ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО "АмГУ")
Факультет математики и информатики

С.А.Подопригора

ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие

Благовещенск
2006

Введение

Пособие содержит некоторые теоретические сведения и задачи по теме «Линейные нормированные пространства», изучаемой в курсе функционального анализа. Материал составлен в соответствии с государственным стандартом высшего образования.

В каждом пункте в краткой форме излагаются основы теории, приводятся решения основных задач по данной теме.

В первом пункте пособия дается определение понятий нормы и нормированного пространства, но конкретные примеры таких пространств не приведены, хотя они и встречаются далее в задачах. Данное пособие не является альтернативой учебникам для получения фундаментальных знаний, а имеет своей целью оказание помощи при обучении решению задач. Поэтому читателю рекомендуется предварительно ознакомиться с соответствующим теоретическим материалом. Вполне подойдут, например, учебники [4] и [9].

Второй пункт посвящен сходимости по норме несмотря на то, что определение понятия предела очень похоже на изучаемое в курсах математического анализа, решение задач по этой теме имеет свои особенности.

Далее идут задачи на топологию линейного нормированного пространства и связанные с ней определения, которые рекомендуется прежде, чем разбирать решение задач.

В четвертом пункте приводятся задачи на такие понятия, как расстояние между множествами и диаметр множества. Здесь важно знать что такое верхняя (нижняя) граница и точная верхняя (нижняя) граница.

Задачи, связанные в подпространствами, отличаются от тех, которые студенты привыкли решать в курсе геометрии и линейной алгебры. Это связано с наличием топологической структуры.

В пособии приведено решение двух задач на такие понятия, как нигде не плотные и всюду плотные подмножества.

Далее разобраны задачи на выпуклые подмножества и выпуклые тела. В таких задачах не задействована топология и, кроме того, подобные задачи студенты решают в курсах геометрии и линейной алгебры.

Непрерывные, равномерно непрерывные отображения и отображения, удовлетворяющие условию Липшица, рассматриваются в 8 пункте пособия. Здесь полезно вспомнить соответствующие определения из курса математического анализа.

Далее рассмотрена задача, в которой приведении две различные нормы, порождающие одну и туже топологию.

Вопросы, связанные понятием полноты линейных нормированных пространств, рассмотрены в 10 пункте.

Завершают пособие расчетные задания, которые могут быть полезны как преподавателям для организации учебного процесса, так и студентам для самостоятельного изучения функционального анализа.

1. Понятие нормы

Линейное пространство **X** над полем вещественных чисел P (комплексных чисел X) называется нормированным пространством, если каждому $x \in \mathbf{X}$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$, называемое нормой x, так, что выполнены следующие три аксиомы:

1) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ для любого $x \in \mathbf{X}$ и любого вещественного (комплексного) числа λ;
3) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ для любых $x,\ y \in \mathbf{X}$.

<u>Задача 1.</u> Доказать, что в определении линейного нормированного пространства аксиому 1) можно заменить на 1′):

из $\|x\| = 0$ следует $x = 0$.

<u>Решение.</u> Необходимо доказать, что система аксиом 1), 2), 3) эквивалентна системе аксиом 1′), 2), 3). Очевидно, что из аксиомы 1) следует аксиома 1’). Покажем, что при выполнении аксиом 1′), 2), 3) выполняется и аксиома 1). Для этого достаточно доказать, что в системе аксиом 1′), 2), 3) справедливо утверждение: из $x = 0$ следует $\|x\| = 0$. Действительно, воспользовавшись аксиомой 2), получим

$$\|0\| = \|0*0\| = |0| \|0\| = 0.$$

<u>Задача 2.</u> Доказать, что для любых элементов $x,\ y \in \mathbf{X}$ выполняется неравенство $\|x\| \le \max\{\|x+y\|,\ \|x-y\|\}$.

<u>Решение.</u> Используя аксиомы 2) и 3), получим

$$2\|x\| = \|2x\| \le \|x+y+x-y\| \le \|x+y\| + \|x-y\|. \qquad (1)$$

Если бы было $\|x\| > \max\{\|x+y\|,\ \|x-y\|\}$, то это означало бы $\|x\| > \|x+y\|$ и $\|x\| > \|x-y\|$. Сложив эти неравенства, получим противоречие с установленным ранее неравенством (1).

Задача 3.А) Задает ли норму в пространстве P функция $\varphi\ (x) = |arctgx|$?

Б) Показать, что $\varphi\ (x) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ в пространстве P^n не является нормой при $0 < p < 1$ и $n \geq 2$.

Решение. А) Нет, не задает, ибо не выполняется вторая аксиома нормы. Действительно, если взять $x = \sqrt{3}$, $\lambda = \frac{1}{3}$, то $\|\lambda\ x\| = arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$, а $|\lambda\ |\|x\| = \frac{1}{3}arctg\sqrt{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{9}$. Поэтому $\|\lambda\ x\| \neq |\lambda\ |\|x\|$.

Б) $\varphi(x)$ не является нормой в P^n при $0 < p < 1$ и $n \geq 2$, т.к. не выполняется третья аксиома нормы. Действительно, возьмем вектор $x = \left(\frac{1}{2},0,...,0\right) \in P^n$ и вектор $y = \left(0,\frac{1}{2},0,...,0\right) \in P^n$. Тогда $\|x\|_p = \|y\|_p = \frac{1}{2}$ для любого $0 < p < 1$ и $\|x\|_p + \|y\|_p = 1$. Однако $\|x + y\|_p = \left\|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\ldots,0\right)\right\|_p = \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}-1}$.

Поскольку $p \in (0,1)$, то $\frac{1}{p} - 1 > 0$ и $2^{\frac{1}{p}-1} > 1$. Следовательно, $\|x + y\|_p > \|x\|_p + \|y\|_p$.

2. Сходимость

Последовательность $x_n \in X (n \in N)$ называют сходящейся к элементу $x_0 \in X$ и записывают $x_n \to x_0$, если $\|x_n - x_0\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Задача 4. Найти предел последовательности $x_n = \dfrac{nt}{n+t}$ в пространстве $C[0,2]$, если он существует.

Решение: Необходимым условием сходимости последовательности в пространстве $C[a,b]$ является существование предела x_n при каждом фиксированном $t \in [a,b]$. Заданная последовательность при заданном t сходится к функции $a(t)=t$. Данная функция непрерывна.

Проверим, сходится ли последовательность x_n к $a(t)$ по норме пространства $C[a,b]$, т.е. равномерно. Вычислим $\|x_n - a\|$. По определению нормы:

$$\|x_n - a\|_{C[0,2]} = \max_{0\le t\le 2}\left|\frac{nt}{n+t} - t\right| = \max_{0\le t\le 2}\left|\frac{t^2}{n+t}\right|.$$

Найдем максимум функции $\dfrac{t^2}{n+t}$ на отрезке [0,2]. Для этого с помощью производной найдем точки, подозрительные на экстремум.

$$\left(\frac{t^2}{n+t}\right)' = \frac{t^2+2nt}{(n+t)^2};\ t^2+2nt = 0,\ t_1 = 0,\ t_2 = -2n.$$

Таким образом, точками, подозрительными на экстремум, являются точки t_1, t_2. Поскольку $t_2 \notin [0,2]$, а точка t_1 не является внутренней точкой отрезка [0, 2], то на этом отрезке нет точек экстремума. Вычислим также значение функции на концах отрезка:

$$\left.\frac{t^2}{n+t}\right|_{t=0} = 0,\ \left.\frac{t^2}{n+t}\right|_{t=2} = \frac{4}{n+2}.\ \text{Значит,}\ \max_{t\in[0,2]}\left|\frac{nt}{n+t} - t\right| = \frac{4}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Это означает, что последовательность $x_n(t)$ в пространстве $C[0,2]$ сходится к функции $a(t)=t$.

Задача 5. Найти предел последовательности $x_n(t) = t^n - t^{2n}$ в пространстве $C[0,1]$, если он существует.

Решение. Последовательность $x_n(t)$ для каждого фиксированного t при $n \longrightarrow \infty$ стремится к $a(t)=0$. Покажем, что $x_n(t)$ к нулю равномерно не сходится. Вычислим $\|x_n - a\|_{C[0,1]} = \max\limits_{t\in[0,1]}\left|t^n - t^{2n}\right|$.

Так как $\left(t^n - t^{2n}\right)' = nt^{n-1} - 2nt^{2n-1} = nt^{n-1}(1-2t^n)$, то $nt^{n-1}(1-2t^n) = 0$, если $t_1 = 0; t_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что максимум достигается в точке $t = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$. Поэтому $\max\limits_t\left|t^n - t^{2n}\right| = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Значит, последовательность $x_n(t) = t^n - t^{2n}$ в пространстве $C[0,1]$ не сходится.

Задача 6. Выяснить, сходится ли последовательность $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, 0, \ldots\right)$ в пространстве l_3.

