

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

**АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
*Серия «Учебно-методический комплекс дисциплины»*

Т.А. Луганцева, Т.В. Труфанова

# **ДИНАМИКА**

*Учебное пособие*

Благовещенск 2011 г.

ББК 22.21

Л73

*Рекомендовано*

*учебно-методическим советом энергетического факультета*

*Рекомендовано*

*учебно-методическим советом факультета математики и информатики*

*Рецензент:*

*Ларченко Н.М., доцент кафедры общетехнических дисциплин Амурского филиала Морского государственного университета им. Г.И.Невельского, канд. техн. наук*

Луганцева, Т.А., Труфанова Т.В.

Л72 Динамика: учебное пособие / Т.А. Луганцева, Т.В.Труфанова. – Благовещенск : Изд-во АмГУ, 2011. – 144 с.

Учебно-методическое пособие подготовлено для самостоятельной работы студентов, в соответствии с ФГОС дисциплины «Теоретическая механика» (раздел «Динамика»). Пособие включает в себя краткое теоретическое изложение лекционного курса и практических занятий. Практические занятия снабжены методическими материалами и рекомендациями, обеспечивающими самостоятельное изучение дисциплины, приведены контрольные вопросы и номера задач для самостоятельной работы.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей и форм обучения университета, изучающих курс теоретической механики.

© Луганцева Т.А., Труфанова Т.В., 2011

© Амурский государственный университет, 2011

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1. Динамика материальной точки	7
1.1. Законы Галилео-Ньютона. Инерциальная и неинерциальная система от счета	7
1.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки	10
1.3. Дифференциальные уравнения движения несвободной материальной точки	12
1.4. Задачи динамики	13
1.5. Основные виды прямолинейного движения материальной точки	15
1.6. Криволинейное движение материальной точки	16
1.7. Относительное движение материальной точки	16
2. Введение в динамику механической системы	18
2.1. Механическая система	18
2.2. Центр масс механической системы	18
2.3. Понятие момента инерции	20
3. Общие теоремы динамики.	36
3.1. Силы внешние и внутренние	36
3.2. Теорема о движении центра масс	37
3.3. Теорема об изменении количества движения механической системы	40
4. Теорема об изменении кинетического момента	44
5. Теорема об изменении кинетической энергии	52
5.1. Кинетическая энергия	52
5.2. Работа силы	56
5.3. Вывод теореме об изменении кинетической энергии	60
5.4. Потенциальное силовое поле	63
5.5. Потенциальная энергия	65
6. Динамика движения твердого тела	67
7. Основы аналитической механики.	70
7.1. Аналитические связи	70

7.2. Классификация связей	70
7.3. Вариация и дифференциал	74
7.4. Перемещения возможные и действительные	75
7.5. Виртуальная работа силы	76
7.6. Принцип Лагранжа	77
8. Принцип Даламбера	79
8.1. Принцип Даламбера для материальной точки	80
8.2. Принцип Даламбера для механической системы	81
8.3. Главный вектор сил инерции	82
8.4. Главный момент сил инерции	83
8.5. Различные случаи приведения сил инерции и моментов сил инерции	85
8.6. Принцип Даламбера – Лагранжа. Общее уравнение динамики	85
9. Уравнения Лагранжа II рода	87
10. Практические занятия	97
10.1. Первая и вторая задачи динамики. Дифференциальные уравнения движения материальной точки	97
10.2. Применение теоремы о движении центра масс к исследованию движения механической системы	104
10.3. Применение теоремы об изменении количества движения и теоремы об изменении кинетического момента к исследованию движения механической системы	109
10.4. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения механической системы	116
10.5. Принцип возможных перемещений	123
10.6. Принцип Даламбера	126
10.7. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы	130
10.8. Применение уравнений Лагранжа второго рода к исследованию движения механической системы	134

## ВВЕДЕНИЕ

**Динамика** – раздел теоретической механики, в котором изучается движение твердых тел под действием сил, вызывающих это движение.

Следовательно, динамика представляет собой синтез двух предыдущих разделов механики – статики и кинематики. Если в статике действовали силы, но не было движения, в кинематике рассматривалось движение, но без учета причин, определяющих характер движения, т.е. действующих сил, то в динамике имеются и движение и силы, и устанавливаются связи между их характеристиками.

