

где $p(x)\in C^1[a,b]$, $q(x)$, $r(x)\in C[a,b]$, не имеет экстремумов.

22. Покажите, что для всякого дифференциального уравнения

$$y''=\varphi(x,y,y')$$

с дважды непрерывно дифференцируемой правой частью $\varphi(x,y,y')$ можно найти такую функцию $f(x,y,y')$, что решения этого уравнения будут экстремалями функционала $\int\limits_a^b f(x,y,y')dx$.

Найдите все экстремали заданного функционала, удовлетворяющие заданным краевым условиям:

а) $I[y]=\int\limits_0^1(120\,xy-(y'')^2)\,dx$, $y(0)=0, y(1)=1, y'(0)=0, y'(1)=6;$

г) $I[y]=\int\limits_0^1((y'')^2+y^2-2yx^2)\,dx$, $y(0)=0, y(1)=1, y'(0)=0, y'(1)=2;$

23. Среди всех функций класса $C^2[0,\pi]$, удовлетворяющих граничным условиям $y(0)=y(\pi)=0$, $y'(0)=y'(\pi)=1$, найти такую, которая реализует экстремум функционала $I[y]=\int\limits_0^{\pi}(16y^2-(y'')^2+x^2)\,dx$.

24. Найти экстремали заданных функционалов:

$I[y]=\int\limits_0^1((y'')^2+2(y')^2+y^2)\,dx$, $y(0)=y(1)=0, y'(0)=1, y'(1)=-Sh1.$

25. Найти все экстремали функционала $J[y]$,удовлетворяющие граничным условиям.

26. $J(y)=\int\limits_0^1 y''^2dx;\quad y(0)=y(1)=y'(1)=0,\ y'(0)=1.$

27. $J(y)=\int\limits_0^1(48y-y''^2)dx;\quad y(0)=y'(0)=0,\ y(1)=1, y'(1)=4.$

28. $J(y)=\int_0^1 (y''^2-24xy)dx;\quad y(0)=y'(0)=0,\ y(1)=1/5, y'(1)=1.$

29. $J(y)=\int_0^{\pi/2} (y''^2-y'^2)dx;\quad y(0)=y'(0)=0,\ y(\pi/2)=\pi/2,\ y'(\pi/2)=0.$

30. $J(y)=\int_0^{b} (y''^2+y'^2)dx;\quad y(0)=y'(0)=y(b)=y'(b)=0.$

31. $J(y)=\int_0^1 e^{-x}y''^2dx;\quad y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y(1)=e,\ y'(1)=2e.$

32. $J(y)=\int_0^1 (x+1)^3y''^2dx;\quad y(0)=1,\ y'(0)=-1,\ y(1)=1/2,\ y'(1)=-1/4.$

33. $J(y)=\int_0^{\pi/2} (y''^2-y^2+x^2)dx;\quad y(0)=1,\ y'(0)=y(\pi/2)=0,\ y'(\pi/2)=-1.$

34. $J(y)=\int_0^1 y'''^2dx;\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0,\ y(1)=1, y'(1)=4, y''(1)=12.$

35. $J(y)=\int_0^1 (y'''^2+y''^2)dx;\quad y(0)=y''(0)=0,\ y'(0)=1, y(1)=y''(1)=Sh1,$ $y'(1)=Ch1.$

36. $J(y)=\int_0^{\pi} (y'''^2-y''^2)dx;\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0,\ y(\pi)=\pi, y'(\pi)=2,$ $y''(\pi)=0.$

37. $J(y)=\int_0^{\pi} (y'''^2-y'^2)dx;\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0, y(\pi)=y''(\pi)=Sh\pi,$ $y'(\pi)=Ch\pi+1.$

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и для промежуточной аттестации: зачетная система оценки знаний учащихся, (которая является составной частью зачета по практической части курса).

Для самостоятельного решения домашних работ приведем ряд разобранных примеров.