Решение. Необходимым условием сходимости последовательности в пространстве $l_p, p \geq 1$ является наличие покоординатного предела. Выпишем несколько членов последовательности x_n: $x_1 = \left(1, \frac{1}{2}, 0, \ldots\right)$, $x_2 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, 0, \ldots\right)$. Очевидно, что $x_{n1} \to 1$ при $n \to \infty$, $x_{n2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$ и т.д. Поэтому последовательность x_n покоординатно сходится к точке $a = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k+1}}, \ldots\right)$.

Заметим, что $a \in l_3$, т.к. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{2^k} \right|^3 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-3k} < \infty$.

Покажем, что последовательность x_n сходится к a по норме пространства l_3:

$$\|x_n - a\| = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_n(k) - a(k)|^3 \right)^{1/3} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{1}{2^k} \right|^3 \right)^{1/3} = \frac{\left(2^{-3}\right)^{n+1}}{1 - 1/2^3} = \frac{8}{7} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{3n+3} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

<u>Задача 7.</u> Выяснить, сходится ли последовательность $x_n = (\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n},0,\ldots)$ в прастранстве l_1.

<u>Решение.</u> Очевидно, что $a = (1,1,\ldots,1,\ldots)$ является покоординатным пределом последовательности, но $a \notin l_1$, т.к. ряд, составленный из единиц, не является сходящимся. Следовательно, последовательность x_n не имеет предела.

<u>Задача 8.</u> Доказать, что последовательность $x_n(t) = n^2 t e^{-nt}$ $(n \in N)$ сходится поточечно к функции $a(t) \equiv 0$ для всех $t \in [0,1]$, но не сходится в пространстве $CL_1[0,1]$.

<u>Решение.</u> Воспользовавшись дважды правилом Лопиталя, получим, что последовательность $x_n(t)$ при каждом фиксированном $t \in [0,1]$ стремится к нулю, так как $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2}{e^{nt}} = 0$.

Вычислим $\|x_n - a\|_{CL_1[a,b]} = \int\limits_0^1 |x_n(t) - a(t)| dt = \int\limits_0^1 n^2 t e^{-nt} dt = [nt = z] =$

$= \int\limits_0^n z e^{-z} dz = 1 - n e^{-n} - e^{-n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$. Значит, последовательность $x_n(t)$ не сходится в пространстве $CL_1[0,1]$.

Задача 9. Пусть $x_n, x \in X (n \in N)$. Доказать, что если $x_n \to x$, то $\|x_n\| \to \|x\|$.

Решение. В аксиоме 3) сделаем замену $y=z-x$, получим $\|z\| \le \|x\| + \|z-x\|$ или $\|z\| - \|x\| \le \|z-x\|$.

В последнее неравенство векторы z и x входят симметрично, т.е. можно поменять их местами, получим $\|x\| - \|z\| \le \|x-z\|$, т.е. имеем

$$\big|\, \|z\| - \|x\| \,\big| \le \|z-x\|.$$

Тогда, подставив $z=x_n$, получим $0 \le \big|\, \|x_n\| - \|x\| \,\big| \le \|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$.

3. Топологические понятия

Открытым шаром с центром в точке $x_0 \in \mathbf{X}$ и радиусом $r > 0$ называется множество $S_r(x_0) = \{ x \in \mathbf{X}: \|x - x_0\| < r \}$. Замкнутым шаром с центром в точке $x_0 \in \mathbf{X}$ и радиусом $r > 0$ называется множество $\overline{S}_r(x_0) = \{ x \in \mathbf{X}: \|x - x_0\| \le r \}$.

Множество $M \subset \mathbf{X}$ называется открытым, если для любой точки $x_0 \in M$ существует $r > 0$ такое, что $S_r(x_0) \subset M$. Точка $a \in \mathbf{X}$ называется точкой прикосновения множества $M \subset \mathbf{X}$, если в любом шаре $S_r(a)$ найдется точка $x \in M$. Точка $a \in \mathbf{X}$ называется предельной точкой множества $M \subset \mathbf{X}$, если в любом шаре $S_r(a)$ найдется точка $x \in M$, отличная от a. Множество всех предельных точек множества M обозначается M'. Множество $M \cap M'$ называется замыканием множества M и обозначается $\overline{M}$. Переход от множества M к его замыканию $\overline{M}$ называется операцией замыкания. Операция замыкания обладает следующими свойствами: 1) $M \subset \overline{M}$; 2) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$; 3) $M_1 \subset M_2 \Rightarrow \overline{M_1} \subset \overline{M_2}$; 4) $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$; 5) $\overline{\varnothing} = \varnothing$ и $\overline{X} = X$. Множество $M \subset X$ называется замкнутым, если $\overline{M} = M$. Справедливо утверждение: для того, чтобы точка x была точкой прикосновения множества M, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{x_n\}$ точек из M, сходящаяся к x([4], II, § 2).

Задача 10. Доказать, что открытый шар $S_r(x_0)$ - открытое множество, замкнутый шар $\overline{S}_r(x_0)$ – замкнутое множество и замыкание

$S_r(x_0)$ совпадает с $\overline{S}_r(x_0)$.

<u>Решение:</u> Покажем сначала, что множество $S_r(x_0)$ – открытое. Пусть x_1 – произвольная точка $S_r(x_0)$. Обозначим $\varepsilon = r-\|x - x_0\|>0$. Покажем, что $S_\varepsilon(x_1)\subset S_r(x_0)$. Действительно, если $x\in S_\varepsilon(x_1)$, то $\|x - x_0\| = \|x - x_1 + x_1 - x_0\|\le\|x - x_1\|+\| x_1 - x_0\|<\varepsilon+\| x_1 - x_0\|=r - \| x_1 - x_0\| + \| x_1 - x_0\| = r$, следовательно, $x\in S_r(x_0)$.

Покажем, что $\overline{S}_r(x_0)$ – замкнутое множество. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\overline{S}_r(x_0)$ и $x_n \to x$ при $n\to\infty$. Требуется показать, что $x\in\overline{S}_r(x_0)$. Выберем $\varepsilon > 0$, пусть N такое, что $\| x_n - x\|<\varepsilon$ для любого $n\ge$N. Тогда $\|x - x_0\| = \|x - x_n+ x_n - x_0\|\le\|x - x_n\|+\| x_n - x_0\|<\varepsilon+r$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\|x - x_0\|\le r$, следовательно $x \in \overline{S}_r(x_0)$.

Обозначим замыкание $S_r(x_0)$ через $\overline{S_r(x_0)}$. Покажем, что $\overline{S_r(x_0)}=\overline{S}_r(x_0)$. Так как $S_r(x_0)\subset \overline{S}_r(x_0)$ и $\overline{S}_r(x_0)$ замкнуто, то $\overline{S_r(x_0)}\subset\overline{S}_r(x_0)$. Покажем, что $\overline{S}_r(x_0) \subset\overline{S_r(x_0)}$. Пусть $x\in\overline{S}_r(x_0)$, тогда последовательность $x_n=x+\frac{1}{n}(x_0 - x)$ сходится к x и содержится в шаре $S_r(x_0)$. Действительно, $\| x_n - x_0\|=\|x+\frac{1}{n}(x_0 - x) - x_0\|=\|(1-\frac{1}{n})x - (1-\frac{1}{n})x_0\|=|(1-\frac{1}{n})|\|x - x_0\|\le(1-\frac{1}{n})r < r$.

$$\| x_n - x\|=\|x+\frac{1}{n}(x_0 - x) - x\|=\frac{1}{n}\|x - x_0\|\le\frac{1}{n}r .$$

Получили, что x – точка прикосновения множества $S_r(x_0)$, т.е. $x\in\overline{S}_r(x_0)$.

Пусть $A\subset X$ – произвольное множество. Назовем границей множества A множество ∂A таких точек $x\in X$, что любой открытый шар с центром в x содержит хотя бы одну точку из A и хотя бы одну точку из дополнения к A.

Задача 11. Является ли множество $M = \{x \in C[0,1]: x(0) = 0\}$ открытым, замкнутым, в пространствах $C[0,1], CL[0,1]$. Найти его замыкание, внутренние и граничные точки в каждом из указанных пространств.

Решение. Докажем, что множество M не является открытым в пространстве $C[0,1]$. Рассмотрим точку $x_0 \in M$, т.е. $x_0 \in C[0,1]$ и $x(0)=0$. Для каждого $r > 0$ существует функция $x(t) = x_0(t) + \alpha$, $|\alpha| < r$ такая, что $x(0) = x_0(0) + \alpha = \alpha \neq 0$, как только $\alpha \neq 0$. Функция *x(t)* принадлежит шару $B(x_0, r)$, но не принадлежит множеству *M*. Таким образом, у множества *M* нет внутренних точек и *M* не является открытым.

