Министерство образования и науки РФ
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АмГУ»)

Учебно-методический комплекс дисциплины

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

по направлению подготовки
010600.68 – «Прикладные математика и физика»

Утвержден на заседании кафедры теоретической и экспериментальной физики инженерно-физического факультета
«__» ___________ 20__г.,
(протокол № __ от «__»_____20__г.)
Зав. кафедрой __________Е.А. Ванина

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
инженерно-физического факультета
Амурского государственного
университета

Веселова Е.М.

Дополнительные главы математической физики. Учебно-методический комплекс дисциплины по направлению подготовки 010600.68 – «Прикладные математика и физика» – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2011 – 107 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине:

«Дополнительные главы математической физики» по направлению подготовки 010600.68 – «Прикладные математика и физика».

Курс 6

Семестр 11

Лекции 54 час.

Экзамен 11 семестр.

Практические (семинарские) занятия (нет).

Лабораторные занятия (нет).

Самостоятельная работа 66 час.

Всего 120 час.

1.1 Цели и задачи дисциплины, её место в учебном процессе

1.1.1 Цель преподавания учебной дисциплины

Дисциплина «Дополнительные главы математической физики» посвящена изучению математических моделей естественнонаучных явлений, которые приводят к задачам для дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.

Целью преподавания дисциплины является знакомство с методами построения математических моделей различных процессов и явлений естествознания, изучение основных методов исследования возникающих при этом математических задач и их решение, выяснение физического смысла полученного решения.

Основные задачи курса по дисциплине «Дополнительные главы математической физики»:

1) познакомить с подходами к решению некоторых краевых задач для уравнений математической физики в функциональных пространствах;

2) обеспечить у студентов освоение терминологии и основных положений по изучаемой дисциплине.

1.1.2 Перечень дисциплин, необходимых для изучения данной дисциплины.

Дисциплина излагается на базе математического анализа, алгебры и аналитической геометрии, дифференциальных уравнений, в тесной связи с теорией функций комплексного переменного и с основами функционального анализа, физики.

1.1.3 Перечень основных умений и навыков, приобретаемых при изучении дисциплины.

Дисциплина «Дополнительные главы математической физики вырабатывает навыки построения математических моделей простейших физических явлений и решения (аналитического и численного) получающихся при этом математических задач.

1.2 Содержание дисциплины

1.2.1 Наименование разделов (тем), их содержание, объём в часах лекционных занятий

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ

№	Наименование тем	Кол-во часов
1	Уравнения гиперболического типа	6
2	Уравнения параболического типа	6
3	Уравнения эллиптического типа	8
4	Применение поверхностных потенциалов к решению задач математической физики	8
5	Метод интегральных преобразований	8
6	Сферические функции и их приложения к решению краевых задач	8

7	Применение функций Бесселя для решения краевых задач математической физики	10
	Всего	54

Тема №1.

Простейшие задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Постановка краевых задач. Уравнение малых поперечных колебаний струны. Уравнение продольных колебаний стержней и струн. Энергия колебания струны. Уравнение электрических колебаний в проводах. Поперечные колебания мембраны. Граничные и начальные условия.

Тема №2.

Простейшие задачи, приводящие к уравнениям параболического типа. Постановка краевых задач. Линейная задача о распространении тепла. Распространение тепла в пространстве.

Тема №3.

Задачи, приводящие к уравнению Лапласа.

Стационарное тепловое поле. Уравнения Лапласа и Пуассона. Постановка основных краевых задач. Уравнение Лапласа в криволинейной системе координат.

Тема №4.

Применение поверхностных потенциалов к решению задач математической физики. Объемный потенциал. Потенциал простого слоя. Потенциал двойного слоя. Мультипольное разложение потенциала. Расчет поля электростатического подвеса. Электрическое поле в плазме.

Тема №5.

Метод интегральных преобразований. Интегральное преобразование Фурье. Применение интегрального преобразования Фурье к решению задач. Интегральное преобразование Лапласа. Применение интегрального преобразования Лапласа к решению задач. Конечно-мерные интегральные преобразования.

Тема №6.

Сферические функции и их приложения к решению краевых задач. Симметричность и неотрицательная определенность оператора Лапласа-Бельтрами. Собственные функции оператора Лапласа-Бельтрами. Сферические функции. Основные понятия и теоремы. Шаровые функции. Применение сферических и гармонических функций при решении краевых задач для уравнения Лапласа.

Тема №7.

Применение функций Бесселя для решения краевых задач математической физики. Определение функции Бесселя. Линейная зависимость между функциями Бесселя. Некоторые частные случаи функций Бесселя. Ортогональность функций Бесселя и их корни. Некоторые приложения функций Бесселя к анализу. Применение функций Бесселя к решению краевых задач.

1.3 Перечень и темы промежуточных форм контроля знаний

1.3.1 Коллоквиумы

– Классификация уравнений второго порядка и их приведение к каноническому виду. Основные краевые задачи для волнового уравнения. Метод Фурье…………………………………………………… (3 часа)

–Теория потенциалов……………………………………… (3 часа)

1.3.2 Расчётно-графические работы (РГР).

– Краевые задачи для уравнения Лапласа на плоскости (для кольца, круга, прямоугольника).

Время, затраченное на выполнение……………. (4 часа).

1.3.3 Индивидуальные домашние задания по каждой теме лекционных занятий ……………………………………… (22 часа)

1.3.4 Подготовка к зачету, экзамену ……….. (34 часа)

1.4 Требования к знаниям студентов, предъявляемые на зачете

Необходимым условием допуска на зачет является сдача всех практических работ и расчетных работ. Зачет сдается в конце семестра. Форма зачета – устная. Студент должен дать развернутый ответ на два вопроса, предложенных в билете. При выполнении указанных требований ставится отметка «зачтено».

1.5 Требования к знаниям студентов, предъявляемые на экзамене

Необходимым условием допуска на экзамен является сдача всех практических и расчетных работ. В билет входят два вопроса и одна задача. Студент должен дать развернутый ответ на основные вопросы и краткий – на дополнительные, решить задачу.

Оценка «отлично» ставится при полном изложении теоретического материала экзаменационного билета, ответах на дополнительные вопросы, подтверждающие знание материала, и при правильном решении задачи.

Оценка «хорошо» ставится при твердых знаниях студентом материала (в пределах конспектов лекций); при решении задачи допущены небольшие недочеты и ошибки вычислительного характера.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если на оба вопроса даны неполные ответы, показывающие поверхностное знание излагаемого материала; задача не решена до конца.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если совсем не решена задача и студент не ответил ни на один из вопросов.

1.6 Вопросы к коллоквиуму

1. Основные понятия и определения. Цели и задачи математической физики
2. Классификация уравнений в частных производных 2-го порядка.
3. Приведение дифференциального уравнения 2-го порядка к каноническому виду.

4. Уравнения гиперболического типа. Простейшие задачи, приводящиеся к уравнениям гиперболического типа (уравнения малых поперечных колебаний струны, уравнения продольных колебаний струны, стержня, пружины).
5. Энергия поперечных колебаний струны.
6. Вывод уравнения электрических колебаний в проводах.
7. Краевые задачи для гиперболического уравнения. Предельные задачи.
8. Теорема единственности для решения уравнения колебаний струны.
9. Метод распространяющихся волн. Формула Даламбера.
10. Устойчивость решения уравнения поперечных колебаний струны.
11. Колебания полуограниченной струны.
12. Метод разделения переменных или метод Фурье для уравнений гиперболического типа.
13. Физическая и геометрическая интерпретация решения уравнения свободных колебаний струны.
14. Краевые задачи для неоднородного уравнения гиперболического типа.
15. Общая первая краевая задача.
16. Краевые задачи со стационарными неоднородностями.
17. Общая схема метода разделения переменных.
18. Основные свойства собственных значений.
19. Вычисления коэффициентов разложения ряда Фурье.
20. Решение 3-ей краевой задачи для уравнения гиперболического типа.
21. Задача с данными на характеристиках. Метод последовательных приближений для задачи Гурса.
22. Параболический тип. Линейная задача о распространении тепла (законы Фурье).
23. Начальные и граничные условия для уравнения параболического типа.
24. Первая краевая задача для уравнения параболического типа.
25. Принцип максимального значения для уравнения теплопроводности.
26. Следствие принципа максимального значения.

27. Теорема единственности. Решение первой краевой задачи для уравнения параболического типа.

28. Метод разделения переменных для уравнений параболического типа.

29. Функции источника.

30. Неоднородные уравнения теплопроводности и его решение.

31. Общая первая краевая задача для уравнения параболического типа.

32. Распространение тепла на бесконечной прямой. Функция источника для неограниченной области.

33. Краевые задачи для полуограниченной прямой.

1.7 Вопросы к экзамену

1. Понятие дифференциальных уравнений в частных производных и его решения.

2. Понятие характеристической формы и классификация линейных уравнений 2-го порядка (гиперболического, эллиптического, параболического).

3. Характеристические кривые и характеристические направления.

4. Приведение к каноническому виду уравнений 2-го порядка с двумя переменными.

5. Простейшие задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа (колебание струны, распространение звука, распространение волн).

6. Уравнение малых поперечных колебаний струны.

7. Уравнение продольных колебаний струны (стержня).

8. Энергия колебаний струны.

9. Уравнение колебаний мембраны (б.в.).

10. Граничные и начальные условия (3 типа).

11. Теорема единственности решения для гиперболического типа.

12. Формула Даламбера. (Решение задачи Коши для гиперболического типа)

13. Устойчивость решения.

14. Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны (метод Фурье).

15. Интерпретация решения для волнового уравнения.
16. Задачи с данными на характеристиках. Метод последовательных приближений для задачи Гурса.
17. Простейшие задачи, приводящие к уравнению параболического типа(уравнение теплопроводности, диффузионные процессы).
18. Линейная задача о распространении тепла (уравнение теплопроводности)
19. Постановка краевой задачи для уравнения теплопроводности.
20. Принцип максимального значения для уравнения теплопроводности.
21. Теорема единственности для параболического типа.
22. Метод разделения переменных для уравнения теплопроводности. Однородная краевая задача.
23. Функция источника для уравнения теплопроводности.
24. Неоднородное уравнение теплопроводности и его решение.
25. Общая (первая) краевая задача для уравнения теплопроводности (уравнение и граничные условия неоднородны).
26. Распространение тепла на бесконечной прямой (задача Коши).
27. Интеграл Пуассона для решения уравнения теплопроводности.
28. Краевая задача для полуограниченной прямой (леммы).
29. Уравнения эллиптического типа. Задачи, приводящие к уравнениям Лапласа.
30. Уравнения Лапласа в криволинейной системе координат (3 вида: в сферической, полярной, цилиндрической).
31. Фундаментальные решения уравнения Лапласа.
32. Гармонические функции. Общие свойства функций.
33. Первая и вторая формулы Грина.
34. Основная формула Грина.
35. Внешние краевые задачи для уравнений эллиптического типа.
36. Решение краевых задач для простейших областей методом разделения переменных.
37. Интеграл Пуассона (эллиптические уравнения).

38. Функция источника для уравнения Лапласа.
39. Свойства функции источника для уравнения Лапласа.
40. Теория потенциалов. Объемный потенциал.
41. Плоская задача. Логарифмический потенциал.
42. Поверхностный потенциал. Потенциал простого слоя.
43. Потенциал диполя. Потенциал двойного слоя.
44. Применение поверхностных потенциалов к решению краевых задач.
45. Первая краевая задача для круга (вывод).
46. Уравнения колебания в пространстве.
47. Метод усреднения.
48. Формула Пуассона для решения задачи Коши о распространении волн в пространстве.
49. Метод спуска. Сферические, цилиндрические, плоские волны.
50. Решения уравнений колебания на плоскости и в пространстве (интегральные формулы Кирхгофа).
51. Решение неоднородного волнового уравнения в пространстве.
52. Колебания ограниченных объемов. Общая схема метода разделения переменных.
53. Колебания прямоугольной мембраны.
54. Колебания круглой мембраны.
55. Функция температурного влияния.
56. Распределение тепла в пространстве (неограниченном).
57. Распространение тепла в ограниченных телах. Схема метода разделения переменных.
58. Решение неоднородного уравнения теплопроводности в ограниченных телах.

1.8 Учебно-методические материалы по дисциплине

<u>Основная литература</u>

1. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – 4-е изд., испр.- М.: Физматлит, 2003.-688 с.
2. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики.- М., изд. МГТУ, 1996.
3. Масленникова В.Н. Дифференциальные уравнения в частных производных.- М.: Изд-во РУДН, 1997.-447 с.

Дополнительная литература

1. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики: Учеб.-М.: Наука, 1982, 336 с.
2. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнения математической физики: Учеб. пособие М.: Наука, 1980, 636 с.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики: Учеб. пособие М.: Наука, 1981, 512 с
4. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики: Учеб. пособие М.: Наука, 1982, 256 с.
5. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных: Учеб. пособие М.: Наука, 1983, 424 с.
6. Пакулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики: М.: Наука, 1995, 224
7. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными: Учеб. - М., изд-во МГУ, 1984, 390 с.
8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Учеб.: Т. 2,4, М.: Наука, 1981, 655 с.
9. Тихонов А.А., Самарский А.А., Уравнения математической физики: Учеб. М.: Наука, 1977, 735 с.

Методические указания и методические материалы, используемые в учебном процессе.

1.Труфанова Т.В., Сельвинский В.В. Метод разделения переменных или метод Фурье для решения уравнений в частных производных. Учеб.-метод. пособие: Благовещенск, изд-во АмГУ, 1999.-61 с.

2. Труфанова Т.В., Сельвинский В.В., Масловская А.Г. Метод разделения переменных для решения уравнений математической физики. Учеб.-метод. пособие: Благовещенск, изд-во АмГУ, 2005.-87 с.

3. Труфанова Т.В., Веселова Е.М. Уравнения математической физики. Учебное пособие: Благовещенск, изд-во АмГУ, 2010.-112 с.

4. Материалы контрольных работ.

2 ГРАФИК САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Содержание	Объем в часах	Сроки и формы контроля
Подготовка к коллоквиуму: «Классификация уравнений второго порядка и их приведение к каноническому виду. Основные краевые задачи для волнового уравнения. Метод Фурье»	3	2 семестр собеседование
Подготовка к коллоквиуму: «Теория потенциалов»	3	2 семестр собеседование
Выполнение РГР – Краевые задачи для уравнения Лапласа на плоскости (для кольца, круга, прямоугольника).	4	2 семестр, проверка РГР
Выполнение индивидуальных домашних заданий по каждой теме лекционных занятий	22	2 семестр, проверка индивидуаль-ных домашних заданий
Подготовка к экзамену	34	2 семестр
Всего	66	

3 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРОВЕДЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

В качестве основных литературных источников используются учебные издания, указанные в п. 1.8 Учебно-методические материалы по дисциплине (Основная и дополнительная литература) рабочей программы.

В качестве учебно-методических пособий по самостоятельной работе используются конспекты лекций и пособия:

1) Труфанова Т.В., Сельвинский В.В., Масловская А.Г. Метод разделения переменных для решения уравнений математической физики. Учеб.-метод. пособие: Благовещенск, изд-во АмГУ, 2005.-87 с., содержание которого представлено ниже.

2) Труфанова Т.В., Веселова Е.М. Уравнения математической физики. Учебное пособие: Благовещенск, изд-во АмГУ, 2010.-112 с., содержание которого представлено ниже.

4 ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНИКОВ, УЧЕБНЫХ ПОСОБИЙ

1. Арфкен Г. Математические методы в физике. – М.: Атомиздат, 1970. – 712 с.
2. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – 4-е изд., испр.- М.: Физматлит, 2003.-688 с.
3. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики.- М., изд. МГТУ, 1996.
4. Масленникова В.Н. Дифференциальные уравнения в частных производных.- М.: Изд-во РУДН, 1997.-447 с.
5. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики: Учеб.-М.: Наука, 1982, 336 с.
6. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнения математической физики: Учеб. пособие М.: Наука, 1980, 636 с.
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики: Учеб. пособие М.: Наука, 1981, 512 с
8. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики: Учеб. пособие М.: Наука, 1982, 256 с.
9. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука. 1964. – 490 с.
10. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Наука, 1985. – 480 с.
11. Николенко В. И. Уравнения математической физики. М.: изд-во МГУ, 1977 – 111 с.
12. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производ- ных: Учеб. пособие М.: Наука, 1983, 424 с.
13. Пакулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики: М.: Наука, 1995, 224 с.
14. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными: Учеб. -М., изд-во МГУ, 1984, 390 с.

15. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Учеб.: Т. 2,4, М.: Наука, 1981, 655 с.
16. Тихонов А.А., Самарский А.А., Уравнения математической физики: Учеб. М.: Наука, 1977, 735 с.
17. Уроев В. М. Уравнения математической физики. М.: Наука, ИФ «ЯУЗА», 1998 – 373 с.
18. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. – М.: Мир, 1985. – 383с.
19. Цой В. М. Методы расчета задач тепломассопереноса. – М.: Наука, 1984. – 478 с.
20. Труфанова Т.В., Сельвинский В.В. Метод разделения переменных или метод Фурье для решения уравнений в частных производных. Учеб.-метод. пособие: Благовещенск, изд-во АмГУ, 1999.-61 с.
21. Труфанова Т.В., Сельвинский В.В., Масловская А.Г. Метод разделения переменных для решения уравнений математической физики. Учеб.-метод. пособие: Благовещенск, изд-во АмГУ, 2005.-87 с.
22. Труфанова Т.В., Веселова Е.М. Уравнения математической физики. Учебное пособие: Благовещенск, изд-во АмГУ, 2010.-112 с.

5 КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Глава 1. ПРИМЕНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Исторически рано развившейся областью математической физики и важной с точки зрения физических приложений является теория потенциала.

Впервые понятие потенциала было введено в конце 18 века П. Лапласом и Ж. Лагранжем, а затем для задач гидродинамики – Л. Эйлером. Рассмотрение потенциала как функции, градиент которой равен векторному полю, принадлежит К.Ф. Гауссу. Большой вклад в развитие теории потенциала был сделан Ш. Кулоном, С. Пуассоном, Д. Грином. В настоящее время теория потенциала – активно развиваемый метод исследования и решения задач в разных областях математической физики.

Ключевую роль в методах теории потенциала играют фундаментальные решения уравнения Лапласа, равные $\frac{1}{4\pi r}$ в трехмерном и $\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{r}\right)$ в двумерном случаях. На основании этих решений строятся потенциалы, которые представляются в виде интеграла от произведения некоторой функции (плотности потенциала) и фундаментального решения. В зависимости от области интегрирования и использования фундаментального решения или его нормальной производной различают объемные потенциалы, потенциалы простого и двойного слоя.

1.1 Объемный потенциал

Определение 1. Пусть Ω – некоторая конечная область пространства, ограниченная кусочно гладкой замкнутой поверхностью S. Пусть в Ω задана функция $\rho(P)$, которую мы предполагаем непрерывной и ограниченной в Ω. Тогда

$$\varphi(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\rho(P)}{r}dV \tag{1}$$

называется объемным (ньютоновским) потенциалом масс, распределенных по объему V с плотностью ρ, M_0 – любая точка пространства.

Основным свойством объемного потенциала является то, что если плотность ρ непрерывно дифференцируемая и ограниченная в области Ω функция, то вне области Ω объемный потенциал (1) удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi(M_0)=0$, а внутри области Ω – уравнению Пуассона $\Delta\varphi(M_0)=-\rho(P)$, $\rho\in\Omega$.

В двумерном случае потенциал имеет вид

$$\varphi(M_0)=\frac{1}{2\pi}\iint_D \rho(P)\ln\frac{1}{r_{M_0P}}dS \tag{2}$$

и называется логарифмическим потенциалом области с плотностью ρ, $r_{M_0P}=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$. Функция $\ln\frac{1}{r}$ является фундаментальным решением двумерного уравнения Лапласа.

1.2 Потенциал простого слоя

Определение 2. Пусть $\sum$ – конечная гладкая поверхность, на которой задана непрерывная ограниченная функция $\rho(P)$. Поверхность $\sum$ принято называть несущей поверхностью слоя. Тогда выражение $\varphi(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma \frac{\rho(P)}{r}dS$ принято называть потенциалом простого слоя, распределенного по поверхности $\sum$ с плотностью $\rho(P)$.

Свойства потенциала простого слоя:

1) потенциал простого слоя удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках пространства, не принадлежащих поверхности $\sum$.

Действительно, $\Delta\varphi(M_0)=\Delta\left(\frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma\frac{\rho(P)}{r}dS\right)=\frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma\rho(P)\Delta\left(\frac{1}{r}\right)dS$. Поскольку $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0$, то $\Delta\varphi(M_0)=0$, $M_0\notin\sum$;

2) на бесконечности потенциал простого слоя ведет себя как потенциал материальной точки, расположенной в начале координат, причем сосредоточенная там масса равна всей массе, распределенной по $\sum$;

3) нормальная производная потенциала простого слоя претерпевает разрыв при пересечении слоя, причем величина скачка при пересечении слоя в точке M_0 в направлении дифференцирования равна

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{M_0+} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{M_0-} = \rho(M_0) \qquad (3)$$

где $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{M_0+}, \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{M_0-}$ – предельные значения нормальной производной потенциала простого слоя с внутренней и наружной стороны поверхности Σ; $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{M_0+} = \lim\limits_{x\to x+0}\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{M_0-} = \lim\limits_{x\to x-0}\frac{\partial\varphi}{\partial n}$.

Значение нормальной производной в точке M_0 равно

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{M_0} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{M_0+} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{M_0-}\right\}.$$

Заметим, что в точках слоя, в которых плотность равна нулю, нормальная производная потенциала простого слоя непрерывна. Равенство (3) можно уточнить следующим образом:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{M_0+} = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\frac{\rho(P)}{r^2}\cos\theta\, dS + \frac{1}{2}\rho(M_0),$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{M_0-} = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\frac{\rho(P)}{r^2}\cos\theta\, dS - \frac{1}{2}\rho(M_0),$$

где θ – угол между $\overline{n}$ – внешней нормали к поверхности $\sum$ в точке P и $\overline{r} = \overrightarrow{M_0P}$.

В двумерном случае потенциал простого слоя имеет вид

$$\varphi(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{L}\rho(P)\ln\frac{1}{r_{M_0P}}dl \qquad (4)$$

и называется логарифмическим потенциалом простого слоя. Кривая L называется несущей линией слоя, а $\rho(P)$ – его плотностью.

1.3 Потенциал двойного слоя

Пусть даны два равных по величине, но противоположных по знаку электрических заряда $+e$ и $-e$, находящихся на расстоянии h друг от друга (диполь). Прямую, проходящую через них, снабдим направлением от отрицательного заряда к положительному. Это будет ось диполя $\bar{n}$.

Пусть P – точка, лежащая посередине между зарядами, M_0 – произвольная точка, а θ – угол между осью n и направлением PM_0. Записывая потенциал в точке M_0 и переходя к пределу при $h \to 0$ так, чтобы заряды устремлялись в точку P вдоль соединяющей их прямой, причем произведение стремилось к некоторому конечному пределу ν, называемому коэффициентом диполя, получаем выражение

$$\varphi(M_0) = \nu \frac{\cos\theta}{r^2} = \nu \frac{\partial\left(1/r\right)}{\partial n}, \tag{5}$$

которое называется потенциалом диполя момента ν, расположенного в точке P и имеющего своей осью ориентированную прямую $\bar{n}$.

Обобщив метод нахождения потенциала диполя, можно дать определение потенциала двойного слоя. Проведем следующее построение. На нормали в каждой точке P поверхности $\sum$ отложим в обе стороны от P отрезки длины $\frac{1}{2}h$, где h – достаточно малая величина. В конце этих отрезков поместим заряды $\pm\frac{1}{h}\nu(P)$ так, что направление от отрицательного заряда к положительному совпадает с направлением положительной нормали. Таким образом, получаем два простых слоя с поверхностными плотностями $\pm\frac{1}{h}\nu(P)$, лежащих на близком расстоянии по обе стороны от $\sum$. В пределе при $h \to 0$ получаем двойной слой на поверхности $\sum$ с плотностью моментов ν с потенциалом

$$\varphi(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\nu\frac{\cos\theta}{r^2}dS=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\nu\frac{\partial\left(1/r\right)}{\partial n}dS\,. \qquad (6)$$

Здесь θ обозначает угол между единичным вектором нормали $\bar{n}$ в точке Р и направлением PM_0 (M_0 – произвольная точка).

Свойства потенциала двойного слоя:

1) потенциал двойного слоя удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках, не лежащих на поверхности $\sum$

$$\Delta_{M_0}\varphi=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\nu(P)\Delta_{M_0}\left(\frac{\partial\left(1/r\right)}{\partial n}\right)_P dS_P=0\,.$$

Вне поверхности $\sum$ потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta\varphi(M_0)=-\rho(P)$;

2) потенциал двойного слоя при пересечении слоя претерпевает разрыв, причем величина скачка при пересечении слоя в направлении положительной нормали через точку M_0 слоя равна

$$\varphi_+(M_0)-\varphi_-(M_0)=-\rho(M_0)\,.$$

При переходе точки M_0 потенциал двойного слоя претерпевает разрыв и имеют место равенства

$$\varphi_+(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{\rho(P)}{r^2}\cos\theta\,dS-\frac{1}{2}\rho(M_0)\,,$$

$$\varphi_-(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{\rho(P)}{r^2}\cos\theta\,dS+\frac{1}{2}\rho(M_0)\,;$$

прямое значение потенциала в точке M_0 равно

$$\varphi_0(M_0)=\frac{1}{2}\left\{\varphi_+(M_0)+\varphi_-(M_0)\right\}.$$

Нормальная производная потенциала двойного слоя остается непрерывной при пересечении слоя.