Пример 1. Показать, что функционал

$$I[y(\cdot)]=\int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx, \tag{1}$$

определенный на множестве функций $y = y(x)$, непрерывных вместе с первой производной на отрезке $[a, b]$, непрерывен в пространстве $C^1[a,b]$, но не является непрерывным в $C^0[a,b]$.

Решение. Вначале покажем, что функционал (1) непрерывен в пространстве $C^1[a,b]$. Действительно, имеем соотношения

$$\left|I[y]-I[y_0]\right|=\left|\int_a^b\left(\sqrt{1+y'^2}-\sqrt{1+y_0'^2}\right)dx\right|\le\int_a^b\frac{|y'+y_0'|\,|y'-y_0'|}{\sqrt{1+y'^2}+\sqrt{1+y_0'^2}}\,dx.$$

Из непрерывности производных y' и y_0' следует, что

$$\frac{|y' + y_0'|}{\sqrt{1+y'^2} + \sqrt{1+y_0'^2}} \le M .$$

Далее, из определения нормы в пространстве $C^1[a,b]$ заключаем, что

$$\max_{x\in[a.b]}|y' - y_0'| = \|y' - y_0'\|_0 \le \|y - y_0\|_1 .$$

По заданному $\varepsilon > 0$ выберем $\delta = \varepsilon/(M(b–a))$. Тогда для всех $y(\cdot) \in C^1[a,b]$ и таких, что $\|y - y_0\|_1 < \delta$, имеем

$$|I[y] - I[y_0]| \le M \max_{x\in[a.b]}|y' - y_0'|\ (b-a) \le M(b-a)\|y - y_0\|_1 < \varepsilon ,$$

а это означает, что функционал (1) непрерывен в пространстве $C^1[a,b]$.

Функционал (1) не будет непрерывным в пространстве $C^0[a,b]$, так как он не ограничен в любой сильной δ - окрестности любой «точки» $y(\cdot) \in C^1[a,b]$ ввиду неограниченности всей совокупности значений производных функций $y(x) \in C^1[a,b]$.

Пример 2. Показать, что функционал

$$L(f) = \int_a^b \alpha(x) f(x) dx , \qquad (2)$$

где $\alpha(x)$ - непрерывная фиксированная функция, является линейным в пространстве $C^0[a,b]$.

Решение. Аддитивность этого функционала очевидна. Покажем его непрерывность. Учитывая, что функция $\alpha(x)$ ограничена ($|\alpha(x)| < M$), оценим модуль разности; имеем

$$|L(f) - L(f_1)| \le \int_a^b |\alpha(x)|\,|f(x) - f_1(x)| dx \le$$

$$\le M \max_{x\in[a,b]} |f(x) - f_1(x)|(b-a) \le M\|f - f_1\|_0 (b-a) < \varepsilon ,$$

как только норма $\|f - f_1\|_0 < \dfrac{\varepsilon}{M(b-a)}$. А это означает, что функционал (2) непрерывен.

Функционал (1) не является линейным в пространстве $C^0[a,b]$, ибо для него не выполнены условия непрерывности и аддитивности. Этот же функционал не будет линейным и в пространстве $C^1[a,b]$; хотя он и непрерывен, но не является аддитивным.

Пример 3. Найти расстояния $\|y - y_0\|_0$, $\|y - y_0\|_1$ между кривыми $y(x)=x^2$ и $y_0(x)=x^3$ в пространствах $C^0[0,1]$ и $C^1[0,1]$.

Решение. Найдем расстояние в пространстве $C^0[0,1]$:

$$\rho_0(x,y) = \|y - y_0\|_0 = \max_{x\in[0,1]} |x^2 - x^3| .$$

Рассмотрим функцию $f(x)= x^2– x^3$. Из необходимого условия экстремума $f'(x) = 0$ получаем $2x – 3x^2=0$, или $x_1=0$, $x_2=2/3$. Сравнивая значения функции $f(x)$ в точках экстремума и на концах промежутка $[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$, устанавливаем искомое расстояние:

$$\rho_0(x,y) = |f(x)|_{x=2/3} = 4/27 .$$

Найдем расстояние в пространстве $C^1[0,1]$:

$$\rho_1(x,y) = \|y - y_0\|_1 = \max\{\|f\|_0 , \|f'\|_0\} = \max\{\|x^2 - x^3\|_0 , \|2x - 3x^2\|_0\} .$$

