Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Амурский государственный университет»

Кафедра математического анализа и моделирования

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

основной образовательной программы по специальности

010101.65 «Математика»

1.**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА**

1.1. ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ СТАНДАРТ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Специальность 010101 – «Математика»

Квалификация – Математик

ОПД.Ф.ОЗ Аналитическая геометрия Векторы: векторы, их сложение и умножение на число; линейная зависимость векторов и ее геометрический смысл; базис и координаты; скалярное произведение векторов; переход от одного базиса к другому; ориентация; ориентированный объем параллелепипеда; векторное и смешанное произведения векторов. Прямая линия и плоскость: системы координат; переход от одной системы координат к другой; уравнение прямой линии на плоскости и плоскости в пространстве; взаимное расположение прямых на плоскости и плоскостей в пространстве; прямая в пространстве. Линии второго порядка: квадратичные функции на плоскости и их матрицы; ортогональные матрицы и преобразования прямоугольных координат; ортогональные инварианты квадратичных функций; приведение уравнения линий второго порядка к каноническому виду; директориальное свойство эллипса, гиперболы и параболы; пересечение линий второго порядка с прямой; центры линий второго порядка; асимптоты и сопряженные диаметры; главные направления и главные диаметры; оси симметрии. Аффинные преобразования: определение и свойства аффинных преобразований; аффинная классификация линий второго порядка; определение и свойства изометрических преобразований; классификация движений плоскости. Поверхности второго порядка: теорема о канонических уравнениях поверхностей второго порядка (без доказательства); эллипсоиды; гиперболоиды; параболоиды; цилиндры; конические сечения; прямолинейные образующие; аффинная классификация поверхностей второго порядка. Проективная плоскость: пополненная плоскость и связка; однородные координаты; линии второго порядка в однородных координатах; проективные системы координат; проективные системы преобразования; проективная классификация линий второго порядка.

1.2. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине " **Аналитическая геометрия** "
для специальности 010101–"Математика"

Курс 1 Семестр 1, 2
Лекции 72 (36+36) час. Экзамен 1, 2 семестр
Практические (семинарские) занятия 72 (36+36) час.
Самостоятельная работа 66 час.

Всего 210 часов
Составитель Н.В. Кван, доцент

Факультет математики и информатики

Кафедра математического анализа и моделирования

2007 г.

1.3. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе

Дисциплина «Аналитическая геометрия» ставит своей целью знакомство студентов с основными разделами и методами аналитической геометрии, развитие наглядно-геометрических представлений.

В процессе обучения студенты должны овладеть умениями и навыками свободной работы с векторами и различными системами координат, прочно усвоить свойства прямых и плоскостей, изучить теорию алгебраических кривых и поверхностей второго порядка, их аффинную классификацию, различные методы приведения общих уравнений кривых и поверхностей второго порядка к каноническому виду, познакомиться с элементами проективной геометрии.

Студенты должны приобрести навыки исследования и решения задач по аналитической геометрии.

Студенты должны уметь объединить разрозненные известные им факты, привести их в систему на базе общих и логических идей, которые лежат в основе курса аналитической геометрии.

1.4. Тематическое содержание

Наименование тем, их содержание, объем в часах лекционных занятий

1 курс 1 семестр

Введение - 1 час

Предмет аналитической геометрии и краткие исторические сведения. Роль и место аналитической геометрии в системе математического образования. Аксиоматика евклидовой геометрии. Евклидовые точечные плоскость Е и пространство Е.

Векторная алгебра на плоскости - 6 часов.

Понятие направленного отрезка и свободного вектора на евклидовой плоскости. Равенство векторов, длина (модуль) вектора. Сложение и умножение векторов на скаляры. Евклидова векторная плоскость и евклидово векторное пространство. Линейные комбинации векторов, их линейная зависимость (коллинеарность, компланарность) и линейная независимость. Базис и размерность векторного пространства, координаты вектора. Линейные операции над векторами в координатах. Арифметические модели евклидовых точечных (аффинных) и векторных (линейных) пространств. Декартова (аффинная) система координат на плоскости и в пространстве. Радиус - вектор точки. Декартова прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Ортонормированный базис. Преобразование базисов и координат.

Простейшие задачи аналитической геометрии - 2 часа.

Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении. Центр тяжести конечного числа материальных точек. Площадь треугольника.

Скалярное произведение векторов – 4 часа.

Основные свойства скалярного произведения. Выражение косинуса угла между векторами и длины вектора через скалярное произведение. Проекция вектора на вектор, геометрический смысл координат вектора. Направляющие косинусы. Физический смысл скалярного произведения векторов.

Метод координат на плоскости - 3 часа.

Преобразование системы координат на плоскости. Суть метода координат на плоскости. Общее понятие об уравнениях множеств на евклидовой плоскости. Понятие алгебраической линии, ее уравнение, степени (порядки). Параметрические уравнения линии и поверхности. Полярная система координат.

Прямая линия на евклидовой плоскости - 6 часов.

Общее уравнение прямой на плоскости. Полуплоскости. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Направляющий вектор. Угловой коэффициент прямой. Уравнение прямой, проходящей через точку с заданным направляющим вектором, параметрические уравнения прямой. Уравнения прямой с угловым коэффициентом и в «отрезках». Прямая в системе координат. Условия пересечения, параллельности и совпадения прямых. Пучки прямых, центр пучка. Угол между прямыми, условия перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой. Нормальное уравнение прямой. Полярное уравнение прямой.

Классификация линий второго порядка - 14 часов

Общее уравнение линии 2- го порядка. Конические сечения: эллипс (окружность), гипербола и парабола, их канонические уравнения. Фокусы, фокальные радиусы, эксцентриситет. Асимптоты гиперболы. Директрисы Фокальные, директориальные и оптические свойства конических сечений. Линии второго порядка в полярной системе координат. Хорды и диаметры, сопряженные хордам. Сопряженные диаметры. Касательные. Пересечение линий 2- го порядка с прямой. Центры линий 2 - го порядка. Главные направления и главные диаметры. Оси симметрии. Классификация линий второго порядка. Преобразование системы координат, приводящее линию к каноническому виду.

1 курс 2 семестр

Векторная алгебра в пространстве - 6 часов

Векторы в пространстве. Ориентация векторной и аффинной плоскости и пространства. Правая ориентация. Векторное произведение векторов, его основные свойства, геометрический и механический смысл. Ориентированная площадь параллелограмма. Смешанное произведение векторов, его основные свойства, геометрический смысл. Ориентированный объем параллелепипеда. Условия коллинеарности и компланарности векторов. Выражение векторного и смешанного произведения векторов в координатах. Площадь параллелограмма и треугольника, объем параллелепипеда. Двойное векторное произведение векторов, его вычисление.

Плоскость в евклидовом пространстве – 6 часов.

Метод координат в пространстве. Понятие поверхности и линии в пространстве. Общее уравнение плоскости, ее нормальный вектор. Полупространства. Уравнения плоскости, проходящей через точку с двумя неколлинеарными направляющими векторами. Параметрические уравнения плоскости. Уравнения плоскости, проходящей через три точки. Уравнение плоскости в «отрезках». Плоскость а системе координат. Условия пересечения, параллельности и совпадения двух и трех плоскостей. Пучок и связка плоскостей. Расстояние от точки до плоскости. Нормальное уравнение плоскости. Векторное уравнение плоскости. Угол между двумя плоскостями.

Прямая в евклидовом пространстве — 6 часов

Уравнения прямой, проходящей через точку с направляющим вектором. Параметрические и векторные уравнения прямой. Уравнения прямой, проходящей через две точки. Прямая как пересечение двух плоскостей. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Взаимное расположение прямых в пространстве. Расстояние от точки до прямой в пространстве. Уравнения перпендикуляра из точки на прямую в пространстве. Угол между двумя прямыми. Скрещивающиеся прямые и расстояние между ними. Уравнения общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым. Взаимное расположение прямой и плоскости (пересечение, параллельность, принадлежность плоскости). Угол между прямой и плоскостью.

Поверхности второго порядка в пространстве — 12 часов

Общее уравнение поверхности второго порядка в пространстве. Метод сечения, как метод исследования поверхностей второго порядка. Цилиндры, конические поверхности. Поверхности вращения. Эллипсоид. Гиперболоиды. Параболоиды. Классификация поверхностей. Приведение общего уравнения поверхности 2 - г о порядка к каноническому виду ортогональными преобразованиями (алгебраическим способом и с помощью инвариантов без доказательства).

Элементы проективной геометрии - 6 часов.

Проективная плоскость как пополнение евклидовой плоскости и связка. Однородные координаты. Гармонизм. Принцип двойственности. Линии 2 - г о порядка в однородных координатах. Проективные преобразования. Проективная классификация 2-го порядка. Понятие проективного пространства и ее группы проективных преобразований. Поверхности 2- го порядка в проективном пространстве и их проективная классификация.

1.5. Практические (семинарские) занятия, их содержание и объем в часах.
Практические занятия проводятся по темам лекционного курса.

1 семестр

№	Тема занятия	Часы
1.	Вектор. Сложение и вычитание векторов, умножение вектора на скаляр.	2
2.	Зависимость векторов. Базис.	2
3.	Координаты вектора.	2
4.	Скалярное произведение векторов	2
5.	Скалярное произведение векторов.	2
6.	Системы координат. Простейшие задачи в координатах.	2
7.	Метод координат.	2
8.	Задание прямой на плоскости.	2
9.	Задачи по теме «Прямая на плоскости»	2
10.	Задачи по теме «Прямая на плоскости»	2
11.	Эллипс.	2
12.	Гипербола.	2
13.	Парабола.	2
14.	Линия второго прядка и прямая. Касательная.	2
15.	Асимптотические направления линий второго прядка.	2
16.	Центры линий второго прядка	2
17.	Диаметры линий второго прядка.	2
18.	Приведение квадрики к каноническому виду	2

2 семестр

№	Тема занятия	Часы
19.	Векторы операции над ними в пространстве, скалярное произведение в пространстве	2
20.	Базис в пространстве. Переход от базиса к базису.	2
21.	Векторное произведение векторов.	2
22.	Смешанное произведение векторов.	2
23.	Задания плоскости.	2

24.	Взаимное расположение плоскостей.	2
25.	Прямая в пространстве.	2
26.	Взаимное расположение прямых в пространстве	2
27.	Прямая и плоскость.	2
28.	Цилиндры.	2
29.	Конус	2
30.	Эллипсоид	2
31.	Гиперболоиды.	2
32.	Параболоиды.	2
33.	Пересечение поверхностей второго прядка.	2
34.	Приведение квадрики к каноническому виду	2
35.	Проективная плоскость.	2
36.	Проективные квадрики.	2

1.6. Организация самостоятельной работы студентов

№	Тема	Содержание самостоятельной работы	Часы	Форма контроля
1	Векторы на плоскости	Расчетная работа	2	Защита на консультации
2.	Прямые на плоскости	Индивидуальная домашняя контрольная работа	3	Защита на консультации
3.	Кривые второго порядка	Работа с литературой (конспект) Домашняя работа	2	Лекционный контроля
4.	Векторы в пространстве.	Расчетная работа	3	Защита на консультации
5.	Взаимное расположение 2 и 3 плоскостей.	Домашняя работа. Работа с литературой (конспект)	1	
6.	Прямая и плоскость	Индивидуальная домашняя контрольная работа	2	Защита на консультации
7.	Поверхности второго порядка (прямолинейные образующие)	Домашняя работа. Работа с литературой (конспект)	1	Лекционный контроль
8.	Построение поверхностей второго	Графическая домашняя работа	3	Защита на консультац

	порядка.			ии
9.	Приведение поверхности 2-ого прядка к каноническому виду.	Расчетно-графическая работа.	2	Защита на консультации
10.	Подготовка к экзамену	1 семестр	22	
11.	Подготовка к экзамену	2 семестр	22	

1.7. Вопросы к экзамену

1. Векторы, операции над ними.
2. Коллинеарные и компланарные векторы.
3. Линейная зависимость векторов. Базис векторного пространства. Координаты вектора.
4. Скалярное произведение векторов, его свойства.
5. Аффинная, прямоугольная и полярная системы координат. Координаты точки
6. Метод координат. Простейшие задачи в координатах.
7. Деление отрезка в заданном отношении.
8. Уравнения прямой на плоскости.
9. Полярное уравнение прямой.
10. Общее уравнение прямой на плоскости.
11. Прямая в системе координат на плоскости.
12. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.
13. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
14. Угол между двумя прямыми на плоскости.
15. Знак многочлена $Ax + By + C$
16. Пучок прямых.
17. Эллипс. Вывод канонического уравнения.
18. Эллипс. Его свойства.
19. Гипербола. Вывод канонического уравнения.
20. Гипербола. Ее свойства
21. Парабола.
22. Уравнение линии второго прядка в полярных координатах.
23. Пересечение линии второго порядка с прямой.
24. Асимптотические направления.
25. Центр линии второго порядка.
26. Диаметры.
27. Главные направления. Главные диаметры.
28. Преобразование системы координат (перенос, поворот)
29. Классификация линий второго порядка.
30. Схема приведения уравнения линии второго порядка к каноническому виду.
31. Векторы в пространстве.
32. Векторное произведение
33. Смешанное произведение
34. Задание плоскости точкой и направляющим подпространством. Задание плоскости тремя точками.