На плоскости потенциал двойного слоя имеет вид

$$\varphi(M_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{L}\nu(P)\frac{\cos\theta}{r}dl=\frac{1}{2\pi}\int_{L}\nu(P)\frac{\partial\ln\left(1/r\right)}{\partial n}dl \qquad (7)$$

и называется логарифмическим потенциалом двойного слоя.

1.4 Мультипольное разложение потенциала

Пусть система неподвижных электрических зарядов, т.е. некоторое заряженное тело, занимает ограниченный объем в некоторой области пространства Ω, а распределение электрического заряда в теле задано объемной плотностью заряда $\rho(N)$, $N \in \Omega$.

Введем систему координат с началом в точке O внутри Ω и обозначим через $\vec{r}$ радиус-вектор точки *N*, а через $\vec{R}$ радиус-вектор, определяющий положение некоторой точки *M* вне заряженного тела как показано на рисунке 1.

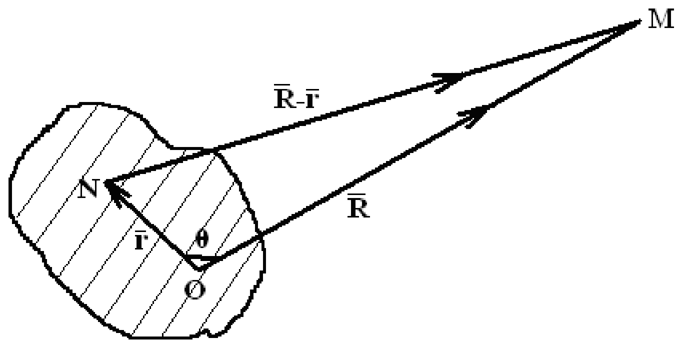

Рисунок 1 – Система координат

Найдем потенциал электростатического поля в точке *M*, считая, что $R >> r$, т.е. на достаточно большом расстоянии от заряженного тела.

Как было показано ранее, потенциал φ в точке *M* можно выразить в виде объемного потенциала

$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r})}{\left|\vec{R} - \vec{r}\right|} dV . \tag{8}$$

Учитывая, что точка *M* выбрана так, что $R >> r$ представим $\varphi(M)$ в виде разложения по степеням $\dfrac{1}{R}$:

$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{(n)}}{R^{n+1}} = \frac{q^{(0)}}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q^{(1)}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + \frac{q^{(2)}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} + \ldots \tag{9}$$

Такое разложение потенциала назовем разложением по мультиполям, а каждый коэффициент $q^{(n)}$ этого разложения – электрическим моментом *n*-го порядка данной системы зарядов заряженного тела. Физически такое разложение соответствует возможности представления электрического поля любого заряженного тела на больших расстояниях от него в виде поля точечного заряда, описываемого первым членом в разложении (9).

Определим коэффициенты $q^{(n)}$ разложения (9). Для этого введем угол $\theta = (\vec{r}, \vec{R})$ между векторами $\vec{r}$ и $\vec{R}$ и малый параметр задачи $\delta = \dfrac{r}{R}$. Если обозначить $x = \cos\theta$, то по теореме косинусов можно записать

$$\left|\vec{R} - \vec{r}\right|^2 = \left|R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta\right|,$$

$$\frac{1}{\left|\vec{R} - \vec{r}\right|} = \left|R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta\right|^{-1/2} = R^{-1}\left(1 + \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{R}\cos\theta\right)^{-1/2} = R^{-1}\left(1 + \delta^2 - 2\delta x\right)^{-1/2}.$$

Разложим выражение в круглых скобках в правой части этого равенства в степенной ряд по малому параметру δ: $\left(1 + \delta^2 - 2\delta x\right)^{-1/2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x)\delta^n$.

Коэффициенты этого ряда Тейлора определяются известным соотношением $P_n(x) = \dfrac{1}{n!}\dfrac{\partial^n}{\partial\delta^n}(1 + \delta^2 - 2\delta x)^{-1/2}\Big|_{\delta=0}$. Непосредственным вычислением устанавливаем, что $P_n(x)$ при $n = 0,1,2...$ являются полиномами n-й степени. В частности,

$$P_0(x) = \frac{1}{0!}\frac{\partial^0}{\partial\delta^0}(1 + \delta^2 - 2\delta x)^{-1/2}\Big|_{\delta=0} = 1, \tag{10}$$

$$P_1(x) = \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial\delta}(1 + \delta^2 - 2\delta x)^{-1/2}\Big|_{\delta=0} = -\frac{1}{2}\left(1 + \delta^2 - 2\delta x\right)^{-\frac{3}{2}}\left(2\delta - 2x\right)\Big|_{\delta=0} = -\frac{1}{2}(-2x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial\delta^2}(1 + \delta^2 - 2\delta x)^{-1/2}\Big|_{\delta=0} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\delta}\left(\frac{1}{2}\left(1 + \delta^2 - 2\delta x\right)^{-\frac{3}{2}}(2\delta - 2x)\right)\Big|_{\delta=0} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\left(1 + \delta^2 - 2\delta x\right)^{-\frac{5}{2}}(2\delta - 2x)^2 - \frac{1}{2}\left(1 + \delta^2 - 2\delta x\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2\right)\Big|_{\delta=0} = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\left|\vec{R} - \vec{r}\right|} = \frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\delta^n = \frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n \tag{11}$$

и из уравнения (8) для мультипольного разложения потенциала получаем

$$\varphi(M) = \frac{q^{(0)}}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q^{(1)}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + \frac{q^{(2)}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} + \ldots + \frac{q^{(n)}}{4\pi\varepsilon_0 R^{n+1}} + \ldots \qquad (12)$$

Здесь $q^{(0)} = \iiint\limits_{\Omega} \rho dV$ – полный заряд системы; $q^{(1)} = \iiint\limits_{\Omega} \rho\, r\cos\theta dV$ – дипольный момент системы зарядов; $q^{(2)} = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho\, r^2}{2}(3\cos^2\theta - 1)dV$ – квадрипольный момент системы зарядов; $q^{(n)} = \iiint\limits_{\Omega} \rho\, r^n P_n(\cos\theta)dV$ – электрический момент *n*-го порядка.

Определим теперь дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет полином $P_n(x)$. Для этого используем тот факт, что $\frac{1}{\left|\vec{R} - \vec{r}\right|} = \frac{1}{r_{MN}}$ является фундаментальным решением уравнения Лапласа, т.е.

$$\Delta_N\left(\frac{1}{\left|\vec{R} - \vec{r}\right|}\right) = 0,\ M \neq N, \qquad (13)$$

где Δ_N – оператор Лапласа по координатам точки *N*.

Подставив выражение для $\frac{1}{\left|\vec{R} - \vec{r}\right|}$ из уравнения (11) в (13), запишем полученное выражение в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^{n+1}} \Delta_N\left[P_n(\cos\theta) r^n\right] = 0. \qquad (14)$$

Так как это равенство справедливо для любых значений *R*, то из него следует

$$\Delta_N\left[P_n(\cos\theta) r^n\right] = 0. \qquad (15)$$

Выбрав сферическую систему координат с центром в точке O и направив полярную ось в направлении $\vec{R}$, запишем уравнение (15) в этой системе координат

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dr^n}{dr}\right)\right] P_n(\cos\theta) + \left[\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\right)\right] r^n = 0. \qquad (16)$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dr^n}{dr}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2nr^{n-1}\right)=\frac{1}{r^2}\left(2rnr^{n-1}+r^2n(n-1)r^{n-2}\right)=$$

$$=2nr^{n-2}+n(n-1)r^{n-2}=r^{n-2}(n^2+n)=n(n+1)r^{n-2}$$

преобразуем (16) к виду

$$r^{n-2}\left[n(n+1)P_n(\cos\theta)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\right)\right]=0. \quad (17)$$

Это уравнение должно выполняться для любого $r\neq 0$. Поэтому, возвращаясь к обозначениям $x=\cos\theta$, $1-x^2=\sin^2\theta$, $dx=-\sin\theta d\theta$, запишем уравнение (17) для переменного $x\in(-1,+1)$ в дифференциальном виде

$$n(n+1)P_n(x)+\frac{d}{dx}\left(-\sin^2\theta\frac{dP_n(x)}{dx}\right)=0, \text{ или}$$

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}\right)+n(n+1)P_n(x)=0.$$

(18)

Это уравнение называют уравнением Лежандра, а его решения $P_n(x)$ для $n=0,1,2...$ – полиномами Лежандра.

Для полиномов Лежандра справедлива рекуррентная формула $(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$, которая связывает три последовательных полинома Лежандра. По этой формуле можно вычислить полиномы Лежандра любой степени по первым двум, которые определены формулами (10).

1.5 Расчет поля электростатического подвеса

Одним из возможных технических решений проблемы уменьшения трения в гироскопических системах является использование электростатического поля для компенсации силы тяжести. Такие системы называют гироскопами с электростатическим подвесом.

Простейшая модель такого гироскопа представляет собой проводящий шар радиуса r_1 (ротор гироскопа), который находится в поле двух полусферических электродов радиусов r_2, разделенных между собой узким промежутком и имеющих потенциалы $+V_0$ и $-V_0$ (рисунок 2).

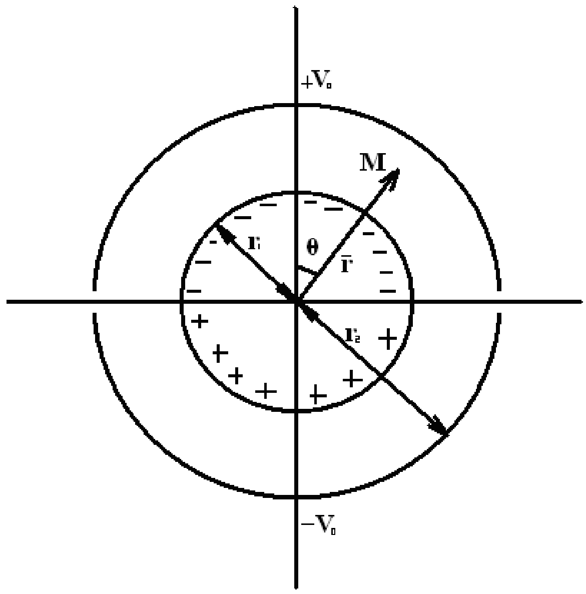

Рисунок 2 – Электростатический подвес

Расчет электростатического поля в зазоре между шаром и электродами $r_1 < r < r_2$ проведем для случая, когда центры шара и электродов совпадают и потенциал шара равен нулю (незаряженный шар). В этом случае нахождение потенциала $\varphi = \varphi(r, \theta)$ электростатического поля в зазоре сводится к решению задачи для уравнения Лапласа, которая с учетом осевой симметрии поля может быть записана в следующем виде:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0, \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 \le \theta \le \pi \tag{19}$$

$$\varphi(r_1, \theta) = 0; \tag{20}$$

$$\varphi(r_2, \theta) = U(\theta) = \begin{cases} +V_0, & 0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ -V_0, & \dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi \end{cases}. \tag{21}$$

Используя метод разделения переменных, когда $\varphi(r, \theta) = R(r)\Phi(\theta)$, получаем

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\Phi(\theta)\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\, R(r)\frac{d\Phi(\theta)}{d\theta}\right)=0, \text{ или}$$

$$\Phi(\theta)\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=-R(r)\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Phi(\theta)}{d\theta}\right),$$

разделяя переменные получаем

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}{R(r)}=-\frac{\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Phi(\theta)}{d\theta}\right)}{\Phi(\theta)}=\lambda=const. \tag{22}$$

Отсюда для нахождения функций $R(r)$ и $\Phi(\theta)$ получаем уравнения

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-\lambda R=0; \tag{23}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Phi(\theta)}{d\theta}\right)+\lambda\Phi=0. \tag{24}$$

Если в уравнении (24) сделать замену переменного $x=\cos\theta$ и положить $\Phi(\theta)=X(x)$, то оно примет вид

$$-\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dX}{dx}\right)=\lambda X,\ x\in(-1,+1). \tag{25}$$

Задача отыскания ограниченного решения уравнения (25), удовлетворяющего условиям $|X(\pm1)|<\infty$, соответствует задаче Штурма-Лиувилля. Эта задача имеет нетривиальные решения $X_n(x)$ лишь при $\lambda=\lambda_n=n(n+1)$. Эти решения (собственные функции) являются полиномами Лежандра n-го порядка, т.е. $X_n(x)=P_n(x)$, или $\Phi(\theta)=P_n(cos\theta)$ для $n=0,1,2,...$

Как собственные функции задачи Штурма-Лиувилля полиномы Лежандра удовлетворяют следующему условию ортогональности:

$$\int_{-1}^{+1}P_n(x)P_m(x)dx=\int_0^{\pi}P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\begin{cases}0, & n\neq m;\\ \dfrac{2}{2n+1}, & n=m.\end{cases} \tag{26}$$

Действительно, пусть $n\neq m$.

$n=0, m=1$ $\qquad \int_{-1}^{+1}P_0(x)P_1(x)dx=\int_{-1}^{+1}xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{+1}=0;$

$n=1, m=2$ $\qquad \int\limits_{-1}^{+1} P_1(x)P_2(x)dx = \int\limits_{-1}^{+1} x\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)dx = \left(\frac{3}{2}\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{+1} = 0$.

Теперь рассмотрим случай при $n=m$.

$n=m=0$ $\qquad \int\limits_{-1}^{+1} P_0^2(x)dx = \int\limits_{-1}^{+1} dx = x\Big|_{-1}^{+1} = 2 = \frac{2}{2\cdot 0+1}$;

$n=m=1$ $\qquad \int\limits_{-1}^{+1} P_1^2(x)dx = \int\limits_{-1}^{+1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{+1} = \frac{2}{3} = \frac{2}{2\cdot 1+1}$;

$n=m=2$ $\qquad \int\limits_{-1}^{+1} P_2^2(x)dx = \int\limits_{-1}^{+1}\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)^2 dx = \left(\frac{9}{4}\frac{x^5}{5}-\frac{3}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4}x\right)\Bigg|_{-1}^{+1} = \frac{2}{5} = \frac{2}{2\cdot 2+1}$.

При $\lambda=\lambda_n=n(n+1)$ из уравнения (23) находим

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}-n(n+1)R=0,$$

делая замену $R=r^k$, $\frac{dR}{dr}=kr^{k-1}$, $\frac{d^2R}{dr^2}=k(k+1)r^{k-2}$, получаем:

$k(k+1)r^k+2kr^k-n(n+1)r^k=0$, отсюда $k^2+k-n(n+1)=0$.

Находим k_1 и k_2: $k_1=n, \quad k_2=-(n+1)$.

Таким образом, $R(r)=a_n r^n + b_n r^{-(n+1)} = a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}$.

или $R(\rho)=A_n\rho^n+\frac{B_n}{\rho^{n+1}}$, где $\rho=r/r_1$; $A_n, B_n = const$.

Используя принцип суперпозиции решений для линейного уравнения (19), представим его решение рядом

$$\varphi(\rho,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\rho^n+\frac{B_n}{\rho^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta), \quad 1<\rho<\gamma, \quad 0\le\theta\le\pi, \tag{27}$$

где $\rho=r/r_1, \quad \gamma=r_2/r_1>1$.

Удовлетворяя при $\rho=1$ граничному условию (20), получаем $A_n+B_n=0$, т.е.

$$\varphi(\rho,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(\rho^n-\frac{1}{\rho^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta). \tag{28}$$

Теперь с учетом граничного условия (21) получаем соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \Gamma_n P_n(\cos\theta) = U(\theta), \quad \Gamma_n = \frac{\gamma^{2n+1} - 1}{\gamma^{n+1}}. \tag{29}$$

Равенство (29) представляет собой разложение функции $U(\theta)$, заданной формулой (21), в ряд Фурье по полиномам Лежандра. С учетом условия ортогональности (26) находим коэффициенты этого разложения

$$A_n \Gamma_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} U(\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} \tilde{U}(x) P_n(x) dx, \tag{30}$$

где $\tilde{U}(x) = \begin{cases} -V_0, & -1 < x < 0 \\ +V_0, & 0 < x < +1 \end{cases}.$

Учитывая правила изменения знака аргумента для полиномов Лежандра $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ из (30) для искомых коэффициентов A_n разложения (27), получим формулы

$$A_n = \frac{2n+1}{2\Gamma_n} \int_{-1}^{+1} \tilde{U}(x) P_n(x) dx = \frac{2n+1}{2\Gamma_n} \left(\int_{-1}^{0} -V_0 P_n(x) dx + \int_0^{+1} V_0 P_n(x) dx \right) =$$

$$= V_0 \frac{2n+1}{2\Gamma_n} \left(-\int_0^{1} P_n(-x) dx + \int_0^{+1} P_n(x) dx \right) = V_0 \frac{2n+1}{2\Gamma_n} \left(-\int_0^{1} (-1)^n P_n(x) dx + \int_0^{+1} P_n(x) dx \right);$$

$$A_0 = V_0 \frac{2 \cdot 0 + 1}{2\Gamma_0} \left(-\int_0^{1} (-1)^0 P_0(x) dx + \int_0^{+1} P_0(x) dx \right) = 0;$$

$$A_1 = V_0 \frac{2 \cdot 1 + 1}{2\Gamma_1} \left(-\int_0^{1} (-1)^1 P_1(x) dx + \int_0^{+1} P_1(x) dx \right) = V_0 \frac{2 \cdot 1 + 1}{2\Gamma_1} 2 \int_0^{+1} P_1(x) dx = V_0 \frac{2 \cdot 1 + 1}{\Gamma_1} \int_0^{+1} P_1(x) dx;$$

$$A_2 = V_0 \frac{2 \cdot 2 + 1}{2\Gamma_2} \left(-\int_0^{1} (-1)^2 P_2(x) dx + \int_0^{+1} P_2(x) dx \right) = 0;$$

$$A_3 = V_0 \frac{2 \cdot 3 + 1}{2\Gamma_3} \left(-\int_0^{1} (-1)^3 P_3(x) dx + \int_0^{+1} P_3(x) dx \right) = V_0 \frac{2 \cdot 3 + 1}{2\Gamma_3} 2 \int_0^{+1} P_3(x) dx = V_0 \frac{2 \cdot 3 + 1}{\Gamma_3} \int_0^{+1} P_3(x) dx.$$

Таким образом,

$$A_n = 0, \quad n = 2k;$$

$$A_n = V_0 \frac{2 \cdot n + 1}{\Gamma_n} \int_0^{+1} P_n(x) dx, \quad n = 2k + 1.$$

Используя известные для полиномов Лежандра формулы $P_n(1)=1$, $P_{n+1}(0)=-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(0)$, $P_n(x)=\frac{1}{2n+1}\left[P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)\right]$, можно вычислить квадратуру

$$\int_0^1 P_n(x)dx=\frac{1}{n+1}P_{n-1}(0), \text{ или}$$

$$\int_0^1 P_n(x)dx=\int_0^1\frac{1}{2n+1}\left(P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)\right)dx=\frac{1}{2n+1}\left(P_{n+1}(x)\Big|_0^1-P_{n-1}(x)\Big|_0^1\right)=$$

$$=\frac{1}{2n+1}\left(P_{n+1}(1)-P_{n+1}(0)-P_{n-1}(1)+P_{n-1}(0)\right)=\frac{1}{2n+1}\left(1+\frac{n}{n+1}P_{n-1}(0)-1+P_{n-1}(0)\right)=$$

$$=\frac{1}{2n+1}\left(P_{n-1}(0)\frac{2n+1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}P_{n-1}(0).$$

Здесь $P_0(0)=1$, $P_1(0)=0$, $P_2(0)=-1/2$, $P_3(0)=0$, $P_4(0)=3/4$, $P_5(0)=0$, $P_6(0)=-5/6$, или $P_{2k+1}(0)=0$; $P_{2k}(0)=(-1)^k\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2k}$, $k\geq1$.

Тогда коэффициенты A_n можно представить следующим образом:

$$A_n=V_0\frac{2\cdot n+1}{\Gamma_n}\frac{1}{n+1}P_{n-1}(0)\Big|_{n=2k+1}=V_0\frac{4k+3}{\Gamma_{2k+1}}\frac{1}{2k+2}P_{2k}(0).$$

Таким образом, окончательно, решение краевой задачи (19) – (21), описывающее распределение потенциала в электростатическом подвесе, запишем в виде

$$\varphi(\rho,\theta)=V_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k+3)P_{2k}(0)}{\Gamma_{2k+1}(2k+2)}\left(\rho^{2k+1}-\frac{1}{\rho^{2k+2}}\right)P_{2k+1}(\cos\theta), \tag{31}$$

$1\leq\rho=r/r_1\leq\gamma,\quad 0\leq\theta\leq\pi.$

Используя известную формулу электростатики (Теорема Гаусса для двух заряженных плоскостей)

$$\delta=\varepsilon_0E_n=-\varepsilon_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\Big|_{r=r_1}=-\varepsilon_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)\Big|_{\rho=1}=-\frac{\varepsilon_0}{r_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)\Big|_{\rho=1}$$

с помощью решения (31), можно определить распределение индуцированных зарядов на поверхности шара

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}=V_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k+3)P_{2k}(0)}{\Gamma_{2k+1}(2k+2)}\left((2k+1)\rho^{2k}-(-2k-2)\rho^{-2k-3}\right)P_{2k+1}(\cos\theta)\Big|_{\rho=1}=$$

$$=V_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k+3)^2P_{2k}(0)}{\Gamma_{2k+1}(2k+2)}P_{2k+1}(\cos\theta);$$

$$\delta=-\frac{\varepsilon_0}{r_1}V_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k+3)^2P_{2k}(0)}{\Gamma_{2k+1}(2k+2)}P_{2k+1}(\cos\theta).$$

1.6 Электрическое поле в плазме

Рассмотрим ионизированный газ, находящийся в состоянии термодинамического равновесия при температуре *T*. Такой газ состоит из положительно заряженных частиц (ионов) и отрицательно заряженных частиц (электронов). Ограничимся случаем однократной ионизации атомов. Тогда в отсутствие внешних силовых полей вследствие хаотического теплового движения частиц в любой точке пространства выполняется локальное условие нейтральности газа: $n_+=n_-=n_0$, где n_0 – объемная концентрация заряженных частиц. При этом в случае однократной ионизации $q_+=+q$, а $q_-=-q$, где $q=1{,}6\cdot10^{-19}\,Кл$ – элементарный электрический заряд.

Внесем в такой ионизированный газ точечный положительный заряд *Q*, поместив его в точку M_0. Под действием поля этого заряда вблизи точки M_0 нарушается условие нейтральности газа, причем концентрация отрицательно заряженных частиц в некоторой области вблизи точки M_0 будет превышать концентрацию положительно заряженных частиц (рисунок 3).

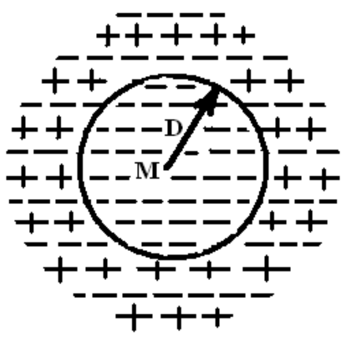

Рисунок 3 – Точечный заряд в ионизированном газе

Рассчитаем потенциал макроскопического электрического поля в ионизированном газе, обусловленный точечным зарядом *Q*. Для этого запишем для потенциала $\varphi(M)$ уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}, \qquad M(x,y,z) \in \Re^3. \tag{32}$$

Здесь плотность электрического заряда

$$\rho(M) = Q\delta_3(M, M_0) + \rho_+(M) + \rho_-(M), \tag{33}$$

где δ_3 – трехмерная дельта-функция, учитывает наличие точечного заряда *Q* и объемно распределенного заряда, обусловленного заряженными частицами ионизированного газа.

Уравнение (32) следует решать при условии, что на бесконечности искомый потенциал обращается в нуль, т.е.

$$\varphi \to 0 \text{ при } r_{MM_0} \to \infty. \tag{34}$$

Плотности электрических зарядов в ионизированном газе $q_+(M)$ и $q_-(M)$ в произвольной точке $M(x,y,z)$ выразим через концентрации заряженных частиц:

$$q_+(M) = +qn_+(M), \; q_-(M) = -qn_-(M).$$

Концентрации $n_+(M)$ и $n_-(M)$ найдем, используя распределение Больцмана для концентрации частиц в силовом потенциальном поле:

$$n_\pm(M) = n_0 e^{-W\pm/(kT)}.$$

Здесь $W_+ = q\varphi(M)$, $W_- = -q\varphi(M)$ – потенциальные энергии соответственно ионов и электронов, находящихся вблизи точки *M*; *k* – постоянная Больцмана.