Исследуя дополнительно функцию $g(x)= 2x – 3x^2$ на экстремум, из условия $g'(x)=0$ получаем $2 – 6x= 0$, или $x_3=1/3$ – стационарная точка. Сравнивая значения функции $g(x)$ в стационарной точке и на концах отрезка $[0,1]$, $g(0)=0$, $g(1/3)= 1/3$, $g(1)= -1$, устанавливаем

$$\|g\|_0 = \|2x - 3x^2\|_0 = |2x - 3x^2|_{x=1} = 1 ,$$

то есть

$$\rho_1(x,y) = \max\{4/27, 1\} = 1 .$$

Пример 4. Найти первую вариацию функционала

$$I[y(\cdot)]=\int_a^b y^2(x)\,dx.$$

Решение. Сначала найдем вариацию функционала как линейную часть его приращения

$$\Delta I=\int_a^b [y(x)+\delta y(x)]^2\,dx-\int_a^b y^2(x)\,dx=\int_a^b 2y(x)\cdot\delta y(x)dx+\int_a^b [\delta y(x)]^2\,dx.$$

Заметим, что первое слагаемое линейно относительно вариации $\delta y(x)$; второе слагаемое имеет более высокий порядок малости при $\|\delta y\|_0\to 0$. Действительно

$$\int_a^b [\delta y(x)]^2\,dx\le\int_a^b [\max_{x\in[a,b]}|\delta y(x)|]^2\,dx=[\max_{x\in[a,b]}|\delta y(x)|]^2(b-a)=(b-a)\|\delta y\|_0^2.$$

Таким образом

$$\delta I=\int_a^b 2y(x)\cdot\delta y(x)dx.$$

Найдем вариацию функционала другим способом. Рассмотрим изменение функционала на семействе функций $y(x,\alpha)=y(x)+\alpha\,\delta y(x)$:

$$I[y(x)+\alpha\delta y(x)]=\int_a^b [y(x)+\alpha\delta y(x)]^2\,dx.$$

Тогда

$$\delta I=\left.\frac{\partial I[y(x)+\alpha\delta y(x)]}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}=\left.\int_a^b 2[y(x)+\alpha\delta y(x)]\delta y(x)dx\right|_{\alpha=0}=\int_a^b 2y(x)\delta y(x)dx$$

.

Конечно, оба способа приводят к одному результату.

Пример 5. Доказать, что на кривой $y^*(x)=x$ функционал

$$I[y(\cdot)]=\int_0^1 y'^2(x)\,dx;\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=1$$

достигает глобального минимума.

Решение. Очевидно, функция $y^*(x)=x\in C^1[0,1]$. Рассмотрим вариации $\delta y(x)\in C^1[0,1]$, удовлетворяющие условиям $\delta y(0)=\delta y(1)=0$. Исследуем приращение функционала:

$$I[y^*(x)+\delta y(x)]-I[y^*(x)]=\int_0^1 [y^{*\prime}(x)+\delta y'(x)]^2\,dx-\int_0^1 [y^{*\prime}(x)]^2\,dx=$$

$$=2\int_0^1 y^{*\prime}(x)\delta y'(x)dx+\int_0^1 [\delta y'(x)]^2\,dx=2\delta y(x)\Big|_0^1+\int_0^1 [\delta y'(x)]^2\,dx\ge 0,$$

так как $y^{*\prime}(x)=1$. Поскольку кривая $y(x)=y^*(x)+\delta y(x)\in C^1[0,1]$ произвольна и $I[y(x)]=I[y^*(x)+\delta y(x)]\ge I[y^*(x)]$, то на функции $y^*(x)=x$ достигается глобальный минимум.

Пример 6. Доказать, что на кривой $y^*(x)=0$ функционал

$$I[y(\cdot)]=\int_0^\pi y^2(x)[3-y'^2(x)]dx;\ \ y(0)=y(\pi)=0$$

достигает слабого минимума.