35. Задание плоскости точкой и вектором нормали. Задание плоскости «в отрезках». Параметрические уравнения плоскости.
36. Общее уравнение плоскости.
37. Условие параллельности вектора и плоскости. Расположение плоскости в системе координат.
38. Геометрический смысл многочлена $P(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$.
39. Взаимное расположение двух, трех плоскостей.
40. Угол между двумя плоскостями. Расстояние от точки до плоскости.
41. Задание прямой точкой и направляющим вектором, задание прямой двумя точками в пространстве.
42. Задание прямой двумя пересекающимися плоскостями.
43. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
44. Взаимное расположение прямой и плоскости.
45. Угол между прямой и плоскостью. Угол между двумя прямыми в пространстве.
46. Расстояние от точки до прямой в пространстве.
47. Расстояние между скрещивающимися прямыми.
48. Уравнения перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым.
49. Уравнения перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.
50. Поверхности 2-го порядка. Метод сечений.
51. Цилиндрические поверхности. Общее уравнение цилиндра.
52. Конические поверхности. Общее уравнение конуса.
53. Поверхности вращения. Сфера.
54. Эллипсоид.
55. Однополостный гиперболоид.
56. Двуполостный гиперболоид.
57. Эллиптический параболоид.
58. Гиперболический параболоид.
59. Прямолинейные образующие поверхностей 2-го порядка.
60. Классификация квадрик.
61. Пересечение поверхности второго порядка с прямой.
62. Приведение квадрики к каноническому виду.
63. Аксиомы проективной геометрии, следствия из них. Принцип двойственности
64. Теорема Дезарга. Частные случаи теоремы Дезарга
65. Однородные координаты Проективные координаты и проективные преобразования. Группа проективных преобразований
66. Сложное отношение. Сложное отношение в декартовых координатах Свойства сложного отношения с доказательством
67. Гармонизм. Построение четвертой гармонической точки.
68. Полюс, поляра. Теорема Паскаля.
69. Проективные квадрики на плоскости.
70. Проективные квадрики в пространстве.

Требования к знаниям студентов, предъявляемые на экзамене

Необходимым условием допуска на экзамен является сдача всех расчетных работ. В предлагаемый билет входят два вопроса и задача. Студент должен дать развернутые ответы на вопросы и решить предложенную задачу. Развернутый ответ предполагает полное знание теории по данной части курса, свободную ориентацию в материале.

Знания студента оцениваются «отлично» при полном изложении теоретического материала экзаменационного билета, ответах на дополнительные вопросы со свободной ориентацией в материале и других литературных источниках, при правильно выполненной практической части.

Оценка «хорошо» ставится при твердых знаниях студентом всех разделов курса (в пределах конспекта лекций) и при преимущественно правильно выполненной практической части (допускаются ошибки вычислительного характера, небольшие недочеты или неточности).

Оценку «удовлетворительно» студент получает, если дает неполные ответы на теоретические вопросы билета, показывая поверхностное знание учебного материала, владение основными понятиями и терминологией; при неверном ответе на билет или на дополнительные вопросы, при этом по крайней мере практическое задание должно быть выполнено в основном верно.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется за незнание студентом одного из разделов курса, если студент не дает ответы на теоретические вопросы билета, показывая лишь фрагментарное знание учебного материала, незнание основных понятий и терминологии, незнание способа решения задачи.

Билеты к экзамену

2 семестр

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры Кафедра:
МА и М

Факультет: ФМИ
« »-----------------------2006г. Курс: 1
Заведующий кафедрой
Дисциплина: Аналитическая
Утверждаю: --------------------------
геометрия

БИЛЕТ № 1

1. Векторы в пространстве
2. Угол между прямой и плоскостью. Угол между двумя прямыми в пространстве.
3. Построить поверхность: $2x^2 + y^2 = 8$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры Кафедра:
МА и М

Факультет: ФМИ
« »-----------------------2006г. Курс: 1
Заведующий кафедрой
Дисциплина: Аналитическая
Утверждаю: --------------------------
геометрия

БИЛЕТ № 2

1. Гармонизм. Построение четвертой гармонической точки.
2. Поверхности второго порядка. Метод сечений.
3. Даны вершины тетраэдра: А(2,-1,1), В(5,5,4), С(3,2,-1), Д(4,1,3). Найти уравнения граней.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Утверждено на заседании кафедры Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ
« »------------------------2006г. Курс: 1
Заведующий кафедрой
Дисциплина: Аналитическая
Утверждаю: ---------------------------
геометрия

БИЛЕТ № 3

1. Сложное отношение. Сложное отношение в декартовых координатах. Свойства сложного отношения.
2. Задание прямой точкой и направляющим вектором, задание прямой двумя точками в пространстве.
3. Построить поверхность: $x^2 + y^2 = \frac{z}{4}$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Утверждено на заседании кафедры Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ
« »------------------------2006г. Курс: 1
Заведующий кафедрой
Дисциплина: Аналитическая
Утверждаю: ---------------------------
геометрия

БИЛЕТ № 4

1. Геометрический смысл многочлена $P(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$.
2. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка.
3. Найти точку пересечения плоскости $2x + 3y + z - 1 = 0$ и прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Утверждено на заседании кафедры Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ
« »------------------------2006г. Курс: 1
Заведующий кафедрой
Дисциплина: Аналитическая
Утверждаю: ---------------------------
геометрия

БИЛЕТ № 5

1. Векторное произведение векторов.
2. Взаимное расположение прямой и плоскости.
3. Установить, как расположена точка $A(2;-1;3)$ относительно сферы $x^2+y^2+z^2=9$ внутри, вне ее или на ее поверхности.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Утверждено на заседании кафедры Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ
« »------------------------2006г. Курс: 1
Заведующий кафедрой
Дисциплина: Аналитическая
Утверждаю: ---------------------------
геометрия

БИЛЕТ № 6

1. Смешанное произведение векторов.
2. Расстояние от точки до прямой в пространстве.
3. Построить $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Утверждено на заседании кафедры Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ
« »------------------------2006г. Курс: 1
Заведующий кафедрой
Дисциплина: Аналитическая
Утверждаю: ---------------------------
геометрия

БИЛЕТ № 7

1. Теорема Дезарга. Частные случаи теоремы Дезарга.
2. Расстояние между скрещивающимися прямыми.
3. Доказать, что точки $A(1;2;-1), B(0;1;5), C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ лежат в одной плоскости.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Утверждено на заседании кафедры Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ
« »------------------------2006г. Курс: 1
Заведующий кафедрой
Дисциплина: Аналитическая

Утверждаю: --------------------------
геометрия

БИЛЕТ № 8

1. Задание плоскости точкой и вектором нормали. Задание плоскости «в отрезках». Параметрические уравнения плоскости.
2. Классификация квадрик.
3. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60°. Зная, что $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 6$ определить модуль вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Утверждено на заседании кафедры Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ
« »-----------------------2006г. Курс: 1
Заведующий кафедрой
Дисциплина: Аналитическая
Утверждаю: --------------------------
геометрия

БИЛЕТ № 9

1. Уравнения перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым.
2. Конические поверхности. Общее уравнение конуса
3. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$. Найти вектор $\vec{x}$ удовлетворяющий условиям: $\vec{x}\vec{a} = -5; \vec{x}\vec{b} = -11; \vec{x}\vec{c} = 20$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Утверждено на заседании кафедры Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ
« »-----------------------2006г. Курс: 1
Заведующий кафедрой
Дисциплина: Аналитическая
Утверждаю: --------------------------
геометрия

БИЛЕТ № 10

1. Задание плоскости точкой и направляющим подпространством. Задание плоскости тремя точками.
2. Однородные координаты Проективные координаты и проективные преобразования. Группа проективных преобразований
3. Объем тетраэдра $V = 5$ куб.ед., три его вершины находятся в точках $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$.Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси ОУ.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ

«   »------------------------2006г. Курс: 1

Заведующий кафедрой

Дисциплина: Аналитическая

Утверждаю: ---------------------------

геометрия

БИЛЕТ № 11

1. Общее уравнение плоскости.
2. Эллипсоид.
3. Даны $|\vec{a}| = 3; |\vec{b}| = 26; |[\vec{a}, \vec{b}]| = 72$. Вычислить $(\vec{a}, \vec{b})$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ

«   »------------------------2006г. Курс: 1

Заведующий кафедрой

Дисциплина: Аналитическая

Утверждаю: ---------------------------

геометрия

БИЛЕТ № 12

1. Условие параллельности вектора и плоскости. Расположение плоскости в системе координат.
2. Аксиомы проективной геометрии, следствия из них. Принцип двойственности.
3. Даны векторы $\vec{p} = (3;-2;1), \vec{q} = (-1;1;-2), \vec{r} = (2;1;-3)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (11;-6;5)$ по базису $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ

«   »------------------------2006г. Курс: 1

Заведующий кафедрой

Дисциплина: Аналитическая

Утверждаю: ---------------------------

геометрия

БИЛЕТ № 13

1. Взаимное расположение двух, трех плоскостей.
2. Цилиндрические поверхности. Общее уравнение цилиндра.

3. Составить параметрические и канонические уравнения прямой $l:\begin{cases} 2x+3y-z-4=0 \\ 3x-5y+2z+1=0 \end{cases}$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ

« »-----------------------2006г. Курс: 1

Заведующий кафедрой

Дисциплина: Аналитическая

Утверждаю: --------------------------

геометрия

БИЛЕТ № 14

1. Уравнения перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.
2. Проективные квадрики.
3. Составить уравнение плоскости, параллельной вектору $\vec{l}=(2;1;-1)$ и отсекает на координатных осях OX и OY отрезки $a=3, b=-2$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ

« »-----------------------2006г. Курс: 1

Заведующий кафедрой

Дисциплина: Аналитическая

Утверждаю: --------------------------

геометрия

БИЛЕТ № 15

1. Угол между двумя плоскостями. Расстояние от точки до плоскости.
2. Поверхности вращения. Сфера.
3. Даны векторы. $\vec{p}=(3;-2;1), \vec{q}=(-1;1;-2)$, $\vec{c}=(11;-6;5)$. Найти разложение вектора $\vec{r}=(2;1;-3)$ по базису $\vec{p},\vec{q},\vec{c}$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ

« »-----------------------2006г. Курс: 1

Заведующий кафедрой

Дисциплина: Аналитическая

Утверждаю: --------------------------

геометрия

БИЛЕТ № 16

1. Задание прямой двумя пересекающимися плоскостями.
2. Эллиптический параболоид.
3. Даны вершины тетраэдра: А(2,-1,1), В(5,5,4), С(3,2,-1), Д(4,1,3). Найти площадь основания.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ

« »-----------------------2006г. Курс: 1

Заведующий кафедрой

Дисциплина: Аналитическая

Утверждаю: --------------------------

геометрия

БИЛЕТ № 17

1. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
2. Пересечение поверхности второго порядка с прямой.
3. Исследовать методом сечений и построить: $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=-1$

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ

« »-----------------------2006г. Курс: 1

Заведующий кафедрой

Дисциплина: Аналитическая

Утверждаю: --------------------------

геометрия

БИЛЕТ № 18

1. Однополостный гиперболоид.
2. Полюс, поляра. Теорема Паскаля.
3. Даны вершины тетраэдра: А(2,-1,1), В(5,5,4), С(3,2,-1), Д(4,1,3). Найти углы между ребрами и основанием АВС.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры Кафедра: МА и М

Факультет: ФМИ

« »-----------------------2006г. Курс: 1

Заведующий кафедрой
Дисциплина: Аналитическая
Утверждаю: --------------------------
геометрия

БИЛЕТ № 19

1. Двуполостный гиперболоид.
2. Смешанное произведение векторов.
3. Даны вершины тетраэдра: А(2,-1,1), В(5,5,4), С(3,2,-1), Д(4,1,3). Найти уравнения высоты грани АВД.