Проверим, является ли множество *M* замкнутым в $C[a,b]$. Напомним, что $M = \overline{M}$, если из того, что $x_n \in M$ и $x_n \to x_0$ следует, что $x_0 \in M$. Другими словами, *M* замкнуто, если для каждой последовательности непрерывных функций таких, что $x_n(0) = 0$ и для которых существует непрерывная на отрезке [0,1] функция $x_0(t)$ такая, что $\max\limits_{0 \le t \le 1} |x_n(t) - x_0(t)| \to 0$ при $n \to \infty$, функция $x_0(t)$ удовлетворяет условию $x_0(t) = 0$. Учитывая, что сходимость в пространстве $C[0,1]$ равномерная, то из того, что $\max\limits_t |x_n(t) - x_0(t)| \to 0$ при $n \to \infty$ следует $|x_n(t) - x_0(t)| \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $t \in [0,1]$. Следовательно, $x_0(0) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n(0) = 0$. Итак, в пространстве $C[a,b]$ множество *M* замкнуто и каждая его точка для множества *M* является граничной.

Каждый открытый шар радиуса *r* в пространстве $CL[a,b]$ содержит открытый шар радиуса $\dfrac{r}{b-a}$ пространства $C[a,b]$ с центром в той же точке, т.е. $B_L(x_0, r) \supset B_C\left(x_0, \dfrac{r}{b-a}\right)$. Действительно, пусть $y(t) \in B_C\left(x_0, \dfrac{r}{b-a}\right)$, т.е. $\max\limits_t |y(t) - x_0(t)| < \dfrac{r}{b-a}$, тогда $\int\limits_a^b |y(t) - x_0(t)| dt \le \max\limits_t |y(t) - x_0(t)| \cdot (b-a) \le$

$\frac{r}{b-a}\cdot(b-a)=r$, т.е. $y(t)\in B_L[x_0,r]$. Значит, если множество открыто в пространстве $CL[0,1]$, то оно открыто в $C[0,1]$. А так как множество M не является открытым в $C[a,b]$, то оно не является открытым и в $CL[a,b]$.

Докажем, что оно не является замкнутым в $CL[a,b]$, точнее, $\overline{M}=CL[0,1]$. Действительно, для каждой функции $x_0(t)\in CL[0,1]\setminus M$ существует последовательность $x_n\in M$ такая, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$, где

$$x_n(t)=\begin{cases} ntx_0(0), t\in\left[0,\frac{1}{n}\right]; \\ x_0(t), \quad t\in\left[\frac{1}{n},1\right], \end{cases} \quad \text{и } x_n(0)=0,$$

$$\|x_n-x_0\|_{CL[0,1]}=\int_0^1|x_n(t)-x_0(t)|dt\le\int_0^{1/n}(|x_0|+|x_n|)dt\le\frac{2}{n}\max_{t\in[0,1]}|x(t)|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,$$ однако $x_0(0)\ne 0$, что и означает незамкнутость множества.

4. Ограниченность

Диаметром множества A⊂X называется число $diam\mathrm{A}=\sup\limits_{x,y\in A}\|x-y\|$.

<u>Задача 12.</u> Доказать, что $diam\ S_r(x_0)=2r$.

<u>Решение.</u> Покажем, что $2r$ – верхняя граница множества $S=\{\|x-y\|: x, y\in S_r(x_0)\}$. Действительно, пусть $x, y\in S_r(x_0)$. Тогда
$\|x-y\|=\|x-x_0+x_0-y\|\le\|x-x_0\|+\|y-x_0\|\le r+r=2r$.

Теперь покажем, что $2r$ – точная верхняя граница множества S, т.е. для любого $\varepsilon>0$ величина $2r-\varepsilon$ уже не является границей этого множества, т.е. найдутся $x_\varepsilon, y_\varepsilon\in S_r(x_0)$ такие, что $\|x_\varepsilon-y_\varepsilon\|>2r-\varepsilon$. Действительно, можно взять $x_\varepsilon = x_0+(r-\frac{\varepsilon}{3})\frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}$, $y_\varepsilon= x_0-(r-\frac{\varepsilon}{3})\frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}$, где $\tilde{x}$ - произвольный ненулевой вектор из X(так как мы считаем, что X≠{0}, то такой вектор существует). Тогда $\|x_\varepsilon$ -

$x_0\| = r - \frac{\varepsilon}{3}$ и $\| y_\varepsilon - x_0 \| = r - \frac{\varepsilon}{3}$, т.е. $x_\varepsilon \in S_r(x_0)$ и $y_\varepsilon \in S_r(x_0)$, причем $\|x_\varepsilon - y_\varepsilon\| = \|x_0 + (r - \frac{\varepsilon}{3}$

$$)\frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|} - x_0 + (r - \frac{\varepsilon}{3})\frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}\| = \|2(r - \frac{\varepsilon}{3})\frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}\| = \frac{2\left(r - \frac{\varepsilon}{3}\right)}{\|\tilde{x}\|}\|\tilde{x}\| = 2(r - \frac{\varepsilon}{3}) > 2r - \varepsilon.$$

Множество A⊂X называется ограниченным, если его можно заключить в некоторый шар (открытый или замкнутый).

<u>Задача 13.</u> Доказать, что множество A⊂X является ограниченным тогда и только тогда, когда *diam*A<∞.

<u>Решение.</u> Докажем сначала необходимость. Пусть множество A ограниченно, тогда A⊂ $S_r(x_0)$ и *diam*A< *diam* $S_r(x_0)=2r<\infty$.

Теперь докажем достаточность. Для A=∅ ограниченность очевидна. Пусть A≠∅ и *diam*A=$c<\infty$. Т.к. A≠∅, то существует некоторое $x_0 \in$ A. Т.к. *diam*A=c, то $\|x_0 - y\| \le c$ для любого $y \in$ A, тогда A⊂ $S_c(x_0)$.

<u>Задача 14.</u> Выяснить, является ли множество $M = \left\{ x \in l_3 : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < 1 \right\}$ открытым, замкнутым, ограниченным в пространстве l_3.

<u>Решение.</u> Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 0, \ldots\right)$, принадлежащую множеству *M*, которая сходится в l_3 к элементу $x = (1,0,\ldots)$, который множеству *M* не принадлежит. Значит, *M* не является замкнутым.

Докажем, что *M* не является также открытым, т.е. существует такая точка $x_0 \in M$, что $\forall\, r > 0$ существует точка $x \in B(x_0, r) \setminus M$. Пусть $x_0 = (0,0,\ldots)$.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{k}} \right|^3$ сходится, обозначим его сумму через a^3 и рассмотрим

последовательность $x_n = \left(\frac{r}{2a\sqrt{1}}, \frac{r}{2a\sqrt{2}}, \ldots, \frac{r}{2a\sqrt{n}}, 0, \ldots\right)$, $x_n \in B(x_0, r)$, т.к.

$$\|x_n - x_0\| = \frac{r}{2a} \cdot \left(\sum \left|\frac{1}{\sqrt{k}}\right|^3\right)^{1/3} = \frac{r}{2} < r.$$

Но $x_n \notin M$, так как $\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k)|^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{r^2}{4a^2 k} = \frac{r^2}{4a^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Ряд $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ расходится, т.е. $\forall c > 0 \quad \exists n \in N$, что $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > c$. Если в качестве c взять $\frac{4a^2}{r^2}$, то получим, что $\exists n \in N$, что $\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k)|^2 \geq 1$, т.е. $x_n \notin M$. Значит, M не является открытым. Множество M является ограниченным, так как оно содержится в шаре $B(x_0, 1)$, где $x_0 = (0, 0, \ldots)$. Действительно, из условия $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < 1$ следует, что $\forall k \, |x_k| < 1$, но тогда $|x_k|^3 < |x_k|^2 < 1$ и

$$\|x_n - x_0\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^3\right)^{1/3} < \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/3} < 1.$$

Расстоянием от точки $x \in \mathbf{X}$ до множества $A \subset X$ называется число $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$. Расстоянием между множествами $A, B \subset X$ называется число $\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\|$.

<u>Задача 15.</u> Пусть $A \subset X$ – замкнутое множество. Доказать, что $\rho(x, A) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in A$.

<u>Решение.</u> Необходимость. Пусть $\rho(x, A) = 0$, т.е. $\inf_{y \in A} \|x - y\| = 0$. Тогда, по определению точной нижней границы, для любого $\varepsilon > 0$ существует $y_\varepsilon \in A$ такое, что $\|x - y_\varepsilon\|$, т.е. $y_\varepsilon \in S_\varepsilon(x)$, т.е. x – точка прикосновения множества A. Т. к. A – замкнуто, то $x \in A$.

Достаточность очевидна.

5. Подпространства

Множество $L \subset X$ называется линейным многообразием, если из $x,y \in L$ имеем, что $x+y \in L$ и $\lambda x \in L$ для любого числа λ. Если линейное многообразие является замкнутым в X множеством, то оно называется подпространством.

<u>Задача 16.</u> Доказать, что в линейном нормированном пространстве замыкание линейного многообразия $\bar{L}$ является подпространством.

<u>Решение.</u> Так как $\bar{L}$ замкнуто, то остается доказать, что $\bar{L}$ является линейным многообразием. Пусть $x,y \in \bar{L}$. Тогда найдутся последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L$ такие, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$, а $y_n \to y$ при $n \to \infty$. Тогда последовательности $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L$ и $\{\lambda x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L$ для любого числа λ, т.к. L– линейное многообразие, причем $x_n + y_n \to x+y$, а $\lambda x_n \to \lambda x$. Следовательно, $x+y \in \bar{L}$ и $\lambda x \in L$, что и требовалось проверить.