Решение. Так как $I[y^*(x)]=0$, то согласно определению требуется доказать, что существует $\varepsilon>0$ такое, что для всех $y(x)$, удовлетворяющих условию

$$\|y(x)-y^*(x)\|_1=\max_{x\in[0,\pi]}\left\{\|y(x)-y^*(x)\|_0,\|y'(x)-y^{*\prime}(x)\|_0\right\}=$$

$$=\max_{x\in[0,\pi]}\left\{\|y(x)\|_0,\|y'(x)\|_0\right\}<\varepsilon,$$

справедливо неравенство $I[y(x)]\ge I[y^*(x)]=0$.

Пусть $\varepsilon=1$, тогда для всех кривых из ε– окрестности первого порядка кривой $y^*(x)\equiv 0$ выполняются условия:

$$\max_{x\in[0,\pi]}|y(x)|<\varepsilon=1,\ \max_{x\in[0,\pi]}|y'(x)|<\varepsilon=1.$$

Поэтому $0\le y^2(x)<1$, $3-y'^2(x)>0$ и

$$I[y(\cdot)]=\int_0^{\pi}y^2(x)[3-y'^2(x)]dx\ge 0,$$

что и требовалось доказать. Следовательно, на кривой $y^*(x)\equiv 0$ функционал достигает слабого минимума.

Исследуем функционал на наличие сильного минимума. При $\varepsilon=1$ ε– окрестность нулевого порядка кривой $y^*(x)\equiv 0$ образуют кривые, удовлетворяющие условию

$$\|y(x)-y^*(x)\|_0=\max_{x\in[0,\pi]}|y(x)-y^*(x)|=\max_{x\in[0,\pi]}|y(x)|<\varepsilon=1 \quad .$$

Рассмотрим последовательность функций $y_n(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\pi}\right)^n$ из этой ε– окрестности. Нетрудно заметить, что функционал на этих функциях принимает следующие значения

$$I[y_n(\cdot)]=\int_0^{\pi}y_n^2(x)[3-y_n'^2(x)]dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left(\frac{x}{\pi}\right)^{2n}[3-\frac{n^2}{4\pi^2}\left(\frac{x}{\pi}\right)^{2n-2}]dx=$$

$$=\frac{48\pi^2 n-2n^3-n^2-12\pi^2}{16\pi(2n+1)(4n-1)},$$

которые становятся отрицательными, начиная уже с $n>n_0=15$. Аналогичные рассуждения справедливы при других значениях ε. Следовательно, на кривой $y^*(x)\equiv 0$ функционал не достигает сильного минимума.

Пример. Найти функцию $y(x)\in C^1[0,b]$, на которой достигается экстремум функционала

$$I[y]=\int_0^b y(y-2x^2)dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям $y(0)=0,\ y(b)=y_1$.

Решение. Уравнение Эйлера принимает вид $2y-2x^2=0$, отсюда $y=x^2$. Граничные условия удовлетворяются только, если $y_1=b^2$. В противном случае задача не имеет решения в пространстве $C^1[a,b]$.

2. $F(x,y)=M(x,y)+y'\cdot N(x,y)$, то есть подынтегральная функция в функционале (2) линейно зависит от y'. Уравнение (3) в этом случае принимает вид

$$M_y(x,y)-N_x(x,y)=0. \qquad (6)$$

Это уравнение не является дифференциальным, а его решение может не удовлетворять граничным условиям. Это означает, что в пространстве $C^1[a,b]$ экстремали функционала (2) отсутствуют, и исходная задача имеет решение в исключительных случаях. Заметим, что если условие (6) выполняется в некоторой области, имеющей граничные точки (a,y_0) и (b,y_1), то значение функционала не зависит от вида кривой $y(x)\in C^1[a,b]$. В этом случае функционал (2) можно рассматривать как криволинейный интеграл от дифференциальной формы

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy,$$

для которой (6) является условием полного дифференциала. Исходная задача на отыскание экстремалей теряет смысл.