1.8.УЧЕБНО МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ЛИСЦИПЛИНЕ

Основная литература

1. Веселов А.П., Троицкий Е.В. Лекции по аналитической геометрии. Учеб.пособие . М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом ф-те МГУ.2002.-160с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитичекая геометрия: Учеб.: Для вузов.- 5-е изд.-М.: Наука. Физматлит,1999.-224с.
3. Бурмистрова Е.Б., Лобанов С.Г. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии: Учеб. пособие. –М.: ГУ ВШЭ, 1998.-184 с.
4. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.- М.: Физмат-лит, 2004.-304с.
5. Гусак А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие по решению задач/ А.А. Гусак.-Изд-е 2-е, стереотип.-Мн.: «ТетраСистемс», 2001.-288 с.
6. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии: Учебн. пособие – 13-е изд., стереот.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.-240с.
7. А.Л.Вернер, Б.Е.Кантор, С.А.Франгулов . Геометрия. Ч.1. Учебное пособие для физико-математических факультетов педагогических институтов.- СПб.: «Специальная Литература», 1997.- 352 с.
8. А.Л.Вернер, Б.Е.Кантор, С.А.Франгулов . Геометрия. Ч.2. Учебное пособие для физико-математических факультетов педагогических институтов.- СПб.: «Специальная Литература», 1997.- 320 с.
9. В.В. Просолов, В.М. Тихомиров Геометрия. М.: МЦНМО, 1997.-352 с.
10. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. 32-е изд., стер.- СПб.: Издательство «Лань», 2005.- 336с.:ил.-(Учебники для вузов. Специальная литература).
11. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии: Учеб. Пособие / А.А.Бурдун, Е.А.Мурашко, М.М.Токачев, А.С.Феденко; Под ред. А.С.Феденко.- 2-е изд.-Мн.:Унiверсiтэцкае, 1999.-302 с.
12. А.Д.Александров, Н.Ю.Нецветаев. Геометрия: Учеб. Пособие.-М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.- 672 с.: ил.

Дополнительная литература

1. Н.В. Ефимов, Э.Р. Розендорн Линейная алгебра и многомерная геометрия.3-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.-464с.
2. Л.С. Атанасян. Геометрия. М., Просвещение, 1973, ч.1.
3. Л.С. Атанасян , В.Т. Базылев. Геометрия. М., Просвещение, 1986, ч.1.; 1987. ч.2
4. Сборник задач по геометрии./ Под редакцией В.Т. Базылева. М., Просвещение, 1980
5. Сборник задач по геометрии./ Под редакцией Л.С. Атанасяна. М., Просвещение, 1975.

6. Л.С. Атанасян , В.А. Атанасян. Сборник задач по геометрии. М., Просвещение, 1973 ч.1.
7. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии – М.: Наука, 1977.

2. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЧТЕНИЯ ЛЕКЦИЙ

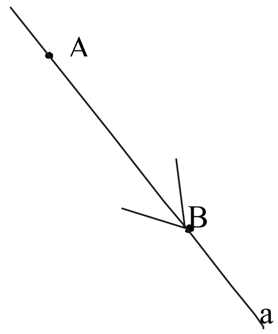
Глава I: Аналитическая геометрия. Элементы векторной алгебры.

§1 Направленный отрезок. Вектор.

План:
1.Направленный отрезок;
2.Свойства направленных отрезков;
3.Свойства векторов;
4.Операции над векторами:
   a) Сложение векторов
   b) Вычитание векторов
   c) Умножение векторов на число

Определение: Направленным отрезком называется множество точек прямой между двумя точками этой прямой, одна из точек которой называется началом, вторая – концом.

$\overline{\grave{A}\hat{A}}$ - направленный отрезок
А – начало
В – Конец



Замечание: Любой направленный отрезок имеет две характеристики: длина и направление.

$\left|\overline{\grave{A}\hat{A}}\right|$ - длина.

Определение: Два направленных отрезка, если они лежат на одной или двух параллельных прямых, называются коллинеарными.

Два направленных отрезка называются сонаправленными, если:
1) Лежат на одной или двух параллельных прямых;
2) Их концы находятся в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через их начало.

Два направленных отрезка называются противоположнонаправленными, если:
1) Лежат на концах одной или двух параллельных прямых;
2) Их концы находятся в разных полуплоскостях относительно прямой проходящей через их начало.

Два направленных отрезка называются равными, если:
1) Они сонаправлены;
2) Их длины равны.

Определение: Направленный отрезок, имеющий начало и конец в одной точке (нулевую длину), называется нулевым направленным отрезком.

Замечание: нулевой направленный отрезок коллинеарен любому направленному отрезку.

Пункт 3:

Определение: Свободным вектором (вектором) называется класс направленных отрезков равных между собой, то есть сонаправленных и равных по длине.

Замечание: Для обозначения векторов используют либо малые буквы, либо вектор обозначают одним из представителей класса направленных отрезков.

Замечание: Множество нулевых направленных отрезков – это нулевой вектор.

Замечание: Все основные свойства направленных отрезков (коллинеарность, сонапрвленность, противоположнонаправленность) справедливы и для вектора.

Определение: два вектора называются противоположными, если:
1) Они противоположнонаправлены;

2) Их длины равны.

Определение: Вектор, длина которого равна единице, называется единичным или ортом.

Пункт 4: Сложение вектора.

Суммой двух векторов называется вектор, который можно получить:

1) По правилу треугольника;
2) По правилу параллелограмма.

Правило треугольника:

1) Зафиксируем точку;
2) Отложим от фиксированной точки первый вектор;
3) От конца первого вектора отложим второй;
4) Соединим начало первого вектора и конец второго.

Правило параллелограмма:

1) Зафиксируем точку;
2) Откладывает от фиксированной точки оба вектора;
3) Полученную фигуру достраиваем до параллелограмма;
4) Проводим диагональ параллелограмма из общего начала векторов – это сумма.

Свойства сложения:

1) Коммутативность: $\tilde{a} + \hat{a} = \hat{a} + \tilde{a}$
2) Ассоциативность: $\tilde{a} + (\hat{a} + \tilde{n}) = (\tilde{a} + \hat{a}) + \tilde{n}$
3) $\tilde{a} + \overline{0} = \tilde{a}$
4) $\tilde{a} + (-\tilde{a}) = \overline{0}$

Правило многоугольника:

Для сложения нескольких векторов от фиксированной точки откладывают первый вектор, каждый следующий откладывают от конца предыдущего. Вектор суммы начинается в начале первого вектора и заканчивается в конце последнего.

Вычитание векторов.

Определение: Разностью векторов $\tilde{a}$ и $\hat{a}$, называется такой вектор $\tilde{o}$, что выполняется равенство: $\tilde{o} + \hat{a} = \tilde{a}$

Вывод: Для того, чтобы построить вектор разности вектор откладывают от одной точки, результирующий вектор направлен от конца вычитаемого к концу уменьшаемого.

Замечание: Если вектор отложить от одной точки и достроить фигуру до параллелограмма, то диагонали параллелограмма это векторы суммы и разности исходных.

Умножение вектора на число.

Определение: Произведением вектора $\tilde{a}$ на действительное число $\alpha \in \mathrm{R}$ называется вектор $\tilde{\partial} = \alpha\tilde{a}$, такой что:

1) Длина $|\tilde{\partial}| = |\tilde{a}| * |\alpha|$
2) Коллинеарны, причём: $\tilde{\partial}$ и $\tilde{a}$ сонаправлены, если $\alpha \succ 0$; $\tilde{\partial}$ и $\tilde{a}$ противоположнонаправлены, если $\alpha \prec 0$

Свойства:

1) $1 * \tilde{a} = \tilde{a}$
2) $-1 * \tilde{a} = -\tilde{a}$
3) $\alpha * \overline{0} = \overline{0}$
4) Дистрибутивность относительно суммы чисел: $(\alpha + \beta) * \tilde{a} = \alpha\tilde{a} + \beta\tilde{a}$
5) Дистрибутивность относительно суммы векторов: $(\tilde{a} + \hat{a}) * \alpha = \alpha\tilde{a} + \alpha\hat{a}$
6) Ассоциативность: $\alpha * (\beta * \tilde{a}) = (\alpha * \beta) * \tilde{a}$

§2 Линейная зависимость. Базис.

План:

1. Теорема о коллинеарных векторах;
2. Теорема о компланарных и не компланарных векторах;
3. Линейная зависимость векторов, её свойства;
4. Базис векторного пространства. Координаты вектора.

Теорема: Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{a}$ коллинеарны, причём $\vec{a} \neq 0$, то существует и притом единственное, действительное число α такое, что $\vec{a} = \alpha * \vec{a}$

Определение: Три вектора $\vec{a}, \vec{a}, \vec{n}$ - компланарны, причём $\vec{a}$ и $\vec{a}$ неколлинеарны, то существует и притом единственная пара чисел $\alpha, \beta \in$R: $\vec{n} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.

Теорема (о некомпланарныхых векторах): Если $\vec{a}, \vec{a}, \vec{n}$ некомпланарны, то для любого вектора $\vec{\partial}$ существует и притом единственный набор чисел $\alpha, \beta, \chi \in R$: $\vec{\partial} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} + \chi\vec{n}$.

Определение: Пусть дана система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Вектор $\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$ называется линейной комбинацией векторов системы, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ - действительные числа.

Определение: Линейная комбинация вида $\lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \overline{0}$ - называется нулевой линейной комбинацией.

Определение: Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называется линейнозависимой, если в нулевой линейной комбинации векторов системы хотя бы один коэффициент отличен от нуля.

Определение: Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называется линейно-независимой, если в нулевой линейной комбинации векторов системы все числовые коэффициенты равны нулю.

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \overline{0} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Свойства линейной зависимости:

1. Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно-зависима тогда и только тогда, когда один из векторов системы можно выразить через остальные в виде линейной комбинации.
2. Если часть системы векторов линейно-зависима, то и вся система векторов линейно-зависима.
3. Если вся система векторов линейно-независима, то любая её часть линейно-независима.
4. Линейно-независимая система векторов не может содержать нулевого вектора.

Определение: Базисом называется упорядоченная система векторов, удовлетворяющая свойствам: линейно-независимая система векторов; любой вектор пространства выражается через базисные в виде линейной комбинации.

Базисом плоскости может быть два неколлинеарных вектора. Базисом трёхмерного пространства является три некомпланарных вектора.

Замечание: Размерность пространства соответствует количеству векторов в базисе.

Согласно теореме о компланарности и некомпланарности векторов имеем:

1. Если $\vec{a}$ компланарен $\vec{\mathring{a}}_1$ и $\vec{\mathring{a}}_2$, то существует a_1, a_2 такие что $\vec{a} = \vec{a}_1\mathring{a}_1 + \vec{a}_2\mathring{a}_2$
2. Если $\vec{a} \in$ трёхмерному пространству, в котором $\{\vec{\mathring{a}}_1, \vec{\mathring{a}}_2, \vec{\mathring{a}}_3\}$ - базис, то существует и притом единственный набор чисел $\grave{a}_1, \grave{a}_2, \grave{a}_3 \in R$

   $\vec{a} = \grave{a}_1\vec{\mathring{a}}_1 + \grave{a}_2\vec{\mathring{a}}_2 + \grave{a}_3\vec{\mathring{a}}_3$

Определение: Числовой коэффициент в разложении вектора по векторам базиса, называются координатами вектора в данном базисе.

Замечание: Базисные векторы в собственном базисе имеют координаты из нулей и единицы.

Базис $\{\vec{\mathring{a}}_1, \vec{\mathring{a}}_2\}$, то $\vec{\mathring{a}}_1 = (1;0) \quad \vec{\mathring{a}}_2 = (0;1)$

Операции над векторами в координатах.

1. Вектор суммы имеет координаты каждая, из которых есть сумма соответствующих координат слагаемого.
2. Вектор разности имеет координаты каждая, из которых есть разность соответствующих координат уменьшаемого и вычитаемого.
3. При умножении вектора на число, каждая координата умножается на число.
4. Координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

§3 Скалярное произведение векторов.

План:

1. Определение, свойства из определения;
2. Общие свойства скалярного произведения. Скалярное произведение в координатах в ортонормированном базисе;
3. Проекция вектора. Координаты вектора;
4. Физический смысл скалярного произведения векторов.

Определение: Скалярным произведением $(\tilde{a},\vec{a})$ называется число равное произведению длин векторов на cos угла между ними.

$$(\tilde{a},\vec{a}) = |\tilde{a}| * |\vec{a}| * \cos(\tilde{a},\vec{a})$$

Замечание: Для того, чтобы найти угол между векторами, их откладывают от одной точки и рассмотреть угол между лучами с общим началом.