Следовательно,

$$\rho_+(M) = +qn_0 e^{-q\varphi(M)/(kT)}, \quad \rho_-(M) = -qn_0 e^{+q\varphi(M)/(kT)}. \tag{35}$$

Таким образом, задача отыскания потенциала $\varphi(M)$ электростатического поля в ионизированном газе принимает вид

$$\Delta\varphi = -\frac{Q}{\varepsilon_0}\delta_3(M, M_0) + \frac{qn_0}{\varepsilon_0}\left[e^{\frac{q\varphi(M)}{kT}} - e^{-\frac{q\varphi(M)}{kT}}\right], \; \varphi \to 0 \text{ при } r_{MM_0} \to \infty \tag{36}$$

С учетом свойств дельта-функции $\delta_3(M, M_0)$ запишем задачу (36), исключив из рассмотрения точку $M = M_0$ пространства:

$$\Delta\varphi = \frac{2qn_0}{\varepsilon_0} sh\frac{q\varphi(M)}{kT}, \quad \mathrm{M} = \mathrm{M}_0, \quad \varphi \to 0 \quad \text{при} \quad r_{MM_0} \to \infty. \tag{37}$$

Чтобы задача (37) была эквивалентна задаче (36), асимптотика решения задачи (37) при $r_{MM_0} \to 0$ должна иметь вид $\varphi \approx \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r_{MM_0}}$.

Задача (37) нелинейна, так как правая часть уравнения нелинейно зависит от искомой функции $\varphi(M)$. Однако эту задачу можно линеаризовать, если ограничиться исследованием случаев достаточно высоких температур, когда $kT >> q\varphi$. Это условие означает, что кинетическая энергия теплового движения частиц ионизированного газа значительно больше их потенциальной энергии электростатического взаимодействия. В этом случае

$$sh\frac{q\varphi(M)}{kT} \approx \frac{q\varphi(M)}{kT}$$

и линеаризованная задача (37) будет иметь вид

$$\Delta\varphi = \frac{2q^2 n_0}{\varepsilon_0 kT}\varphi(M), \quad M \neq M_0; \tag{38}$$

$$\varphi \to 0 \quad \text{при} \quad r_{MM_0} \to \infty; \tag{39}$$

$$\varphi \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{MM_0}} \quad \text{при} \quad r_{MM_0} \to 0. \tag{40}$$

Введем сферическую систему координат с центром в точке M_0. В силу центральной симметрии задачи искомый потенциал φ будет зависеть только от радиальной координаты $r = r_{MM_0}$. Тогда уравнение (38) перейдет в обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\varphi(r)$:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = \frac{1}{D^2}\varphi(r). \tag{41}$$

Параметр задачи

$$D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 kT}{2q^2 n_0}}, \tag{42}$$

имеющий размерность длины, называют дебаевским радиусом экранирования, поскольку в 1923 году П. Дебай впервые ввел такой параметр в теории электролитов, которую он разработал совместно с Э. Хюккелем.

Сделав замену искомой функции $\psi = r\varphi$, $\frac{d\psi}{dr} = \varphi(r) + r\frac{d\varphi}{dr}$ преобразуем уравнение (41) к виду

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi}{dr} - r\varphi(r)\right) = \frac{1}{D^2}\varphi(r), \text{ или}$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{d\varphi}{dr} + r\frac{d^2\psi}{dr^2} - \varphi(r) - r\frac{d\varphi}{dr}\right) = \frac{1}{D^2}\frac{\psi}{r}, \text{ или}$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{d\varphi}{dr} + r\frac{d^2\psi}{dr^2} - \left(\varphi(r) + r\frac{d\varphi}{dr}\right)\right) = \frac{1}{D^2}\psi, \text{ отсюда}$$

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{1}{D^2}\psi = 0.$$

Общее решение этого уравнения $\psi = Ae^{-r/D} + Be^{r/D}$ содержит две произвольные константы *A* и *B*.

Возвращаясь к функции $\varphi(r)$, находим общее решение уравнения (41)

$$\varphi = \frac{A}{r}e^{-r/D} + \frac{B}{r}e^{r/D}.$$

Из условия (40) убывания потенциала на бесконечности следует, что константа *B* равна нулю, а выражение для потенциала имеет вид $\varphi = \frac{A}{r}e^{-r/D}$.

Разлагая экспоненту в ряд по степеням $\frac{r}{D}$, получаем

$$\varphi(r) = \frac{A}{r}\left[1 - \frac{r}{D} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{D}\right)^2 - \ldots\right] = \frac{A}{r} - \frac{A}{D} + \frac{Ar}{2D^2} - \ldots = \frac{A}{r} + v(r). \tag{43}$$

Здесь $v(r)$ представляет собой потенциал поля, создаваемого заряженными частицами ионизированного газа в точке *M*, находящейся на расстоянии *r* от точечного заряда *Q*.

Учитывая асимптотику (40) функции $\varphi(r)$ при $r \to 0$, определяем константу $A = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$.

Таким образом, потенциал электрического поля точечного заряда *Q*, помещенного в ионизированный газ,

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-r/D}}{r}. \qquad (44)$$

При $n_0 \to 0$, т.е. в отсутствие заряженных частиц ионизированного газа, из выражения (42) следует, что $D \to \infty$, и из формулы (44) получаем формулу потенциала поля точечного заряда *Q* в вакууме

$$\varphi_0(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (45)$$

Зависимости (44) и (45) описывают качественно различимые по характеру убывания потенциалы короткодействующего и дальнодействующего полей (рисунок 4).

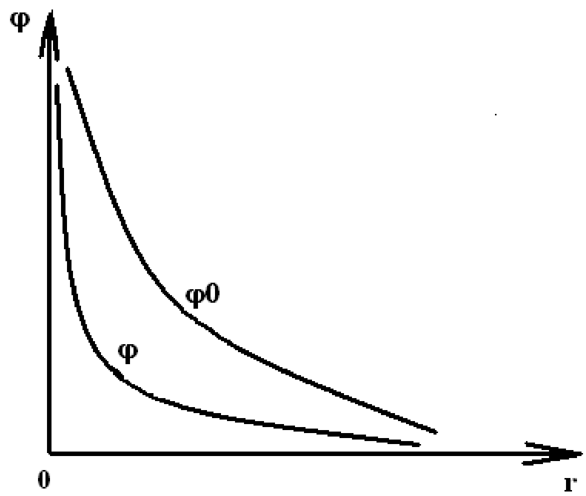

Рисунок 4 – Короткодействующее и дальнодействующее поля

Анализ решения (44) показывает, что электрическое поле заряда *Q* проникает в ионизированный газ лишь на расстояние порядка дебаевского радиуса экранирования *D*. Такой короткодействующий характер электрического поля в ионизированном газе вызван экранированием (компенсацией) поля положительного заряда Q «облаком» отрицательно заряженных частиц, окружающих этот заряд.

Дебаевский радиус D характеризует также эффективный размер пространственной области, где нарушается локальное условие нейтральности, т.е. размер области некомпенсированных объемных зарядов, где $n_- > n_+$.

Если нарушение нейтральности под действием электрического поля происходит в малой по размерам области пространства, то ионизированный газ называют плазмой. Это означает, что для плазмы выполняется условие квазинейтральности $D << L = \sqrt[3]{V}$, где L – характерный размер области, занятой плазмой; V – объем этой области.

Глава 2. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Интегральным преобразованием с ядром $K(x_1, x_2, ..., x_m; \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m)$ называют преобразование вида

$$\iint_{(s)} ... \int f(x_1, x_2, ..., x_n) K(x_1, x_2, ..., x_m; \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m) \times dx_1 dx_2 ... dx_m \quad (m \le n), \qquad (1)$$

которым функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ n переменных x_1, $x_2, \ldots,$ x_n сопоставляется функция $\bar{f}(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m, x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n)$ m переменных γ_1, $\gamma_2, \ldots,$ γ_m и $n-m$ переменных x_{m+1}, $x_{m+2}, \ldots,$ x_n, представленная интегралом (1).

Всякое интегральное преобразование определяется: ядром $K(x_1, x_2, ..., x_m; \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m)$, областью S интегрирования и множеством Ф функций $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, к которым оно применяется. Чтобы задать конкретное интегральное преобразование, надо указать все эти данные.

Преобразование, которым функция $\bar{f}(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m, x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n)$ снова преобразуется в функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, называется обратным интегральному преобразованию (1) или просто обратным преобразованием. При этом само преобразование (1) называют прямым. Отметим, что обратное преобразование не всегда является интегральным.

Пределы интегрирования при преобразовании, следует выбрать так, чтобы они совпадали с пределами (a,b) изменения переменной преобразования x_i, так как иначе либо не были бы учтены значения преобразуемых функций вне интервала интегрирования, либо интегрирование распространялось бы на область, в которой преобразуемые функции могут быть не определенны. Таким образом, если переменная преобразования изменяется в конечных пределах, то и интегральное преобразование будет иметь конечные пределы, в противном случае интегральное преобразование должно быть осуществлено в бесконечных пределах. Соответственно различают конечные и бесконечные интегральные преобразования.

Преобразования Фурье и Лапласа относятся к бесконечным интегральным преобразованиям.

2.1 Интегральное преобразование Фурье

Одним из эффективных методов решения задач математической физики является интегральное преобразование Фурье, с помощью которого краевая задача сводится к задаче с операторным уравнением относительно изображения функции искомого решения. Решение такого операторного уравнения получается значительно проще, чем решение уравнения заданной краевой задачи. В рассматриваемых ниже основных задачах исследуются математические модели, в которых искомые функции заданы в различных пространственно – временных областях с различными начальными и краевыми условиями.

Когда функция $f(t)$ определена для всех действительных значений t, вводится преобразование Фурье

прямое: $F(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ipt}f(t)dt$ (2)

обратное: $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ipt}F(p)dp$ (3)

В зависимости от того является ли функция $f(t)$ четной или нечетной, выделяют соответственно косинус – преобразование Фурье прямое: $F(p)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \cos pt\cdot f(t)dt$ (4)

обратное: $f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \cos pt\cdot F(p)dp$ (5)

и синус – преобразование Фурье

прямое: $F(p)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \sin pt\cdot f(t)dt$ (6)

обратное: $f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \sin pt\cdot F(p)dp$ (7)

При решении задач необходимо знать свойство дифференцирования оригинала.

Если $f(t)$ оригинал, $f(t)\to F(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt} f(t)dt$, то функция $F(p)$ непрерывна на $p\in R$ и $\lim\limits_{p\to\infty} F(p)=0$. Тогда $f'(t)\to ipF(p)$, $f''(t)\to (ip)^2 F(p)$, $f^{(k)}(t)\to (ip)^k F(p)$.

Действительно: по определению $f'(t)\to F(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt} f'(t)dt$.

Возьмем этот интеграл по частям, при этом учитываем, что функция $f(t)$ ограничена, т.е. $f(\pm\infty)=0$ и $\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt\right|<\infty$

2.2 Применение интегрального преобразования Фурье к решению задач

Пользуясь интегральными преобразованиями Фурье, решить следующие задачи:

Задача 1. В полуплоскости $D=\{(x,t):-\infty<x<\infty, t>0\}$ $u_{tt}=a^2u_{xx}$ (8)

начальные условия $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$. (9)

Решение: Функция $u(x,t)$ по переменной x удовлетворяет условиям преобразования Фурье $u(x,t)\to U(p,t)$. Имеем $u(x,0)\to U(p,0)$, $u_t(x,0)\to U_t(p,0)$. Дифференцируя дважды по переменной t преобразование

$u(x,t) \to U(p,t)$, получаем $u_{tt}(x,t) \to U_{tt}(p,t)$. По свойству дифференцирования оригинала при условии, что $u(\pm\infty,t)=0$, $u_x(\pm\infty,t)=0$, находим $u_{xx}(x,t) \to -p^2U(p,t)$.

Тогда задача (8), (9) в пространстве изображений приобретает вид:

$$\begin{cases} U_{tt}(p,t) = -a^2p^2U(p,t), \\ U(p,0) = \Phi(p), \\ U_t(p,0) = \Psi(p). \end{cases}$$

где $\Phi(p)$, $\Psi(p)$ – интегральные преобразования функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, соответственно.

Решение в пространстве изображений выглядит следующим образом:

$$U(p,t) = \Phi(p)\cos(apt) + \frac{\Psi(p)}{ap}\sin(apt).$$

Переходим к оригиналу, применяя обратное преобразование Фурье:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx}\left[\Phi(p)\cos(apt) + \frac{\Psi(p)}{ap}\sin(apt)\right]dp.$$

Полученное решение может быть преобразовано к более удобному виду. Для этого воспользуемся формулами Эйлера для функций $\cos(apt)$ и $\sin(apt)$. Получим

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p)e^{ip(x-at)}dp + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p)e^{ip(x+at)}dp\right] +$$
$$+\frac{i}{2a}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Psi(p)}{p}e^{ip(x-at)}dp - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Psi(p)}{p}e^{ip(x+at)}dp\right].$$

Интегралы в первых квадратных скобках представляют собой функции – оригиналы $f(x-at)$ и $f(x+at)$. Во вторых квадратных скобках стоят значения первообразной функции φ в точках $x-at$ и $x+at$ соответственно, так как

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Psi(p)}{p}e^{ipz}dp\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Psi(p)}{p}\frac{\partial}{\partial z}(e^{ipz})dp = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(p)e^{ipz}dp = f(z).$$

С учетом этого получаем формулу Даламбера для уравнения колебания $u(x,t) = \dfrac{f(x+at)+f(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} f(z)dz$.

Задача 2. В полуплоскости $D=\{(x,t):-\infty<x<\infty, t>0\}$

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) \tag{10}$$

начальные условия $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=0$. (11)

Решение: Функция $u(x,t)$ по переменной x удовлетворяет условиям преобразования Фурье $u(x,t)\to U(p,t)$. Имеем $f(x,t)\to F(p,t)$, $u(x,0)\to U(p,0)$, $u_t(x,0)\to U_t(p,0)$, $u_{tt}(x,t)\to U_{tt}(p,t)$. По свойству дифференцирования оригинала при условии, что $u(\pm\infty,t)=0$, $u_x(\pm\infty,t)=0$, находим $u_{xx}(x,t)\to -p^2U(p,t)$.

Тогда задача (10), (11) в пространстве изображений приобретает вид:

$$\begin{cases} U_{tt}(p,t)+a^2p^2U(p,t)=F(p,t), \\ U(p,0)=0, \\ U_t(p,0)=0. \end{cases} \tag{12}$$

где $F(p,t)$ – интегральные преобразования функции $f(x,t)$.

Уравнение в задаче (12) относительно переменной t – линейное неоднородное уравнение 2-го порядка, его решение

$$U(p,t)=\overline{U}(p,t)+\tilde{U}(p,t) \tag{13}$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\overline{U}(p,t)=c_1(p)e^{-iapt}+c_2(p)e^{iapt}. \tag{14}$$

Частное решение соответствующего неоднородного уравнения

$$\tilde{U}(p,t)=c_1(p,t)e^{-iapt}+c_2(p,t)e^{iapt}. \tag{15}$$

Произвольные функции $c_1(p,t)$ и $c_2(p,t)$ согласно методу Лагранжа находим и системы

$$\begin{cases} c_1'(p,t)e^{-iapt}+c_2'(p,t)e^{iapt}=0, \\ -c_1'(p,t)e^{-iapt}+c_2'(p,t)e^{iapt}=\dfrac{1}{iap}F(p,t). \end{cases}$$

Отсюда $c_1(p,t)=-\dfrac{1}{2iap}\int\limits_0^t e^{iap\tau}F(p,\tau)d\tau$, $c_2(p,t)=\dfrac{1}{2iap}\int\limits_0^t e^{-iap\tau}F(p,\tau)d\tau$.

Тогда частное решение

$$\widetilde{U}(p,t)=\frac{1}{2iap}\int_0^t e^{iap(t-\tau)}F(p,\tau)d\tau-\frac{1}{2iap}\int_0^t e^{-iap(t-\tau)}F(p,\tau)d\tau=$$
$$=\frac{1}{ap}\int_0^t \sin ap(t-\tau)F(p,\tau)d\tau. \qquad (16)$$

Подставляя (14) и (16) в (13), получаем общее решение задачи (12)

$$U(p,t)=c_1(p)e^{-iapt}+c_2(p)e^{iapt}+\frac{1}{ap}\int_0^t \sin ap(t-\tau)F(p,\tau)d\tau. \qquad (17)$$

Отсюда решение задачи (12) имеет вид

$$U(p,t)=\frac{1}{ap}\int_0^t \sin ap(t-\tau)F(p,\tau)d\tau \qquad (18)$$

С помощью обратного преобразования Фурье, получаем

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx}\left[\frac{1}{ap}\int_0^t \sin ap(t-\tau)F(p,\tau)\right]dpd\tau. \qquad (19)$$

или $u(x,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{ip}\left(e^{ip(x+a(t-\tau))}-e^{ip(x-a(t-\tau))}\right)F(p,\tau)dp.$ (20)

Рассмотрим интеграл

$$\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} e^{ip\xi}d\xi=\frac{1}{ip}\left(e^{ip(x+a(t-\tau))}-e^{ip(x-a(t-\tau))}\right). \qquad (21)$$

Подставляя (21) в (20), получаем

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ip\xi}F(p,\tau)dp\right)d\xi. \qquad (22)$$

Поскольку $F(p,\tau)\to f(\xi,\tau)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{ip\xi}F(p,\tau)dp$, то решение задачи (10) и (11) имеет следующий вид: $u(x,t)=\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi$.

Задача 3. В полуплоскости $D=\{(x,t):-\infty<x<\infty, t>0\}$ $u_t=a^2u_{xx}$ (23)

начальное условие $u(x,0)=\varphi(x)$. (24)

Решение: Применим к функции $u(x,t)$ по переменной x преобразование Фурье. Пользуясь свойством дифференцирования оригинала при условии, что

$u(\pm\infty,t)=0$, $u_x(\pm\infty,t)=0$, получим $u_{xx}(x,t)\to -p^2U(p,t)$, $u(x,0)=\varphi(x)\to\Phi(p)$, $u_t(x,0)\to U_t(p,0)$.

Задача (23) – (24) в пространстве изображений преобразования Фурье сводится к задаче

$$\begin{cases} U_t(p,t)+a^2p^2U(p,t)=0, \\ U(p,0)=\Phi(p). \end{cases} \tag{25}$$

Уравнение в задаче (25) имеет решение $U(p,t)=c(p)e^{-a^2p^2t}$.

Произвольную функцию $c(p)$ находим из начального условия задачи (25): $c(p)=\Phi(p)$. Тогда $U(p,t)=\Phi(p)e^{-a^2p^2t}$.

Применяя обратное преобразование Фурье:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ipx}\Phi(p)e^{-a^2p^2t}dp \tag{26}$$

Пользуясь тем, что $\Phi(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ipx}\varphi(x)dx$, получаем

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ipx}e^{-a^2p^2t}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ip\xi}\varphi(\xi)d\xi\right)dp$$

или $u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2p^2t}e^{-ip(\xi-x)}dp.$ (27)

Поскольку $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2p^2t}\sin p(\xi-x)dp=0$, то

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int\varphi(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2p^2t}\cos p(\xi-x)dp=0.$$

Внутренний интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2p^2t}\cos p(\xi-x)dp=\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$. (28)

Подставляя (28) в (27), получаем решение исходной задачи (23) – (24)

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)d\xi.$$

Задача 4. В полуплоскости $D=\{(x,t):-\infty<x<\infty, t>0\}$

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t) \tag{29}$$

начальные условия $u(x,0)=0$. (30)

Решение: Пользуясь преобразованием Фурье функции $u(x,t)$ по переменной x $u(x,t) \to U(p,t)$, имеем $f(x,t) \to F(p,t)$, $u(x,0) \to U(p,0)$, $u_t(x,0) \to U_t(p,0)$. Учитывая, что $u(\pm\infty,t)=0$, $u_x(\pm\infty,t)=0$, по свойству дифференцирования оригинала находим $u_{xx}(x,t) \to -p^2U(p,t)$.

Задача (29) – (30) в пространстве изображений запишется в виде:

$$\begin{cases} U_t(p,t)+a^2p^2U(p,t)=F(p,t), \\ U(p,0)=0. \end{cases} \tag{31}$$

где $F(p,t)$ – интегральные преобразования функции $f(x,t)$.

Решение уравнения в задаче (31) имеет вид

$$U(p,t)=e^{-a^2p^2t}\left(\int_0^t e^{a^2p^2\tau}F(p,\tau)d\tau+c(p)\right)$$

Из начального условия задачи (31) находим, что $c(p)=0$.

$$U(p,t)=e^{-a^2p^2t}\int_0^t e^{a^2p^2\tau}F(p,\tau)d\tau. \tag{32}$$

Применяя обратное преобразование Фурье:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx}\left(e^{-a^2p^2t}\int_0^t e^{a^2p^2\tau}F(p,\tau)d\tau\right)dp.$$

Так как $F(p,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ipx}f(x,t)dx$, то

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}e^{ipx-a^2p^2(t-\tau)}dp\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ip\xi}f(\xi,\tau)d\xi\right)$$

или $u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\tau)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2p^2(t-\tau)+ip(x-\xi)}dp$. (33)

Сделав преобразование

$$-a^2p^2(t-\tau)+ip(\xi-x)=-\left(ap\sqrt{t-\tau}-\frac{i(x-\xi)}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)^2-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}$$

и вводя замену $\mu=ap\sqrt{t-\tau}-\frac{i(\xi-x)}{2a\sqrt{t-\tau}}$, $dp=\frac{1}{a\sqrt{t-\tau}}d\mu$, найдем внутренний интеграл (33).

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2p^2(t-\tau)+ip(x-\xi)}dp = \frac{1}{a\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\mu = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}. \qquad (34)$$

Подставляя (34) в (33), получаем решение исходной задачи (29) – (30)

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\xi.$$

Задача 5. В четвертьплоскости $D = \{(x,t): 0 < x < \infty, t > 0\}$

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad (35)$$

начальное условие $u(x,0) = 0$, (36)

граничное условие $u(0,t) = \mu(t)$. (37)

Решение: Для решения данной задачи воспользуемся синус-преобразованием Фурье (6).

Используя граничное условие (37) и предполагая, что функция $u(x,t)$ и ее производная по x стремятся достаточно быстро к нулю при $x \to \infty$, имеем $u(x,0) \to U(p,0)$, $u_t(x,0) \to U_t(p,0)$.

$$U_{xx}(p,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} u_{xx}(x,t)\sin(px)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}u_x(x,t)\sin(px)\Big|_0^{\infty} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}p\int\limits_0^{\infty} u_x(x,t)\cos(px)dx =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}p\int\limits_0^{\infty} u_x(x,t)\cos(px)dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}p\left\{u(x,t)\cos(px)\Big|_0^{\infty} + p\int\limits_0^{\infty} u(x,t)\sin(px)dx\right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}p\mu(t) - p^2U(p,t)$$

Таким образом задача (35) – (37) в пространстве изображений запишется в виде:

$$\begin{cases} U_t(p,t) + a^2p^2U(p,t) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}a^2p\mu(t), \\ U(p,0) = 0. \end{cases} \qquad (38)$$

Решение уравнения в задаче (38) имеет вид $U(p,t) = a^2p\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_0^t e^{-a^2p^2(t-\tau)}\mu(\tau)d\tau$.

Применяя обратное синус - преобразование Фурье (7), получим

$$u(x,t)=a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty p\sin(px)dx\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t e^{-a^2p^2(t-\tau)}\mu(\tau)d\tau\right)=\frac{2a^2}{\pi}\int_0^t\mu(\tau)d\tau\int_0^\infty e^{-a^2p^2(t-\tau)}p\sin(px)dx=$$

$$=-\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{\pi(t-\tau)}d\tau\left[e^{-a^2p^2(t-\tau)}\sin(px)\Big|_0^\infty-x\int_0^\infty e^{-a^2p^2(t-\tau)}\cos(px)dx\right]=$$

$$=\frac{x}{\pi}\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{\pi(t-\tau)}d\tau\int_0^\infty e^{-a^2p^2(t-\tau)}\cos(px)dx$$

С учетом интеграла (28) получаем решение исходной задачи (35) – (37)

$$u(x,t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau.$$

Задача 6. В полупространстве $D=\{(x,y,t):-\infty<x,y<\infty,t>0\}$

$$u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}) \tag{39}$$

начальное условие $u(x,y,0)=\varphi(x,y)$. (40)

Решение: При решении поставленной задачи воспользуемся кратным (двумерным) преобразованием Фурье.

Таким образом, имеем

$$u(x,y,t)\to U(\omega,\sigma,t)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega x+\sigma y)}u(x,y,t)dxdy$$

$$u_{xx}(x,y,t)\to\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega x+\sigma y)}u_{xx}(x,y,t)dxdy=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\sigma y}dy\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}u_{xx}(x,y,t)dx \tag{41}$$

Учитывая, что $u(\pm\infty,y,t)=0$, $u_x(\pm\infty,y,t)=0$ по свойству дифференцирования оригинала находим

$$u_{xx}(x,t)\to\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}u_{xx}(x,y,t)dx=-\omega^2U_{xx}(\omega,\sigma,t),$$

$$u_{xx}(x,t)\to-\sigma^2U_{yy}(\omega,\sigma,t),$$

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y)\to\Phi(\omega,\sigma)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega x+\sigma y)}\varphi(x,y)dxdy. \tag{42}$$

Задача (39) – (40) в пространстве изображений сводится к задаче

$$\begin{cases}U_t(\omega,\sigma,t)+a^2(\omega^2+\sigma^2)U(\omega,\sigma,t)=0,\\ U(\omega,\sigma,0)=\Phi(\omega,\sigma).\end{cases} \tag{43}$$

Уравнение в задаче (43) имеет решение $U(\omega,\sigma,t)=c(\omega,\sigma)e^{-a^2(\omega^2+\sigma^2)t}$.