3. Функция F зависит только от y': $F = F(y')$. Уравнение Эйлера принимает вид $F_{y'y'} \cdot y'' = 0$, а его решение $y(x)=C_1x+C_2$. Таким образом, в данном случае экстремалями функционала $I[y(x)]$ являются всевозможные прямые.

Пример. Найти функцию $y(x) \in C^1[0,1]$, на которой достигается экстремум функционала,

$$I[y] = \int_0^1 (y')^2 e^{\cos y'} dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям $y(0)=0$, $y(1)=-4$.

Решение. Подынтегральная функция зависит только от y', $F(y') = (y')^2 e^{\cos y'}$. Поэтому семейство экстремалей представляет собой двухпараметрическое семейство прямых, $y(x)=C_1x+C_2$. Используя граничные условия, получаем $C_1=-4$, $C_2=0$. Таким образом, искомой экстремалью является функция $y(x)=-4x$.

4. Функция F не зависит от y, т.е. $F = F(x, y')$. Тогда уравнение (3) записывается в виде $\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y') = 0$, откуда получаем первый интеграл уравнения Эйлера $F_{y'}(x, y') = C_1$, т.е. дифференциальное уравнение первого порядка, решив которое, найдем экстремали функционала.

Пример. Материальная точка перемещается из точки $A(1,0)$ в точку $B(2,1)$ со скоростью $v=x$. Найти кривую, по которой время движения будет минимальным.

Решение: Используя известное кинематическое выражение $v = \frac{ds}{dt}$, где $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ – длина элемента дуги траектории точки, получаем дифференциальное соотношение для t: $dt = \frac{ds}{x}$. Поэтому время, затраченное на прохождение дуги кривой $y=y(x)$ $(1 \le x \le 2)$, определяется с помощью интеграла

$$t[y] = \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{x} dx,$$

представляющего собой функционал, в котором рассматриваемые кривые $y(x)$ удовлетворяют условиям $y(1)=0$, $y(2)=1$. Подынтегральная функция $F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{x}$ не зависит от y, поэтому из $F_{y'} = C_1 = const$ имеем равенство

$$\frac{y'}{x\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{C_1}.$$

Определяя отсюда y':

$$y' = \pm \frac{x}{\sqrt{C_1^2 - x^2}}$$

и интегрируя, находим экстремали

$$y = C_2 \pm \sqrt{C_1^2 - x^2}, \text{ или } (y - C_2)^2 + x^2 = C_1^2.$$

Из граничных условий $y(1)=0$ и $y(2)=1$ для определения C_1 и C_2 получаем систему

$$C_2^2 + 1 = C_1^2, \quad (1 - C_2)^2 + 4 = C_1^2.$$

Отсюда находим, что $C_1 = \sqrt{5}$, $C_2=2$ и уравнение искомой экстремали есть окружность $x^2 + (y-2)^2 = 5$ с центром в точке $(0,2)$ радиуса $\sqrt{5}$.

Из физических соображений ясно, что максимума для времени движения по различным кривым не существует и функция $y = 2 - \sqrt{-5 - x^2}$ дает минимум функционалу $t[y]$.

5. Функция F не зависит явно от x, т.е. $F = F(y, y')$. Уравнение Эйлера принимает вид

$$F_y - F_{yy'} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'' = 0 \quad ,$$

или (после умножения обеих частей этого равенства на y')

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = 0,$$

откуда получаем первый интеграл уравнения Эйлера

$$F - y'F_{y'} = C_1.$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка можно проинтегрировать, разрешив его относительно y' и разделив переменные, или путем введения параметра. [17, Еф-Сб-4, стр. 115]

Пример. Среди кривых, соединяющих две точки $M_0(a,y_0)$ и $M_1(b,y_1)$, найти ту, которая при вращении вокруг оси Ox образует поверхность наименьшей площади.