Следствия из определения:

1. Знак скалярного произведения зависит от угла между векторами $(\tilde{a},\vec{a}) \succ 0,$ если $\cos(\tilde{a},\vec{a}) \succ 0 \Rightarrow$ векторы образуют острый угол $(\tilde{a},\vec{a}) \prec 0,$ если $\cos(\tilde{a},\vec{a}) \prec 0 \Rightarrow$ векторы образуют тупой угол
2. $(\tilde{a},\vec{a}) \le |\tilde{a}| * |\vec{a}|$

   $(\tilde{a},\vec{a}) = |\tilde{a}| * |\vec{a}|$, векторы соноправлены

   $(\tilde{a},\vec{a}) = -|\tilde{a}| * |\vec{a}|$, векторы противоположнонаправлены
3. $(\tilde{a},\vec{a}) = 0$, если

   Либо один вектор нулевой

   Либо векторы ортогональны
4. $(\tilde{a},\tilde{a}) = |\tilde{a}| * |\tilde{a}| = |\tilde{a}|^2$

   $|\tilde{a}| = \sqrt{(\tilde{a},\tilde{a})}$
5. Скалярное произведение на множестве векторов не является бинарной алгебраической операцией

Свойства скалярного произведения:

1. Коммутативность: $(\tilde{a},\vec{a}) = (\vec{a},\tilde{a})$
2. Ассоциативность числового множителя: $(\lambda\tilde{a},\vec{a}) = \lambda(\tilde{a},\vec{a})$
3. Дистрибутивность: $(\tilde{a},\vec{a}+\tilde{n}) = (\tilde{a},\vec{a}) + (\tilde{a},\tilde{n})$

Доказательство этих свойств проводится по определению.

Среди бесконечного числа базисов плоскости особо выделяют ортонормированный базис.

Определение: Ортонормированным базисом плоскости называется базис $\{\bar{i},\bar{j}\}$, такой что:

Базисные векторы единичны – орты $|\bar{i}| = |\bar{j}| = 1$

Базисные векторы ортогональны

С учётом определения любой вектор в ортонормированном базисе можно расписать $\tilde{a} = \grave{a}_1\bar{i} + a_2\bar{j}$

Теорема: Скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат.

$$(\tilde{a},\vec{a}) = \grave{a}_1\hat{a}_1 + \grave{a}_2\hat{a}_2$$

Следствия из теоремы:

1. $\vec{a} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \quad \grave{a}_1\hat{a}_1 + \grave{a}_2\hat{a}_2 = 0$

2. $(\vec{a},\vec{a}) = \grave{a}_1{}^2 + \grave{a}_2{}^2 \qquad |\vec{a}| = \sqrt{\grave{a}_1^2 + \grave{a}_2^2}$

3. $\cos(\vec{a},\vec{a}) = \dfrac{(\vec{a},\vec{a})}{|\vec{a}| * |\vec{a}|} \qquad \cos(\vec{a},\vec{a}) = \dfrac{\grave{a}_1\hat{a}_1 + \grave{a}_2\hat{a}_2}{\sqrt{\grave{a}_1^2 + \grave{a}_2^2} + \sqrt{\hat{a}_1^2 + \hat{a}_2^2}}$

Пусть дан ортонормированный базис $\{\bar{i}, \bar{j}\}$

$\vec{a} = (\grave{a}_1, \grave{a}_2)$

$\vec{a} = \grave{a}_1\bar{i} + a_2\bar{j}$

Рассмотрим скалярное произведение вектора $\vec{a}$ с каждым из базисных векторов

$(\vec{a},\bar{i}) = (a_1\bar{i} + a_2\bar{j}, \bar{i}) = a_1(\bar{i},\bar{i}) + a_2(\bar{i},\bar{j}) = a_1(\bar{i},\bar{i}) = a_1$

$(\bar{a},\bar{i}) = |\bar{a}| * |\bar{i}| * \cos(\bar{a},\bar{i})$

$a_1 = |a| * \cos(\bar{a},\bar{i})$

Аналогично :

$a_2 = |a| * \cos(\bar{a},\bar{j})$

В ортонормированном базисе каждая координата это ортогональная проекция данного вектора на соответствующий базисный вектор.

Замечание: Косинусы углов, которые образуют данный вектор с базисными, называются направляющими косинусами данного вектора, причём так как $|\grave{a}|^2 = \grave{a}_1^2 + \grave{a}_2^2 = |\grave{a}|^2 * \cos^2(\bar{a},\bar{i}) + |a|^2 * \cos^2(\bar{a},\bar{j}) \Rightarrow$

$\cos^2(\bar{a},\bar{i}) + \cos^2(\bar{a},\bar{j}) = 1$

Проекция вектора на вектор:

$$Ïð_{\vec{a}}\vec{a} = \frac{(\vec{a},\vec{a})}{|\vec{a}|}$$

В результате вычисления проекции вектора на вектор может быть отрицательной – это возможно, если скалярное произведение между векторами отрицательное, а значит угол – тупой.

Физический смысл скалярного произведения

Векторам, изображающим силу, скорость момента силы и так далее приписывается размерность – одночлен, составленный из какого-то набора символов. Такие одночлены перемножаются и делятся обычным способом.

§4 Система координат. Простейшие задачи. Полярные координаты

План:

I. Понятие системы координат. Координаты точки;

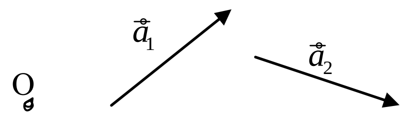
II. Простейшие задачи:

a. Координаты вектора;
b. Расстояние между точками;
c. Деление отрезков в заданном отношении;
d. Площадь треугольника;

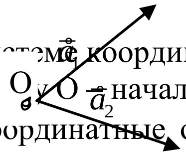
III. Полярная система координат. Связь между полярными и декартовыми координатами.

Пункт 1:

Выберем на плоскости точку О рассмотрим на плоскости базис $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$



Отложим базисные векторы от фиксированной точки, полученная конструкция называется системой координат $\{\hat{I}\ ,\vec{a}_1,\vec{a}_2\}$



В системе координат выделяют:

1. Точка О – начало координат
2. Координатные оси $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, причём длины базисных векторов – это длины мерных отрезков по этим осям.

Выделяют различные системы координат:

1. Аффинная система координат (два некомпланарных вектора)
2. Прямоугольная система координат
3. Ортонормированная система координат

Ортонормированной системой координат принято считать систему с правым базисом (движение от $\bar{i}$ к $\bar{j}$ против часовой стрелки)

Замечание: В аффинном пространстве (пространстве точек) аналогичную процедуру задания системы координат можно осуществить вводя три упорядоченные точки.

Определение: Координатами точки М в данной системе координат, называются координаты её радиус-вектора.

Таким образом между множеством точек и множеством упорядоченных пар чисел (их координат) установлено взаимнооднозначное соответствие.

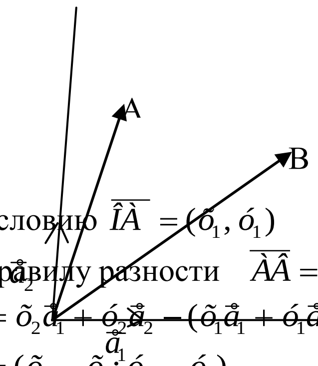
Простейшие задачи.

Задача№1.

В данной системе координат $\{\hat{I}\ ,\vec{a}_1,\vec{a}_2\}$ даны: т. $\grave{A}(\tilde{o}_1,\acute{o}_1)$, т. $\hat{A}(\tilde{o}_2,\acute{o}_2)$

Найти: Координаты вектора $\overline{\grave{A}\hat{A}}$ в данном базисе.

Решение:



По условию $\overline{\hat{I}\grave{A}}=(\tilde{o}_1,\acute{o}_1)$ $\quad\overline{\hat{I}\hat{A}}=(\tilde{o}_2,\acute{o}_2)$

По правилу разности $\overline{\grave{A}\hat{A}}=\overline{\hat{I}\hat{A}}-\overline{\hat{I}\grave{A}}$

$\overline{\grave{A}\hat{A}}=\tilde{o}_2\vec{a}_1+\acute{o}_2\vec{a}_2-(\tilde{o}_1\vec{a}_1+\acute{o}_1\vec{a}_2)=(\tilde{o}_2-\tilde{o}_1)\vec{a}_1+(\acute{o}_2-\acute{o}_1)\vec{a}_2\Rightarrow$

$\overline{\grave{A}\hat{A}}=(\tilde{o}_2-\tilde{o}_1;\acute{o}_2-\acute{o}_1)$

Вывод: Для того, чтобы найти координаты вектора необходимо из соответствующих координат конца вектора вычесть соответствующие координаты начала вектора.

Задача№2.

В базисе $\{\hat{I}\ ,\bar{i},\bar{j}\}$ т. $\grave{A}(\tilde{o}_1,\acute{o}_1)$, т. $\hat{A}(\tilde{o}_2,\acute{o}_2)$

Найти: расстояние между точками $\rho(\grave{A},\hat{A})-?$

Решение: $\rho(\grave{A},\hat{A})=\left|\overline{\grave{A}\hat{A}}\right|$

Из темы скалярное произведение знаем, что $|\tilde{a}| = \sqrt{\grave{a}_1^2 + \grave{a}_2^2}$, так как $\overline{\grave{A}\hat{A}} = (\tilde{o}_2 - \tilde{o}_1; \acute{o}_2 - \acute{o}_1)$, то $\left|\overline{\grave{A}\hat{A}}\right| = \sqrt{(\tilde{o}_2 - \tilde{o}_1)^2 + (\acute{o}_2 - \acute{o}_1)^2}$ таким образом

$$\rho(\grave{A}, \hat{A}) = \sqrt{(\tilde{o}_2 - \tilde{o}_1)^2 + (\acute{o}_2 - \acute{o}_1)^2}$$

Задача№3.

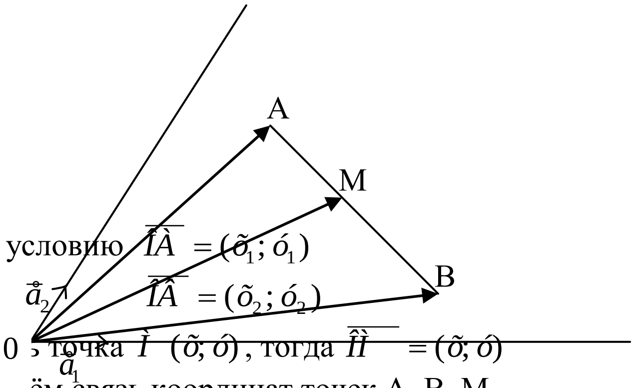
В базисе $\{\hat{I}\ , \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ т. $\grave{A}(\tilde{o}_1, \acute{o}_1)$, т. $\hat{A}(\tilde{o}_2, \acute{o}_2)$ $\quad \lambda \in R \quad \lambda \neq -1$

Найти: Координаты точки М делящей отрезок АВ в отношении λ.

Решение:

Определение: Говорят, что точка М делит отрезок АВ в отношении λ, если $\overline{\grave{A}\grave{I}} = \lambda \overline{\grave{I}\hat{A}}$ $\lambda \in \grave{A}\hat{A}$

Построим в системе координат точки А, В, М



По условию $\overline{\hat{I}\grave{A}} = (\tilde{o}_1; \acute{o}_1)$

$\overline{\hat{I}\hat{A}} = (\tilde{o}_2; \acute{o}_2)$

П з точка $\grave{I}\ (\tilde{o}; \acute{o})$, тогда $\overline{\hat{I}\grave{I}} = (\tilde{o}; \acute{o})$

Найдём связь координат точек А, В, М.

По определению $\overline{\grave{A}\grave{I}} = \lambda \overline{\grave{I}\hat{A}}$

$\overline{\grave{A}\grave{I}} = \overline{\hat{I}\grave{I}} - \overline{\hat{I}\grave{A}}$

$\overline{\grave{I}\hat{A}} = \overline{\hat{I}\hat{A}} - \overline{\hat{I}\grave{I}}$

Подставим: $\overline{\hat{I}\grave{I}} - \overline{\hat{I}\grave{A}} = \lambda(\overline{\hat{I}\hat{A}} - \overline{\hat{I}\grave{I}})$

Выразим $\overline{\hat{I}\grave{I}}$:

$\overline{\hat{I}\grave{I}} + \lambda \overline{\hat{I}\grave{I}} = \overline{\hat{I}\grave{A}} + \lambda \overline{\hat{I}\hat{A}}$

$$\overline{\hat{I}\grave{I}} = \frac{\overline{\hat{I}\grave{A}} + \lambda \overline{\hat{I}\hat{A}}}{1 + \lambda}$$

Расписывая последнее равенство для каждой из координат точки М, получим:

$$\tilde{o} = \frac{\tilde{o}_1 + \lambda \tilde{o}_2}{1 + \lambda} \qquad \acute{o} = \frac{\acute{o}_1 + \lambda \acute{o}_2}{1 + \lambda}$$

Замечание: Если точка М – середина отрезка АВ, то $\lambda = 1$, а значит каждая координата есть полусумма соответствующих координат.

$$\tilde{o} = \frac{\tilde{o}_1 + \tilde{o}_2}{2} \qquad \acute{o} = \frac{\acute{o}_1 + \acute{o}_2}{2}$$

Задача№4.

Найти площадь треугольника.