Произвольную функцию $c(\omega,\sigma)$ находим из начального условия задачи (43): $c(\omega,\sigma)=\Phi(\omega,\sigma)$.

Тогда $U(\omega,\sigma,t)=\Phi(\omega,\sigma)e^{-a^2\left(\omega^2+\sigma^2\right)t}$. (44)

Применяя обратное кратное преобразование Фурье:

$$u(x,y,t)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega x+\sigma y)}\Phi(\omega,\sigma)e^{-a^2\left(\omega^2+\sigma^2\right)t}d\omega d\sigma=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\omega^2t+i\omega x}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\sigma^2t+i\sigma y}d\sigma\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega\zeta+\sigma\eta)}\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)= \quad (45)$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\omega^2t+i\omega(x-\xi)}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\sigma^2t+i\sigma(y-\eta)}d\sigma.$$

Так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\omega^2t+i\omega(x-\xi)}d\omega=\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$, (46)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\sigma^2t+i\sigma(y-\eta)}d\omega=\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}}. \quad (47)$$

Подставляя (46), (47) в (45), получаем решение задачи (39) – (40)

$$u(x,y,t)=\frac{1}{4\pi a^2t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Задача 7. В части пространства $D=\{(x,y,t):-\infty<x<\infty, 0<y<\infty, t>0\}$

$$u_t=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right) \quad (48)$$

начальное условие $u(x,y,0)=0$, (49)

граничное условие $u(x,0,t)=f(x,y)$ (50)

Решение: Используя преобразование Фурье, имеем $u(\pm\infty,y,t)=0$,

$u_x(\pm\infty,y,t)=0$, $\quad u(x,y,t)\to U(\omega,\sigma,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}u(x,y,t)\sin(\sigma y)dy\right)dx$,

$u_{xx}(x,y,t)\to-\omega^2U(\omega,\sigma,t)$, $u_t(x,y,t)\to U_t(\omega,\sigma,t)$,

$$u_{yy}(x,y,t)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}u_{yy}(x,y,t)\sin(\sigma y)dy\right)dx.$$

С учетом

$$U_{yy}(\omega,\sigma,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u_{yy}(x,y,t)\sin(\sigma y)dy=\sqrt{\frac{2}{\pi}}u_y(x,y,t)\sin(\sigma y)\Big|_0^\infty-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\int_0^\infty u_y(x,y,t)\cos(\sigma y)dy$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\int_0^\infty u_y(x,y,t)\cos(\sigma y)dy=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\left\{u(x,y,t)\cos(\sigma y)\Big|_0^\infty+\sigma\int_0^\infty u(x,y,t)\sin(\sigma y)dy\right\}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma f(x,t)-\sigma^2U(\omega,\sigma,t)$$

получим $u_{yy}(x,y,t)\to\dfrac{\sigma}{\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega x}f(x,t)dx-\sigma^2U(\omega,\sigma,t)/$

Задача (48) – (50) в пространстве изображений сводится к задаче

$$\begin{cases}U_t(\omega,\sigma,t)+a^2\left(\omega^2+\sigma^2\right)U(\omega,\sigma,t)=\dfrac{a^2\sigma}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega x}f(x,t)dx\\ U(\omega,\sigma,0)=0.\end{cases}\tag{51}$$

Решение уравнения в задаче (51) имеет вид

$$U(\omega,\sigma,t)=\frac{a^2\sigma}{\pi}\int_0^t e^{-a^2\left(\omega^2+\sigma^2\right)(t-\tau)}d\tau\int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega x}f(x,t)dx\,.\tag{52}$$

Применяя обратное преобразование Фурье:

$$u(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega x}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{a^2\sigma}{\pi}\int_0^t e^{-a^2\left(\omega^2+\sigma^2\right)(t-\tau)}d\tau\int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega\xi}f(\xi,\tau)d\xi\right)\sin(\sigma y)d\sigma d\omega$$

или $$u(x,y,t)=\frac{a^2}{\pi^2}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^\infty e^{-a^2\omega^2(t-\tau)+i\omega(x-\xi)}d\omega\int_0^\infty\sigma e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}\sin(\sigma y)d\sigma\int_{-\infty}^\infty f(\xi,\tau)d\xi\tag{53}$$

Так как $$\int_{-\infty}^\infty e^{-a^2\omega^2(t-\tau)+i\omega(x-\xi)}d\omega=\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}},\tag{54}$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-a^2\sigma^2(t-\tau)}\cos(\sigma y)d\sigma=\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{y^2}{4a^2(t-\tau)}},\tag{55}$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2\sigma^2(t-\tau)}\cos(\sigma y)d\sigma=\frac{y\sqrt{\pi}}{4a^3(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{y^2}{4a^2(t-\tau)}}\,.\tag{56}$$

Подставляя (54) – (56) в (53), получаем решение задачи (48) – (50)

$$u(x,y,t)=\frac{y}{4\pi a^2}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^2}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-\xi)^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}}f(\xi,\tau)d\xi\,.$$

2.3 Интегральное преобразование Лапласа

Строгое математическое обоснование операционное исчисление получило в рамках теории интегральных преобразований. Интегральное преобразование Лапласа позволило интерпретировать формальные правила преобразования операторных выражений как преобразование алгебраических выражений, связывающих изображения функций.

Преобразование Лапласа – это интегральное преобразование, которое определяется соотношением

$$F(\xi)=\int_0^\infty e^{-\xi t} f(t)dt \tag{57}$$

Функцией – оригиналом интегрального преобразования Лапласа называют любую, в общем случае комплекснозначную функцию, удовлетворяющую условиям:

1) $f(t)\equiv 0$ при $t<0$;

2) $f(t)$ кусочно непрерывна на действительной оси, т.е. она может иметь разрывы только I рода, причем каждый конечный интервал содержит лишь конечное число точек разрыва;

3) $f(t)$ при $t\to+\infty$ имеет ограниченный показательный рост, т.е. существуют такие $M>0$ и $\sigma>0$, что $\left|f(t)\right|\le Me^{\sigma t}$ при $t>0$.

Также имеют место следующие соотношения:

$$f^{(n)}(t)\to\xi^n F(\xi)-\xi^{n-1}f(0)-\xi^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0), \tag{58}$$

$$F(\xi)\Phi(\xi)\to\int_0^t f(t)\varphi(t-\tau)d\tau \text{ – интеграл Дюамеля,} \tag{59}$$

$$\xi F(\xi)\Phi(\xi)\to\int_0^t f(t)\varphi'_t(t-\tau)d\tau+f(t)\varphi(0) \text{ – формула Дюамеля.} \tag{60}$$

2.4 Применение интегрального преобразования Лапласа к решению задач

Пользуясь интегральными преобразованиями Лапласа, решить следующие задачи:

Задача 1. $u_y=u_{xx}+a^2u+f(x)$ (61)

$D = \{(x, y): 0 < x < \infty, 0 < y < \infty\}$ граничные условия $u(0, y) = u_x(0, y) = 0$ (62)

Решение: Функция $u(x, y)$ по переменной x удовлетворяет условиям преобразования Лапласа $u(x, y) \to U(\xi, y)$. Дифференцируя по переменной y преобразование $u(x, y) \to U(\xi, y)$, получаем $u_y(x, y) \to U_y(\xi, y)$. По свойству дифференцирования оригинала при условии (58) находим $u_{xx}(x, y) \to \xi^2 U(\xi, y)$.

Тогда исходная задача в пространстве изображений преобразуется к уравнению:

$$U_y(\xi, y) - (a^2 + \xi^2)U(\xi, y) = F(\xi) \tag{63}$$

где $F(\xi)$ – интегральное преобразование функции $f(x)$.

Решение в пространстве изображений выглядит следующим образом:

$$U(\xi, y) = c(y)e^{(\xi^2 + a^2)y} - \frac{F(\xi)}{\xi^2 + a^2}.$$

Так как $y > 0$, то в силу того, что $U(\xi, y) \to 0$, $\xi \to \infty$, тогда $c(y) = 0$, т.е. решение (63) представимо в виде

$$U(\xi, y) = -\frac{F(\xi)}{\xi^2 + a^2}. \tag{64}$$

Преобразуем (64) следующим образом: $U(\xi, y) = -\frac{F(\xi)}{\xi^2 + a^2} \cdot \frac{a}{a}$.

С учетом (59) и того, что $\frac{a}{\xi^2 + a^2} \cdot \frac{1}{a} \to \frac{1}{a}\sin(a\xi)$, получим решение задачи

(61) – (62) $u(x, t) = -\frac{1}{a}\int_0^x f(x - \xi)\sin(a\xi)d\xi$..

Задача 2. $u_y = u_{xx} + u + B\cos x$, $D = \{(x, y): 0 < x < \infty, 0 < y < \infty\}$, (65)

граничные условия $u(0, y) = Ae^{-3y}$, $u_x(0, y) = 0$. (66)

Решение: Функция $u(x, y)$ по переменной x удовлетворяет условиям преобразования Лапласа $u(x, y) \to U(\xi, y)$. Дифференцируя по переменной y преобразование $u(x, y) \to U(\xi, y)$, получаем $u_y(x, y) \to U_y(\xi, y)$. По свойству дифференцирования оригинала при условии (58) находим $u_{xx}(x,y)\to \xi^2 U(\xi,y)-\xi A e^{-3y}$.

Тогда исходная задача в пространстве изображений преобразуется к уравнению:

$$U_y(\xi,y)-(\xi^2+1)U(\xi,y)=\frac{B}{\xi^2+1}-\xi A e^{-3y}, \tag{67}$$

где $\dfrac{B}{\xi^2+1}\to B\cos x$.

Решение в пространстве изображений выглядит следующим образом:

$$U(\xi,y)=c(y)e^{(\xi^2+1)y}-\frac{B}{(\xi^2+1)^2}+\frac{\xi A e^{-3y}}{\xi^2+4}.$$

Так как $y>0$, то в силу того, что $U(\xi,y)\to 0$, $\xi\to\infty$, тогда $c(y)=0$, т.е. решение (63) представимо в виде $U(\xi,y)=-\dfrac{B}{(\xi^2+1)^2}+\dfrac{\xi A e^{-3y}}{\xi^2+4}$. (68)

Переходя к оригиналам, получим решение исходной задачи (65) – (66)

$$u(x,t)=Ae^{-3y}\cos 2x-\frac{B}{2}x\sin x.$$

Задача 3. $u_t=u_{xx}+u-f(x)$, $D=\{(x,t):0<x<\infty,0<t<\infty\}$, (69)

граничные условия $u(0,t)=t$, $u_x(0,t)=0$. (70)

Решение: Функция $u(x,t)$ по переменной x удовлетворяет условиям преобразования Лапласа $u(x,t)\to U(\xi,t)$. Дифференцируя по переменной t преобразование $u(x,t)\to U(\xi,y)$, получаем $u_t(x,t)\to U_t(\xi,t)$. По свойству дифференцирования оригинала при условии (58) находим $u_{xx}(x,t)\to \xi^2 U(\xi,t)-\xi t$.

Тогда задача исходная задача в пространстве изображений преобразуется к уравнению:

$$U_t(\xi,t)-(\xi^2+1)U(\xi,t)=-\xi t-F(\xi), \tag{71}$$

где $F(\xi)$ – интегральное преобразование функции $f(x)$.

Решение в пространстве изображений выглядит следующим образом:

$$U(\xi,t)=c(t)e^{(\xi^2+1)t}+\frac{1}{(\xi^2+1)^2}+\frac{\xi t}{\xi^2+1}+\frac{F(\xi)}{\xi^2+1}.$$

Так как $t>0$, то в силу того, что $U(\xi,t)\to 0$, $\xi\to\infty$, тогда $c(t)=0$, т.е. решение (63) представимо в виде $U(\xi,t)=\frac{1}{(\xi^2+1)^2}+\frac{\xi t}{\xi^2+1}+\frac{F(\xi)}{\xi^2+1}$. (72)

С учетом (59) и того, что $\frac{\xi t}{\xi^2+1}\to t\cos x$, $\frac{1}{(\xi^2+1)^2}\to\frac{1}{2}x\sin x$, получим решение задачи (69), (70) $u(x,t)=\int\limits_0^x f(x-\xi)\sin\xi d\xi+t\cos x+\frac{1}{2}x\sin x.$

2.5 Конечно-мерные интегральные преобразования

Рассмотрим задачу, поставленную в некоторой области для дифференциального уравнения второго порядка:

$$\mathrm{M}u=f, \tag{73}$$

$$\mathrm{M}u=\mathrm{M}_i u+\mathrm{M}'u, \tag{74}$$

где $\mathrm{M}_i u=a_{ii}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu$, (75)

а $\mathrm{M}'u$ – выражение, не содержащее операций дифференцирования по x_i.

Задача для нахождения ядра интегрального преобразования сводится к виду (76) – (78):

$$\frac{\partial}{\partial x_i}p\frac{\partial\overline{K}}{\partial x_i}-q\overline{K}+\lambda^2\rho\overline{K}=0, \tag{76}$$

$$\left[\alpha_a\frac{\partial\overline{K}_\gamma}{\partial x_i}-\beta_a\overline{K}_\gamma\right]_{x_i=a}=0, \tag{77}$$

$$\left[\alpha_b\frac{\partial\overline{K}_\gamma}{\partial x_i}+\beta_b\overline{K}_\gamma\right]_{x_i=b}=0, \tag{78}$$

где $\rho(x_i)=e^{-\int\frac{1}{a_{ii}}\left(\frac{da_{ii}}{dx_i}-b_i\right)dx_i}$, $p(x_i)=a_{ii}\rho(x_i)$, $q(x_i)=-c\rho(x_i)$.

Ядро интегрального преобразования для задачи (76) – (78) представлено в виде (79):

$$K(x_i,\gamma)=\frac{1}{C_\gamma}\rho(x_i)\overline{K}(x_i,\gamma), \tag{79}$$

где C_γ – функция от аргумента γ будем называть нормирующим делителем, а $\overline{K}(x_i,\gamma)$ – решение задачи (76) – (78).

Подытожив предыдущие результаты, найдем, что при возможности выполнения интегрального преобразования по переменной x_i, изменяющейся в конечном интервале (a,b), уравнение $\mathrm{M}u = f$ преобразуется к виду

$$\mathrm{M}'\overline{u}-\lambda_\gamma\overline{u}=\bar{f}+\overline{N}_a-\overline{N}_b, \tag{80}$$

где $\overline{u}$ и $\bar{f}$ – интегральные преобразования функций u и f, а $\overline{N}_a$ и $\overline{N}_b$ – функции, вид которых определяется условиями, заданными по координате x_i в граничных точках интервала (a,b).

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{N}_a=\begin{cases}\dfrac{1}{C_\gamma\alpha_a}p(a)\overline{K}_\gamma(a)\varphi_a & при\quad \alpha_a\neq 0,\\[2ex] \dfrac{1}{C_\gamma}p(a)\dfrac{\partial\overline{K}_\gamma}{\partial x_i}|_{x_i=a}\ \varphi_a & при\quad \alpha_a=0,\quad \beta_a=-1;\end{cases}\\
&\overline{N}_b=\begin{cases}\dfrac{1}{C_\gamma\alpha_b}p(b)\overline{K}_\gamma(b)\varphi_b & при\quad \alpha_b\neq 0,\\[2ex] \dfrac{1}{C_\gamma}p(b)\dfrac{\partial\overline{K}_\gamma}{\partial x_i}|_{x_i=b}\ \varphi_b & при\quad \alpha_b=0,\quad \beta_b=1;\end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{81}$$

При условии периодичности по координате x_i: $\overline{N}_a-\overline{N}_b=0$.

Таким образом, решение задачи:

$$\mathrm{M}u=\sum_{\alpha,\beta=0}^{3}a_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}+\sum_{\alpha=0}^{3}b_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+c\ \ (a_{ij}=a_{ji}) \tag{82}$$

с учетом найденного ядра интегрального преобразования имеет вид (83)

$$u(x_i,y)=\sum_{n=1}^{\infty}U(y,\gamma)K(x_i,\gamma), \tag{83}$$

где $U(y,\gamma)=\int_a^b u(x_i,y)K(x_i,\gamma)\rho(x_i)dx_i$.

Задача. Требуется найти температуру бесконечного круглого цилиндра радиуса r_0, если его начальная температура $u(r,0)=U_0\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)$.

То есть $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}\right)$, $0\le r\le r_0$ (84)

Граничное условие: $u\big|_{r=r_0}=0$. (85)

Начальное условие: $u\big|_{t=0}=U_0\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)=U$. (86)

Решение: Исключим дифференциальные операции по r из (84).

$$\mathrm{M}_r u=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}\right),\quad a_{rr}=a^2,\quad b_r=\frac{a^2}{r},\quad c=0,\quad \rho(r)=r,\quad p(r)=a^2 r,$$

$q(r)=0$.

Ядро преобразования, позволяющего исключить дифференциальные операции по r, удовлетворяет уравнению Бесселя

$$\frac{\partial}{\partial r}a^2 r\frac{\partial \overline{K}}{\partial r}+\lambda^2 r\overline{K}=0,\ \frac{\partial^2\overline{K}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\overline{K}}{\partial r}+\frac{\lambda^2}{a^2}\overline{K}=0 \qquad (87)$$

$$\overline{K}\big|_{r=r_0}=0. \qquad (88)$$

Решением уравнения (87) является функция Бесселя $J_0\left(\frac{\lambda_n}{a}r\right)$. Используя граничное условие при $r=r_0$, придем к уравнению

$$J_0\left(\frac{\lambda_n}{a}r_0\right)=0. \qquad (89)$$

Положим $\mu_n=\frac{\lambda_n}{a}r_0\Rightarrow\frac{\mu_n}{r_0}=\frac{\lambda_n}{a}$.

Корни уравнения (89) λ_n, пронумерованы в порядке их возрастания, определяют собственные числа задачи (87), (88).

Примем $\overline{K}_\gamma(r) = J_0\left(\frac{\lambda_n}{r_0} r\right)$, $\overline{K}(\gamma, r) = \frac{1}{C_\gamma} r J_0\left(\frac{\lambda_n}{r_0} r\right)$,

$$C_\gamma = \frac{r_0^2}{2}\left[J_0'\left(\frac{\lambda_n}{a} r_0\right)\right]^2 = \frac{r_0^2}{2}[J_0'(\mu_n)]^2 = \frac{r_0^2}{2} J_1^2(\mu_n).$$

Применив в интервале $0 \le r \le r_0$ интегральное преобразование с найденным ядром, приведем задачу (81) – (83) к виду (90), (91)

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\lambda_n^2 \tilde{u}\,, \tag{90}$$

$$u\Big|_{t=0} = \tilde{U}\,, \tag{91}$$

где $\tilde{U}$ – соответствующее интегральное преобразование функции U.

$$\tilde{U} = \frac{1}{C_\gamma}\int_0^{r_0} U r J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr = \frac{2}{r_0^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot U_0 \int_0^{r_0}\left(1 - \frac{r}{r_0^2}\right) r J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr = \frac{2U_0}{r_0^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot$$

$$\left(\int_0^{r_0} r J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr - \frac{1}{r_0^2}\int_0^{r_0} r^3 J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr\right) = \frac{8U_0}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}.$$

Решение задачи (90) представимо в виде $\tilde{u} = ce^{-\frac{\mu_n^2 a^2}{r_0^2} t}$.

Из начальных условий $c = \dfrac{8U_0}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}$.

Таким образом, решение задачи (91) – (83)

$$u(r,t) = 8U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} e^{-\frac{\mu_n^2 a^2}{r_0^2} t}.$$

Глава 3. СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

3.1 Симметричность и неотрицательная определенность оператора Лапласа-Бельтрами

Целью данного пункта является построение сферических и шаровых функций, которые используются при решении краевых задач для уравнения

Лапласа в областях, обладающих сферической симметрией, например, в шаровом слое $B_{R_2} \setminus \overline{B_{R_1}} = \{x : R_1 < |x| < R_2\} \subset R^3$.

Перейдем в сферические координаты и рассмотрим дифференциальный оператор Лапласа-Бельтрами

$$-\Delta_{\varphi,\theta} \bullet = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\bullet\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi^2}\bullet, \quad \varphi \in [0;2\pi], \quad \theta \in [0;\pi],$$

действующий на функции, заданные и дважды непрерывно дифференцируемые на единичной сфере S^2.

Теорема 1. Оператор Лапласа-Бельтрами симметричен и неотрицательно определен:

1) $\iint\limits_{S^2} \Delta_{\varphi,\theta} u \cdot \overline{v} ds = \iint\limits_{S^2} u \overline{\Delta_{\varphi,\theta} v} ds;$

2) $-\iint\limits_{S^2} \Delta_{\varphi,\theta} v \cdot \overline{v} ds \ge 0$.

Следствие 1. Собственные значения оператора Лапласа-Бельтрами неотрицательны. Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

3.2 Собственные функции оператора Лапласа-Бельтрами

Найдем собственные функции $Y_\lambda(\varphi,\theta) \in C^2(S^2)$ оператора «$-\Delta_{\varphi,\theta}$»: $-\Delta_{\varphi,\theta} Y_\lambda(\varphi,\theta) = \lambda^2 Y_\lambda(\varphi,\theta)$.

Произведем разделение переменных, то есть будем искать собственные функции вида $Y_\lambda(\varphi,\theta) = \Phi(\varphi) Z(\theta)$:

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}Z(\theta)\right)\Phi(\varphi) - \frac{1}{\sin^2\theta}Z(\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi^2}\Phi(\varphi) = \lambda^2 Z(\theta)\Phi(\varphi).$$

Из гладкости функции $Y_\lambda(\varphi,\theta)$ следует, что $Z(\theta) \in C^2[0;\pi]$ и $\Phi(\varphi) \in C^2(S^1)$, где S^1 - единичная окружность (то есть $\Phi(\varphi) \in C^2[0;2\pi]$ и $\Phi^{(k)}(0) = \Phi^{(k)}(2\pi), \quad k = 0,1,2$).

Далее потребуем, чтобы функция $\Phi(\varphi)$ была собственной для оператора «$-\frac{d^2}{d\varphi^2}$». Такими функциями являются $\Phi_n(\varphi)$, $n \in Z$: $\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, & n \geq 0 \\ \sin|n|\varphi, & n < 0 \end{cases}$, причем $-\frac{d^2}{d\varphi^2}\Phi_n(\varphi) = n^2\Phi_n(\varphi)$.

Таким образом, приходим к следующему уравнению:

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}Z(\theta)\right) + \frac{n^2 Z(\theta)}{\sin^2\theta} = \lambda^2 Z(\theta). \tag{1}$$

Из всех решений этого уравнения интерес представляют лишь функции из класса $\tilde{N}^2[0;\pi]$.

Лемма 1. Для фиксированных n и λ не может быть более одного линейно независимого решения уравнения (1) из класса $\tilde{N}^1[0;\pi]$.

Доказательство леммы 1. Запишем формулу Лиувиля для определителя Вронского $W(\theta)$ двух решений $Z_1(\theta)$ и $Z_2(\theta)$ обыкновенного дифференциального уравнения (1):

$$W(\theta) = \begin{vmatrix} Z_1(\theta) & Z_2(\theta) \\ Z_1'(\theta) & Z_2'(\theta) \end{vmatrix} = W(\pi/2)\cdot\exp\left(-\int\limits_{\pi/2}^{\theta} ctg\xi d\xi\right) = \frac{W(\pi/2)}{\sin\theta}.$$

Для линейно независимых решений $W(\pi/2) \neq 0$, следовательно, вронскиан неограничен в окрестности точек $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, что невозможно в случае, когда обе функции $Z_1(\theta)$ и $Z_2(\theta)$ непрерывны на отрезке $[0;\pi]$ вместе со своими производными первого порядка.

Сделаем часто применяющуюся при работе в сферических координатах замену переменных: $t = \cos\theta$, $t \in [-1;1]$. Тогда оператор дифференцирования по θ преобразуется следующим образом: $\frac{d}{d\theta}\bullet = -\sin\theta\frac{d}{dt\bullet}$. Вводя обозначение $Z(\theta(t)) = X(t)$, получаем для функции $X(t)$ уравнение $\frac{d}{dt}\left(-\sin^2\theta(t)\cdot\frac{d}{dt}X(t)\right) + \frac{n^2}{\sin^2\theta(t)}X(t) = \lambda^2 X(t)$ или

$$\left(1-t^2\right)\frac{d^2}{dt^2}X(t)-2t\frac{d}{dt}X(t)+\left(\lambda^2-\frac{n^2}{1-t^2}\right)X(t)=0 \qquad (2)$$

Лемма 2. Нетривиальное решение $X(t)$ уравнения (2), удовлетворяющее условию $Z(\theta)\equiv X(\cos t)\in C^1[0;\pi]$, является либо четной функцией (когда $X(0)\neq 0$), либо нечетной функцией (когда $X(0)=0$).

Доказательство леммы 2. Заметим, что уравнение (2) инвариантно относительно замены t на $-t$, следовательно функция $X(-t)$ также является решением этого уравнения. И из леммы 1 получаем, что $X(t)=\alpha X(-t)$, где α - постоянная.