<u>Задача 17.</u> Доказать, что $L = \left\{ x \in L[0,1] : \int_0^1 x(t)dt = 0 \right\}$ является подпространством пространства $CL[0,1]$.

<u>Решение.</u> Подпространством называется замкнутое линейное многообразие. Пусть $x,y \in L$ и $\alpha, \beta \in R$, тогда $\alpha x + \beta y \in L$, т.к.

$$\int_0^1 (\alpha x + \beta y)(t)dt = \alpha \int_0^1 x(t)dt + \beta \int_0^1 y(t)dt .$$

Покажем, что множество L замкнуто. Пусть $x_n \in L$ и $x_n \underset{n \to \infty}{\to} x_0$, тогда $x_0 \in L$. Действительно, если $\int_0^1 |x_n(t) - x_0(t)|dt \to 0$, то

$$\int_0^1 |x_n(t) - x_0(t)|dt \geq \left|\int_0^1 x_n(t)dt - \int_0^1 x_0(t)dt\right| \Rightarrow \int_0^1 x_0(t)dt = 0, \text{т.к.} \int_0^1 x_n(t)dt = 0.$$

Значит, L – подпространство в $CL[0,1]$.

Алгебраической суммой множеств A и B пространства X называется множество $A+B$ всевозможных сумм вида $a + b$, где $a \in A$, $b \in B$.

<u>Задача 18.</u> Доказать, что если хотя бы одно из множеств A, $B \subset$ X открыто, то $A+B$ - открытое множество.

<u>Решение.</u> Пусть, например, открыто множество B. Представим множество $A+B$ в виде $A+B=\bigcup_{a \in A} a+B$, где $a+B=\{a\}+B$. Тогда, так как объединение любого семейства открытых множеств открыто, то остается доказать, что множество $a+B$ открыто для любого $a \in$ X. Действительно, если $a+x \in A+B$, то $x \in B$. Т.к. B открыто, то для некоторого $r>0$ $S_r(x) \subset B$. Но тогда $S_r(a+x) \subset a+B$. Следовательно $a+B$ открыто.

6. Плотные подмножества, сепарабельные пространства

Множество $A \subset$ X называется всюду плотным в X, если $\overline{A}$=X. Пространство X называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное множество. Множество $A \subset$ X называется нигде не плотным в X, если в каждом шаре $S \subset$ X содержится другой шар S_1, не содержащий точек A.

<u>Задача 19.</u> Доказать, что множество

$L_{n_0} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l_2 : x_n = 0 \forall n > n_0, n_0 \in N\}$ нигде не плотно в l_2.

<u>Решение.</u> По определению множество A является нигде не плотным в нормированном векторном пространстве, если оно не плотно ни в одном шаре, т.е. если в каждом шаре $B \subset l_2$ содержится другой шар B_1, не имеющий с A ни одной общей точки.

Пусть B – произвольный шар в l_2. Возможны два варианта:

1) $B \cap L_{n_o} = \varnothing$;

2) $z\left(z_1, z_2, \ldots, z_{n_o}, 0\ldots\right) \in B \cap L_{n_o}$.

Во втором случае рассмотрим шар $B_1(z, \varepsilon) \subset B$ и точку $y(z_1, \ldots, z_{n_o}, \varepsilon/2, 0, \ldots)$. Тогда для $\forall x \in L_{n_o}$ имеем: $\|x - y\| \geq \varepsilon/2$, т.е. $B_2(y, \varepsilon/2) \subset E \setminus L_{n_o}$, кроме того $B_2(y, \varepsilon/2) \subset B_1(z, \varepsilon) \subset B$. Таким образом, в шаре B всегда найдется шар B_2, не содержащий точек множества L_{n_o}, т.е. L_{n_o} нигде не плотно.

<u>Задача 20.</u> Доказать, что множество A последовательностей из l_2, содержащих лишь конечное число членов, отличных от нуля, плотно в l_2.

<u>Решение.</u> Пусть $x \in l_2$, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \sum\limits_{i=N}^{\infty} |x_i|^2 < \varepsilon^2$. Обозначим через $z(x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots)$. Очевидно, $z \in A$ и $\|z - x\|_{l_2} < \varepsilon$. Значит, x является точкой прикосновения для множества A, следовательно, A всюду плотно в l_2.

7. Выпуклость

Отрезком, соединяющим точки $x, y \in X$ называется совокупность всех точек вида $tx+(1-t)y$, $t \in [0;1]$. Отрезок без концевых точек x и y называется открытым отрезком. Множество $M \subset X$ называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя точками x и y содержит и соединяющий их отрезок. Ядром $J(M)$ произвольного множества $M \subset X$ называется совокупность таких его точек x, что для каждого $y \in X$ существует такое число $\varepsilon = \varepsilon(y) > 0$, что $x + \mu y \in M$ при $|\mu| < \varepsilon$. Выпуклое множество, ядро которого не пусто, называется выпуклым телом.

Задача 21. Показать, что эллипсоид

$$M=\{x=(\xi_1,\xi_2,\ldots)\in l_2:\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2\xi_n^2 \le 1\}$$

есть выпуклое в l_2 множество, но не выпуклое тело.

Решение. Пусть $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots)\in M$, $y=(\eta_1,\eta_2,\ldots)\in M$. Рассмотрим совокупность элементов $z= tx+(1-t)y=(t\xi_1+(1-t)\eta_1,\ t\xi_2+(1-t)\eta_2,\ldots)$ $(t\in[0;1])$ и покажем, что $z\in M$. Действительно, при любом $m\in\mathrm{N}$

$$\sum_{n=1}^{m} n^2\,(t\xi_n+(1-t)\eta_n)^2=t^2\sum_{n=1}^{m} n^2\xi_n^2+2t(1-t)\sum_{n=1}^{m} n^2\xi_n\eta_n+(1-t)^2\sum_{n=1}^{m} n^2\eta_n^2.$$

Далее воспользуемся неравенством Коши-Буняковского

$$\sum_{n=1}^{m} |a_nb_n|\le\Big(\sum_{n=1}^{m} |a_n|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=1}^{m} |b_n|^2\Big)^{1/2}.$$

Тогда $\sum_{n=1}^{m} |n^2\xi_n\eta_n|=\sum_{n=1}^{m} |n\xi_n|\,|\eta_n n|\le\Big(\sum_{n=1}^{m} n^2\xi_n^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=1}^{m} n^2\eta_n^2\Big)^{1/2}.$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{m} n^2\,(t\xi_n+(1-t)\eta_n)^2\le t^2\sum_{n=1}^{m} n^2\xi_n^2+(1-t)^2\sum_{n=1}^{m} n^2\eta_n^2+2t(1-t)\Big(\sum_{n=1}^{m} n^2\xi_n^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=1}^{m} n^2\eta_n^2\Big)^{1/2}\Big).$$

Поскольку, по предположению $\sum_{n=1}^{m} n^2\xi_n^2\le 1$ и $\sum_{n=1}^{m} n^2\eta_n^2\le 1$, то, переходя к пределу при $m\to\infty$, получим

$$\sum_{n=1}^{m} n^2\,(t\xi_n+(1-t)\eta_n)^2\le t^2+(1-t)^2+2t(1-t)=1,$$

т. е. $z\in M$.

Покажем, что ядро эллипсоида $J(M)$ пусто. Действительно, пусть в противном случае $x\in J(M)\subset M$, $y_0=(1,1/2^{2/3},\ 1/3^{2/3},\ldots,\ 1/n^{2/3},\ldots)\in l_2$ и для некоторого $\mu>0$ вектор $x+\mu y_0\in M$, т.е. $\sum_{n=1}^{m} n^2\,|\xi_n+\mu/n^{2/3}|^2\le 1$. Тогда $|\xi_n+\mu/n^{2/3}|\le 1/n$ и $|\mu/n^{2/3}|\le|\xi_n+\mu/n^{2/3}|+|\xi_n|\le 1/n+1/n=2/n$ $(\forall n\in\mathrm{N})$,

ибо если $x \in M$, то $|\xi_n| \le 1/n$, $n \in \mathrm{N}$. Таким образом, для любого $n \in \mathrm{N}$ имеем $\mu \le \frac{2}{\sqrt[3]{n}}$, откуда μ=0. Полученное равенство противоречит допущению, что μ >0. Значит, ядро множества M пусто.

8. Непрерывность

<u>Задача 22</u>. Выяснить, является ли отображение

$$F: L_2[0,1] \to C[0,1] \qquad F(x) = \int_0^1 \frac{t^2 x(s)}{\sqrt[3]{s}} ds$$

непрерывным в точке $x_0(t) = 0$.