т. $\grave{A}(\tilde{o}_1, \acute{o}_1)$, т. $\hat{A}(\tilde{o}_2, \acute{o}_2)$, т. $\tilde{N}(\tilde{o}_3, \acute{o}_3)$

$$\pm S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \tilde{o}_2 - \tilde{o}_1 & \acute{o}_2 - \acute{o}_1 \\ \tilde{o}_3 - \tilde{o}_1 & \acute{o}_3 - \acute{o}_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}((\tilde{o}_2 - \tilde{o}_1)(\acute{o}_3 - \acute{o}_1) - (\acute{o}_2 - \acute{o}_1)(\tilde{o}_3 - \tilde{o}_1))$$

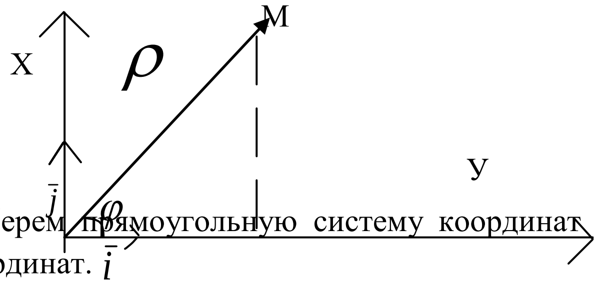
Пункт 3:

Выберем точку О – полюс, рассмотрим луч с началом в точке О, вдоль луча выберем единичный вектор $\bar{i}$, луч – полярная ось. Каждой точке плоскости поставим в соответствие две характеристики:

1. Длина её радиус-вектора
2. Угол между радиус-вектором и $\bar{i}$

Замечание. Для построения точки в полярных координатах работу удобно начинать со второй координаты.

Связь между полярной и прямоугольной системой координат.



Выберем прямоугольную систему координат $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$. Рассмотрим полярную систему координат.

О – полюс

Ох – полярная ось

$\bar{i}$ - единичный вектор

Пусть $M\ (x, y)$ - в прямоугольной системе координат, $M\ (\rho, \varphi)$ - в полярной системе координат.

По теореме Пифагора $\Rightarrow\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$Sin\varphi = \frac{y}{\rho}, \quad Cos\varphi = \frac{x}{\rho}, \quad Tg\varphi = \frac{y}{x}$$

§5 Метод координат на плоскости.

План:

1. Суть метода;
2. Уравнения фигуры;
3. Схема составления аналитического условия для геометрической фигуры.

Введение на плоскости системы координат установило взаимнооднозначное соответствие между точками плоскости и упорядоченными парами действительных чисел.

Аналитическая геометрия одним из основных своих методов использует метод координат, его суть: по средствам координат точек геометрические объекты задаются аналитически с помощью чисел, уравнений и их систем (систем неравенств).

Достоинства метода координат: при доказательстве теорем или решений задач, использование аналитических методов (метод координат) существенно упрощает рассуждения и позволяет алгоритмизировать рассуждение.

Геометрическим методом точек (ГМТ) или фигурой на плоскости будем называть множество точек, удовлетворяющих некоторому свойству.

Пример: ГМТ, удалённых от данной точки на данное расстояние – окружность с центром в данной точке, данного радиуса.

Определение: Условием, определяющим фигуру в данной системе координат называется уравнение, неравенство или их системы такие, что координаты любой точки, принадлежащей фигуре удовлетворяют им, а координаты любой точки, не принадлежащей этой фигуре, не удовлетворяют.

Замечание: Если условие, определяющее фигуру является уравнением , его называют уравнением фигуры.

Замечание: Уравнения фигуры никогда не решают, его только исследуют.

Используя метод координат решают задачи двух типов:

1. По заданным геометрическим свойствам фигуры составляют аналитическое условие, определяющее данную фигуру;
2. По заданным условиям фигуры выясняют её геометрические свойства.

Для решения задач первого типа придерживаются схемы:

1) Выбрать удобную систему координат;
2) Выбрать произвольную точку фигуры и приписать ей произвольные (свободные) координаты;
3) Записать основное характеристическое свойство всех точек данной фигуры;
4) Основные характеристические свойства записывают через координаты;
5) Упрощение выражения четвёртого пункта;
6) При необходимости строим ГМТ.

Для решения задач второго типа следует помнить:

1) Если фигура состоит из конечного множества точек, то она называется вырожденной.
2) Если на плоскости не существует точек, чьи координаты удовлетворяли бы уравнению фигуры. Такая фигура называется мнимой.
3) Если уравнение фигуры представимо в виде произведения множителей равных нулю, то фигура считается распавшейся.

Замечание: Линии на плоскости могут быть заданы:

a) Явно: $y = f(x)$
b) Не явно: $F(x;y) = 0$
c) Параметрически.

ГЛАВА II: Прямая и плоскость.

§ 1 Задания прямой.

План:

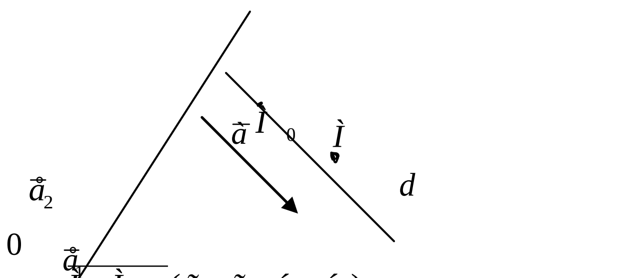
1. Задание точкой и направляющим вектором:
   - ✓ Каноническое уравнение
   - ✓ Параметрическое уравнение
2. Задание прямой двумя точками
3. Задание прямой точкой и угловым коэффициентом
4. Задание прямой в «отрезках»
5. Задание прямой точкой и вектором нормали
6. Общее уравнение прямой

Определение: Не нулевой вектор $\tilde{a}$ называется направляющим вектором прямой d, если он параллелен прямой.

Замечание: Любая прямая имеет бесконечное множество направляющих векторов, коллинеарных между собой.

Пусть дана прямая d точка $\grave{I}_0 \in d$, $\tilde{a}$ параллелен d. Используя метод координат получим уравнение прямой. Выберем систему координат $\{\hat{I}, \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$

$\grave{I}_0(\tilde{o}_0;\acute{o}_0) \quad \tilde{a} = (\grave{a}_1;\grave{a}_2)$



Рассмотрим $\overline{\grave{I}_0\grave{I}} = (\tilde{o} - \tilde{o}_0; \acute{o} - \acute{o}_0)$

$\overline{\grave{I}_0\grave{I}}$ коллинеарен $\tilde{a}$.

По теореме о коллинеарности векторов $\Rightarrow\ \exists!\,\alpha : \overline{\grave{I}_0\grave{I}} = \alpha\tilde{a}$ или в координатах имеем:

$$\begin{cases} \tilde{o} - \tilde{o}_0 = \alpha\grave{a}_1 \\ \acute{o} - \acute{o}_0 = \alpha\grave{a}_2 \end{cases}$$

Эту систему можно привести к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{o} - \tilde{o}_0}{\grave{a}_1} = \alpha \\ \dfrac{\acute{o} - \acute{o}_0}{\grave{a}_2} = \alpha \end{cases} \qquad \frac{\tilde{o} - \tilde{o}_0}{\grave{a}_1} = \frac{\acute{o} - \acute{o}_0}{\grave{a}_2}$$

Данное уравнение является уравнением прямой, заданной точками и направляющим вектором.

Замечание: так как $\tilde{a} \neq 0$, то $\grave{a}_1 \neq 0$ и $\grave{a}_2 \neq 0$, но равенство нулю одной из координат возможно, при этом уравнение прямой не теряет смысла так как уравнение прямой не решают, а исследуют.

$\grave{a}_2(\tilde{o} - \tilde{o}_0) = \grave{a}_2(\acute{o} - \acute{o}_0)$ - каноническое уравнение прямой.

$$\begin{cases} \tilde{o} = \alpha\grave{a}_1 + \tilde{o}_0 \\ \acute{o} = \alpha\grave{a}_2 + \acute{o}_0 \end{cases}$$ - параметрическое уравнение прямой.

Пункт 2:

Пусть d – прямая $\grave{I}_1 \in d$, $\grave{I}_2 \in d$. Выберем систему координат $\{\hat{I}, \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$.

$\grave{I}_1(\tilde{o}_1; \acute{o}_1) \in d$

$\grave{I}_2(\tilde{o}_2; \acute{o}_2) \in d$

$\grave{I}\ (\tilde{o}; \acute{o}) \in d$

Рассмотрим два коллинеарных вектора: $\overline{\grave{I}_1\grave{I}_2}$ $\overline{\grave{I}_1\grave{I}}$.

$\overline{\grave{I}_1\grave{I}_2} = (\tilde{o}_2 - \tilde{o}_1; \acute{o}_2 - \acute{o}_1)$

$\overline{\grave{I}_1\grave{I}} = (\tilde{o} - \tilde{o}_1; \acute{o} - \acute{o}_1)$

Знаем, что соответствующие координаты коллинеарных векторов пропорциональны, поэтому имеем:

$$\frac{\tilde{o} - \tilde{o}_1}{\tilde{o}_2 - \tilde{o}_1} = \frac{\acute{o} - \acute{o}_1}{\acute{o}_2 - \acute{o}_1}$$

Пункт 3:

Уравнение прямой можно задавать в любой системе координат, но об угловом коэффициенте для прямой говорят только, если прямая задана в ортонормированной системе координат.

Выберем систему координат $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$

$$d : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}$$

Пусть прямая d не параллельна Оу $\Rightarrow\ a_1 \neq 0$.

Определение: Число $k = \dfrac{a_1}{a_2}$ называется угловым коэффициентом прямой.

Замечание: Угловой коэффициент не зависит от выбора направляющего вектора для прямой.

Пусть $\tilde{a}$ и $\vec{a}$ направляющие векторы прямой d.

$\tilde{a}$ и $\vec{a}$ коллинеарны $\Rightarrow$ $\vec{a} = \lambda\tilde{a}$

Если $\vec{a} = (\hat{a}_1; \hat{a}_2)$, $\tilde{a} = (\grave{a}_1; \grave{a}_2)$, то

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = \lambda\grave{a}_1 \\ \hat{a}_2 = \lambda\grave{a}_2 \end{cases} \qquad \frac{\hat{a}_2}{\hat{a}_1} = \frac{\lambda\grave{a}_2}{\lambda\grave{a}_1} = \frac{\grave{a}_2}{\grave{a}_1} = \hat{e}$$

Рассмотрим каноническое уравнение прямой d вида:

$$\grave{a}_2(\tilde{o} - \tilde{o}_0) = \grave{a}_2(\acute{o} - \acute{o}_0) \qquad (:\grave{a}_1)$$

$$\hat{e}(\tilde{o} - \tilde{o}_0) = (\acute{o} - \acute{o}_0)$$

Геометрический смысл углового коэффициента.

Пусть $(\widehat{d, \bar{i}}) = \varphi$

Знаем, что каждая координата вектора $\bar{a}$ это проекция вектора на базисный вектор, поэтому имеем:

$$\grave{a}_1 = |\vec{a}| * \cos\varphi$$

$$\grave{a}_2 = |\vec{a}| * \cos(\widehat{\vec{a}, \bar{j}}) = |\vec{a}| * \cos(90^0 - \varphi) = |\vec{a}| * \sin\varphi$$

Тогда $k = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{|\bar{a}| * \sin\varphi}{|\bar{a}| * \cos\varphi} = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = tg\varphi$

Таким образом геометрический смысл углового коэффициента – это тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox.

Выберем произвольную систему координат $\{\hat{I}, \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$. Рассмотрим прямую не проходящую через начало координат, отсекающую на оси Ox отрезок a, на Oy – в, считая от начала координат.

Можно сказать: A(a,0) $\in d$ и B(0,в) $\in d$

Используя уравнение прямой по двум точкам $\dfrac{\tilde{o} - \tilde{o}_1}{\tilde{o}_2 - \tilde{o}_1} = \dfrac{\acute{o} - \acute{o}_1}{\acute{o}_2 - \acute{o}_1}$ получим:

$\dfrac{\tilde{o} - \grave{a}}{0 - \grave{a}} = \dfrac{\acute{o} - 0}{\hat{a} - 0}$ или $\dfrac{\tilde{o} - \grave{a}}{-\grave{a}} = \dfrac{\acute{o}}{\hat{a}}$

$$\hat{a}(\tilde{o} - \grave{a}) = -\grave{a}\acute{o}$$

$$\hat{a}\tilde{o} - \grave{a}\acute{o} = \grave{a}\hat{a} \quad (\div\grave{a}\hat{a})$$

$\dfrac{\hat{a}\tilde{o} - \grave{a}\acute{o}}{\grave{a}\hat{a}} = 1$ или $\dfrac{\tilde{o}}{\grave{a}} + \dfrac{\acute{o}}{\hat{a}} = 1$ - уравнение прямой в отрезках

Замечание: Знаки уравнения в отрезках указывают на то, в положительном или отрицательном направлении отсекаются отрезки.