Если $X(0)\neq 0$, то $X(0)=\alpha X(0)\neq 0$, то есть $\alpha=1$.

Если $X(0)=0$, то $X'(0)\neq 0$, так как функция $X(t)$ отлична от тождественного нуля. Следовательно, $X'(0)=-\alpha X'(0)\neq 0$, откуда получаем, что $\alpha=-1$.

Эта лемма позволяет обсудить взаимосвязь чисел n и λ.

Утверждение 1. Если для данных n и λ существует нетривиальное решение $X(t)$ уравнения (2), удовлетворяющее условию $Z(\theta)\equiv X(\cos\theta)\in C^1[0;\pi]$, то выполняется неравенство $n^2\leq\lambda^2$.

Доказательство утверждения 1. Допустим противное: для данных n и λ существует нетривиальное решение $X(t)$ уравнения (2), причем $Z(\theta)\equiv X(\cos\theta)\in C^1[0;\pi]$ и $n^2>\lambda^2$. Тогда из равенства $X''(0)=\left(n^2-\lambda^2\right)X(0)$ следует, что вторая производная $X''(0)$ имеет тот же знак, что и $X(0)$. Далее рассмотрим два случая.

1) $X(0)=0$. Тогда $X'(0)\neq 0$, и следовательно, существует число $\varepsilon\in(0;1)$ такое, что $X(\varepsilon)X'(\varepsilon)>0$.

2) $X(0)\neq 0$. Тогда, согласно лемме 2, функция $X(t)$ является четной, поэтому точка $t=0$ является либо точкой минимума при $X(0)>0$ ($X''(0)>0$),

либо точкой максимума при $X(0)<0$ ($X''(0)<0$). Следовательно, в этом случае также существует $\varepsilon \in (0;1)$ такое , что $X(\varepsilon)X'(\varepsilon)>0$.

Итак, $X(\varepsilon)X'(\varepsilon)>0$, но из уравнения (2) вытекает, что $X(1)=0$, иначе производная $X'(1)$ обращалась бы в бесконечность ($n^2>\lambda^2\geq 0$, то есть $n^2\neq 0$). Следовательно, на интервале $(0;1)$ есть точка t_0 максимума или минимума, в которой $X(t_0)X''(t_0)<0$, что невозможно в силу уравнения (2): $\frac{d^2}{dt^2}X(t_0)=\frac{n^2-\lambda^2\left(1-t_0^2\right)}{\left(1-t_0^2\right)^2}X(t_0)$, так как по предположению $n^2-\lambda^2\left(1-t_0^2\right)\geq n^2-\lambda^2>0$.

Естественно задаться вопросом, существует ли при данных n и λ ($n^2\leq\lambda^2$) нетривиальное решение уравнения (1) из класса функций $\tilde{N}^2[0;\pi]$. Без доказательства приведем следующий результат: уравнение (1) имеет решение только при следующих значениях параметра λ: $\lambda^2=\lambda_k^2\equiv k(k+1)$, $k\in N\cup\{0\}$.

Из утверждения 1 следует, что кратность собственного значения λ_k^2 равна $2k+1$. Действительно, при данном значении $\lambda^2=\lambda_k^2$ параметр n должен удовлетворять неравенству $n^2\leq k(k+1)$, то есть $n=-k,\ldots,-1,0,1,\ldots k$ - всего $2k+1$ линейно независимых функций $\Phi_n(\varphi)$.

Выпишем ограниченные решения уравнения (2). При каждом значении пары параметров $\left(\lambda_k^2,n\right)$ получаем свою функцию $X_k^n(t)$, однако при фиксированном n для всех значений параметра $\lambda^2=k(k+1)\geq n^2$ справедлива общая формула для вычисления этой функции.

При $n=0$ уравнение (2) выглядит следующим образом:

$$\left(1-t^2\right)\frac{d^2}{dt^2}X_k^0(t)-2t\frac{d}{dt}X_k^0(t)+k(k+1)X(t)=0\,. \qquad (3)$$

Утверждение 2. Ограниченным частным решением уравнения (3) является полином Лежандра степени k:

$$X_k^0(t)=P_k(t)\equiv\frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dt^k}\left(t^2-1\right)^k. \qquad (4)$$

Замечание 1. Коэффициент $\frac{2k!}{2^k (k!)^2}$ при старшей степени t выбран так, чтобы выполнялось условие $P_k(1) = 1$.

Замечание 2. Полиномы Лежандра $P_k(t)$ получаются также в результате ортогонализации системы функций $\{t^k\}_{k=0}^{\infty}$ с нормировкой, указанной в замечании 1.

Утверждение 3. Ограниченным частным решением уравнения (2) для $\lambda_k^2 \equiv k(k+1)$, $0 < n \le k$ является присоединенная функция Лежандра порядка k:

$$X_k^n(t) = P_k^n(t) = \left(1 - t^2\right)^{n/2} \frac{d^n}{dt^n} P_k(t). \tag{5}$$

В справедливости этих утверждений легко убедиться непосредственной подстановкой.

Далее для удобства записи будем понимать под P_k^0 полиномы Лежандра P_k.

Для наглядности выпишем некоторые полиномы Лежандра $P_k(t)$ и присоединенные функции Лежандра $P_k^n(t)$:

- для $n = 0$: $P_k^0(t) \equiv P_k(t)$, в частности,

$$P_0^0(t) = 1,$$
$$P_1^0(t) = t = \cos\theta,$$
$$P_2^0(t) = \frac{1}{2}\left(3t^2 - 1\right) = \frac{1}{4}\left(3\cos 2\theta + 1\right),$$
$$P_3^0(t) = \frac{1}{2}\left(5t^3 - 3t\right) = \frac{1}{8}\left(5\cos 3\theta + 3\cos\theta\right);$$

- для $n = 1$: $P_k^1(t) = \sqrt{1 - t^2}\,\frac{d}{dt} P_k(t)$, в частности,

$$P_1^1(t) = \sqrt{1 - t^2} = \sin\theta,$$
$$P_2^1(t) = 3t\sqrt{1 - t^2} = \frac{3}{2}\sin 2\theta;$$

- для $n = 2$: $P_k^2(t) = \left(1 - t^2\right)\frac{d^2}{dt^2} P_k(t)$, в частности, $P_2^2(t) = 3\left(1 - t^2\right) = \frac{3}{2}\left(1 - \cos 2\theta\right)$.

3.3 Сферические функции. Основные понятия и теоремы

Определение 1. Функции $Y_k^n(\varphi,\theta)$ следующего вида:

$$Y_k^n(\varphi,\theta)=\begin{cases}P_k^n(\cos\theta)\cos n\varphi, & n\ge 0\\ P_k^{|n|}(\cos\theta)\sin|n|\varphi, & n<0\end{cases}, \qquad (6)$$

$n\in Z,\ k\in N\cup\{0\},\ |n|\le k$ называются сферическими функциями.

Теорема 2. Сферические функции $Y_k^n(\varphi,\theta)$ являются собственными функциями дифференциального оператора Лапласа-Бельтрами, отвечающими собственным значениям $\lambda_k^2\equiv k(k+1)$ соответственно. Кратность λ_k^2 равна $2k+1$.

Обсудим теперь некоторые свойства полиномов Лежандра, присоединенных функций Лежандра и сферических функций.

Теорема 3. При фиксированном $n\ge 0$ присоединенные функции Лежандра или полиномы Лежандра $P_k^n(t)$ ($k=n,n+1,\dots$) ортогональны на отрезке $[-1;1]$.

Доказательство теоремы 3. Согласно следствию 1 сферические функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны на единичной сфере S^2. Следовательно, для $k\ge n$ и $k'\ge n$, $k\ne k'$ справедливо равенство $\iint\limits_{S^2}Y_k^nY_{k'}^n ds=0$, откуда $\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 n\varphi d\varphi\int\limits_0^{\pi}P_k^n(\cos\theta)P_{k'}^n(\cos\theta)\sin\theta d\theta=0$.

Производя замену переменных $t=\cos\theta$, получаем $\int\limits_{-1}^{1}P_k^n(t)P_{k'}^n(t)dt=0$.

Вообще говоря справедлива формула

$\int\limits_{-1}^{1}P_k^n(t)P_{k'}^n(t)dt=\dfrac{(k+n)!}{(k-n)!}\dfrac{2}{2k+1}\delta^{kk'}$ при $k,k'\ge n\ge 0$.

Можно доказать, что присоединенные функции Лежандра или полиномы Лежандра при фиксированном $n\ge 0$ образуют полную ортогональную систему $\{P_k^n(t)\}_{k=n}^{\infty}$ в $L_2(-1;1)$. Как следствие, сферические функции образуют полную ортогональную систему $\{Y_k^{-k},\dots Y_k^k\}_{k=0}^{\infty}$ в $L_2(S^2)$ (ортогональность сферических функций с разными n следует из ортогональности системы функций $\{\Phi_n(\varphi)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ на окружности S^1).

Каждая функция $u(\varphi,\theta)\in L_2\left(S^2\right)$ может быть разложена по сферическим функциям в ряд Фурье $u(\varphi,\theta)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=-k}^{k}a_k^nY_k^n(\varphi,\theta)$, где $a_k^n=\left(\iint_{S^2}\left(Y_k^n\right)^2ds\right)^{-1}\iint_{S^2}uY_k^nds$ – коэффициенты Фурье.

Замечание 1. Метод разделения переменных, примененный к уравнению Гельмгольца $\Delta u+cu=0$ в шаре, приводит к решению уравнения $\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\left(c-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)R=0$, которое заменой $R=Y/\sqrt{r}$ сводится к уравнению Бесселя $\frac{d^2Y}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dY}{dr}+\left(c-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right)Y=0$.

Замечание 2. Уравнение Пуассона $\Delta u=f$ заменой $v=u-u_0$, где u_0 – частное решение уравнения Пуассона, сводится к уравнению Лапласа $\Delta u=0$

3.4 Шаровые функции

Найдем гармонические в области $R^3\setminus\{0\}$ функции вида $R_k(r)Y_k^n(\varphi,\theta)$: $0=\Delta\left(R_kY_k^n\right)=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}R_k\right)Y_k^n+\frac{1}{r^2}R_k\Delta_{\varphi,\theta}Y_k^n$.

Получаем на функцию $R_k(r)$ уравнение $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}R_k\right)-k(k+1)\frac{1}{r^2}P_k=0$, или $r^2\frac{d^2}{dr^2}R_k(r)+2r\frac{d}{dr}R_k(r)-k(k+1)P_k(r)=0$.

Это уравнение Эйлера и его частными решениями являются функции $R_{k,1}(r)=r^k$ и $R_{k,2}(r)=r^{-k-1}$.

Определение 2. Функции вида $r^kY_k^n(\varphi,\theta)$ и $\frac{1}{r^{k+1}}Y_k^n(\varphi,\theta)$ называются шаровыми функциями.

Обратим внимание на доказанное свойство шаровых функций.

Утверждение 4. Шаровые функции $\frac{1}{r^{k+1}}Y_k^n(\varphi,\theta)$ являются гармоническими в $R^3\setminus\{0\}$, а $r^kY_k^n(\varphi,\theta)$ - во всем R^3.

Более того, функции $\frac{1}{r^{k+1}}Y_k^n(\varphi,\theta)$ являются регулярными на бесконечности.

3.5 Применение сферических и гармонических функций при решении краевых задач для уравнения Лапласа

а) В шаре. Найдем гармоническую в шаре B_R $(r<R)$ функцию $u(r,\varphi,\theta)$, непрерывно дифференцируемую в $\bar{B}_R$ и удовлетворяющую граничным условиям $\left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial}{\partial r}u\right)\right|_{r=R}=u_0$, $\alpha^2+\beta^2>0$. (7)

Для этого разложим функцию $u_0(\varphi,\theta)$ в ряд Фурье по сферическим функциям: $u_0(\varphi,\theta)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=-k}^{k}a_k^nY_k^n(\varphi,\theta)$ (8)

Тогда решение $u(r,\varphi,\theta)$ можно формально пытаться построить в виде суммы ряда $u(r,\varphi,\theta)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=-k}^{k}A_k^nr^kY_k^n(\varphi,\theta)$, где коэффициенты A_k^n находятся из условий $A_k^n\left(\alpha R^k+\beta kR^{k-1}\right)=a_k^n$ (требуем почленное выполнение граничных условий), то есть $u(r,\varphi,\theta)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{R}{\alpha R+\beta k}\left(\frac{r}{R}\right)^k\sum_{n=-k}^{k}a_k^nY_k^n(\varphi,\theta)$.

Сходимость и дифференцируемость такого ряда в общем случае мы обсуждать не будем (такой вопрос представляет интерес лишь при необходимости доказательства существования решения поставленной задачи).

б) Вне замыкания шара. Найдем теперь гармоническую вне замыкания шара $\bar{B}_R$ $(r>R)$ функцию $u(r,\varphi,\theta)$, регулярную на бесконечности, непрерывно дифференцируемую в $R^3\setminus B_R$ и удовлетворяющую граничным условиям (7). Для этого опять разложим функцию $u_0(\varphi,\theta)$ в ряд (8). Тогда с учетом условия регулярности решение $u(r,\varphi,\theta)$ можно пытаться строить в виде суммы ряда $u(r,\varphi,\theta)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=-k}^{k}A_k^n\frac{1}{r^{k+1}}Y_k^n(\varphi,\theta)$.

Здесь коэффициенты A_k^n находятся из условий $A_k^n\left(\frac{\alpha}{R^{k+1}}-(k+1)\frac{\beta}{R^{k+2}}\right)=a_k^n$.

Следовательно, $u(r,\varphi,\theta) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R}{\alpha R - \beta(k+1)} \left(\frac{R}{r}\right)^{k+1} \sum_{n=-k}^{k} a_k^n Y_k^n(\varphi,\theta)$.

в) В шаровом слое. Найдем гармоническую в шаровом слое $B_{R_2} \setminus \bar{B}_{R_1}$ ($R_1 < r < R_2$) функцию $u(r,\varphi,\theta)$, непрерывно дифференцируемую в $\bar{B}_{R_2} \setminus B_{R_1}$ и удовлетворяющую граничным условиям

$$\left(\alpha_1 u + \beta_1 \frac{\partial}{\partial r} u\right)\bigg|_{r=R_1} = u_1,\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0,\ \left(\alpha_2 u + \beta_2 \frac{\partial}{\partial r} u\right)\bigg|_{r=R_2} = u_2,\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 > 0.$$

Для чего разложим функции $u_1(\varphi,\theta)$ и $u_2(\varphi,\theta)$ в ряды Фурье по сферическим функциям: $u_1(\varphi,\theta) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-k}^{k} a_k^n Y_k^n(\varphi,\theta)$, $u_2(\varphi,\theta) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-k}^{k} b_k^n Y_k^n(\varphi,\theta)$, и построим формальное решение в виде суммы ряда $u(r,\varphi,\theta) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-k}^{k} \left(A_k^n r^k + \frac{B_k^n}{r^{k+1}}\right) Y_k^n(\varphi,\theta)$.

Пара коэффициентов A_k^n, B_k^n найдется из системы уравнений

$$\begin{cases} A_k^n\left(\alpha_1 R_1^k + \beta_1 k R_1^{k-1}\right) + B_k^n\left(\frac{\alpha_1}{R_1^{k+1}} - (k+1)\frac{\beta_1}{R_1^{k+2}}\right) = a_k^n \\ A_k^n\left(\alpha_2 R_2^k + \beta_2 k R_2^{k-1}\right) + B_k^n\left(\frac{\alpha_2}{R_2^{k+1}} - (k+1)\frac{\beta_2}{R_2^{k+2}}\right) = b_k^n \end{cases}.$$

Глава 4. ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

4.1 Определение функции Бесселя

Функции Бесселя (цилиндрическая функция) возникают при решении уравнений, связанных с оператором Лапласа на плоскости

$$-\Delta u(x,y) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda u + f(x,y).$$

Действительно, в полярных координатах это уравнение принимает вид

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\tilde{u}}{\partial r}) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} = \lambda \tilde{u} + \tilde{f}(r,\varphi).$$

Если решение $\tilde{u}(r)$ не зависит от φ, то последнее уравнение при $f=0$ принимает вид $u''(r)+\frac{1}{r}u'(r)+\lambda u(r)=0$ и является частным случаем уравнения Бесселя

$$r^2u''(r) + ru'(r) + (r^2-\nu^2)u = 0, \tag{1}$$

где $\nu = Const$.

Всякое решение уравнения Бесселя, не равное тождественно нулю, называется цилиндрической функцией. Функция

$$J_\nu = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},$$

где $\nu\in(-\infty;+\infty)$ – параметр, удовлетворяет уравнению (1) и называется функцией Бесселя I рода ν порядка.

Рассмотрим функцию

$$J_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \tag{2}$$

зависящую от параметра $\nu\in(-\infty;+\infty)$.

В частности, $J_\nu(x)$ - однозначная аналитическая функция при $\nu = 0,\pm1,...$ и многозначная аналитическая функция при $\nu \neq 0,\pm1,...$.

Цилиндрическая функция $J_\nu(x)$ называется функцией Бесселя I рода ν порядка. В частности,

$$\begin{cases} J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin x, \\ J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos x. \end{cases} \tag{3}$$

Если ν не целое число, то функции $J_\nu(x)$ и

$$Y_\nu(x)=J_{-\nu}(x), \tag{4}$$

линейно независимы.

Если же $\nu=n$ - целое число, то

$$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x), \tag{5}$$

так, что функция $J_{-n}(x)$ и $J_n(x)$ линейно зависимы.

Докажем равенство (5). Учитывая, что $\Gamma(-k)=\infty,\ k=0,1,...,$ из (2) имеем

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+s}}{\Gamma(s+1)\Gamma(s+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n}=(-1)^n J_n(x). \qquad (6)$$

Отсюда следует, что при целом n функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ линейно зависимы. Для того чтобы найти общее решение уравнения (1), когда ν равно целому числу n, необходимо найти второе, линейно-независимое от $J_\nu(x)$ частное решение. Для этого введем новую функцию $Y_\nu(x)$, положив

$$Y_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}. \qquad (7)$$

Очевидно, что эта функция также является решением уравнения (1), так как она представляет собой линейную комбинацию частных решений $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ этого уравнения. Затем нетрудно убедиться, на основании соотношения (6), что при ν, равном целому числу n, правая часть равенства (7) принимает неопределенный вид $\frac{0}{0}$. Если раскрыть эту неопределенность по правилу Лопиталя, то в результате ряда выкладок (которые ввиду их сложности здесь не производятся) получим следующее представление функции $Y_n(x)$ при целом положительном n:

$$Y_n(x)=\frac{2}{\pi}J_n(x)\ln\frac{x}{2}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(k+n)}\left[\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}+\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\right] \qquad (8)$$

В частном случае, при $n=0$, функция $Y_0(x)$ представляется таким образом:

$$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}J_0(x)\ln\frac{x}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}. \qquad (9)$$

Введенная здесь функция $Y_\nu(x)$ называется функцией Бесселя 2-го рода ν-го порядка или функцией Вебера.

Функция Вебера является решением уравнения Бесселя также и в том случае, когда ν – целое число.

Функции $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$, очевидно, линейно независимы, следовательно, эти функции при всяком ν – дробном или целом – образуют фундаментальную систему решений. Отсюда вытекает, что общее решение уравнения (1) может быть представлено в виде

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x), \tag{10}$$

где C_1, и C_2 – произвольные постоянные.

4.2 Линейная зависимость между функциями Бесселя

По определению функции $J_n(x)$ мы имеем:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k} k!(n+k)!}, \ n = 1,2,\ldots. \tag{11}$$

Таким образом, имеют место тождества

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), \tag{12}$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x), \tag{13}$$

$$xJ'_n(x) = -xJ_{n+1}(x) + nJ_n(x). \tag{14}$$

Докажем формулу (12). Действительно,

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{n-1+2k}}{2^{n-1+2k}(k-1)!(n-1+k)!}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+k}\right) =$$

$$= \frac{2n}{x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k} k!(n+k)!} = \frac{2n}{x} J_n(x).$$

Аналогично проверяется тождество (13). А теперь приведем доказательство тождества (14). Представим функцию $xJ'_n(x)$ в следующем виде $xJ'_n(x) = \frac{x}{2} 2J'_n(x)$.

Теперь используем тождество (13) для $2J'_n(x)$ тогда $xJ'_n(x)=\frac{x}{2}2J'_n(x)=\frac{x}{2}J_{n-1}(x)-\frac{x}{2}J_{n+1}(x).$

А теперь используем равенство (12), выразив оттуда $J_{n-1}(x)$, тогда получим

$$\frac{x}{2}J_{n-1}(x)-\frac{x}{2}J_{n+1}(x)=\frac{x}{2}\left(\frac{2n}{x}J_n(x)-J_{n+1}(x)\right)-\frac{x}{2}J_{n+1}(x)=nJ_n(x)-\frac{x}{2}J_{n+1}(x)-\frac{x}{2}J_{n+1}(x)=$$
$$=nJ_n(x)-xJ_{n+1}(x)$$

То есть $xJ'_n(x)=-xJ_{n+1}(x)+nJ_n(x)$. Что и требовалось доказать.

Чаще всего на практике при решении различного рода задач используются следующие формулы, которые являются частными случаями предыдущих формул:

$$J'_0(x)=-J_1(x) \tag{15}$$

$$J''_0(x)=\frac{1}{2}[J_2(x)-J_0(x)] \tag{16}$$

Докажем каждую из них. Как известно, из формулы (11), $J_0(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\ldots$ и $J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^2\cdot 4}+\frac{x^5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}-\ldots.$

Продифференцируем $J_0(x)$ и получим:

$$J'_0(x)=\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\ldots\right)'=-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{2^2\cdot 4}-\frac{x^5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\ldots=-J_1(x)$$

что и требовалось доказать. Теперь покажем справедливость формулы (16).

$$J''_0(x)=(J'_0(x))'=\text{/из формулы (15)/}=(-J_1(x))'=-J'_1(x). \tag{17}$$

Воспользуемся формулой (13) для нашего случая $n=1$ и выведем, что $2J'_0(x)=J_{1-1}(x)-J_{1+1}(x)=J_0(x)-J_2(x),$ а отсюда $J'_1(x)=\frac{1}{2}[J_0(x)-J_2(x)].$

Подставим это в (17): $J''_0(x)=-J'_1(x)=-\frac{1}{2}[J_0(x)-J_2(x)]=\frac{1}{2}[J_2(x)-J_0(x)].$

Таким образом, тождества (15) и (16) доказаны.

Приведем теперь доказательства тождеств

$$(\alpha^2-\beta^2)xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x)=\frac{d}{dx}\left[xJ_n(\alpha x)\frac{d}{dx}J_n(\beta x)-xJ_n(\beta x)\frac{d}{dx}J_n(\alpha x)\right], \tag{18}$$

$$2\alpha^2 x J_n^2(\alpha x) = \frac{d}{dx}\{(\alpha^2 x^2 - n^2) J_n^2(\alpha x) + [x\frac{d}{dx} J_n(\alpha x)]^2\}, \tag{19}$$

где α и β – постоянные, а $n > -1$.