<u>Решение</u>: По определению, отображение $F: X \to Y$ непрерывно в точке x_0, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon)$ такое, что $\forall x \in X$ такого, что $\|x - x_0\|_X < \delta \Rightarrow \|F(x) - F(x_0)\|_Y < \varepsilon$. Оценим $\|F(x) - F(x_0)\|_Y = \|F(x)\|_{C[0,1]} =$

$= \max\limits_{0 \le t \le 1} \left| \int_0^1 \frac{t^2 x(s)}{\sqrt[3]{s}} ds \right| \le \max\limits_{0 \le t \le 1} |t^2| \int_0^1 \frac{|x(s)|}{\sqrt[3]{s}} ds = \int_0^1 \frac{|x(s)|}{\sqrt[3]{s}} ds \le$ (по неравенству Коши-Буняковского) $\le \left(\int_0^1 |x(s)|^2 ds \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{s}} \right)^2 ds \right)^{1/2} = \sqrt{3} \|x\|_{L_2[0,1]}$. Поэтому, если $\|x\|_{L_2[0,1]} < \delta$, то $\|F(x)\|_{C[0,1]} < \sqrt{3}\delta$ и для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$ такое, что $\forall x \in L_2[0,1]$ такого, что $\|x\| < \delta$ выполняется $\|F(x)\| < \varepsilon$. Это означает, что отображение непрерывно в точке x_0.

<u>Задача 23.</u> Является ли отображение $F: L[0,1] \to L[0,1]$ непрерывным, если $F(x) = x^2(t)$.

<u>Решение:</u> Покажем, что данное отображение не является непрерывным в нуле, т.е. $\exists \varepsilon_0 > 0$, что $\forall \delta > 0 \ \exists x \in L_2[0,1], \|x\| < \delta$, но $\|F(x)\| \ge \varepsilon_0$.

Пусть $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}$. Рассмотрим последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}(1-nt), t \in [0, 1/n[, \\ 0 \qquad\qquad , t \in [1/n, 1], \end{cases}$$

которая сходится к нулю. Действительно, $\|x_n(t)\|_{L[0,1]} = \int_0^1 |x_n(t)| dt$

$$= \int_0^{1/n} \left|\sqrt{n}(1-nt)\right| dt = \; = \sqrt{n}\int_0^{1/n} |1-nt| dt =$$

$$\sqrt{n}\int_0^{1/n} (1-nt)dt = [1-nt = z] = \sqrt{n}\int_1^0 z\frac{dz}{-n} = -\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{z^2}{2}\Bigg|_1^0 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Покажем, что $F(x_n)$ к нулю не стремится.

$$\|F(x_n)\|_{L[0,1]} = \int_0^1 |F(x_n)| dt = \int_0^1 x_n^2(t)dt = \int_0^{1/n} n(1-nt)^2 dt = n\int_1^0 z^2 \frac{dz}{-n} = \int_0^1 z^2 dz = \frac{1}{3};$$

Таким образом, F не является непрерывным.

<u>Задача 24.</u> Является ли отображение $F: C[0,1] \to C[0,1]$ непрерывным, равномерно непрерывным, удовлетворяющим условию Липшица, если

$$F(x) = \sqrt[3]{|x(t)|}.$$

<u>Решение:</u> Докажем, что отображение F является равномерно непрерывным, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon)$ такое, что $\forall x, y \in C[0,1]$ из условия $\|x - y\| = \max_t |x(t) - y(t)| < \delta$ следует, что

$$\|F(x) - F(y)\| = \max_t |F(x) - F(y)| = \max_t \left|\sqrt[3]{|x(t)|} - \sqrt[3]{|y(t)|}\right| < \varepsilon.$$

Сначала покажем, что для любых вещественных неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство:

$$\left|\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right| \le \sqrt[3]{|a-b|}$$

Пусть для определенности $a>b$, тогда $|a-b| = a-b$ и $\left|\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right| = \sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$. Значит, требуется доказать неравенство $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b} \le \sqrt[3]{a-b}$, которое эквивалентно $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^3 \le a-b$. Упростим его, получим неравенство $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} \ge 0$, которое справедливо.

Так как $\left|\sqrt[3]{|x(t)|}-\sqrt[3]{|y(t)|}\right| \le \sqrt[3]{\left||x(t)|-|y(t)|\right|} \le \sqrt[3]{|x(t)-y(t)|}$, то $\max\limits_t|F(x)-F(y)| \le \sqrt[3]{\max\limits_t|x(t)-y(t)|} < \sqrt[3]{\delta}$. И если $\delta = \varepsilon^3$, то $\|F(x)-F(y)\| < \varepsilon \quad \forall\, x,y$ таких, что $\|x-y\| < \delta$.

Поскольку отображение равномерно непрерывно, то оно и непрерывно.

Докажем, что F не удовлетворяет условию Липшица, т.е. $\forall\, c>0$ существуют непрерывные функции $x(t), y(t)$ такие, что $\|F(x)-F(y)\| \ge c\|x-y\|$.

Пусть $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{2}{n}$, тогда $\|x-y)\| = \dfrac{1}{n}$, а $\|F(x)-F(y)\| = \sqrt[3]{\dfrac{2}{n}}-\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}} =$

$= \sqrt[3]{\dfrac{1}{n}}\left(\sqrt[3]{2}-1\right) = n\dfrac{1}{n}\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}}\left(\sqrt[3]{2}-1\right) = \dfrac{1}{n}n^{2/3}\left(\sqrt[3]{2}-1\right) = n^{2/3}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\|x-y\|$. Так как $n^{2/3}\left(\sqrt[3]{2}-1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, то существует такое n, что $n^{2/3}\left(\sqrt[3]{2}-1\right) > c$, что и требовалось доказать.

9. Эквивалентность норм

<u>Задача 25</u>. Доказать, что в пространстве $C^1[a, b]$ нормы

$$\|x\|_1 = \max_{t\in[a,b]}|x'(t)| + \int_a^b |x(t)|\,dt,$$

$$\|x\|_2 = \max_{t\in[a,b]}|x(t)| + \max_{t\in[a,b]}|x'(t)|$$

эквивалентны.

<u>Решение.</u> Две нормы являются эквивалентными, если они подчинены друг другу. Норма $\|\cdot\|_1$ подчинена $\|\cdot\|_2$, если существует положительная константа α, такая, что

$$\|x\|_1 \le \alpha\ \|x\|_2 \quad \forall\ x \in C^1[a,b].$$

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|dt + \max_t |x'(t)| \le \max_t |x(t)| \cdot (b-a) + \max_t |x'(t)| \le$$

$$\le \max\{b-a, 1\} \cdot \left(\max_t |x(t)| + \max_t |x'(t)|\right) = \alpha \cdot \|x\|_2.$$

С другой стороны, используя формулу Ньютона-Лейбница для непрерывно-дифференцируемых функций

$$x(t) = x(a) + \int_a^t x'(\tau)\, d\tau,$$

получим неравенство $|x(a)| \le |x(t)| + \int_a^b |x'(\tau)| d\tau$. Проинтегрируем обе части по t: $(b-a)|x(a)| \le \int_a^b |x(t)|dt + (b-a)\int_a^b |x'(t)|dt$ или

$$|x(a)| \le \frac{1}{b-a}\int_a^b |x(t)|dt + \int_a^b |x'(t)|dt.$$

Таким образом,

$$\|x\|_2 = \max_t |x(t)| + \max_t |x'(t)| \le |x(a)| + \int_a^b |x'(t)|dt + \max_t |x'(t)| \le$$

$$\le \frac{1}{b-a}\int_a^b |x(t)|dt + 2\int_a^b |x'(t)|dt + \max_t |x'(t)| \le \frac{1}{b-a}\int_a^b |x(t)|dt +$$

$$+ \left(2(b-a) + 1\right) \cdot \max_t |x'(t)| \le$$

$$\le \max\left\{\frac{1}{b-a}, 2(b-a) + 1\right\} \cdot \left(\int_a^b |x(t)|dt + \max_t |x'(t)|\right) = \beta \cdot \|x\|_1.$$

10. Банаховы пространства

Задача 26. Является ли пространство $C^1[0, 1]$ банаховым по норме

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)|\,dt + \max_t |x'(t)|.$$

Решение. Нормированное векторное пространство является банаховым, если любая последовательность Коши в нем сходится. По определению последовательность является последовательностью Коши, если $\|x_n - x_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$. Имеем,

$\|x_n - x_m\| = \int_0^1 |x_n(t) - x_m(t)|\,dt + \max_t \left|x_n'(t) - x_m'(t)\right| \to 0$ при $n, m \to \infty$. Значит,

$\int_0^1 |x_n(t) - x_m(t)|\,dt \to 0$ и $\max_t \left|x_n'(t) - x_m'(t)\right| \to 0$ при $n, m \to \infty$ одновременно.