Пусть d – прямая.

Определение: не нулевой вектор $\bar{n}$ называется вектором нормали к прямой d, если он перпендикулярен любому направляющему вектору к прямой d.

Пусть задана прямая d, $\bar{n}$ - вектор нормали, $\grave{I}_0 \in d$.

Выберем ортонормированную систему координат.

$$\bar{n} = (n_1, n_2) \quad M_0(x_0, y_0)$$

Выберем любую точку $\grave{I}\ (\tilde{o}; \acute{o}) \in d$

Рассмотрим векторы $\overline{\grave{I}_0\grave{I}} = (\tilde{o} - \tilde{o}_0; \acute{o} - \acute{o}_0)$

$\overline{\grave{I}_0\grave{I}}$ перпендикулярен $\bar{n} \Rightarrow (\overline{\grave{I}_0\grave{I}}, \bar{n}) = 0$

В координатах имеем:

$n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)=0$

Пункт 6:

При любом задании прямой её уравнение всегда можно привести к виду: $Ax+By+C=0$

Таким образом прямая задаётся уравнением первой степени от двух переменных x и y вида $Ax+By+C=0$, где коэффициенты при переменных одновременно не обращаются в ноль. $\grave{A}^2+\hat{A}^2 \neq 0$

Коэффициенты А и В, взятые в определённом порядке могут быть координатами вектора нормали, либо координатами направляющего вектора.

$n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)=0$

$n_1x+n_2y-n_1x_0-n_2y_0=0$

$Ax+By+C=0$

$n_1=A \quad n_2=B$ C – const

С другой стороны: $\dfrac{\tilde{o}-\tilde{o}_0}{\grave{a}_1}=\dfrac{\acute{o}-\acute{o}_0}{\grave{a}_2}$

$\grave{a}_2\tilde{o}-\grave{a}_1\acute{o}+\grave{a}_1\acute{o}_0-\grave{a}_2\tilde{o}_0=0$

$Ax+By+C=0$

$\grave{a}_2=\grave{A} \quad \grave{a}_1=-\hat{A} \quad \vec{\grave{a}}=(-\hat{A};\grave{A})$

5. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО И ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ

5.1 Самостоятельная работа по теме «Векторы»

Дан параллелограмм ABCD. Точка О – пересечение диагоналей. Построить вектор $\overline{AB}+\overline{CO}; \overline{AC}+\overline{OD}; \overline{AB}+\overline{DC}; \overline{AC}+\overline{OC}+\overline{OD}$.

Дан вектор а. Построить: 1) $-\frac{3}{5}\overline{a}$;

2) $2{,}5\overline{a}$;

3) $\sqrt{2}\overline{a}$.

Дан правильный шестиугольник ABCDF, О – центр:

1) Найти: а) пару коллинеарных векторов;

б) сонаправленных;

в) противоположных;

г) равных;

2) Построить: а) $\overline{AB}-\overline{OD}$;

б) $\overline{BD}+\overline{OC}-\overline{OF}$;

в) $2\overline{AB}-\overline{OE}$.

5.2 Самостоятельная работа по теме «Зависимость векторов. Базис. Координаты вектора»

1. Дан параллелограмм ABCD; $\overline{AB}=\overline{a}, \ \overline{AD}=\overline{b},$ O – точка пересечения диагоналей.

Найти коэффициент в разложении векторов $\overline{AO}, \overline{AC}, \overline{DC}, \overline{DO},$ через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

2. Найти числа α и β такие, что $\overline{m}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}$.

3. Дана равнобокая трапеция ABCD; AB||CD, $\overline{AB} = k\overline{CD}$. O – точка пересечения диагоналей; $\overline{AB} = \overline{a},\ \overline{AD} = \overline{b}$. Разложить по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ $\overline{DB},\ \overline{AO}$.

4. Дана система векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}.$

$2\overline{a} + \overline{b} - \overline{c} = 0$;

$\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = -1 \quad \alpha_i \neq 0$;

$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – л.з.

a||b $\quad (\alpha + \beta - 1)\overline{a} + (2\alpha - \beta)\overline{b} = 0$

$\alpha = ? \quad \beta = ?$

5. Дан базис ABC. Найти координаты данных векторов в базисе:

$\overline{p} = \overline{a} + \overline{b} - \overline{c} \qquad \overline{m} = \frac{1}{2}\overline{a}$

$\overline{k} = \overline{a} - 2\overline{b} \qquad \overline{l} = -\overline{b}$

$\overline{p} = (1;1;-1); \quad \overline{m} = \left(\frac{1}{2};0;0\right) \quad \overline{k} = (1;-2;0) \quad \overline{l} = (0;-1;0).$

$\overline{c} = -2\overline{a} + \overline{b}$, $\overline{a} = 2\overline{y} - \overline{v}$, $\overline{b} = \overline{y} + 2\overline{v}$. Найти координаты $\overline{c}$ в базисе { $\overline{yv}$ }.

6. Дан $\overline{c}$ =(-2;-12) в базисе {$e_1 e_2$}, представить $\overline{c}$ в виде линейной комбинации векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ если $\overline{a}$ =(4;-2), $\overline{b}$ =(3;5) в этом базисе. $\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$. α =? β =?

5.3 Контрольная работа по теме «Скалярное произведение векторов»

1. $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 4$, ($\overline{a} \wedge \overline{b}$)= $\frac{2\pi}{3}$. а) $(\overline{a};\overline{b})$; б) $(\overline{a} + \overline{b})^2$; в) $(3\overline{a} - 2\overline{b};\overline{a} + 2\overline{b})$-?

2. $|\overline{a}| = 4 \qquad$ ($\overline{a} \wedge \overline{b}$)= $60°$

$|\overline{b}| = 2 \qquad$ ($\overline{a} \wedge \overline{c}$)= $60°$

$|\overline{c}| = 6 \qquad$ ($\overline{b} \wedge \overline{c}$)= $60°$

$\overline{p} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} \qquad |\overline{p}| = ?$

3. $|\overline{a}| = \sqrt{3}$, $|\overline{b}| = 1$, ($\overline{a} \wedge \overline{b}$)= $\frac{\pi}{6}$,

$\overline{p} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{q} = \overline{a} - \overline{b}$.

Найти: ($\overline{p} \wedge \overline{q}$)-?

4. $\overline{a} = \alpha\overline{i} - 3\overline{g}$, $\quad \overline{a} \perp \overline{b}$

$\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j}$, α-?.

5. A=(2;-3);
B=(4;0);
$\overline{F}$ =(3;-5); $\quad A_p - ?$

6. $\bar{a}=(2;-1),\quad \bar{b}=(0;1);$
$(\bar{a};\bar{x})=-8,\quad (\bar{b};\bar{x})=2;$
$\bar{x}=?$
7. $\bar{p}=\alpha\bar{a}-\bar{b}\qquad \bar{p}\perp\bar{a}$
$\bar{a}=(-2;7),\quad \bar{b}=(4;-1).$
$\alpha=?$
8. $(\bar{a};\bar{x})=-10,\quad \bar{x}=?$

5.4 Самостоятельная работа по теме «Простейшие задачи в координатах»

1. Даны точки $M_1(2;-3)$, $M_2(1;-4)$, $M_3(-1;-7)$, $M_4(-4;8)$. Вычислить длину и полярный угол следующих отрезков: 1) $\overline{M_1M_2}$; 2) $\overline{M_1M_3}$; 3) $\overline{M_2M_4}$; 4) $\overline{M_4M_3}$.
2. Даны смежные вершины параллелограмма А(-3;5) В(1;7) и точки пересечения его диагоналей М(1;1). Определить две другие вершины.
3. Отрезок, ограниченный точками А(1;-3) и В(4;-3), разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.
4. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки: 1) А(2;-3), В(3;2) и С(-2;5).
5. Вершины треугольника суть точки А(3;6), В(-1;3), С(2;-1). Вычислить длину его высоты, проведённой из вершины С.

5.5 Самостоятельная работа по теме «Прямая на плоскости»

1. Определить, какие из точек $M_1(3;1)$, $M_2(2;3)$, $M_3(6;3)$, $M_4(-3;3)$, $M_5(3;-1)$, $M_6(-2;1)$ лежат на прямой 2x+3y-3=0 и какие не лежат на ней.
2. Определить угловой коэффициент r и отрезок b, отсекаемый на оси Оу, для каждой из прямых: 1) 5x-y+3=0; 2) 2x+3y-6=0; 3) 5x+3y+2=0; 4) 3x+2y=0;
5) y-3=0.
3. Вычислить угловой коэффициент r прямой, проходящей через две данные точки: а) M_1 (2;-5), M_2 (3;2); б) P(-3;1), Q(7;8) в) A(5;-3), B(-1;6).
4. Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника A(5;-4), B(-1:3), C(-3;-2) параллельно противоположным сторонам.
5. Даны середины сторон треугольника M_1 (2;1), M_2 (5;3) и M_3 (3;-4). Составить уравнение его сторон.
6. Даны вершины треугольника M_1 (2;1), M_2 (-1;-1) и M_3 (3;2). Составить уравнения его высот.

5.6 Самостоятельная работа по теме «Прямая»

1. Привести общее уравнение прямой к нормальному виду в каждом из следующих случаев: 1) 4x-3y-10=0; 2) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+10=0$; 3) 12x-5y+13=0; 4)x+2=0;
5) $2x-y-\sqrt{5}=0$.
2. Доказать, что прямая 5x-2y-1=0 параллельна прямым 5x-2y+7=0, 5x-2y-9=0 и делит расстояние между ними пополам.
3. Составить уравнения биссектрис углов, образованных двумя пересекающимися прямыми:
1) x-3y+5=0, 3x-y-2=0;

2) x-2y-3=0, 2x+4y+7=0;
3) 3x+4y-1=0, 5x+12y-2=0.

4. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку пересечения прямых 2x+y-2=0, x-5y-23=0 и делит пополам отрезок, ограниченный точками (5;-6) и (-1;-4). Решить задачу, не вычисляя координат точки пересечения данных прямых.

5.8 Контрольная работа по теме «Прямые на плоскости»

1. Дан треугольник ABC $A(5;-4),\ B(-1;3),\ C(-3;-2)$. Найти координаты ортоцентра, точку пересечения высот.

2. Найти центр тяжести треугольника ABC, т.е. точку пересечения медиан данного треугольника.

$A(5;-4),\ B(-1;3),\ C(-3;-2)$

$Al - медиана \quad kC - медиана \quad Bl = lC$

$Ak = kB \quad k \in AB \quad l \in BC.$

3. Дан треугольник ABC $A(5;-4),\ B(-1;3),\ C(-3;-2)$. Найти центр описанной окружности.

4. Найти длину высоты треугольника ABC из вершины C.

$A(5;-4),\ B(-1;3),\ C(-3;-2)$. Найти ρ от центра тяжести до стороны AC.

5. Определить, при каких значениях m и n прямая (2m-n+5)x+(m+3n-2)y+2m+7n+19=0 параллельна оси ординат и отсекает на оси абсцисс отрезок, равный +5 (считая от начала координат). Написать уравнение этой прямой.

6. Установить, какие из следующих пар прямых перпендикулярны:
1) 3x-y+5=0, x+3y-1=0;
2) 3x-4y+1=0, 4x-3y+7=0;
3) 6x-15y+7=0, 10x+4y-3=0.

7. Определить, при каком значении m две прямые (m-1)x+my-5=0, mx+(2m-1)y+7=0 пересекаются в точке, лежащей на оси абсцисс.

8. Вычислить расстояние *d* между параллельными прямыми:

$d_1: 4x - 3y + 15 = 0$

$d_2: 8x - 6y + 25 = 0$

9. Найти уравнение прямой, принадлежащей пучку прямых $\alpha(x + 2y - 5) + \beta(3x - 2y + 1) = 0$ и параллельной оси Oy.

5.9. Самостоятельная работа по теме «Эллипс»

1.
$F_1(-2;1{,}5)$
$F_2(2;-1{,}5)$
$E = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Записать уравнение эллипса.

2. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:
1) его полуоси равны 5 и 2;
2) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами 2c=8;
3) его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами 2c=10;
4) расстояние между его фокусами 2c=6 и эксцентриситет ε=3/5;
5) его большая ось равна 20, а эксцентриситет ε=3/5;
6) его малая ось равна 10, а эксцентриситет ε=12/13;
7) расстояние между его директрисами равно 5 и расстояние между фокусами 2c=4;

8) его большая ось равна 8, а расстояние между директрисами равно 16;
9) его малая ось равна 6, а расстояние между директрисами равно 13;
10) расстояние между его директрисами равно 32 и ε=1/2.

3. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

$M_1(-4;2{,}4)$

Найти: $r_1, r_2\ и\ M \in эллипсу$.