Справедливость обоих тождеств проверяется непосредственно на основании тождеств (12), (13), (14), из которых вытекают следующие выражения:

$$J'_n(\alpha x) = J_{n-1}(\alpha x) - \frac{n}{\alpha x} J_n(\alpha x), \tag{20}$$

$$J'_n(\alpha x) = \frac{n}{\alpha x} J_n(\alpha x) - J_{n+1}(\alpha x). \tag{21}$$

Теперь приводим доказательство:

$$\frac{d}{dx}\left[xJ_n(\alpha x)\frac{d}{dx} J_n(\beta x) - xJ_n(\beta x)\frac{d}{dx} J_n(\alpha x)\right] = \frac{d}{dx}\left[\beta x J_n(\alpha x)\{\frac{n}{\beta x} J_n(\beta x) - J_{n+1}(\beta x)\} - \right.$$

$$\left. \alpha x J_n(\alpha x)\{\frac{n}{\alpha x} J_n(\alpha x) - J_{n+1}(\alpha x)\}\right] = \frac{d}{dx}\left[nJ_n(\alpha x) J_n(\beta x) - x\beta J_n(\alpha x) J_{n+1}(\beta x) - \right.$$

$$\left. nJ_n(\alpha x) J_n(\beta x) + \alpha x J_n(\beta x) J_{n+1}(\alpha x)\right] = \frac{d}{dx}\left[\alpha x J_n(\beta x) J_{n+1}(\alpha x) - \beta x J_n(\alpha x) J_{n+1}(\beta x)\right] =$$

$$= \alpha J_n(\beta x) J_{n+1}(\alpha x) - \beta J_n(\alpha x) J_{n+1}(\beta x) + \alpha x \frac{d}{dx}(J_n(\beta x) J_{n+1}(\alpha x)) - \beta x \frac{d}{dx}(J_n(\alpha x) J_{n+1}(\beta x)) =$$

$$= \alpha J_n(\beta x) J_{n+1}(\alpha x) - \beta J_n(\alpha x) J_{n+1}(\beta x) + \alpha^2 x J_n(\beta x) J'_{n+1}(\alpha x) + \alpha\beta x J'_n(\beta x) J_{n+1}(\alpha x) -$$

$$- \alpha\beta x J'_n(\alpha x) J_{n+1}(\beta x) - \beta^2 x J_n(\alpha x) J'_{n+1}(\beta x).$$

Теперь воспользуемся тождеством (20) для *$J'_{n+1}(\alpha x)$, $J'_{n+1}(\beta x)$* и тождеством (21) для *$J'_n(\alpha x)$, $J'_n(\beta x)$*. Тогда предыдущие выкладки равны:

$$\alpha J_n(\beta x) J_{n+1}(\alpha x) - \beta J_n(\alpha x) J_{n+1}(\beta x) + \alpha^2 x J_n(\beta x)(J_n(\alpha x) - \frac{n+1}{\alpha x} J_{n+1}(\alpha x)) +$$

$$+ \alpha\beta x J_{n+1}(\alpha x)(\frac{n}{\beta x} J_n(\beta x) - J_{n+1}(\beta x)) - \alpha\beta x J_{n+1}(\beta x)(\frac{n}{\alpha x} J_n(\alpha x) - J_{n+1}(\alpha x)) -$$

$$\beta^2 x J_n(\alpha x)(J_n(\beta x) - \frac{n+1}{\beta x} J_{n+1}(\beta x)) = \alpha J_n(\beta x) J_{n+1}(\alpha x) - \beta J_n(\alpha x) J_{n+1}(\beta x) +$$

$$+ \alpha^2 x J_n(\beta x) J_n(\alpha x) - \alpha(n+1) J_{n+1}(\alpha x) J_n(\beta x) + \alpha n J_{n+1}(\alpha x) J_n(\beta x) - \alpha\beta x J_{n+1}(\alpha x) J_{n+1}(\beta x) -$$

$$\beta n J_{n+1}(\beta x) J_n(\alpha x) + \alpha\beta x J_{n+1}(\beta x) J_{n+1}(\alpha x) - \beta^2 x J_n(\alpha x) J_n(\beta x) + \beta(n+1) J_n(\alpha x) J_{n+1}(\beta x) =$$

$$\alpha J_n(\beta x) J_{n+1}(\alpha x) - \beta J_n(\alpha x) J_{n+1}(\beta x) + \alpha^2 x J_n(\beta x) J_n(\alpha x) - \alpha n J_{n+1}(\alpha x) J_n(\beta x) -$$

$$-\alpha J_{n+1}(\alpha x) J_n(\beta x) + \alpha n J_{n+1}(\alpha x) J_n(\beta x) - \beta n J_{n+1}(\beta x) J_n(\alpha x) - \beta^2 x J_n(\alpha x) J_n(\beta x) +$$

$$+\beta n J_n(\alpha x) J_{n+1}(\beta x) + \beta J_n(\alpha x) J_{n+1}(\beta x) = (\alpha^2 - \beta^2) x J_n(\alpha x) J_n(\beta x),$$

что и требовалось доказать.

Точно так же

$$\frac{d}{dx}\left\{(\alpha^2 x^2 - n^2) J_n^2(\alpha x) + \left[x \frac{d}{dx} J_n(\alpha x)\right]^2\right\} = 2\alpha^2 x J_n^2(\alpha x) + 2\alpha^3 x^2 J_n(\alpha x) J_n^{'}(\alpha x) +$$

$$+2\alpha^2 x J_{n-1}^2(\alpha x) + 2\alpha^3 x^2 J_{n-1}(\alpha x) J_{n-1}^{'}(\alpha x) - 2n\alpha J_{n-1}(\alpha x) J_n(\alpha x) - 2n\alpha^2 x J_{n-1}^{'}(\alpha x) J_n(\alpha x) -$$

$$2n\alpha^2 x J_{n-1}(\alpha x) J_n^{'}(\alpha x) = 2\alpha^2 x J_n^2(\alpha x),$$

т. е. теперь доказано и тождество (19).

Покажем, что при n > -1 если $J_n(\alpha) = J_n(\beta) = 0$, то

$$\int_0^1 x J_n(\alpha x) J_n(\beta x) dx = 0, \ \alpha \neq \beta, \tag{22}$$

$$\int_0^1 x J_n^2(\alpha x) dx = \frac{1}{2} J_{n+1}^2(\alpha); \tag{23}$$

а если $J_{n+1}(\alpha) = 0,$ то $\int_0^1 x J_n^2(\alpha x) dx = \frac{1}{2} J_n^2(\alpha).$ (24)

Итак, если домножим равенство (22) на $(\alpha^2 - \beta^2)$, то ничего не изменится, так как в (22) после знака равно стоит ноль; и в силу (18) получим:

$$\int_0^1 (\alpha^2 - \beta^2) x J_n(\alpha x) J_n(\beta x) = \int_0^1 \frac{d}{dx}\left[x J_n(\alpha x) \frac{d}{dx} J_n(\beta x) - x J_n(\beta x) \frac{d}{dx} J_n(\alpha x)\right] dx =$$

$$\left[x J_n(\alpha x) \frac{d}{dx} J_n(\beta x) - x J_n(\beta x) \frac{d}{dx} J_n(\alpha x)\right]\Bigg|_0^1 = \beta J_n(\alpha) J_n'(\beta) - \alpha J_n(\beta) J_n'(\alpha) -$$

$$0 \cdot \beta \cdot J_n(0) \cdot J_n'(0) + 0 \cdot \alpha \cdot J_n(0) \cdot J_n'(0) = \beta \cdot J_n(\alpha) \cdot J'(\beta)_n - \alpha \cdot J_n(\beta) \cdot J_n'(\alpha) = 0,$$

так как по условию $J_n(\alpha) = J_n(\beta) = 0$, а отсюда и $J_n'(\alpha) = J_n'(\beta) = 0$, то есть равенство (22) доказано.

Итак, если домножим равенство (23) на $2a^2$, то можно применить формулу (19), тогда имеем

$$\int_0^1 2\alpha^2 x J_n^2(\alpha x)dx = \int_0^1 \frac{d}{dx}\left\{(\alpha^2x^2 - n^2)J_n^2(\alpha x) + \left[x\frac{d}{dx}J_n(\alpha x)\right]^2\right\}dx =$$

$$\left.\left\{(\alpha^2x^2 - n^2)J_n^2(\alpha x) + \left[x\frac{d}{dx}J_n(\alpha x)\right]^2\right\}\right|_0^1 = (\alpha^2 - n^2)J_n^2(\alpha) + (\alpha J_n^{'}(\alpha))^2 +$$

$$+ n^2 J_n^2(0) - (\alpha\cdot 0\cdot J_n^{'}(0))^2 = \text{/по условию } J_n(\alpha) = 0\text{/} = (\alpha J_n^{'}(\alpha))^2 =$$

$$= \text{/ из (21) получаем, что } J_n^{'}(\alpha) = \frac{n}{\alpha}J_n(\alpha) - J_{n+1}(\alpha)\text{/} =$$

$$= \alpha^2(\frac{n}{\alpha}J_n(\alpha) - J_{n+1}(\alpha))^2 = \text{/ по условию } J_n(\alpha) = 0\text{/} = \alpha^2(\frac{n}{\alpha}\cdot 0 - J_{n+1}(\alpha))^2 =$$

$$= \alpha^2(-J_{n+1}(\alpha))^2 = \alpha^2 J_{n+1}(\alpha).$$

Теперь получили, что $\int_0^1 2\alpha^2 x J_n^2(\alpha x)dx = \alpha^2 J_{n+1}(\alpha)$, выразим отсюда $\int_0^1 xJ_n^2(\alpha x)dx$ и получим то, что требовалось доказать $\int_0^1 xJ_n^2(\alpha x)dx = \frac{1}{2}J_{n+1}^2(\alpha)$.

Докажем равенство (24). Если $J_{n+1}(\alpha) = 0$ и из предыдущего доказательства $\int_0^1 2\alpha^2 x J_n^2(\alpha x)dx = (\alpha^2 J_n^{'}(\alpha))^2 =$/ из (20) и (21) имеем $J_n^{'}(\alpha) = \frac{n}{\alpha}J_{n+1}(\alpha) - J_n(\alpha)$/$= \alpha^2(\frac{n}{\alpha}J_n(\alpha) - J_{n+1}(\alpha))^2 =$/ по условию $J_{n+1}(\alpha) = 0$/$=$ $\alpha^2 J_n^{\ 2}(\alpha)$.

Теперь получили, что $\int_0^1 2\alpha^2 x J_n^2(\alpha x)dx = \alpha^2 J_n(\alpha)$, выразим отсюда $\int_0^1 xJ_n^2(\alpha x)dx$ и получим то, что требовалось доказать $\int_0^1 xJ_n^2(\alpha x)dx = \frac{1}{2}J_n^2(\alpha)$ при $J_{n+1}(\alpha) = 0$.

4.3 Некоторые частные случаи функций Бесселя

В математической физике наиболее часто встречаются функции Бесселя $J_0(x),\ J_1(x),\ J_{\frac{1}{2}}(x)$ и $J_{-\frac{1}{2}}(x)$.

Первые две из этих функций представляются следующими рядами:

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\ldots, \tag{25}$$

$$J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^2\cdot 4}+\frac{x^5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6}-\ldots. \tag{26}$$

Для них имеются подробные таблицы. График функции $J_0(x)$ приведен на рисунке 5.

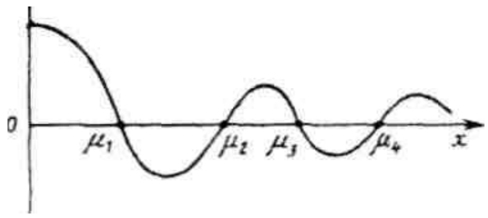

Рисунок 5 – График функции $J_0(x)$

Из формулы (12) видно, что функции $J_2(x)$, $J_3(x)$ и т.д. выражаются через соответствующие функции $J_0(x)$, $J_1(x)$.

Обратимся теперь к функциям $J_{\frac{1}{2}}(x)$ и $J_{-\frac{1}{2}}(x)$. Найдем их значение, для чего обратимся к разложению $J_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{x^{n+2k}}{2^{n+2k}k!\Gamma(n+k+1)}$.

Известно, что $\Gamma(k+1+\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}\dfrac{(2k+1)!}{2^{2k+1}k!}$. Тогда

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{\frac{1}{2}+2k}}{2^{\frac{1}{2}+2k}k!\Gamma(\frac{1}{2}+k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{\frac{1}{2}+2k}\cdot 2^{2k+1}\cdot k!}{2^{\frac{1}{2}+2k}k!\sqrt{\pi}(2k+1)!}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}\cdot x^{-\frac{1}{2}}}{(2k+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

Теперь мы знаем вид функции $J_{\frac{1}{2}}(x)$. Аналогично доказывается, что

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}cosx.$$

4.4 Ортогональность функций Бесселя и их корни

Теорема 1. Если μ_1 и μ_2 – вещественные корни уравнения

$$\alpha J_\nu(\mu)+\beta\mu J_\nu^{'}(\mu)=0,\ \alpha\ge 0,\beta\ge 0,\alpha+\beta>0 \tag{27}$$

то при ν>-1

$$\int_0^1 xJ_\nu(\mu_1 x)J_\nu(\mu_2 x)dx = 0, \mu_1^2 \neq \mu_2^2, \tag{28}$$

$$\int_0^1 xJ_\nu{}^2(\mu_1 x)dx = \frac{1}{2}\left[J_\nu^{'}(\mu_1)\right]^2 + \frac{1}{2}(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2})J_\nu^2(\mu_1). \tag{29}$$

Доказательство. Пусть μ_1 и μ_2 - любые вещественные числа. Функции $J_\nu(\mu_1 x)$ и $J_\nu(\mu_2 x)$ удовлетворяют в силу (1) уравнениям

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx}\right] + (\mu_1^2 x - \frac{\nu^2}{x})J_\nu(\mu_1 x) = 0,\ i = 1,2.$$

Первое из этих уравнений умножим на $J_\nu(\mu_2 x)$, а второе на $J_\nu(\mu_1 x)$, затем вычтем почленно одно из другого и проинтегрируем по интервалу (0;1). В результате получим

$$\int_0^1 \frac{d}{dx}\left[x(J_\nu(\mu_2 x)\frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx} - J_\nu(\mu_1 x)\frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx})\right]dx = (\mu_2^2 - \mu_1^2)\int_0^1 xJ_\nu(\mu_1 x)J_\nu(\mu_2 x)dx$$

или

$$x\left[\mu_1 J_\nu(\mu_2 x)J_\nu^{'}(\mu_1 x) - \mu^2 J_\nu(\mu_1 x)J_\nu^{'}(\mu_2 x)\right]_0^1 = (\mu_2^2 - \mu_1^2)\int_0^1 xJ_\nu(\mu_1 x)J_\nu(\mu_2 x)dx. \tag{30}$$

Но из (2) при $x \to +0$ имеем $J_\nu(\mu x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}(\frac{\mu x}{2})^\nu + O(x^{\nu+2})$, $\mu x J_\nu^{'}(\mu x) = \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)}(\frac{\mu x}{2})^\nu + O(x^{\nu+2})$, и поэтому $x\mu_1 J_\nu(\mu_2 x)J_\nu^{'}(\mu_1 x) - x\mu_2 J_\nu(\mu_1 x)J_\nu^{'}(\mu_2 x) = O(x^{2\nu+2})$ при $x \to +0$.

Таким образом, в силу условия ν>-1 левая часть равенства (30) обращается в нуль при x=0 и мы получаем

$$\int_0^1 xJ_\nu(\mu_1 x)J_\nu(\mu_2 x)dx = \frac{1}{\mu_2^2 - \mu_1^2}\left[\mu_1 J_\nu(\mu_2 x)J_\nu^{'}(\mu_1 x) - \mu_2 J_\nu(\mu_1 x)J_\nu^{'}(\mu_2 x)\right]. \tag{31}$$

Если теперь μ_1 и μ_2 – корни уравнения (27),

$$\alpha J_\nu(\mu_1) + \beta\mu_1 J_\nu^{'}(\mu_1) = 0,\ \alpha J_\nu(\mu_2) + \beta\mu_2 J_\nu^{'}(\mu_2) = 0, \tag{32}$$

а числа α и β не равны нулю одновременно, то определитель линейной системы (32) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} J_\nu(\mu_1) & \mu_1 J_\nu(\mu_1) \\ J_\nu(\mu_2) & \mu_2 J_\nu(\mu_2) \end{vmatrix} = \mu_2 J_\nu(\mu_1) J_\nu^{'}(\mu_2) - \mu_1 J_\nu(\mu_2) J_\nu^{'}(\mu_1) = 0.$$

Отсюда и из (31) следует свойство ортогональности (31).

Пусть μ_1 – корень уравнения (27). Переходя в равенстве (31) к пределу при $\mu_2 \to \mu_1$ и, пользуясь правилом Лопиталя и уравнением (1), получим формулу (29):

$$\int_0^1 x J_\nu^{\,2}(\mu_1 x)dx = \lim_{\mu_2\to\mu_1} \frac{1}{\mu_2^2 - \mu_1^2}\left[\mu_1 J_\nu(\mu_2 x) J_\nu^{'}(\mu_1 x) - \mu_2 J_\nu(\mu_1 x) J_\nu^{'}(\mu_2 x)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\mu_1}\left\{\mu^2 J_\nu^{'}(\mu_1) J_\nu^{'}(\mu_1) - J_\nu(\mu_1)\left[J_\nu^{'}(\mu_1) + \mu_1 J_\nu^{''}(\mu_1)\right]\right\} = \frac{1}{2}\left[J_\nu^{'}(\mu_1)\right]^2 -$$

$$- \frac{1}{2\mu_1} J_\nu(\mu_1)\left[J_\nu^{'}(\mu_1) + \mu_1 J_\nu^{''}(\mu_1)\right] = \frac{1}{2}\left[J_\nu^{'}(\mu_1)\right]^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right) J_\nu^2(\mu_1).$$

Часто в решениях задач используются следующие формулы:

$$\int_0^x r J_0(r)dr = x J_1(x), \tag{33}$$

$$\int_0^x r^3 J_0(r)dr = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x). \tag{34}$$

Равенство (33) легко доказывается, если взять интеграл в левой части один раз по частям с учетом формулы (25). Интеграл же в формуле (34) берется немного сложнее. Приведем доказательство этой формулы.

$$\int_0^x r^3 J_0(r)dr = \begin{vmatrix} rJ_0(r)dr = dv & r^2 = u \\ rJ_1(r) = v & 2rdr = du \end{vmatrix} = r^3 J_1(r)\Big|_0^x - 2\int_0^x r^2 J_1(r)dr =$$

$$= \begin{vmatrix} J_1(r)dr = dv & r = u^2 \\ -J_0(r) = v & 2rdr = du \end{vmatrix} = \left| -J_0(r) = v \text{ вытекает из (14) } \right| =$$

$$x^3 J_1(x) - 2\left(-J_0(r) r^2\Big|_0^x + 2\int_0^x J_0(r) r dr\right) = x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - 4x\ J_1(x) =$$
$$= 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x).$$

Что, собственно, и требовалось доказать.

Обратимся теперь к корням уравнения Бесселя. Докажем следующие свойства корней уравнения (27) при ν>-1. (При $\beta = 0$ это уравнение определяет корни функций Бесселя).

Теорема 2. Корни уравнения (27) при v>-1вещественные, простые, кроме, возможно, нуля; они симметрично расположены относительно точки O и не имеют конечных предельных точек.

Доказательство. Вещественность корней. Из формулы (2) в силу вещественности $\Gamma(\xi)$ при вещественных ξ, получим $J_v(\bar{x}) = \overline{J_v(x)}$, так что при вещественных α и β:

$$\alpha J_v(\bar{\mu}) + \beta\bar{\mu}J_v'(\bar{\mu}) = \overline{\alpha J_v(\mu) + \beta\mu J_v'(\mu)}.$$

Поэтому, если μ - корень уравнения (27), то $\bar{\mu}$ – также его корень.

Если $\mu^2 \neq \bar{\mu}^2$ то, применяя формулу (28) с $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = \bar{\mu}$, получим противоречие:

$$0 = \int_0^1 xJ_v(\mu x)J_v(\bar{\mu}x)dx = \int_0^1 x\left|J_v(\mu x)\right|^2 dx.$$

Поэтому $\mu^2 = \bar{\mu}^2$, то есть либо μ вещественное, либо $\mu = ia$ - мнимое число, $a \neq 0$- вещественное. Но последний случай невозможен, поскольку в силу (2) $\Gamma(\xi)$>0, ξ>0

$$\alpha J_\nu(ia) + \beta i a J'_\nu(ia) = \left(\frac{ia}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha + \beta(2k+\nu)}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k} \neq 0.$$

Симметрия корней и отсутствие конечных предельных точек следует из представления

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta i\mu J'_\nu(\mu) = \mu^\nu\left[(\alpha+\beta\nu) f_\nu\left(\mu^2\right) + 2\beta\mu^2 f'_\nu\left(\mu^2\right)\right]$$

из того факта, что нули целой функции не могут иметь конечных предельных точек.

Докажем простоту корней. Пусть $\mu_0 > 0$ – корень уравнения (27) кратности больше либо равной 2, так что

$$\alpha J_\nu(\mu_0) + \beta\mu_0 J'_\nu(\mu_0) = 0,$$

$$\alpha J'_\nu(\mu_0) + \beta J'_\nu(\mu_0) + \beta\mu_0 J''_\nu(\mu_0) = -\beta\left(\mu_0 - \frac{\nu^2}{\mu_0}\right) J_\nu(\mu_0) + \alpha J'_\nu(\mu_0) = 0. \quad (35)$$

Из системы (35) заключаем, что:

1) либо $J_\nu(\mu_0) = J'_\nu(\mu_0) = 0$;

2) либо ее определитель $\alpha^2+\beta^2\left(\mu_0^2-\nu^2\right)=0$.

Случай 1) невозможен в силу теоремы единственности решения уравнения (1), поскольку точка μ_0 не особая для него. Докажем, что случай 2) также невозможен. Для реализации 2) необходимо $\beta>0$ и $\frac{\alpha}{\beta}=\sqrt{\nu^2-\mu_0^2}$, $0<\mu_0\le|\nu|$. Подставляя это выражение в первое из равенств (35) и возводя в квадрат, получим $[J'_\nu(\mu_0)]^2=\left(\frac{\nu^2}{\mu_0^2}-1\right)J_\nu^2(\mu_0)$, что в силу (29) приводит к противоречивому равенству $\int_0^1 x\,J_\nu^2(\mu_0\,x)\,dx=0$.

Теорема доказана.

На основании установленной теоремы положительные корни уравнения (30) можно перенумеровать, располагая их в порядке возрастания

$$\mu_1^{(\nu)}<\mu_2^{(\nu)}<\ldots \tag{36}$$

Приведем для примера несколько первых значений μ_m: $\mu_1=2.405$, $\mu_2=5.520$, $\mu_3=8.654$, $\mu_4=11.792$. Таблицы нулей функции Бесселя можно найти в справочной литературе.

Отметим, что с возрастанием номера m разность значений двух соседних корней $(\mu_{m+1}-\mu_m)$ стремится к π. Действительно, например $\mu_7-\mu_6=3.1405$. Это свойство корней функции Бесселя $J_0(x)$ вытекает из асимптотической формулы

$$J_0(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right),\ x\to\infty. \tag{37}$$

Отсюда вытекает приближенная формула для корней $J_\nu(x)$ $\mu_k^{(\nu)}\approx\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\nu+k\pi$.

4.5 Некоторые приложения функций Бесселя к математическому анализу

В данном разделе рассмотрим различные разложения по функциям Бесселя, предлагаемые рядом математиков, что является немаловажным при решении краевых задач, где необходимо разложить в ряд по функциям Бесселя некоторую функцию.

Разложение Неймана по функциям Бесселя.

Функции разных видов могут разлагаться в бесконечные ряды, разложенные по функциям Бесселя. Существует несколько типов таких разложений. Простейшее из них принадлежит Нейману. Следует, однако, отметить, что разложение Неймана охватывает лишь сравнительно узкий класс функций, а именно функции $f(x)$, аналитические внутри некоторого круга C с центром в начале координат. Разложение функции $f(x)$ будет иметь вид: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(x)$,

где коэффициенты $a_n = \frac{1}{\pi i}\int_C O_n(t)\, f(t)\, dt$, в частности, $a_0 = f(0)$, а $O_0(t)=\frac{1}{t}$,

$$O_n(t)=\frac{1}{2t^{n+1}}\int_0^{\infty} e^{-\xi}\left[\left(\xi+\sqrt{\xi^2+t^2}\right)^n+\left(\xi-\sqrt{\xi^2+t^2}\right)^n\right]d\xi.$$

Разложение Шлемиха по функциям Бесселя.

Шлемих указал разложение по функциям Бесселя, имеющее вид:

$$f(x)=a_0+a_1 J_0(x)+a_2 J_1(x)+\dots$$

Это разложение справедливо в промежутке $0\le x\le\pi$ для функций $f(x)$ весьма широкого класса. По крайней мере, оно справедливо для функций, имеющих в интервале непрерывную производную с ограниченным изменением.

Вывод этого разложения основан на решении интегрального уравнения

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x\sin\varphi)\, d\varphi.$$

Здесь $f(x)$ – данная функция с непрерывной производной при $-\pi\le x\le\pi$.

Искомая функция $F(x)$ ищется из числа функций, имеющих непрерывную производную в том же интервале.

Разложение произвольной функции в ряды Фурье-Бесселя.

Пусть произвольная функция $f(x)$ представима в виде ряда

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_\nu\left(\frac{\mu_n x}{l}\right),\ \nu>-1, \tag{38}$$

где $\mu_1,\ \mu_2,\ldots$ - положительные корни уравнения $J_\nu(x)=0$, расположенные в порядке возрастания.

Для определения коэффициентов a_n умножим обе части разложения (38) на $x J_\nu\left(\frac{\mu_n x}{l}\right)$ и проинтегрируем по x на отрезке $[0,l]$, считая при этом возможным почленное интегрирование. Тогда, принимая во внимание формулу

$$\int_0^l x J_\nu\left(\frac{\mu_i x}{l}\right) J_\nu\left(\frac{\mu_j x}{l}\right) dx=\begin{cases} 0,\ \textit{если}\ \ j\neq i \\ \frac{l^2}{2} J'^2_\nu(\mu_i)=\frac{l^2}{2} J^2_{\nu+1}(\mu_i),\ \textit{если}\ \ j=i, \end{cases} \tag{39}$$

найдем, что

$$a_i=\frac{2}{l^2 J^2_{\nu+1}(\mu_i)}\int_0^l x f(x) J_\nu\left(\frac{\mu_i x}{l}\right) dx. \tag{40}$$

Разложение (38), в котором коэффициенты a_i определяются по формуле (40), называется разложением функции $f(x)$ в ряд Фурье – Бесселя.

В задачах математической физики часто встречаются следующие ряды по функциям Бесселя:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} b_i J_\nu\left(\frac{\mu_i x}{l}\right), \tag{41}$$

где $\mu_1,\ \mu_2,\ldots$ – положительные корни уравнения

$$a J_\nu(x)+\beta x J'_\nu(x)=0. \tag{42}$$

расположенные в порядке возрастания, причем $\frac{\alpha}{\beta}+\nu>0$.