В силу полноты пространства $L[0, 1]$ последовательность $x_n(t)$ сходится в среднем к функции $x_0(t)$, а последовательность непрерывных функций $x_n'(t)$ сходится равномерно к непрерывной функции $\varphi(t)$. Мы должны показать, что $x_0(t) \in C^1[0, 1]$ и $x_0'(t) = \varphi(t)$. Из сходимости в среднем следует, что существует подпоследовательность x_{n_k}, сходящаяся к $x_0(t)$ почти всюду. Пусть для $t = t_0$ и $x_{n_k}(t_0) \to x_0(t_0)$ при $k \to \infty$, тогда $x_{n_k}(t) - x_{n_k}(t_0) = \int_{t_0}^{t} x_{n_k}'(\tau)\,d\tau$. Перейдем к пределу при $k \to \infty$, получим

$$x_0(t) = x_0(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varphi_0(\tau)\,d\tau \text{ почти всюду.}$$

Учитывая, что $x_0(t)$ абсолютно непрерывная функция, имеем $x_0'(t) = \varphi(t)$.

Данная задача может быть решена и следующим образом. Известно, если в пространстве заданы две эквивалентные нормы, по одной из которых пространство банахово, то оно банахово и по второй норме. В задаче № 25 мы показали, что наша норма эквивалентна норме $\max_{t\in[0,1]}|x(t)| + \max_{t\in[0,1]}|x'(t)|$, по

которой $C^l[0,\ 1]$ банахово. Значит $C^l[0,\ 1]$ банахово и по норме

$$\max_{t\in[a,b]}|x'(t)|+\int_0^1|x(t)|\,dt.$$

<u>Задача 27.</u> Доказать, что пространство $M[a,\ b]$ - ограниченных на отрезке $[a,\ b]$ функций с нормой $\|x\| = \sup_{t\in[a,b]}|x(t)|$ является банаховым.

<u>Решение:</u> Пусть x_n - последовательность Коши в пространстве $M[a,\ b]$. Это значит, что $x_n(t)$ - ограниченные на отрезке $[a,\ b]$ функции и

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon : \forall\ n,m > n_\varepsilon \quad \sup_t|x_n(t) - x_m(t)| \le \varepsilon. \quad (*)$$

Зафиксируем t, получим числовую последовательность $x_n(t)$ такую, что $|x_n(t) - x_m(t)| \to 0$ при $n,\ m\to\infty$. Это означает, что $x_n(t)$ является числовай последовательностью Коши и сходится в силу полноты R. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x_0(t)$. Получили функцию $x_0(t)$, к которой последовательность $x_n(t)$ сходится точечно. Остается доказать, что $x_n(t) \in M[a,\ b]$ и $\sup_t|x_n(t) - x_m(t)| \to 0$ при $n\to\infty$. Перейдем в равенстве (*) к пределу при $m\to\infty$, получим

$$\sup_{a\le t\le b}|x_n(t) - x_m(t)| \le \varepsilon \quad \forall\ n \ge n_\varepsilon.$$

Функция $|x_n(t) - x_0(t)|$ ограничена, значит и $|x_0(t)|$ ограничена, так как $|x_0(t)| \le |x_n(t)| + |x_0(t) - x_n(t)|$. Таким образом, пространство $M[a,\ b]$ является банаховым.

<u>Задача 28.</u> Является ли последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + \dfrac{1}{n^2}},\ t \in [-1,1]\setminus Q, \\ n\cos nt,\ t \in [-1,1]\cap Q, \end{cases}$$

последовательностью Коши в пространстве L_2 [-1, 1] ? Найти предел, если он существует.

<u>Решение:</u> По определению последовательность $x_n(t)$ является последовательностью Коши, если

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ n_\varepsilon : \forall\ n, m > n_\varepsilon \quad \left(\int_{-1}^{1} \left| x_n(t) - x_m(t) \right|^2 dt \right)^{1/2} < \varepsilon .$$

Поскольку интегралы Лебега от эквивалентных функций совпадают, заменим $x_n(t)$ на $y_n(t)$ такую, что $x_n(t) \sim y_n(t)$, где $y_n(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}}$. Имеем

$$\int_{-1}^{1} \left| x_n(t) - x_m(t) \right|^2 dt = \int_{-1}^{1} \left| y_n(t) - y_m(t) \right|^2 dt = \int_{-1}^{1} \left| \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{t^2 + \frac{1}{m^2}} \right|^2 dt \le$$

$$\le \int_{-1}^{1} \left| \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} - |t| \right|^2 dt \text{ при } m > n.$$

Рассмотрим последовательность $z_n = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} - |t|$, которая точечно сходится к нулю и ограничена : $|z_n|^2 \le 1$. Воспользуемся теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, получим

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon : \quad \forall\ n > n_\varepsilon \qquad \int_{-1}^{1} \left| \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} - |t| \right|^2 dt < \varepsilon .$$

Это означает, что $\left\| \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}} - |t| \right\| < \sqrt{\varepsilon} \quad \forall\ n > n_\varepsilon$, т.е. последовательность $y_n(t)$ и, следовательно $x_n(t)$ является последовательностью Коши и сходится к функции $|t| \in L_2$ [-1,1].

11. Расчетные задания

Задание №1. Можно ли в пространстве дважды непрерывно-дифференцируемых функций $C^2[a,b]$ на отрезке *[a,b]* принять за норму величину:

1.1. $|x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{c[a,b]}$;

1.2. $\|x''\|_{c[a,b]} + \|x\|_{CL_2[a,b]}$;

1.3. $|x(a)| + |x(b)| + \|x''\|_{c[a,b]}$;

1.4. $|x(a)| + \|x'\|_{c[a,b]} + \|x''\|_{CL[a,b]}$;

Можно ли в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций $C^1[a,b]$ на отрезке *[a,b]* принять за норму величину:

1.5. $\max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)|$;

1.6. $|x(b) - x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)|$;

1.7. $|x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)|$;

1.8. $\int\limits_a^b |x(t)|dt + \max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)|$;

Найти условия, при которых функция $\varphi(x)$ в пространстве l_2 определяет норму

1.9. $\varphi(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i^2\right)^{1/2}, \quad a_{i\geq 0}$;

1.10 $\varphi(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i x_i^2\right)^{1/2}, \quad a_{i\geq 0}, \quad m$ – фиксировано;

Определить, задает ли пара $(X,\|x\|)$ нормированное векторное пространство:

1.11. $X = \{x(t) \in C[a,b] | x(a) = 0\}, \quad \|x\| = \int\limits_a^b |x(t)|dt$;

1.12. $X = \{x(t) \in C^1[a,b] | x(a) = x(b)\}, \quad \|x\| = \int\limits_a^{(a+b)/2} |x(t)|dt + \int\limits_{(a+b)/2}^b |x'(t)|dt$;

1.13. $X = \left\{ x(t) \in C^1[a,b] \middle| x'(a) = 0 \right\}, \quad \|x\| = \int\limits_a^b |x'(t)|dt + |x(a)|;$

1.14. $X = \left\{ x(t) \in C^1[a,b] \middle| x'(t) \le 0 \right\}, \quad \|x\| = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2};$

1.15. $X = \left\{ x(t) \in C^2[a,b] \right\}, \quad \|x\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |x''(t)| + \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$

Задание №2. Найти предел последовательности x_n в нормированном векторном пространстве $C[a,b]$, если он существует.

2.1. $a = 0, \quad b = 1, \quad x_n(t) = t^n - t^{n-1};$

2.2. $a = 0, \quad b = 1, \quad x_n(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} - \dfrac{t^{n+2}}{n+2};$

2.3. $a = 0, \quad b = 2, \quad x_n(t) = \sqrt{t^2 + \dfrac{1}{n^2}};$

2.4. $a = 1, \quad b = 2, \quad x_n(t) = n\left(\sqrt{t + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{t} \right);$

2.5. $a = 0, \quad b = 1, \quad x_n(t) = \dfrac{nt}{1 + n + t};$

2.6. $a = 0, \quad b = 1, \quad x_n(t) = \dfrac{2nt}{1 + n^2 t^2};$

2.7. $a = 0, \quad b = 2, \quad x_n(t) = \sqrt[n]{1 + t^n};$

2.8. $a = 0, \quad b = 1, \quad x_n(t) = \dfrac{nt}{1 + n^2 t};$

2.9. $a = 0, \quad b = \dfrac{1}{2}, \quad x_n(t) = 2^n t^n (1 - 2t);$

2.10. $a = 1/2, \quad b = 3/2, \quad x_n(t) = \dfrac{t^n}{1 + t^n};$

2.11. $a = -5\pi, \quad b = -4\pi, \quad x_n(t) = \dfrac{4\cos^{n/3} t}{5 + \cos^n t};$

2.12. $a = 0, \quad b = 3, \quad x_n(t) = \dfrac{3^n t^n - t^{2n}}{3^{2n}};$

2.13. $a = 0, \quad b = 1, \quad x_n(t) = \dfrac{nt}{\sqrt{n^2+1}};$

2.14. $a = 0, \quad b = 1, \quad x_n(t) = \sin\dfrac{t}{n};$

2.15. $a = 0, \; b = 1, \quad x_n(t) = \sin t - \sin\dfrac{t}{n}$.

Задание №3. Найти предел последовательности x_n в нормированном пространстве l_p, если он существует.