4. Установить какая линия определяется следующим уравнением $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.

5. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, и найти координаты его центра С, полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис: 2) $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0.$

6. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

2) $y=1-\frac{3}{4}\sqrt{-6x-x^2}$;

3) $x=-2\sqrt{-5-6y-y^2}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

7. Составить уравнение эллипса, зная, что:

его фокусы суть $F_1(1;3), F_2(3;1)$ и расстояние между директрисами равно $12\sqrt{2}$.

8. Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет ε=2/3, фокус F(2;1) и уравнение соответствующей директрисы x-5=0.

5.10 Самостоятельная работа по теме «Гипербола»

1. Дана гипербола $16x^2-9y^2=-144.$ Найти: 1) полуоси *a* и *b*; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот; 5) уравнения директрис.

2. $\gamma:\frac{x^2}{80}-\frac{y^2}{20}=1$

$M(10;-\sqrt{5})$

$M\in\gamma=?$

$MF_1, MF_2=?$

3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) её оси 2a=10 и 2b=8;
2) расстояние между фокусами 2c=10 и ось 2b=8;
3) расстояние между фокусами 2c=6 и эксцентриситет ε=3/2;
4) ось 2a=16 и эксцентриситет ε=5/4;
5) уравнения асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами 2c=20;
6) расстояние между директрисами равно 228/13 и расстояние между фокусами 2c=26;
7) расстояние между директрисами равно 32/5 и ось 2b=6;
8) расстояние между директрисами равно 8/3 и эксцентриситет ε=3/2;
9) уравнения асимптот $y=\frac{3}{4}x$ и расстояние между директрисами равно 64/5.

4. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что;

1) её полуоси a=6, b=18 (буквой a обозначаем полуось гиперболы, расположенную на оси абсцисс);
2) расстояние между фокусами 2c=10 и эксцентриситет ε=5/3;
3) уравнения асимптот $y = \pm\frac{12}{5}x$ и расстояние между вершинами равно 48;
4) расстояние между директрисами равно 50/7 и эксцентриситет ε=7/5;
5) уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между директрисами равно 32/5.

5. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны точки $M_1(6;-1)$ и $M_2\left(-8;2\sqrt{2}\right)$ гиперболы.

6. Определить эксцентриситет гиперболы, если отрезок между её вершинами виден из фокусов сопряжённой гиперболы под углом $60°$.

7. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$ Составить уравнение гиперболы, если её эксцентриситет ε=2.

8. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны:

2) точка $M_1(-5;3)$ гиперболы и эксцентриситет ε=$\sqrt{2}$;

3) точка $M_1\left(\frac{9}{2};-1\right)$ гиперболы и уравнения асимптот $y = \pm\frac{2}{3}x$.

9. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат в вершинах эллипса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$, а директрисы проходят через фокусы этого эллипса.

10. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, и найти координаты её центра C, полуоси, эксцентриситет, уравнения директрис:

1) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$;

2) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$.

11. Составить уравнение гиперболы, зная, что:

1) расстояние между её вершинами равно 24 и фокусы суть $F_1(-10;2)$, $F_2(16;2)$;
2) фокусы суть $F_1(3;4)$, $F_2(-3;-4)$ и расстояние между директрисами равно 3,6;
3) угол между асимптотами равен $90°$ и фокусы суть $F_1(4;-4)$, $F_2(-2;2)$.

5.11 Самостоятельная работа по теме «Парабола»

1. Определить величину параметра и расположение относительно координатных осей следующих парабол:

1) $y^2=6x$;
2) $x^2=5y$;
3) $y^2=-4x$;
4) $x^2=-y$;

2. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

1) парабола расположена симметрично относительно оси Ox и проходит через точку A(9;6).

2) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку D(4;-8).

3. Составить уравнение параболы, которая имеет фокус E(0;-3) и проходит через начало координат, зная, что её осью служит ось Oy.

4. На параболе $y^2 = 16x$ найти точки, фокальный радиус которых равен 13.

5. Стальной трос подвешен за два конца; точки крепления расположены на одинаковой высоте; расстояние между ними равно 20м. Величина его прогиба на расстоянии 2м от точки крепления, считая по горизонтали, равно 14,4см. Определить величину прогиба этого троса в середине между точками крепления, приближенно считая, что трос имеет форму параболы.

6. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $y = +2\sqrt{x}$;

4) $y = -2\sqrt{x}$;

7) $x = -\sqrt{3y}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

7. Вычислить фокальный радиус точки M параболы $y^2 = 12x$, если ордината точки M равна 6.

8. Составить уравнение параболы, если дан фокус F(-7;0) и уравнение директрисы x-7=0.

9. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, и найти ординаты её вершины A и величину параметра p:

2) $x = -\dfrac{1}{4}y^2 + y$;

3) $x = -y^2 + 2y - 1$.

5.12 Контрольная работа «Линии второго порядка»

Вариант № 1 Привести к каноническому виду и построить.

1. $3x^2 - 4xy - 2y^2 + 3x - 12 - 7 = 0$.
2. $4x^2 + 5xy + 3y^2 - x + 9y - 12 = 0$.
3. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 8y + 13 = 0$.

Вариант № 2 Привести к каноническому виду и построить.

1. $4x^2 - 4xy + y^2 - 12x + 6y - 11 = 0$.
2. $x^2 - 2xy + 4y^2 + 5x - 7y + 12 = 0$.
3. $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y - 3 = 0$.

Вариант № 3 Привести к каноническому виду и построить.

1. $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 14x + 2y - 15 = 0$.
2. $4x^2 - 6xy - 9y^2 + 3x - 7y + 12 = 0$.
3. $3x^2 + 5xy + y^2 - 8x - 11y - 7 = 0$.

Вариант № 4 Привести к каноническому виду и построить:

1. $5x^2 + 4xy + 2y^2 + 20x + 20y - 18 = 0$.
2. $9x^2 - 4xy - 7y^2 - 12 = 0$.

$2x^2 - 6xy + 5y^2 + 22x - 36y + 11 = 0$.

5.13 Индивидуальное задание по теме «Приведение линии второго порядка к каноническому виду»

Вариант № 1 Привести к каноническому виду и построить.

$14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$

Вариант № 2 Привести к каноническому виду и построить

$11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$.

Вариант № 3 Привести к каноническому виду и построить

$4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 8y + 13 = 0$.

Вариант № 4 Привести к каноническому виду и построить.

$4x^2 - 4xy + y^2 - 12x + 6y - 11 = 0$.

Вариант № 5 Привести к каноническому виду и построить

$50x^2 - 8xy + 35y^2 + 100x - 8y + 67 = 0$.

Вариант № 6 Привести к каноническому виду и построить

$x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y - 3 = 0$.

Вариант № 7 Привести к каноническому виду и построить

$4x^2 - 20xy + 25y^2 - 14x + 2y - 15 = 0$.

Вариант № 8 Привести к
каноническому виду и построить

$41x^2 + 24xy + 34y^2 + 34x - 112y + 129 = 0$.

Вариант № 9 Привести к
каноническому виду и построить

$29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0$.

Вариант № 10 Привести к каноническому виду и построить:

$4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$.

Вариант № 11 Привести к каноническому виду и построить

$41x^2+24xy+9y^2+24x+18y-36=0$.

Вариант № 12 Привести к каноническому виду и построить

$4xy+3y^2+16x+12y-36=0$.

Вариант № 13 Привести к каноническому виду и построить.

$x^2-6xy+9y^2-12x+36y+20=0$

Вариант № 14 Привести к каноническому виду и построить

$4x^2+4xy+y^2-8x-4y-21=0$

Вариант № 15 Привести к каноническому виду и построить

$25x^2-10xy+y^2+40x-8y+7=0$

Вариант № 16 Привести к каноническому виду и построить

$19x^2+6xy+11y^2+38x+6y+29=0$

Вариант № 17 Привести к каноническому виду и построить

$5x^2-2xy+5y^2-4x+20y+20=0$

Вариант № 18 Привести к каноническому виду и построить

$3x^2-8xy+7y^2+8x-15y+20=0$

Вариант № 19 Привести к каноническому виду и построить

$25x^2-20xy+4y^2-12x+20y-17=0$

Вариант № 20 Привести к каноническому виду и построить

$x^2-4xy+4y^2+7x-12=0$

Вариант № 21 Привести к каноническому виду и построить

$$41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0$$

Вариант № 22 Привести к каноническому виду и построить

$$8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0$$

Вариант № 23 Привести к каноническому виду и построить

$$13x^2 + 10xy + 13y^2 + 46x + 62y + 13 = 0$$

Вариант № 24 Привести к каноническому виду и построить

$$4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$$

5.14 Самостоятельная работа по теме «Векторы пространства. Базис пространства»

Задание №1.

Дано:

$ABCD\,A_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. $\overline{AD} = b, \overline{AB} = a, \overline{AA_1} = c$

Построить:

1) a+b+c 2) *a-2b+c* 3) *a-c+b* 4) *a-c-b*

Задание №2.

Дано:

Куб AD_1 $\overline{AB} = \overline{e_1}, \overline{AD} = \overline{e_2}, \overline{AC} = \overline{e_3}$

Разложить по векторам базиса векторы AA_1, AD_1, B_1C_1

Задание №3

Дано:

$\overline{a} = (1;3;2)$

$\overline{b} = (-1;4;0)$

$\overline{c} = (6;-2;5)$

Найти базис {a;b;c}

5. 15 Самостоятельная работа по теме «Скалярное произведение векторов»

1. Определить при каком значении α векторы a=αi-3j+2k и b=i+2j-αk взаимно перпендикулярны.
2. Вычислить косинус угла, образованного векторами a={2;-4;4} и b={-3;2;6}.
3. Найти вектор *x*, коллинеарный вектору *a*={2;1;-1} и удовлетворяющий условию *xa*=3.

5.16 Самостоятельная работа по теме «Векторное произведение»

1. Векторы a и b образуют угол $\varphi = \pi / 6$. Зная что,

$\left|\bar{a}\right| = 6$

$\left|\bar{b}\right| = 5$

Найти $|\left[a;b\right]|$

2. Даны $|a| = 10, |b| = 2$ *и* $ab = 12$. Вычислить $|[ab]|$.

3. Даны векторы $a = \{3;-1;-2\}, \quad b = \{1;2;-1\}$. Найти координаты векторных произведений 1) $[ab]$; 2) $[(2a+b)b]$, 3) $[(2a-b)(2a+b)]$.

4. Даны точки $A(1;2;0)$, B(3;0;-3), C(5;2;6). Вычислить площадь треугольника ABC.

5. Найти вектор x, зная, что он перпендикулярен к векторам a={2;-3;1} и b={1;-2;3} и удовлетворяет условию x=(i+2j-7r)=10.

6. Какому условию должны удовлетворять векторы a, b, чтобы векторы a+b и a-b были коллинеарны ?

5.17 Задания для самостоятельного решения.

№848.

Векторы a, b и c удовлетворяют условию a+b+c=0. Доказать что $[ab] = [bc] = [ca]$.

№851.

Даны точки A(2;-1;2), B(1;2;-1) и C(3;2;1). Найти координаты векторных произведений: 1) $\left[\overline{AB}\,\overline{BC}\right]$; 2) $\left[\left(\overline{BC} - 2\overline{CA}\right)\overline{CB}\right]$.

№854.

Сила Q={3;4;-2} приложена к точке C(2;-1;-2). Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно начала координат.

№871.

Доказать, что векторы a,b,c, удовлетворяющие условию $[ab] + [bc] + [ca] = 0$, компланарны.

5.18 Самостоятельная работа по теме «Смешанное произведение»

1. Векторы a,b,c, образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что |a|=4, |b|=2, |c|=3, вычислить abc.

2. Вычислить объём тетраэдра, вершины которого находятся в точках A(2;-1;1), B(5;5;4), C(3;2;-1), D(4;1;3).

3. Объём тетраэдра V=5, три его вершины находятся в точках A(2;1;-1), B(3;0;1), C(2;-1;3). Найти координаты четвёртой D, если известно, что она лежит на оси Oy.

5.19 Контрольная работа по теме «Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов»

1. Даны 3 вектора p={3;-2;1}, q={-1;1;-2}, r={2;1;-3}. Найти разложение вектора c={11;-6;5} по базису p, q, r.

2. Вычислить косинус угла, образованного векторами a={2;-4;4} и b={-3;2;6}.

3. Найти вектор *x*, коллинеарный вектору *a*={2;1;-1} и удовлетворяющий условию *xa*=3.

4. Даны точки A(2;-1;2), B(1;2;-1) и C(3;2;1). Найти координаты векторных произведений: 1) $\left[\overline{AB}\,\overline{BC}\right]$; 2) $\left[\left(\overline{BC} - 2\overline{CA}\right)\overline{CB}\right]$.