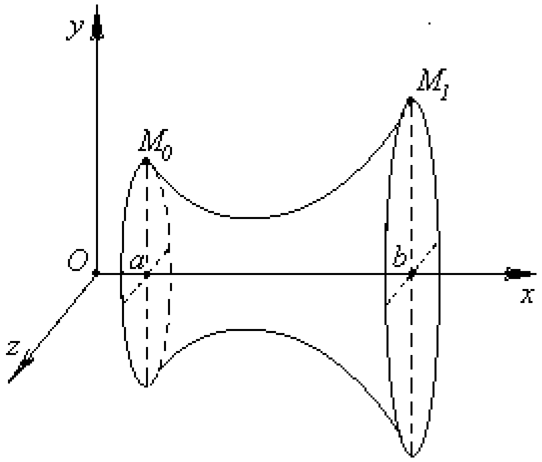

Рис. 2. Форма поверхности вращения наименьшей площади.

Решение: Площадь поверхности вращения вокруг оси Ox задается функционалом

$$I[y] = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

причем допустимые кривые $y(x)$ удовлетворяют условию $y(a)=y_0$, $y(b)=y_1$. Подынтегральная функция не зависит от x, поэтому можем воспользоваться первым интегралом уравнения Эйлера $F - y'F_{y'} = C_1$, который в данном случае принимает вид

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1 \quad \text{, или } \; y = C_1\sqrt{1+y'^2} \; .$$

После элементарных преобразований получаем отсюда уравнение

$$C_1 dy / \sqrt{y^2 - C_1^2} = dx,$$

интегрируя которое, имеем

$$ln\left|\frac{y}{C_1} + \sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^2 - 1}\right| = \frac{x}{C_1} + C_2.$$

Разрешая полученное равенство относительно y, придем к уравнению цепной линии

$$y=C_1Ch(x/C_1+C_2).$$

Постоянные C_1 и C_2 находим из системы

$$y_0=C_1Ch(a/C_1+C_2),\ \ y_1=C_1Ch(b/C_1+C_2), \qquad (5)$$

которая может иметь одно, два или ни одного решения. Дальнейшие исследования показывают, что если система (5) не имеет решения, а также при достаточно малых отношениях $y_i/(b\text{-}a)$ $(i=0,1)$, множество значений площади фигур вращения имеют инфимум, равный

$$\pi(a^2+b^2),$$

который не достигается в пространстве функций $C^1[a,b]$. При достаточно больших отношениях $y_i/(b\text{-}a)$ $(i=0,1)$ и когда система (5) имеет два решения, на ближней к оси x кривой достигается локальный максимум, а на дальней кривой – абсолютный минимум.

В общем случае приходится привлекать известные методы решения из теории дифференциальных уравнений.

Пример 4. Исследовать на экстремум функционал

$$I[y]=\int_1^2(x^2y'^2+12y^2)dx, \quad y(1)=1, y(2)=8.$$

Решение: Уравнение Эйлера для данного функционала имеет вид

$$x^2y''+2xy'-12y=0.$$

Линейные уравнения такого типа в теории дифференциальных уравнений называются также уравнениями Эйлера. Его решение ищем в виде $y=x^\lambda$. Найдем производные $y'=\lambda x^{\lambda-1}, y''=\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$; подставив их в уравнение Эйлера, получим

$$x^\lambda(\lambda^2+\lambda-12)=0.$$

Для определения λ имеем характеристическое уравнение

$$\lambda^2+\lambda-12=0,$$

корни которого $\lambda_1=3$ и $\lambda_2=-4$. Общее решение уравнения Эйлера имеет вид

$$y=c_1x^3+c_2x^{-4}.$$

Из граничных условий $y(1)=1, y(2)=8$ для определения постоянных C_1 и C_2 получаем систему

$$C_1+C_2=1, \qquad 8C_1+C_2/16=8.$$

Отсюда находим $C_1=1,\ C_2=0$. Следовательно, $y=x^3$ есть экстремаль данного функционала. В этом примере экстремаль $y=x^3$ реализует минимум функционала.