3.1. $x_n = \left(\underbrace{\left(\dfrac{3n+1}{3n+2}\right)^n,\ldots,\left(\dfrac{3n+1}{3n+2}\right)^n}_{n},0,\ldots\right), \qquad p = \dfrac{5}{2};$

3.2. $x_n = \left(\underbrace{\dfrac{1}{n^2},\ldots,\dfrac{1}{n^2}}_{n},0,\ldots\right), \qquad p = \dfrac{3}{2};$

3.3. $x_n = \left(\underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{n}},\ldots,\dfrac{1}{\sqrt{n}}}_{n},0,\ldots\right), \qquad p = 1;$

3.4. $x_n = \left(\underbrace{\dfrac{\sin(n)}{n},\ldots,\dfrac{\sin(n)}{n}}_{n},0,\ldots\right), \qquad p = 1;$

3.5. $x_n = \left(1,\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},\ldots,\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}0,\ldots\right), \qquad p = 4;$

3.6. $x_n = \left(\underbrace{\sin\dfrac{\pi\ n}{12},\ldots,\sin\dfrac{\pi\ n}{12}}_{n},0,\ldots\right), \qquad p = \dfrac{5}{4};$

3.7. $x_n = \left(1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\ldots,\sqrt[n]{n}0,\ldots\right), \qquad p = \dfrac{14}{5};$

3.8. $x_n = \left(1,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ldots,\dfrac{1}{\sqrt{n}},0,\ldots\right), \qquad p = \dfrac{6}{5};$

3.9. $x_n = \left(\frac{n}{1+n}, \frac{n}{1+2n}, \ldots, \frac{n}{1+kn}, \ldots\ldots \right), \qquad p = 3;$

3.10. $x_n = \left(\frac{n^2}{1+n^2}, \frac{n^2}{1+2n^2}, \ldots, \frac{n^2}{1+kn^2}, \ldots\ldots \right), \qquad p = \frac{3}{2};$

3.11. $x_n = \left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, \frac{1}{n^\sigma}, \frac{1}{(n+1)^\sigma}, \ldots \right), \delta > 1, p = 1;$

3.12. $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, 0, \ldots, 0, 1}_{n}, 0, \ldots \right), p = 2;$

3.13. $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}}_{n^2}, 0, \ldots \right), p = 4;$

3.14. $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots \right), \quad p = 5;$

3.15. $x_n = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \ldots \right), \quad p = l_2.$

Задание 4. Определите, является ли данное множество замкнутым, открытым в пространстве $C[a,b], CL[a,b]$. Найдите его замыкание, внутренние и граничные точки в каждом указанном пространстве.

4.1. $M = \{ x(t) \mid x(a)x(b) = 0 \};$

4.2. $M = \{ x(t) \mid x(a) = x(b) \};$

4.3. $M = \{ x(t) \mid |x(t)| < 1, \forall\ t \in [a,b] \};$

4.4. $M = \{ x(t) \mid x(a) > 0 \};$

4.5. $M = \{ x(t) \in C^1[a,b] \mid x(a) = 0 \};$

4.6. $M = \left\{ x(t) \,\middle|\, \int_a^b |x(t)|\, dt < 1 \right\};$

4.7. $M = \left\{ x(t) \,\middle|\, \int_a^b x(t)\, dt = 0 \right\};$

4.8. $M = \left\{ x(t) \middle| \max\limits_{a \le t \le b} |x(t)| < 1 \right\}$;

4.9. $M = \left\{ x(t) \middle| x(a) < 0 \right\}$;

4.10. $M = \left\{ x(t) \in C^1[a,b] \middle| x'(t) < 0 \right\}$;

4.11. $M = \left\{ x(t) \in C^1[a,b] \middle| x'(a) = 0 \right\}$;

4.12. $M = \left\{ x(t) \in C^1[a,b] \middle| x'(a) > 0 \right\}$;

4.13. $M = \left\{ x(t) \middle| x(t) = const \right\}$.

Задание 5. Для данного множества М выяснить,является ли множество $B = M \cap l_p$ открытым, замкнутым, ограниченным в l_p.

5.1. $M = \left\{ x : x_k \le \frac{1}{k}, k = 1,2... \right\}, \quad p = 1;$

5.2. $M = \left\{ x : 0 < x_k < 1, k = 1,2... \right\}, \quad p = \infty;$

5.3. $M = \left\{ x : x_k > 0, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2;$

5.4. $M = \left\{ x : \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k < 1, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2;$

5.5. $M = \left\{ x : x_1 = ... = x_n = 0, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2;$

5.6. $M = \left\{ x : x_k \le \frac{1}{k}, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2;$

5.7. $M = \left\{ x : \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < 1, k = 1,2... \right\}, \quad p = 1;$

5.8. $M = \left\{ x : 0 < x_k < 1, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2;$

5.9. $M = \left\{ x : |x_k| \le \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2;$

5.10. $M = \left\{ x : x_k > 0, k = 1,2... \right\}, \quad p = 4;$

5.11. $M = \left\{ x : |x_k| < \frac{1}{k}, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2;$

5.12. $M = \left\{ x : \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| < 1, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2;$

5.13. $M = \left\{ x: 0 \le x_k \le \frac{1}{k}, k = 1,2... \right\}, \quad p = 2$

5.14. $M = \{ x: 0 \le x_k < 1, k = 1,2... \}, \quad p = \infty$.

Задание 6. Выяснить, является ли отображение F: $X \to Y$ непрерывным, равномерно непрерывным, удовлетворяющим условию Липшица.

6.1. $F: C[0,1] \to C[0,1] \quad F(x) = x^3(t)$;

6.2. $F: C[0,1] \to C[0,1] \quad F(x) = \sqrt{|x(t)|}$;

6.3. $F: C[0,1] \to C[0,1] \quad F(x) = \dfrac{x(t)}{1 + x^2(t)}$

6.4. $F: C[-2,4] \to C[-2,4] \quad F(x) = x(t)\sin x(t)$;

6.5. $F: C[0,1] \to C[0,1] \quad F(x) = \sqrt[3]{|x(t)|}$;

6.6. $F: L[0,1] \to L[0,1] \quad F(x) = x^3(t)$;

6.7. $F: L[0,1] \to L[0,1] \quad F(x) = \int\limits_0^1 e^t x(s)\, ds$;

6.8. $F: L \to L \quad F(x) = x(t^2)$;

6.9. $F: R \to R \quad F(x) = |x|^4$;

6.10. $F: R \to R \quad F(x) = \sqrt{|x|}$;

6.11. $F: C[0,1] \to R \quad F(x) = x(1)$;

6.12. $F: L_2[0,1] \to R \quad F(x) = x(1)$;

6.13. $F: L[0,1] \to C[0,1] \quad F(x) = x^2(t)$;

6.14. $F: L[0,1] \to C[0,1] \quad F(x) = \sqrt{|x(t)|}$.

Задание №7. Определите, являются ли две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ эквивалентными в нормированном пространстве $C^2[a,b]$ два раза непрерывно-дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций.

7.1. $\|x\|_{C^2[a,b]}$ и $\|x\| = |x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a,b]}$;

7.2. $\|x\|_{C^2[a,b]}$ и $\|x\| = |x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]} + \|x''\|_{C[a,b]}$;

7.3. $\|x\|_{C^2[a,b]}$ и $\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2} + \|x''\|_{C[a,b]}$;

7.4. $\|x\|_1 = |x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a,b]}$ и

$\|x\|_2 = |x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]} + \|x''\|_{C[a,b]}$;

7.5. $\|x\|_1 = |x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a,b]}$ и

$\|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2} + \|x''\|_{C[a,b]}$;

7.6. $\|x\|_1 = |x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]} + \|x''\|_{C[a,b]}$ и

$\|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2} + \|x''\|_{C[a,b]}$;

Определите, являются ли две нормы эквивалентными в нормированном пространстве $C^1[a,b]$ непрерывно-дифференцируемых на отрезке [a,b] функций.

7.7. $\|x\|_{C^1[a,b]}$ и $\|x\| = |x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]}$;

7.8. $\|x\|_{C^1[a,b]}$ и $\|x\| = \int_a^b |x(t)|dt + \|x'\|_{C[a,b]}$;

7.9. $\|x\|_1 = |x(a)| + \|x'\|_{C[a,b]}$ и $\|x\|_2 = \int_a^b |x(t)|dt + \|x'\|_{C[a,b]}$.

7.10. Доказать, что в $C[a,b]$ $\|x\|_{L[a,b]}$ эквивалентна норме

$\|x\| = \left(\int_a^b v(t)\, x^2(t)\, dt\right)^{1/2}$, где $v(t) \geq \alpha > 0$ и $v(t) \in C[a,b]$.

Доказать по определению эквивалентность норм в пространстве R^n

7.11. $\|x\|_k$ и $\|x\| = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \left(\alpha_k |x_k|\right)$;

7.12. . $\|x\|_C$ и $\sum \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{i} |x_k|^2\right)^{1/2}$;

7.13. $\|x\|_D$ и $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k |x_k|$;

7.14. $\|x\|_k$ и $\|x\| = \max\limits_{1 \le k \le n} \left| \sum\limits_{i=1}^{k} x_i \right|$;

Задание №8. Является ли последовательность x_n последовательностью Коши в пространстве E. Найти ее предел, если он существует.