5. Доказать, что точки A(1;2;-1), B(0;1;5), C(-1;2;1), D(2;1;3) лежат в одной плоскости.

6. Даны вершины тетраэдра A(2;3;1) B(4;1;-2) C(6;3;7) D(-5;-4;8). Найти длину его высоты, опущенную из вершины D.

5.20 Самостоятельная работа по теме «Плоскость»

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор n={5;0;-3}.

2. Даны точки $M_1(3;-1;2)$ *и* $M_2(4;-2;-1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

3. Вычислить площадь треугольника, который отсекает плоскость 5x-6y+3z+120=0 от координатного угла Oxy.

4. Вычислить объём пирамиды, ограниченной плоскостью 2x-3y+6z-12=0 и координатными плоскостями.
5. Составить уравнение плоскости, которая проходит:
1) через точку M_1(2;-3;3) параллельно плоскости Oxy;
2) через точку M_2(1;-2;4) параллельно плоскости Oxz;
3) через точку M_3(-5;2;-1) параллельно плоскости Oyz.

5.21 Контрольная работа по теме «Плоскость»

1. Составить уравнения плоскостей, которые проходят через точку M_1(4;3;2) и отсекают на координатных осях отличные от нуля отрезки одинаковой длины.
2. Составить уравнение плоскостей, отсекающей на оси Oz отрезок c=-5 и перпендикулярной к вектору n={-2;1;3}.
3. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат параллельно плоскости 5x-3y+2z-3=0.
4. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку M_1(2;-1;1) перпендикулярно к двум плоскостям 2x-z+1=0, y=0.
5. Две грани куба лежат на плоскостях 2x-2y+z-1=0, 2x-2y+z+5=0. вычислить объём куба.
6. Составить уравнение плоскостей, параллельных плоскости 2x-2y-z-3=0 и отстающих от неё на расстояние d=5.
7. Установить какие из следующих пар уравнений определяют перпендикулярные плоскости:
3)2x-5y+z=0, x+2z-3=0.
8. Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:
2) 3x-y+lz-9=0, 2x+my+2z-3=0.
9. Определить, при каких значениях a и b плоскости 2x-y+3z-1=0, x+2y-z+b=0, x+ay-6z+10=0:
1) имеют одну общую точку;
2) проходят через одну прямую;
3) пересекаются по трём различным параллельным прямым.

5.22 Самостоятельная работа по теме «Прямая»

1. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку M_1(2;3;-5) параллельно прямой 3x-y+2z-7=0, x+3y-2z+3=0.
2. Составить каноническое уравнение следующих прямых x-2y+3z-4=0, 3x+2y-5z-4=0.
3. Найти острый угол между прямыми $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$, $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$.

5.23 Самостоятельная работа по теме «Прямая и плоскость»

1. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку M_1(-4;-5;3) и пересекает две прямые $\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{-5}$.
2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M_0(2;-3;-5) и перпендикулярно к плоскости 6x-3y-5z+2=0.
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0(1;-2;1) перпендикулярно к прямой x-2y+z-3=0, x+y-z+2=0.
4. Найти проекцию точки C(3;-4;-2) на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\frac{x-5}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4}$, $\frac{x-2}{13}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{-4}$.
5.Доказать, что прямые x=3t-2, y=-4t+1, z=4t-5 параллельны плоскости 4x-3y-6z-5=0.

5.24 Тестовые задания по теме «Векторы»
Вариант № 1

Задание № 1. Найти косинус острого угла между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах

$$\bar{a} = 4\bar{i} - 3\bar{j} + 3\bar{k}, \quad \bar{b} = 3\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}.$$

Задание № 2. Даны точки: A(3, 1, -4), B(4, 8, 2), C(0, 8, 2), D(0, 1, -4). Определить вид четырехугольника ABCD. Варианты ответа: 1 – прямоугольник; 2 – параллелограмм (не прямоугольник); 3 – трапеция; 4 – правильный ответ не указан.

Задание № 3. Найти площадь треугольника с вершинами в точках

A(1, -2, -2), B(-2, 3, 2), C(-2, -3, 2).

Задание № 4. Найти сумму коэффициентов разложения вектора $\bar{x}$ по базису $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$, где

$$\bar{x} = (9, -3, -4), \quad \bar{p} = (4, -4, -2), \quad \bar{q} = (1, 2, -1), \quad \bar{r} = (-3, -3, 2).$$

Задание № 5. Найти высоту тетраэдра ABCD, опущенную из вершины D, если известны координаты: A(1, -2, 2), B(-1, 4, 1), C(-3, -2, 4), D(1, -4, 3).

Номер задания	1	2	3	4	5
Ответ:					

5. 25 Контрольная работа по теме «Линии второго порядка»
ВАРИАНТ 1

1. Дан эллипс $9x^2+25y^2=225$.
   Найти: 1) его полуоси;
   2) фокусы;
   3) эксцентриситет.
   Построить.
2. Дана гипербола $16x^2-9y^2=144$.
   Найти: 1) полуоси *а* и *в*;
   2) оси;
   3) фокусы;
   4) эксцентриситет;
   5) уравнения асимптот.
   Построить.
3. Определить величину параметра и построить параболу:
   1) $y^2=6x$;
   2) $x^2=-4y$.

5.26 Тестовые задания по аналитической геометрии на плоскости
Вариант № 1

Задание № 1. Найти сумму координат точки пересечения прямой, проходящей через точки M(4, 1, 3), N(1, 6, 6) и плоскости, проходящей через точки A(6, -5, 1), B(4, -3, 3), C(6, -2, 2).

Задание № 2. Найти расстояние от точки M_0(5, 6, -7) до плоскости $2x - y + 2z - 1 = 0$.

Задание № 3. Найти косинус острого угла между прямыми, заданными параметрическими уравнениями $x = 5 + 2t, \quad y = 6 - 2t, \quad z = 4 + t$ и $x = 5 + s, \quad y = 6 + 2s, \quad z = 4 - 2s, \quad t, s \in \Re$.

Задание № 4. Найти коэффициент D уравнения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, проходящей через точку M_0(6, -3, -3), параллельно плоскости $x - 5y - 4z - 3 = 0$, считая, что A, B, C и D – целые числа без общих делителей, A>0.

Задание № 5. Определить вид кривой, заданной уравнением $8y = x^2 + 12x + y^2 + 52$.
Варианты ответа: 1 – окружность, 2 – эллипс (полуоси не совпадают), 3 – парабола, 4 – гипербола, 5 – две пересекающиеся прямые, 6 – одна точка, 7 – прямая, 8 – среди первых семи вариантов нет правильного ответа.

Номер задания	1	2	3	4	5
Ответ:					

5.27 Индивидуальное задание по теме «Векторы на плоскости»
Вариант 1.

1. Доказать, что сумма векторов, соединяющих центр правильного треугольника с его вершинами, равна нуль-вектору.
2. Проверить, что векторы $\vec{e}_1 = (1;-1)$ и $\vec{e}_2 = (2;3)$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{a} = (2;-1)$ по этому базису.
3. Доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
4. Найти угол между векторами $\vec{a} = (2;2)$ и $\vec{a} + \vec{b}$, где $\vec{b} = (3;-2)$.

5.28 Индивидуальное задание по теме «Векторы»

1. Длины сторон треугольника.
2. Уравнения сторон треугольника.
3. Уравнения медиан тр-ника.
4. Длины высот треугольника.
5. Уравнения высот треугольника.
6. Уравнения серединных перпендикуляров треугольника.
7. Центр тяжести треугольника.
8. Центр описанной окружности.
9. Углы треугольника.
10. Площадь треугольника.

Вариант № 1
Даны вершины треугольника ABC:
A (8; -1), B (8;-5), C (4;-5) .
Найти:

1. Уравнения сторон треугольника.
2. Уравнения медиан тр-ника.

3. Уравнения серединных перпендикуляров треугольника.
4. Центр тяжести треугольника.
5. Центр описанной окружности.
6. Радиус описанной окружности.
7. Расстояние от центра тяжести до сторон треугольника.
8. Углы между медианами.
9. Площадь треугольника.
10. Уравнения прямых параллельных сторонам, проходящим через вершины.

5. 30 Индивидуальная домашняя работа по теме «Линии второго порядка на плоскости»

Вариант 1.

Найти центр или вершину, полуоси, эксцентриситет, директрисы, фокусы, построить линию

1. $(x-6)^2-3(y+4)^2=144$
2. $12(x-6)^2+3(y+6)^2=144$
3. $x^2+x=y$

5.31 Индивидуальное задание по теме «Векторы в пространстве»

Вариант 1

1. В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ заданы векторы, совпадающие с его ребрами: $\overrightarrow{AB}=\vec{n}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{m}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{p}$. Построить каждый из следующих векторов: $\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$, $\vec{m}+\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{p}$, $\frac{1}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}+\vec{p}$, $-\vec{m}-\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{p}$.
2. Найти вектор $\vec{x}$ из уравнения $3(\vec{a_1}-\vec{x})+2(\vec{a_2}+\vec{x})=5(\vec{a_3}+\vec{x})$, где $\vec{a_1}=(5,-6,-2)$, $\vec{a_2}=(2,-1,4)$, $\vec{a_3}=(-3,2,-5)$.
3. Даны три силы $\vec{M}=(3,-4,2)$, $\vec{N}=(2,3,-5)$, $\vec{P}=(-3,-2,4)$, приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается вдоль вектора $\vec{r}=(-1,-4,3)$.
4. Вычислить площадь и высоту треугольника *ABC*, где $A(1,2,0)$, $B(3,0,-3)$, $C(5,2,6)$.
5. При каком значении *m* векторы $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+m\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{j}$, $\vec{c}=3\vec{i}+\vec{k}$ компланарны?

5.32 Индивидуальное задание по теме «Аналитическая геометрия в пространстве»

Вариант 1

1 Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(1;3;2)$, $A_2(3;2;3)$, $A_3(4;0;1)$, $A_4(1;1;1)$. Найти:
   1) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
   2) уравнение прямой A_1A_4;
   3) угол между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
   4) угол между прямыми A_1A_3 и A_1A_4;
   5) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4;
   6) точку пересечения этой высоты с основанием пирамиды;
   7) выполнить чертеж пирамиды.

2 Построить плоскости

а) $-3x+5y+2z=5$

б) $2x-3y=0$

в) $2x=3$

г) $2z-3y-4=0$

д) $3x-5y-6z=0$.

3 Построить поверхности

а) $4x^2-y^2+6z^2=0$

б) $z^2-2x+2=0$

в) $z=x^2-3$

г) $3x^2-4y^2+z^2=12$.

4 Построить тело, ограниченное данными поверхностями

а) $z=3x^2+y^2$, $x=\sqrt{y}$, $z=0$, $y=4$

б) $x^2+y^2=2ax$, $x^2+y^2=z^2$, $z=0$

в) $x+y+z=3a$, $x^2+y^2=a^2$, $z=0$.

5.33 Индивидуальное задание по теме «Прямая и плоскость»

ВАРИАНТ № 1

Даны вершины тетраэдра: А(2,-1,1), В(5,5,4), С(3,2,-1), Д(4,1,3)

Найти:

1. Уравнения боковых ребер.
2. Длины боковых ребер.
3. Уравнение основания АВС
4. Углы между ребрами при вершине Д.
5. Уравнения апофемы грани АВД.
6. Углы между ребрами и основанием АВС.
7. Двугранные углы при основании АВС.
8. Уравнения перпендикуляра к ребрам АД и ВС
9. Уравнения высоты из вершины Д.
10. Длину апофемы грани АВД.
11. Длину перпендикуляра к ребрам АД и ВС.
12. Длину высоты из вершины Д.
13. Основание высоты из вершины Д.
14. Объем тетраэдра
15. Площадь основания

5.34 Индивидуальное задание по теме «Поверхности второго порядка»

ВАРИАНТ № 1

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$
2. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1;$
3. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1;$
4. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = z;$
5. $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{16} = y;$
6. $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1;$
7. $-x^2 + y^2 = 1;$
8. $x^2 = 2z;$
9. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0;$
10. $x^2 - 4 = 0;$
11. $y^2 = 0;$
12. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 0.$

Индивидуальное задание по теме: «Канонический вид уравнения квадрики»

Вариант № 1

Привести квадрику к каноническому виду и построить

$$6x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 4xz + 8x - 4y - z + 1 = 0$$

7. КАРТА КАДРОВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ

Лектор – доцент кафедры МАиМ Ермак Наталья Валентиновна (стаж работы в вузе 14 лет, к.ф.-.м.н.);

ведущий практические занятия – доцент кафедры МАиМ Ермак Наталья Валентиновна, старший преподаватель кафедры МАиМ Кван Наталья Владимировна (стаж работы в вузе 14 лет); ассистент Грек Надежда Анатольевна (стаж работы в вузе 4 года);.