Коэффициенты b_i в силу ортогональности функций Бесселя и формулы

$$\int_0^l x J^2_\nu\left(\frac{\mu x}{l}\right) dx=\frac{l^2}{2}\left(1+\frac{\alpha^2-\beta^2\nu^2}{\beta^2\mu^2}\right) J^2_\nu(\mu)$$

определяются по формуле

$$b_i = \frac{2}{l^2\left(1+\frac{\alpha^2-\beta^2\nu^2}{\beta^2\mu^2}\right)J_\nu^2(\mu)}\int_0^l x\, f(x)\, J_\nu\left(\frac{\mu_i\, x}{l}\right)dx. \quad (43)$$

Разложение (41), в котором коэффициенты b_i определяются по формуле (43), называется разложением функции $f(x)$ в ряд Дини – Бесселя.

Если $\frac{\alpha}{\beta}+\nu=0$, то, как будет показано ниже (см. формулу (47)), x^ν ортогональна к функциям $J_\nu\left(\frac{\mu_i\, x}{l}\right)$ с весом x на отрезке $[0,l]$, а поэтому разложение (41) должно быть заменено следующим:

$$f(x) = b_0\, x^\nu + \sum_{i=1}^{\infty} b_i\, J_\nu\left(\frac{\mu_i\, x}{l}\right). \quad (44)$$

В этом случае $J'_\nu(x) = \frac{\nu}{x}J_\nu(x)$ уравнение (42) можно записать в следующем виде: или, в силу формулы (14) $J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu\, J_\nu(x)}{x}$, будем иметь

$$J_{\nu+1}(x) = 0, \quad (45)$$

то есть $\mu_1,\ \mu_2,\ldots$ будут корнями уравнения (45).

Для определения коэффициента b_0 умножим обе части разложения (44) на $x^{\nu+1}$ и проинтегрируем по x от 0 до l, считая при этом возможным почленное интегрирование. Тогда получим

$$\int_0^l x^{\nu+1} f(x)\, dx = \frac{b_0\, l^{2\nu+2}}{2\nu+2} + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \int_0^l x^{\nu+1}\, J_\nu\left(\frac{\mu_i\, x}{l}\right)dx. \quad (46)$$

Ранее мы имели формулу

$$x^{\nu+1}\, J_\nu(x) = \frac{d}{dx}\left[x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x)\right] \text{ или } x^{\nu+1}J_\nu(xt) = \frac{1}{t}\cdot\frac{d}{dx}\left[x^{\nu+1}J_{\nu+1}(xt)\right].$$

Интегрируя это тождество, получим $\int_0^l x^{\nu+1}J_\nu(xt)\, dx = \frac{l^{\nu+1}}{t}J_{\nu+1}(xt)$.

Полагая здесь $t = \frac{\mu_i}{l}$, где μ_i - корень уравнения (45), будем иметь

$$\int_0^l x^{\nu+1} J_\nu\left(\frac{\mu_i x}{l}\right) dx = 0\,. \tag{47}$$

Тогда из формулы (46) в силу (47) вытекает, что

$$b_0 = \frac{2(\nu+1)}{l^{2(\nu+1)}} \int_0^l x^{\nu+1} f(x)\, dx\,. \tag{48}$$

Коэффициенты b_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ определяются по прежним формулам (43), что непосредственно следует из равенства (43).

4.6 Применение функций Бесселя к решению краевых задач

1) Методом разделения переменных с использованием цилиндрических функций решить следующую задачу для волнового уравнения.

В круге $0 \le r \le R$ решим задачу относительно функции $u = u(r,t)$:

$$u_{tt} = a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right),\ t > 0,$$

$$\left|u(0,t)\right| < \infty,\ u(R,t) = 0,\ t > 0,$$

$$u(r,0) = \varphi(r),\ \ u_t(r,0) = \psi(r),\ 0 \le r < R\,.$$

Распишем, что $a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{a^2}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)$ и согласно методу разделения переменных решение будем искать в виде $u(r,t) = T(t)W(r)$. Тогда начальные и граничные условия примут вид:

$$W(R) = 0, \tag{49}$$

и $U(r,0) = \varphi(r),\ U_t(r,0) = \psi(r).$ (50)

Получаем уравнение в виде $u_{tt} = \frac{a^2}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)$. Подставим сюда предполагаемый вид решения и получим: $T''(t)W(r) = \frac{a^2}{r}\big(T(t)W'(r) + r\,T(t)W''(r)\big).$

Разделим это равенство на $a^2\,T(t)W(r)$ и получим $\frac{T''(t)}{a^2\,T(t)} = \frac{1}{r}\left(\frac{W'(r) + rW''(r)}{W(r)}\right) = -\lambda^2.$

Отсюда получим систему уравнений, решение которой нам и надо получить:

$$\begin{cases} T''(t)+\lambda^2 a^2 T(t)=0, \\ rW''(r)+W'(r)+\lambda^2 rW(r)=0. \end{cases} \qquad (51)$$

Решим второе уравнение системы, предварительно разделив его на r:

$$W''(r)+\frac{1}{r}W'(r)+\lambda^2 W(r)=0.$$

Как можно сразу заметить на основании вышеизложенной теории, это есть уравнение Бесселя нулевого порядка, решение которого равно: $W(r)=J_0(\lambda r)$.

Согласно (49) найдем λ:

$$W_n(R)=J_0(\lambda_n R)=0, \qquad (52)$$

а обозначим $R\lambda_n=\mu_n$, отсюда $\lambda_n=\dfrac{\mu_n}{R}$, где μ_n – корни уравнения Бесселя (52).

Таким образом $W_n(r)=J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{R}\right)$.

Теперь решим первое уравнение системы (51):

$$T''(t)+\lambda^2 a^2 T(t)=0,$$

$$T_n(t)=A_n\cos\lambda at+B_n\sin\lambda at=A_n\cos\frac{\mu_n a}{R}t+B_n\sin\frac{\mu_n a}{R}t.$$

Теперь, зная вид $T(t)$ и $W(r)$, можно записать, как будет выглядеть решение задачи:

$$u(r,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\mu_n a}{R}t+B_n\sin\frac{\mu_n a}{R}t\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right).$$

Из условий (50) найдем коэффициенты A_n и B_n. Для этого разложим функции $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ в ряд по функциям Бесселя согласно разложению Фурье – Бесселя, где коэффициенты разложения находятся по формуле (40), что мы и применим для $\varphi(r)$ и $\psi(r)$. Получаем

$$\varphi(r)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right), \text{ где } a_n=\frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)}\int_0^R r\,\varphi(r)\,J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr,$$

$$\psi(r)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\, J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right), \text{ где } b_n=\frac{2}{R^2\, J_1^2(\mu_n)}\int_0^R r\,\psi(r)\, J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr\,.$$

Теперь получаем, что

$$A_n=a_n \text{ и } \frac{a\mu_n}{R}B_n=b_n, \text{ то есть } B_n=\frac{R}{a\mu_n}b_n\,.$$

Согласно всему найденному можно записать решение изначально поставленной задачи:

$$u(r,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\mu_n a}{R}t+B_n\sin\frac{\mu_n a}{R}t\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right), \text{ где}$$

$$A_n=\frac{2}{R^2\, J_1^2(\mu_n)}\int_0^R r\,\varphi(r)\, J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr \text{ и } B_n=\frac{2}{a\mu_n\, R\, J_1^2(\mu_n)}\int_0^R r\,\psi(r)\, J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr\,,$$

а μ_n – положительные корни уравнения Бесселя $J_0(\mu_n)=0$.

2) Определить поперечные колебания однородной круглой мембраны радиуса R, вызванные начальной скоростью

$$f(r)=\begin{cases} U,\ 0\le r\le \dfrac{R}{2}, \\ 0,\ \dfrac{R}{2}<r<R, \end{cases} \tag{53}$$

если край мембраны закреплен жестко.

Таким образом, данная задача говорит о том, что необходимо найти решение уравнения

$$u_{tt}=\frac{a^2}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right),\ 0\le r<R,\ t>0,\ \left|u(0,t)\right|<\infty \tag{54}$$

при граничном условии

$$u(R,t)=0\,, \tag{55}$$

и начальных условиях

$$u(r,0)=0,\ u_t(r,0)=f(r)\,. \tag{56}$$

Так же, как и в предыдущей задаче, решение данного уравнения будем искать в виде $u(r,t)=T(t)W(r)$, тогда граничные и начальные условия примут вид:

$W(R)=0$,

$T(0)=0,\ T'(0)=f(r)$.

Запишем уравнение (54) в таком виде, какое оно получит после подстановки в него $u(r,t)=T(t)W(r)$:

$$T''(t)W(r)=\frac{a^2}{r}\big(T(t)W'(r)+r\,T(t)W''(r)\big).$$

Разделим это равенство на $a^2\,T(t)W(r)$ и получим

$$\frac{T''(t)}{a^2\,T(t)}=\frac{1}{r}\left(\frac{W'(r)+rW''(r)}{W(r)}\right)=-\lambda^2.$$

Отсюда получим систему уравнений, решение которой нам и надо, собственно, найти:

$$\begin{cases} T''(t)+\lambda^2\,a^2\,T(t)=0, \\ rW''(r)+W'(r)+\lambda^2\,rW(r)=0. \end{cases}$$

Как уже было найдено в первой задаче $W_n(r)=J_0\left(\frac{\mu_n\,r}{R}\right)$ и $T_n(t)=A_n\cos\frac{\mu_n\,a}{R}t+B_n\sin\frac{\mu_n\,a}{R}t$, где μ_n – корни уравнения Бесселя $J_0(\lambda_n\,R)=0$, решение уравнения (54) запишем в виде суперпозиции двух решений $W_n(r)$ и $T_n(t)$:

$$u(r,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\mu_n\,a}{R}t+B_n\sin\frac{\mu_n\,a}{R}t\right)J_0\left(\frac{\mu_n\,r}{R}\right).$$

Теперь наша задача состоит в том, чтобы найти коэффициенты A_n и B_n. Для этого используем начальные условия (56) и выражение (53):

$u(r,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,J_0\left(\frac{\mu_n\,r}{R}\right)=0$, отсюда $A_n=0$.

$$u_t(r,0)=\frac{a\mu_n}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(B_n\cos\left(\frac{\mu_n\,a}{R}\cdot 0\right)\right)J_0\left(\frac{\mu_n\,r}{R}\right)=\frac{a\mu_n}{R}\sum_{n=0}^{\infty}B_n\,J_0\left(\frac{\mu_n\,r}{R}\right)=f(r).$$

Для нахождения коэффициента B_n разложим $f(r)$ в ряд по функциям Бесселя согласно разложению Фурье – Бесселя, где коэффициенты разложения находятся по формуле (40), что мы и применим для $f(r)$:

$$f(r)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\, J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где $b_n=\dfrac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)}\int\limits_0^R r\, f(r)\, J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{R}\right)dr=\dfrac{2U}{R^2 J_1^2(\mu_n)}\int\limits_0^{R/2} r\, J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{R}\right)dr=$ /получаем такие пределы интегрирования от 0 до $\dfrac{R}{2}$ на основании вида функции $f(r)$ /=

$$=/\frac{\mu_n r}{R}=t,\ r=\frac{R}{\mu_n}t,\ dr=\frac{R}{\mu_n}dt/=\frac{2U}{R^2 J_1^2(\mu_n)}\cdot\frac{R^2}{\mu_n^2}\cdot\int\limits_0^{\mu_n/2} t\, J_0(t)\, dt=$$

$$=\text{/ воспользуемся формулой (33) /}=\frac{2U}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)}\cdot t\, J_1(t)\Big|_0^{\mu_n/2}=$$

$$=\frac{2U}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)}\cdot\frac{\mu_n r}{R}\cdot J_1\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)\Bigg|_0^{R/2}=\frac{2U}{\mu_n J_1^2(\mu_n) R}\cdot\frac{R}{2}\cdot J_1\left(\frac{\mu_n}{2}\right)=\frac{U}{\mu_n J_1^2(\mu_n)}\cdot J_1\left(\frac{\mu_n}{2}\right).$$

Таким образом, получили, что $\dfrac{a\mu_n}{R}\sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n\, J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{R}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\, J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{R}\right)$, где $b_n=\dfrac{U}{\mu_n J_1^2(\mu_n)}\cdot J_1\left(\dfrac{\mu_n}{2}\right)$.

Отсюда $B_n=\dfrac{R}{a\mu_n}b_n=\dfrac{R}{a\mu_n}\cdot\dfrac{U}{\mu_n J_1^2(\mu_n)}\cdot J_1\left(\dfrac{\mu_n}{2}\right)=\dfrac{RU\, J_1\left(\dfrac{\mu_n}{2}\right)}{a\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)}$.

Тогда решение исходной задачи имеет вид:

$$u(r,t)=\frac{U\,R}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\dfrac{\mu_n}{2}\right)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)}\cdot\sin\left(\frac{\mu_n a}{R}t\right)\cdot J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где μ_n – положительные корни уравнения Бесселя $J_0(\mu_n)=0$.

3) Найти распределение температуры при $t>0$ в бесконечном однородном круглом цилиндре радиуса R, если начальная температура

цилиндра равна Ur^2, для случая, когда поверхность цилиндра теплоизолирована.

Из формулировки задачи видно, что требуется найти решение уравнения

$$u_t = \frac{a^2}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right),\ 0 \le r \le R,\ t > 0,\ \left|u(0,t)\right| < \infty, \tag{57}$$

при граничном условии

$$u_r(R,t) = 0, \tag{58}$$

и начальном условии

$$u(r,0) = Ur^2. \tag{59}$$

Так же, как и в предыдущей задаче, решение данного уравнения будем искать в виде $u(r,t) = T(t)W(r)$, тогда граничные и начальные условия примут вид:

$$W'(R) = 0, \tag{60}$$

$$T(0) = Ur^2. \tag{61}$$

Запишем уравнение (57) в таком виде, какой оно получит после подстановки в него $u(r,t) = T(t)W(r)$:

$$T'(t)W(r) = \frac{a^2}{r}\big(T(t)W'(r) + r\,T(t)W''(r)\big).$$

Разделим это равенство на $a^2\,T(t)W(r)$ и получим

$$\frac{T'(t)}{a^2\,T(t)} = \frac{1}{r}\left(\frac{W'(r) + rW''(r)}{W(r)}\right) = -\lambda^2.$$

Отсюда получим систему уравнений, решение которой нам и надо найти:

$$\begin{cases} T'(t) + \lambda^2\,a^2\,T(t) = 0, \\ rW''(r) + W'(r) + \lambda^2\,rW(r) = 0. \end{cases}$$

Решим первое уравнение полученной системы:

$T'(t) + \lambda^2\,a^2\,T(t) = 0$, отсюда $T(t) = e^{-a^2\lambda^2 t}$.

Получим теперь решение второго уравнения:

$rW''(r) + W'(r) + \lambda^2\,rW(r) = 0$.

Разделим его на r и в результате получим уравнение Бесселя нулевого порядка:

$W_n(r) = J_0(\lambda_n r)$.

Согласно (60) найдем λ_n:

$W'(R) = \left(J_0(\lambda_n R)\right)' = R\, J_1(\lambda_n R) = 0$.

Отсюда $\lambda_n R = \mu_n$ - положительные корни уравнения Бесселя $J_1(\lambda_n R) = 0$. Тогда $\lambda_n = \dfrac{\mu_n}{R}$. Таким образом, $W_n(r) = J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{R}\right)$.

Теперь мы имеем $W_n(r) = J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{R}\right)$ и $T_n(t) = A_n\, e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t}$.

Решение уравнения (57) запишем в виде суперпозиции двух решений $W_n(r)$ и $T_n(t)$:

$$u(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} \cdot J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right).$$

Теперь наша задача состоит в том, чтобы найти коэффициенты A_n. Для этого используем начальное условие (59):

$$u(r,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 \cdot 0} \cdot J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) = Ur^2 .$$

Для нахождения коэффициента A_n разложим Ur^2 в ряд по функциям Бесселя согласно разложению Фурье – Бесселя, где коэффициенты разложения находятся по формуле (40), что мы и применим для Ur^2:

$$Ur^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где

$$a_n = \frac{2}{R^2 J_0^2(\mu_n)} \int_0^R r\, Ur^2 J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr = \frac{2U}{R^2 J_0^2(\mu_n)} \int_0^R r^3\, J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr =$$

$$= /\frac{\mu_n r}{R} = t,\ r = \frac{R}{\mu_n} t,\ dr = \frac{R}{\mu_n} dt / = \frac{2U}{R^2 J_0^2(\mu_n)} \cdot \frac{R^3}{\mu_n^3} \cdot \frac{R}{\mu_n} \cdot \int_0^{\mu_n} t^3\, J_0(t)\, dt =$$

= / применим формулу (34), согласно которой

$$\int_0^x r^3\, J_0(r)\, dr = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x)\, J_1(x) \ / =$$

$$= \frac{2U\,R^2}{\mu_n^4\, J_0^2(\mu_n)} \cdot \left[2t^2\, J_0 + (t^3 - 4t)\, J_1(t) \right]\Big|_0^{\mu_n} = \text{/ учтем, что } J_1(\mu_n) = 0 \text{ /} =$$

$$= \frac{2U\,R^2}{\mu_n^4\, J_0^2(\mu_n)} \cdot \left[2t^2\, J_0(t) \right]\Big|_0^{\mu_n} = \frac{4U\,R^2}{\mu_n^4\, J_0^2(\mu_n)} \cdot \frac{\mu_n^2}{R^2} \cdot r^2\, J_0\!\left(\frac{\mu_n\, r}{R}\right)\Bigg|_0^R = \frac{4U\,R^2}{\mu_n^2\, J_0^2(\mu_n)} \cdot J_0(\mu_n) =$$

$$= \frac{4U\,R^2}{\mu_n^2\, J_0(\mu_n)}.$$

Итак, получили, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n\, J_0\!\left(\frac{\mu_n\, r}{R}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\, J_0\!\left(\frac{\mu_n\, r}{R}\right)$, где $a_n = \frac{4U\,R^2}{\mu_n^2\, J_0(\mu_n)}$, а отсюда находим, что $A_n = \frac{4U\,R^2}{\mu_n^2\, J_0(\mu_n)}$. Тогда решение исходной задачи запишется в следующем виде:

$$u(r,t) = 4U\,R^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2\, J_0(\mu_n)} \cdot e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} \cdot J_0\!\left(\frac{\mu_n\, r}{R}\right),$$

где μ_n – положительные корни уравнения Бесселя $J_1(\mu_n) = 0$.

4) В бесконечном однородном цилиндре радиуса R с момента $t = 0$ выделяется тепло с постоянной плотностью Q. Считая температуру цилиндра при $t = 0$ равной нулю, определить распределение температуры в нем при $t > 0$, если поверхность цилиндра поддерживается при температуре T.

Требуется найти решение уравнения

$$u_t = \frac{a^2}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) + \frac{Q}{c\rho},\ 0 \le r < R,\ t > 0,\ |u(0,t)| < \infty, \tag{62}$$

при граничном условии

$$u(R,t) = T \tag{63}$$

при начальном условии

$$u(r,0) = 0. \tag{64}$$

Для того, чтобы найти решение данной задачи необходимо в первую очередь обнулить граничные условия. Если решение искать в виде

$$u(r,t) = v(r,t) + T, \tag{65}$$

то задача сводится теперь к отысканию функции $v(r,t)$ в уравнении

$$v_t = \frac{a^2}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial r} + r\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right) + \frac{Q}{c\rho},$$

для которого граничные и начальные условия примут следующий вид:

$$u(R,t) = v(R,t) + T = T \quad \Rightarrow v(R,t) = 0 \tag{66}$$

$$u(r,0) = v(r,0) + T = 0 \Rightarrow v(R,0) = -T\ . \tag{67}$$

Решение $v(r,t)$ будем искать в виде суммы двух решений (в следствии того, что уравнение неоднородное):

$$v(r,t) = v^*(r,t) + \bar{v}(r,t),$$

где $v^*(r,t)$ - решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями, а $\bar{v}(r,t)$ – решение однородного уравнения с заданными начальными и граничными условиями.

1) Найдем $\bar{v}(r,t)$, то есть решим уравнение

$$\bar{v}_t = \frac{a^2}{r}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial r^2}\right) \tag{68}$$

с граничным условием

$$\bar{v}(R,t) = 0$$

и начальным условием

$$\bar{v}(r,0) = -T\ . \tag{69}$$

Решение будем искать в виде $\bar{v}(r,t) = T(t)W(r)$. Тогда граничные условия примут вид:

$$W(R) = 0, \tag{70}$$

а начальные условия:

$$T(0) = -T\ .$$

Как и в предыдущей задаче, после подстановки предполагаемого решения в уравнение (68), получим систему:

$$T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0,$$
$$rW''(r) + W'(r) + \lambda^2 rW(r) = 0\ .$$

Решим первое уравнение полученной системы: $T'(t)+a^2\lambda^2T(t)=0$, отсюда $T(t)=e^{-a^2\lambda^2t}$.

Получим теперь решение второго уравнения: $rW''(r)+W'(r)+\lambda^2rW(r)=0$.

Разделим его на r и в результате получим уравнение Бесселя нулевого порядка: $W_n(r)=J_0(\lambda_n r)$.

Согласно (70) найдем λ_n: $W(R)=J_0(\lambda_n R)=0$.

Отсюда $\lambda_n R=\mu_n$ – положительные корни уравнения Бесселя $J_0(\lambda_n R)=0$. Тогда $\lambda_n=\dfrac{\mu_n}{R}$. Таким образом, $W_n(r)=J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{R}\right)$.

Теперь мы имеем $W_n(r)=J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{R}\right)$ и $T(t)=A_n e^{-a^2\lambda^2t}$.

Решение уравнения (68) запишем в виде суперпозиции двух решений $W_n(r)$ и $T_n(t)$: $\bar{v}(r,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2t}J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{R}\right)$.

Теперь наша задача состоит в том, чтобы найти коэффициенты A_n. Для этого используем начальное условие (69):

$$\bar{v}(r,0)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 0}J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)=-T$$

Для нахождения коэффициентов A_n разложим $-T$ в ряд Фурье – Бесселя, где коэффициенты разложения находятся по формуле (40), что мы и применим для $-T$.

$$-T=\sum_{n=0}^{\infty}a_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$ где

$$a_n=\frac{2}{R^2J_1^2(\mu_n)}\int_0^R r(-T)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr=-\frac{2T}{R^2J_1^2(\mu_n)}\int_0^R rJ_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr=$$

$$=\left|\frac{\mu_n r}{R},\quad r=\frac{R}{\mu_n}t,\quad dr=\frac{R}{\mu_n}dt\quad\right|=-\frac{2T}{R^2J_1^2(\mu_n)}\cdot\frac{R^2}{\mu_n^2}\int_0^R tJ_0(t)dt=$$

$$=\left|\text{воспользуемся формулой}(33)\right|=-\frac{2T}{\mu_n^2J_1^2(\mu_n)}\cdot t\,J_1(t)\Big|_0^{\mu_n}=$$

$$=-\frac{2T}{\mu_n^2J_1^2(\mu_n)}\cdot\frac{\mu_n r}{R}\cdot J_1\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)\Bigg|_0^R=-\frac{2T}{\mu_nJ_1^2(\mu_n)\,R}\cdot R\cdot J_1(\mu_n)=-\frac{2T}{\mu_nJ_1(\mu_n)}.$$

Итак, получили, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_nJ_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nJ_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)$, где $a_n=-\frac{2T}{\mu_nJ_1(\mu_n)}$, а отсюда находим, $A_n=-\frac{2T}{\mu_nJ_1(\mu_n)}$. Тогда решение однородного уравнения с заданными граничными и начальными условиями запишем в следующем виде:

$$\bar{v}(r,t)=-2T\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_nJ_1(\mu_n)}e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2t}J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где μ_n – положительные корни уравнения Бесселя $J_0(\mu_n)=0$.

2) Найдем $v^*(r,t)$, то есть решим уравнение

$$v_t^*=\frac{a^2}{r}\left(\frac{\partial v^*}{\partial r}+r\frac{\partial^2v^*}{\partial r^2}\right)+\frac{Q}{c\rho}\tag{71}$$

с граничным условием

$$v^*(R,t)=0$$

и начальным условием

$$v^*(r,0)=0.\tag{72}$$

Решение будем искать в виде $v^*(r,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}V_n(t)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)$. Тогда граничное условие имеет вид: $J_0(\mu_n)=0$, а начальное условие: $V_n(0)=0$.