8.1. $x_n(t) = \begin{cases} e^{-t/n}, & t \notin Q, \\ 0, & t \in Q. \end{cases}$, $E = L_2[0,1]$;

8.2. $x_n(t) = \begin{cases} \sin nt, & t \in Q \cap [-1,2], \\ \sqrt{t^2 + \dfrac{1}{n^3}}, & t \in [-1,2] \setminus Q. \end{cases}$, $E = L_1[-1,2]$;

8.3. $x_n(t) = \begin{cases} ne^{nt}, & t \in K, \\ \dfrac{t^3}{n}, & t \in [0,1] \setminus K. \end{cases}$, $E = L_{3/2}[0,1]$;

8.4. $x_n(t) = \begin{cases} nt, & t \in [-2,0] \cap Q, \\ ne^{nt}, & t \in [-2,0] \setminus Q. \end{cases}$, $E = L_4[-2,0]$;

8.5. $x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + \dfrac{1}{n^4}}, & t[-1,1] \setminus K, \\ \cos(n+t), & t \in [-1,1] \cap K. \end{cases}$, $E = L_2[-1,1]$;

8.6. $x_n(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{t}{3}\right)^n, & t \in [0,3] \setminus Q, \\ \sin \pi nt, & t \in [0,3] \cap Q. \end{cases}$, $E = L_5[0,3]$;

8.7. $x_n(t) = \begin{cases} (n+t)^{-1}, & t \in [0,1] \setminus K, \\ \exp(n^2 t), & t \in [0,1] \cap K. \end{cases}$, $E = L_{9/5}[0,1]$;

8.8. $x_n(t) = \begin{cases} \sin \dfrac{t}{n}, & t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \setminus Q, \\ \cos \dfrac{t}{n}, & t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \cap Q. \end{cases}$, $E = L_2\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

8.9. $x_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\cos nt}{n}, & t \in [0,1] \setminus K, \\ \exp(\pi\, t^n), & t \in [0,1] \cap K. \end{cases}$, $E = L_{5/3}[0,1]$;

8.10. $x_n(t) = \begin{cases} (0.5t)^n, & t \in [0,2] \setminus K, \\ ne^{nt}, & t \in [0,2] \cap K. \end{cases}$, $E = L_{4/3}[0,2]$;

8.11. $x_n(t) = \begin{cases} (\sin t)^n, & t \in [0,1] \setminus Q, \\ (n+t)^{-1}, & t \in [0,1] \cap Q. \end{cases}$, $E = L_{9/2}[0,1]$;

8.12. $x_n(t) = \begin{cases} ne^{nt}, & t \in K, \\ \dfrac{t^2}{n}, & t \in [0,1] \setminus K. \end{cases}$, $E = L_2[0,1]$;

8.13. $x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + 1/n}, & t \in [-1,1] \setminus K, \\ \sin(n+t), & t \in K. \end{cases}$, $E = L_2[-1,1]$;

8.14. $x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + 1/n}, & t \in [-1,2] \setminus Q, \\ \sin n^2 t, & t \in [-1,2] \cap Q. \end{cases}$, $E = L_1[-1,2]$.

Задание №9. Выяснить, является ли заданное пространство полным по указанной норме.

9.1. Пространство $C^1[a,b]$ непрерывно-дифференцируемых на отрезке [*a, b*] функций с нормой $\|x\| = \max\limits_t |x(t)| + \max\limits_t |x'(t)|$;

9.2. Пространство $C^1[a,b]$ с нормой $\|x\| = \int\limits_a^b |x(t)| + \max\limits_t |x'(t)|$;

9.3. Пространство $C^1[0,1]$ с нормой $\|x\| = \max\limits_{0 \le t \le 1/2} |x(t)| + \max\limits_t |x'(t)|$;

9.4. Пространство l_2 числовых последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots,)$, для которых выполняются следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty \quad \text{с нормой} \quad \|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2};$$

9.5. Пространство $C^1[a,b]$ с нормой $\|x\| = \max\limits_t |x'(t)| + |x(a)|$;

9.6. Пространство $C^1[a,b]$ с нормой $\|x\| = \int_a^b |x'(t)|dt + |x(a)|$;

9.7. Пространство R^n столбцов $x = (x_k)_{k=1}^n$, $x_k \in R$ с нормой

$$\|x\| = \max_{1\le k\le n}(\alpha_k |x_k|), \alpha_k > 0,\ k = 1,2,\ldots,n;$$

9.8. Пространство R^n столбцов $x = (x_k)_{k=1}^n$, $x_k \in R$ с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k |x|_k^2\right)^{1/2}, \alpha_k > 0,\ k = 1,2,\ldots,n;$$

9.9. Пространство $C[0,1]$ непрерывных функций с нормой

$$\|x\| = \max_{0\le t\le 3/4}|x(t)| + \int_{1/2}^{1}|x(t)|dt;$$

9.10. Пространство $C^1[0,1]$ с нормой $\|x\| = \max_{0\le t\le 1}|x(t)| + \max_{0\le t\le 1/2}|x'(t)|$;

9.11. Пространство R^n столбцов $x = (x_k)_{k=1}^n$, $x_k \in R$ с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}|x_k|^2\right)^{1/2};$$

9.12. Пространство R^n столбцов $x = (x_k)_{k=1}^n$, $x_k \in R$ с нормой

$$\|x\| = \max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k} x_i\right|;$$

9.13. Пространство k непрерывных на R конечных функций (равных нулю за пределами некоторого промежутка, своего для каждой функции) с нормой

$$\|x\| = \max_t |x(t)|;$$

9.14. Пространство $m_\alpha = \{x(x_1,\ldots,x_n,\ldots\}, \sup \alpha_i |x_i| < +\infty, \alpha_i > 0$ с нормой

$$\|x\| = \sup_i \alpha_i |x_i|.$$

Задание №10. Проверить, сходится ли ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ в нормированном пространстве E.

10.1. $x_k(t) = \dfrac{4^k t^k - t^{2k}}{4^{2k}}$, $\quad E = C[0,1]$;

10.2. $x_k(t) = \dfrac{t^k}{k} - \dfrac{t^{k+1}}{k+1}, \qquad E = C[0,1];$

10.3. $x_k(t) = \dfrac{1}{t^2 + n^2}, \qquad E = C[0,1];$

10.4. $x_k(t) = t^2 e^{-kt}, \qquad E = C[0,1];$

10.5. $x_k(t) = \dfrac{t}{1 + n^4 t^2}, \qquad E = C[0,1];$

10.6. $x_k(t) = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \left(k^2 + e^t\right)^{-1/3}, \qquad E = C[-10,10];$

10.7. $x_k(t) = \dfrac{1}{k+t}, \qquad E = L_{4/3}[1,2];$

10.8. $x_k(t) = \dfrac{\cos kt}{k^2}, \qquad E = L_1[-3\pi, 2\pi];$

10.9. $x_k(t) = \dfrac{\sin kt}{k^2}, \qquad E = L_1[-3\pi, 2\pi];$

10.10. $x_k(t) = \left(\underbrace{\dfrac{(-1)^k}{k}, \ldots, \dfrac{(-1)^k}{k}}_{k}, 0, \ldots \right), \qquad E = l_1;$

10.11. $x_k(t) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \ldots, \dfrac{1}{3^k} \right), \qquad E = l_{3/2};$

10.12. $x_k(t) = \left(\underbrace{\dfrac{k}{2^k}, \ldots, \dfrac{k}{2^k}}_{k}, 0, \ldots \right), \qquad E = m;$

10.13. $x_k(t) = \left(\underbrace{\dfrac{\sin k}{k}, \ldots, \dfrac{\sin k}{k}}_{k}, 0, \ldots \right), \qquad E = l_{5/3};$

10.14. $x_k(t) = \left(\underbrace{\dfrac{k^2}{3^k}, \ldots, \dfrac{k^2}{3^k}}_{k}, 0, \ldots \right), \qquad E = m.$

Библиографический список

1. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры. Интегрирование мер. - М.: Наука, 1967.
2. Зорич. Математический анализ. – Часть II. - М.: Наука, 1984.
3. Ильин В.А, Позняк Э.Г. Основы математического анализа. – Часть II. - М.: Наука, 1980 и др. издания.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1972 и др. издания.
5. Наймарк М.А. Нормированные кольца. – Гостехиздат, 1956.
6. Петров В.А., Виленкин Н.Я., Граев М.И. Элементы функционального анализа в задачах. – М.: Просвещение, 1978.
7. Рудин У. Основы математического анализа. – М.: Мир, 1966.
8. Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1966.
9. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980.
10. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М.: Наука, 1984.

СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	4
1.	Понятие нормы	5
2.	Сходимость	6
3.	Топологические понятия	10
4.	Ограниченность	13
5.	Подпространства	15
6.	Плотные подмножества, сепарабельные пространства	17
7.	Выпуклость	18
8.	Непрерывность	19
9.	Эквивалентность норм	22
10.	Банаховы пространства	23
11.	Расчетные задания	26
12.	Библиографический список	37