Пример 1. Найти экстремали функционала

$$I[y]=\int_0^\pi(y^2-y'^2-2y\sin x)dx$$

при условии, что левый конец закреплен $(y(0)=0)$, а правый перемещается по прямой $x=\pi$.

Решение: На значение экстремали $y(x)$ в правом конце $x=\pi$ не накладывается никаких условий, поэтому для отыскания экстремали следует найти решение уравнения Эйлера $y''+y=\sin x$ при естественном граничном условии $F_{y'}\big|_{x=\pi}=y'\big|_{x=\pi}=0.$ Общее решение уравнение Эйлера записывается в виде

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x.$$

Тогда из условия $y(0)=0$ находим $C_1=0$, а из условия $y'(\pi)=0$ получаем уравнение

$$y'\Big|_{x=\pi}=\left(C_2\cos x-\frac{\cos x}{2}+\frac{x\sin x}{2}\right)\Bigg|_{x=\pi}=-C_2+\frac{1}{2}=0,$$

откуда $C_2=1/2$. Следовательно, экстремалью является кривая $y=\frac{1}{2}(\sin x-x\cos x)$.

4.2 Итоговый контроль знаний

Итоговый контроль осуществляется после успешного прохождения студентами текущего и промежуточного контроля в виде экзамена.

Необходимым условием допуска на экзамен является сдача всех практических и расчетных работ. В билет входят два вопроса и две задачи. Студент должен дать развернутый ответ на основные вопросы и краткий – на дополнительные, решить задачи.

Оценка «отлично» ставиться при полном изложении теоретического материала экзаменационного билета, ответах на дополнительные вопросы, подтверждающие знание материала, и при правильном решении задачь.

Оценка «хорошо» ставится при твердых знаниях студентом материала (в пределах конспектов лекций), при решении задачи допущены небольшие недочеты и ошибки вычислительного характера.

Оценка «удовлетворительно» ставиться, если не полностью решены задачи и на теоретические вопросы даны неполные ответы, показывающие поверхностное знание излагаемого материала.

Оценка «неудовлетворительно» ставиться, если не решены задачи и студент дал ответ без доказательства теорем.

Форма сдачи экзамена – устная. Экзамен проходит в письменной форме с последующей индивидуальной беседой преподавателя со студентом. На письменную работу над билетом отводится 2 часа. Каждый пункт оценен определенным количеством баллов.

Вопросы к экзамену приведены в рабочей программе пункт 1.9.

Приведем примеры экзаменационных билетов.

Примеры экзаменационных билетов:
Экзаменационные билеты

Билет 1

1. Вариация функционала и ее свойства.
2. Условие Якоби включения экстремали в поле экстремалей.
3. Исследовать на экстремум функционал:

$$v[y(x)]=\int_1^2 y'(1+x^2y')dx;\ \ y(1)=3,\ \ y(2)=5.$$

4. Найти экстремали изопериметрической задачи:

$$v[y(x)]=\int_0^\pi y\ Sin\ x\ dx;\ \int_0^\pi y'^2dx=3\pi/2;\ \ y(0)=0,\ \ y(\pi)=\pi.$$

Билет 2

1. Необходимое условие экстремума функционала.
2. Функция Вейерштрасса E(x,y,p,y'). Условие сильного и слабого экстремума для функционала.
3. Найти геодезические линии круглого цилиндра $r = R$.

Указание: решение удобно искать в цилиндрических координатах r, φ, z.

Найти экстремали функционала в задаче с подвижными границами: $v[y(x)] = \int_0^{x_1} y'^2 dx; \ y(0) = 0, \ y(x_1) = -x_1 - 1.$

5 Интерактивные технологии и инновационные методы, используемые в образовательном процессе

При преподавании дисциплины «Краевые задачи и вариационное исчисление» используются следующие инновационные технологии и методы: применение мультимедийного проектора при чтении лекций, использование ресурсов сети Internet и электронных учебников при самостоятельной работе студентов, дискуссии в обсуждении проблемных ситуаций.

Занятия, проводимые в интерактивных формах, используются на лекциях и практических занятиях, темы которых приведены в таблице пункт 1.8 рабочей программы..