Подставим его в уравнение (71) и получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}V_n'(t)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)=\frac{a^2}{r}\left(\sum_{n=0}^{\infty}V_n(t)J_0'\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)+r\sum_{n=0}^{\infty}V_n(t)J_0''\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)\right)+\frac{Q}{c\rho}.\tag{73}$$

Согласно (15) и (16) знаем, что $J_0^{'}(x) = -J_1(x)$ и $J_0^{''}(x) = \frac{1}{2}[J_2(x) - J_0(x)]$, на основании этого преобразуем правую часть равенства (73):

$$a^2 \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) \left(\frac{-J_1\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{r} \cdot \frac{\mu_n}{R} + \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 \cdot \frac{J_2\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) - J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{2} \right) =$$

=/ в формуле (12) $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}$, выразим отсюда $J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)$ и применим это для нашего преобразования /=

$$a^2 \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) \left(\frac{-J_1\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{r} \cdot \frac{\mu_n}{R} + \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 \cdot \frac{R \cdot J_1\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\mu_n} - \frac{1}{2} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \cdot \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \cdot \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 \right) = -\frac{a^2}{R^2} \sum_{n=o}^{\infty} V_n(t) \mu_n^2 J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right).$$

Таким образом, после преобразований уравнение (73) примет вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n'(t) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) = -\frac{a^2}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) \mu_n^2 J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) + \frac{Q}{c\rho}.$$

Теперь разложим $\frac{Q}{c\rho}$ в ряд по функциям Бесселя согласно разложению Фурье-Бесселя, где коэффициенты разложения находятся по формуле (40), что мы и применим для $\frac{Q}{c\rho}$:

$$\frac{Q}{c\rho} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где

$$a_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R r \frac{Q}{c\rho} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr = \frac{2Q}{c\rho R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr =$$

$$= \left| \frac{\mu_n r}{R} = t, \quad r = \frac{R}{\mu_n} t, \quad dr = \frac{R}{\mu_n} dt \right| = \frac{2Q}{c\rho R^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot \frac{R^2}{\mu_n^2} \cdot \int_0^{\mu_n} t \cdot J_0(t) dt =$$

=/ воспользуемся формулой (33)/= $\dfrac{2Q}{c\rho\mu_n J_1^2(\mu_n)R}\cdot R\cdot J_1(\mu_n)=\dfrac{2Q}{c\rho\mu_n J_1(\mu_n)}$.

Итак, получили, что $\dfrac{Q}{c\rho}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2Q}{c\rho\mu_n J_1(\mu_n)}\cdot J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{R}\right)$.

Теперь уравнение (73) примет следующий вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty}V_n'(t)\,J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)=-\frac{a^2}{R}\sum_{n=0}^{\infty}V_n(t)\mu_n^2\,J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Q}{c\rho\mu_n J_1(\mu_n)}\cdot J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right). \qquad (74)$$

Отсюда можно записать обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение, решив которое мы сможем получить уже почти окончательный ответ.

$$V_n'(t)=-\frac{a^2\mu_n^2}{R^2}V_n(t)+\frac{2Q}{c\rho\mu_n J_1(\mu_n)}. \qquad (75)$$

Решим сначала однородное уравнение:

$$V_n'(t)=-\frac{a^2\mu_n^2}{R^2}V_n(t)\ \Rightarrow V_n(t)=e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t}.$$

Решение же неоднородного ищем в виде $\tilde{V}_n(t)=A$. Подставим это в (75) и оттуда найдем A:

$$0=-\frac{a^2\mu_n^2}{R^2}A+\frac{2Q}{c\rho\mu_n J_1(\mu_n)}\qquad\Rightarrow A=\frac{2QR^2}{c\rho\, a^2\mu_n^3 J_1(\mu_n)}.$$

Значит $\tilde{V}_n(t)=\dfrac{2QR^2}{c\rho\, a^2\mu_n^3 J_1(\mu_n)}$. Тогда решение всего неоднородного дифференциального уравнения (75) имеет вид:

$$V_n(t)=e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t}+\frac{2QR^2}{c\rho\, a^2\mu_n^3 J_1(\mu_n)},$$

а решение уравнения (74) представляет собой следующее выражение:

$$V_n(t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t}+\frac{2QR^2}{c\rho\, a^2\mu_n^3 J_1(\mu_n)}. \qquad (76)$$

Теперь полученное выражение (76) подставим в предполагаемое решение $v^*(r,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}V_n(t)J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{R}\right)$. Получим

$$v^*(r,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t}+\frac{2QR^2}{c\rho a^2\mu_n^3 J_1(\mu_n)}\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right).$$

Для нахождения A_n воспользуемся начальным условием (72):

$$v^*(r,0)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 0}+\frac{2QR^2}{c\rho a^2\mu_n^3 J_1(\mu_n)}\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n+\frac{2QR}{c\rho a^2\mu_n^3 J_1(\mu_n)}\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)=0$$

$$\Rightarrow A_n=-\frac{2QR^2}{c\rho a^2\mu_n^3 J_1(\mu_n)}.$$

Таким образом, решение уравнения (71) принимает вид:

$$v^*(r,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2QR^2}{c\rho a^2\mu_n^3 J_1(\mu_n)}e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t}+\frac{2QR^2}{c\rho a^2\mu_n^3 J_1(\mu_n)}\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{2QR^2}{c\rho a^2\mu_n^3 J_1(\mu_n)}e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t}J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right).$$

То есть $v^*(r,t)=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{2QR^2}{c\rho a^2\mu_n^3 J_1(\mu_n)}e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t}J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)$, где μ_n – положительные корни уравнения Бесселя $J_0(\mu_n)=0$.

Так как решение $v(r,t)$ мы искали в виде суммы двух решений, то оно будет выглядеть следующим образом:

$$v(r,t)=v^*(r,t)+\bar{v}(r,t)=-\frac{2QR^2}{c\rho a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t}J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)-$$
$$--2T\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_n J_1(\mu_n)}e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t}J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right). \tag{76}$$

Известно, что коэффициент теплопроводности $k=a^2c\rho$, тогда после некоторых преобразований (а именно, внесения обоих слагаемых под общий знак суммы), выражение (76) примет вид:

$$v(r,t)=-\frac{2QR^2}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t}J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)--2T\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_n J_1(\mu_n)}e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t}J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)=$$

$$=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(k\mu_n^2 T+QR^2\right)}{k\mu_n^3 J_1(\mu_n)}e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t}J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right).$$

Теперь запишем решение исходного уравнения (62):

$$u(r,t)=T--2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(k\mu_n^2T+QR^2\right)}{k\mu_n^3J_1(\mu_n)}e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2t}J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$ где μ_n - положительные корни уравнения Бесселя $J_0(\mu_n)=0$.

5) Рассмотрим теперь более общий случай, когда начальная температура является функцией всех трех координат r,θ и z.

Если рассмотреть случай, когда температура на боковой поверхности цилиндра поддерживается равной нулю, то задача сводится к решению уравнения:

$$u_t=a^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right) \quad (77)$$

при граничном условии

$$u(R,t)=0 \quad (78)$$

и при начальном условии

$$u(r,0)=\varphi(r,\theta,z). \quad (79)$$

Будем искать частные решения уравнения (77) в виде произведения

$$u(r,\theta,z,t)=T(t)W(r)\Phi(\theta)Z(z). \quad (80)$$

Подставляя (80) в уравнение (77), получим

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{W''(r)+\frac{1}{r}W'(r)}{W(r)}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}+\frac{Z''(z)}{Z(z)},$$ откуда

$$Z''(z)+\lambda^2Z(z)=0,$$

$$\Phi''(\theta)+\lambda^2\Phi(\theta)=0,$$

$$W''(r)+\frac{1}{r}W'(r)+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)W(r)=0,$$

$$T'(t)+a^2\left(k^2+\lambda^2\right)T(t)=0,$$

где λ, m и k – произвольные постоянные.

Общие решения этих уравнений имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&Z(z)=C_1\cos\lambda z+C_2\sin\lambda z,\\
&\Phi(\theta)=C_3\cos m\theta+C_4\sin m\theta,\\
&W(r)=C_5\,J_m(kr)+C_6\,J_m(kr),\\
&T(t)=C_7\,e^{-a^2\left(k^2+\lambda^2\right)t}.
\end{aligned}
\tag{81}
$$

Так как температура внутри цилиндра есть, очевидно, периодическая функция от угла θ с периодом 2π, то постоянная m должна быть целым числом. Далее, постоянная C_6 должна равняться нулю, так как в противном случае температура будет обращаться в бесконечность на оси цилиндра, что, конечно, невозможно. Что касается постоянной k, то она определяется из граничного условия (78), которое приводит к уравнению $J_m(kR)=0$.

Отсюда следует, что постоянная k имеет бесконечное множество значений, определяемых формулой:

$$
k_{mi}=\frac{\mu_{mi}}{R},\quad (i=1,2,3,\ldots),
\tag{82}
$$

где $\mu_{m1},\mu_{m2},\mu_{m3},\ldots$ – положительные корни уравнения

$$
J_m(\mu)=0.
\tag{83}
$$

Так как на параметр λ никаких ограничений нет, то его можно считать совершенно произвольным, изменяющимся непрерывно в интервале от $-\infty$ до $+\infty$.

Возьмем сумму всех частных решений вида (80), то есть сумму вида

$$
\begin{aligned}
u=&\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\left(\lambda^2+k_{mi}^2\right)t}\{[A_{mi}(\lambda)\cos\lambda z+B_{mi}(\lambda)\sin\lambda z]\cos m\theta+\\
&+[C_{mi}(\lambda)\cos\lambda z+D_{mi}(\lambda)\sin\lambda z]\sin m\theta\}J_m(k_m r)\,d\lambda.
\end{aligned}
\tag{84}
$$

Для определения функций $A_{mi}(\lambda)$, $B_{mi}(\lambda)$, $C_{mi}(\lambda)$ и $D_{mi}(\lambda)$ положим $t=0$, тогда, в силу начального условия (79), будем иметь

$$
\begin{aligned}
\varphi(r,\theta,z)=&\sum_{i=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[A_{0i}(\lambda)\cos\lambda z+B_{0i}(\lambda)\sin\lambda z]J_0(k_{0i})\,d\lambda+\\
&+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}J_m(k_{mi}r)\int_{-\infty}^{\infty}[A_{mi}(\lambda)\cos\lambda z+B_{mi}(\lambda)\sin\lambda z]\,d\lambda\right\}\cos m\theta+\\
&+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}J_m(k_{mi}r)\int_{-\infty}^{\infty}[C_{mi}(\lambda)\cos\lambda z+D_{mi}(\lambda)\sin\lambda z]\,d\lambda\right\}\sin m\theta.
\end{aligned}
$$

Сравнивая последнее равенство с разложением $\varphi(r,\theta,z)$, рассматривая ее как функцию от θ, в ряд по синусам и косинусам в промежутке $(0,2\pi)$, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(r,\theta,z)d\theta = \sum_{i=1}^{\infty} J_0(k_{0i}r)\int_{-\infty}^{\infty}[A_{0i}(\lambda)\cos\lambda z + B_{0i}(\lambda)\sin\lambda z]d\lambda,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(r,\theta,z)\cos m\theta\, d\theta = \sum_{i=1}^{\infty} J_m(k_{mi}r)\int_{-\infty}^{\infty}[A_{mi}(\lambda)\cos\lambda z + B_{mi}(\lambda)\sin\lambda z]d\lambda,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(r,\theta,z)\sin m\theta\, d\theta = \sum_{i=1}^{\infty} J_m(k_{mi}r)\int_{-\infty}^{\infty}[C_{mi}(\lambda)\cos\lambda z + D_{mi}(\lambda)\sin\lambda z]d\lambda.$$

Каждое из этих равенств представляет собой разложение произвольной функции $\phi(r)$ в ряд вида

$$\phi(r) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_m\left(\frac{\mu_{mi} r}{R}\right),$$

где m – целое положительное число или нуль. Коэффициенты a_i определяются по формуле:

$$a_i = \frac{2}{R^2 J_{m+1}^2(\mu_{mi})}\int_0^{2\pi} r\phi(r) J_m\left(\frac{\mu_{mi} r}{R}\right)dr, \tag{85}$$

где μ_{mi} – положительные корни уравнения (83).

Из формулы (85) вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}[A_{0i}(\lambda)\cos\lambda z + B_{0i}(\lambda)\sin\lambda z]d\lambda = \frac{1}{\pi R^2 J_1^2(\mu_{0i})}\int_0^R\int_0^{2\pi} r\phi(r,\theta,z) J_0\left(\frac{\mu_{0i} r}{R}\right)dr\, d\theta,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}[A_{mi}(\lambda)\cos\lambda z + B_{mi}(\lambda)\sin\lambda z]d\lambda = \frac{1}{\pi R^2 J_{m+1}^2(\mu_{mi})}\int_0^R\int_0^{2\pi} r\phi(r,\theta,z) J_m\left(\frac{\mu_{mi} r}{R}\right)\cos m\theta\, dr\, d\theta,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}[A_{mi}(\lambda)\cos\lambda z + B_{mi}(\lambda)\sin\lambda z]d\lambda = \frac{1}{\pi R^2 J_{m+1}^2(\mu_{mi})}\int_0^R\int_0^{2\pi} r\phi(r,\theta,z) J_m\left(\frac{\mu_{mi} r}{R}\right)\sin m\theta\, dr\, d\theta.$$

Таким образом, мы пришли к выражениям, которые имеют следующий вид: $\int_{-\infty}^{\infty}[a(\lambda)\cos\lambda z + b\sin\lambda z]d\lambda = \omega(z)$, где $\omega(z)$ – заданная функция.

Функции $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ имеют следующий вид:

$$a(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega(z)\cos\lambda\xi\,d\xi,$$

$$b(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega(z)\sin\lambda\xi\,d\xi.$$

Из этих формул вытекают выражения искомых функций $A_{oi}(\lambda)$, $B_{0i}(\lambda)$, $A_{mi}(\lambda)$, $B_{mi}(\lambda)$, $C_{mi}(\lambda)$ и $D_{mi}(\lambda)$, а именно

$$A_{mi}(\lambda)=\frac{1}{\delta_m\pi^2R^2J_{m+1}^2(\mu_{mi})}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r\varphi(r,\theta_1,\xi)J_m\left(\frac{\mu_{mi}r}{R}\right)\cos m\theta_1\cos\lambda\xi dr d\theta_1 d\xi,$$

$$B_{mi}(\lambda)=\frac{1}{\delta_m\pi^2R^2J_{m+1}^2(\mu_{mi})}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r\varphi(r,\theta_1,\xi)J_m\left(\frac{\mu_{mi}r}{R}\right)\cos m\theta_1\sin\lambda\xi dr d\theta_1 d\xi,$$

$$C_{mi}(\lambda)=\frac{1}{\delta_m\pi^2R^2J_{m+1}^2(\mu_{mi})}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r\varphi(r,\theta_1,\xi)J_m\left(\frac{\mu_{mi}r}{R}\right)\sin m\theta_1\cos\lambda\xi dr d\theta_1 d\xi,$$

$$D_{mi}(\lambda)=\frac{1}{\delta_m\pi^2R^2J_{m+1}^2(\mu_{mi})}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r\varphi(r,\theta_1,\xi)J_m\left(\frac{\mu_{mi}r}{R}\right)\sin sm\theta_1\sin\lambda\xi dr d\theta_1 d\xi,$$

где $\delta_0=2$ и $\delta_m=1$ при $m>0$.

Если внести эти выражения в ряд (84) и выполнить интегрирование по λ, используя интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\lambda^2}\cos\beta\lambda\,d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}$, то получим решение задачи (77) – (79) в виде

$$u=\frac{1}{a\pi R^2\sqrt{\pi t}}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{a\mu_{mi}}{R}\right)^2 t}\frac{J_m\left(\frac{\mu_{mi}r}{R}\right)}{\delta_m J_{m+1}^2(\mu_{mi})}\times$$

$$\times\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r\varphi(r,\theta_1,\xi)e^{-\frac{(z-\xi)^2}{4a^2t}}J_m\left(\frac{\mu_{mi}r}{R}\right)\cos m(\theta-\theta_1)dr d\theta_1 d\xi,$$

где μ_{mi} – положительные корни уравнения $J_m(\mu)=0$.

6 ФОНД КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ЗНАНИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

6.1 Задания для самостоятельной работы

1) Найти потенциал простого слоя, распределенного с постоянной плотностью $\rho = \rho_0$ на сфере.

2) Вычислить потенциал простого слоя масс, распределенных по сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ с плотностью $\rho = 1$.

3) Потенциал объемных масс, распределенных по области D, определен функцией $V(x, y) = x^2 y^2$. Найти массу M, заполняющую квадрат $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$.

4) Показать, что потенциал $V(x, y, z)$ по сфере $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ с плотностью $\mu = 1$, задается формулой $V(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3r}, & r \ge 1 \\ 2\pi\left(1 - \dfrac{r^2}{3}\right), & r \le 1. \end{cases}$

5) Потенциал масс, распределенных по кругу $r^2 = x^2 + y^2 < 1$, внутри круга задается формулой $V(x, y) = \dfrac{\pi x}{4}(2 - r^2)$. Найти плотность масс μ потенциала $V(x, y)$.

6) Вычислить потенциал двойного слоя масс, распределенных по кругу $x^2 + y^2 = 1$ с плотностью $\mu = x$.

7) Функция $V(x, y) = -\dfrac{y}{2r^2}$, $r^2 = x^2 + y^2$ является внешним потенциалом простого слоя масс, распределенных по окружности $r^2 = 1$. Найти значение этого потенциала в круге $r^2 < 1$.

8) Потенциал $V(x,y)$ масс, распределенных по кругу $r^2 = x^2 + y^2 < 1$, внутри круга задается формулой $V(x,y) = \frac{\pi x}{4}(2 - r^2)$. Найти значение потенциала $V(x,y)$ вне замкнутого круга $r^2 \le 1$.

9) Вычислить интеграл $I = \int\limits_{x^2+y^2=1} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x} ds_x$, где $u(x)$ – потенциал масс, распределенных по квадрату $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$, с плотностью $\mu = xy$.

10) Найти объемный потенциал масс, распределенных внутри сферы радиуса $r = a$ с переменной плотностью $\rho = \rho(r)$.

11) Найти логарифмический потенциал простого слоя отрезка с постоянной плотностью заряда.

12) Найти объемный потенциал масс, распределенных с постоянной плотностью в сферическом слое $a \le r \le b$.

6.2 Задачи для самостоятельного решения

Пользуясь интегральными преобразованиями Фурье, решить следующие задачи:

1) $u_t = a^2 u_{xx}$, $u(x,0) = f(x)$, $u_x(0,t) = u_x(b,t) = 0$, $D = \{(x,t): 0 \le x \le b, t > 0\}$.

2) $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u(x,0) = 0$, $u(x,a) = u_0$, $u(0,y) = 0$, $u(a,y) = 0$,
$D = \{(x,y): 0 \le x \le a, 0 \le y \le a\}$.

3) $u_t = a^2 u_{xx}$, $u(x,0) = 0$, $u_x(0,t) = \nu(t)$, $D = \{(x,t): 0 < x < \infty, t > 0\}$.

4) $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$, $u(x,0) = u(0,t) = 0$, $D = \{(x,t): 0 < x < \infty, t > 0\}$.

5) $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t)$, $u(x,y,0) = 0$, $D = \{(x,y,t): -\infty < x, y < \infty, t > 0\}$.

6) $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy})$, $u(x,y,0) = f(x,y)$, $u(x,0,t) = 0$,
$D = \{(x,y,t): -\infty < x < \infty, 0 < y < \infty, t > 0\}$.

7) $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy})$, $u(x,y,0) = f(x,y)$, $u_y(x,0,t) = 0$,
$D = \{(x,y,t): -\infty < x < \infty, 0 < y < \infty, t > 0\}$.

8) $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy})$, $u_y(x,0,t) = f(x,y)$, $u(x,y,0) = 0$,
$D = \{(x,y,t): -\infty < x < \infty, 0 < y < \infty, t > 0\}$.

9) $u_{tt}=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)$, $u(x,y,0)=f(x,y)$, $u_t(x,y,0)=\varphi(x,y)$,

$D=\{(x,y,t):-\infty<x,y<\infty,t>0\}$.

10) $u_{tt}=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)$, $u(x,y,0)=0$, $u_t(x,y,0)=0$,

$D=\{(x,y,t):-\infty<x,y<\infty,t>0\}$.

11) $u_{tt}=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right)$, $u(x,y,z,0)=f(x,y,z)$, $u_t(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z)$,

$D=\{(x,y,z,t):-\infty<x,y,z<\infty,t>0\}$.

Пользуясь интегральными преобразованиями Лапласа, решить следующие задачи:

1) $u_{xx}+u_{xt}=0$, $u(x,0)=\varphi(x)$, $u(0,t)=\psi(t)$, $u_x(0,t)=0$, $\varphi(0)=\psi(0)=0$,

$D=\{(x,t):0\le x,t\le\infty\}$.

2) $9u_{xx}+4u_{tt}=36e^{2x}\sin 3t$, $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=3xe^{2x}$, $u(0,t)=0$, $u_x(0,t)=\sin 3t$,

$D=\{(x,t):0\le x,t\le\infty\}$.

3) $2u_{xx}+5u_{xt}+3u_{tt}=0$, $u(x,0)=g(x)$, $u_t(x,0)=0$, $u(0,t)=0$, $u_x(0,t)=f(t)$,

$D=\{(x,t):0\le x,t\le\infty\}$.

4) $u_{tt}=a^2u_{xx}$, $u(x,0)=A\sin\dfrac{\pi nx}{l}$, $u_t(x,0)=0$, $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$,

$D=\{(x,t):0\le x\le l,t>0\}$.

5) $u_{tt}=a^2u_{xx}$, $u(x,0)=Ax(l-x)$, $u_t(x,0)=0$, $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$,

$D=\{(x,t):0\le x\le l,t>0\}$.

6) $u_{tt}=a^2u_{xx}$, $u(x,0)=A\cos\dfrac{\pi nx}{l}$, $u_t(x,0)=0$, $u_x(0,t)=0$, $u_x(l,t)=0$,

$D=\{(x,t):0\le x\le l,t>0\}$.

7) $u_{tt}=a^2u_{xx}-g$, $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=0$, $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$,

$D=\{(x,t):0\le x\le l,t>0\}$.

8) $u_t=a^2u_{xx}$, $u(x,0)=A\sin\dfrac{\pi nx}{l}$, $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$, $D=\{(x,t):0\le x\le l,t>0\}$.

9) $u_t=a^2u_{xx}$, $u(x,0)=\dfrac{A}{l}(l-x)$, $u(0,t)=A$, $u(l,t)=0$, $D=\{(x,t):0\le x\le l,t>0\}$.

10) $u_t = a^2 u_{xx}$, $u(x,0)=0$, $u_x(0,t)=0$, $u(l,t)=A$, $D=\{(x,t): 0\le x\le l, t>0\}$.

6.3 Задачи для самостоятельной работы

Решить задачу Пуассона в шаровом слое:

1) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\quad 1\le r\le 2,\quad u|_{r=1}=0,\quad u|_{r=2}=1.$

2) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\quad 1\le r\le 2,\quad u|_{r=1}=0,\quad u|_{r=2}=0.$

3) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\quad 1<r<2,\quad u|_{r=1}=1,\quad u|_{r=2}=2.$

4) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\quad 1<r<2,\quad u|_{r=1}=1,\quad u|_{r=2}=0.$

5) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\quad 1<r<2,\quad u|_{r=1}=2,\quad u|_{r=2}=2.$

6) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\quad 1<r<2,\quad u|_{r=1}=3,\quad u|_{r=2}=1.$

7) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\quad 1<r<2,\quad u|_{r=1}=21,\quad u|_{r=2}=1.$

8) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\quad \frac{1}{2}<r<1,\quad u|_{r=\frac{1}{2}}=0,\quad u|_{r=1}=-1.$

9) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\quad \frac{1}{2}<r<1,\quad u|_{r=\frac{1}{2}}=1,\quad u|_{r=2}=0.$

10) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\quad \frac{1}{2}\le r<1,\quad u|_{r=\frac{1}{2}}=1,\quad u|_{r=2}=1.$

11) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\quad \frac{1}{2}<r<1,\quad u|_{r=\frac{1}{2}}=0,\quad u|_{r=1}=0.$

12) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\quad \frac{1}{2}<r<1,\quad u|_{r=\frac{1}{2}}=-1,\quad u|_{r=1}=0.$

13) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\quad \frac{1}{2}<r<1,\quad u|_{r=\frac{1}{2}}=-1,\quad u|_{r=1}=-1.$

14) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\quad 2<r<3,\quad u|_{r=2}=1,\quad u|_{r=3}=-3.$

15) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\quad 2<r<3,\quad u|_{r=2}=0,\quad u|_{r=3}=0.$

16) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\quad 2<r<3,\quad u|_{r=2}=-1,\quad u|_{r=3}=0.$

17) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\quad 2<r<3,\quad u|_{r=2}=2,\quad u|_{r=3}=0.$

18) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz,\quad 2<r<3,\quad u|_{r=2}=1,\quad u|_{r=3}=-2.$

19) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz, \quad 2<r<3, \quad u\big|_{r=2}=0, \quad u\big|_{r=3}=4.$

20) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz, \quad 2<r<3, \quad u\big|_{r=2}=1, \quad u\big|_{r=3}=3.$

21) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz, \quad 1<r<3, \quad u\big|_{r=1}=1, \quad u\big|_{r=3}=1.$

22) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz, \quad 1<r<3, \quad u\big|_{r=1}=1, \quad u\big|_{r=3}=0.$

23) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz, \quad 1<r<3, \quad u\big|_{r=1}=1, \quad u\big|_{r=3}=-1.$

24) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz, \quad 1<r<3, \quad u\big|_{r=1}=2, \quad u\big|_{r=3}=-1.$

25) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xz, \quad 1<r<3, \quad u\big|_{r=1}=-1, \quad u\big|_{r=3}=1.$

7 НЕОБХОДИМОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Лекционные занятия проводятся в стандартной аудитории, оснащенной в соответствии с требованиями преподавания теоретических дисциплин.

8 КАРТА КАДРОВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ

Лектор – старший преподаватель кафедры математического анализа и моделирования, к.ф.-м.н. Е.М. Веселова