**Сила** считается в механике основным понятием. Силы не являются в механике какими-либо самостоятельными сущностями, независимыми от материальных тел, они создаются материальными телами и полями. Посредством сил материальные тела взаимодействуют друг с другом. Сила при этом выступает как векторная количественная мера интенсивности взаимодействия. Силы не только изменяют скорость движения материальных тел, но и вызывают их деформации.

При этом в динамике (в отличие от кинематики) существенным являются массы материальных точек и при описании движения кроме кинематических характеристик, вводятся также динамические характеристики (или меры) движения: количество движения, кинетический момент и кинетическая энергия. В динамике при изучении движения тел, учитываются как действующие силы, так и инертность самих материальных тел. Инертность представляет собой свойство материальных тел быстрее или медленнее изменять скорость своего движения под действием приложенных сил. Количественной мерой инертности тела является его масса.

Научные основы динамики как науки заложены в XVII веке в трудах Галилео Галилея (1564 - 1642), Рене Декарта (1596 - 1656), Христиана Гюйгенса (1629 - 1695) и другими учеными. Так Г.Галилей более 350 лет тому назад сформулировал принцип инертности. Первой теорией о движении тела под

действием силы были тезисы Аристотеля, господствовавшие в науке свыше тысячи лет. Он считал, что если тело движется, то к нему обязательно должна быть приложена сила извне. Без такого приложения сил движение тела невозможно. Закон инерции Г.Галилея полностью опровергает тезисы Аристотеля. Окончательные законы классической механики были сформулированы Исааком Ньютоном (1642-1727) в трактате «Математические начала натуральной философии» в 1687 году.

В 1687 г. была опубликована работа Ньютона «Математические начала натуральной философии», в которой были сформулированы три основных закона классической механики: закон инерции (этот закон был известен еще Галилею), закон пропорциональности приложенной к телу силы и вызванного действием силы ускорения и закон равенства действия и противодействия.

В этой работе был высказан ньютонов закон всемирного тяготения, и было доказано, что из этого закона вытекают законы Кеплера о движении планет. Здесь же Ньютон разработал динамику солнечной системы, чем заложил основы небесной механики.

Как и все научные работы того времени, работа Ньютона была написана и опубликована на латыни. На русский язык работу Ньютона перевел известный механик и математик академик А.Н. Крылов. При переводе он снабдил работу Ньютона обширными примечаниями, которые оказались вполне весомым вкладом в дело развития механики. На русском языке эта интересная и важная работа Ньютона так и издана с примечаниями академика Крылова.

С этой работы Ньютона и начинается буквально триумфальное шествие и бурное развитие механики как науки. Вся динамика по существу является математическим развитием законов Ньютона.

В течение 200 лет, после Ньютона, люди не знали пределов применимости законов механики. Законами механики пытались объяснить все явления природы. Возникла даже целая система философских взглядов на мир – механицизм, который пытался объяснить строение мира только на основе законов механики.

Влияние механицизма, как философской системы было настолько сильным, что его крушение привело к «кризису» в физике.

Только в XX веке с созданием теории относительности и квантовой механики, были четко определены границы применимости законов механики. Было установлено, что законы теоретической механики с достаточной точностью описывают лишь движения макротел или макрочастиц, происходящих со скоростями малыми по сравнению со скоростью света. Для описания движений макрочастиц, происходящих со скоростями близкими к скорости света, законы классической (или теоретической) механики не применимы. Там действуют законы теории относительности и квантовой механики.

Но и после создания теории относительности и квантовой механики теоретическая механика осталась, как и раньше основной научной базой всей современной техники.

## **1. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ**

Рассматриваемые вопросы:

*Законы Галилея - Ньютона. Инерциальная и неинерциальная системы отсчета. Дифференциальные уравнения движения свободной и несвободной материальной точки: в векторном виде, в проекциях на оси декартовой и естественной систем координат. Первая и вторая задачи динамики точки, методы их решения. Основные виды прямолинейного движения точки. Криволинейное движение материальной точки: движение материальной точки в пустоте; парабола безопасности; движение снаряда в сопротивляющейся среде.*

**1.1 Законы Галилея-Ньютона. Инерциальная и неинерциальная система отсчета.**

**Первый закон Ньютона:**

**Существуют такие системы отчета, относительно которых изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет своё механическое состояние (т.е. свою скорость) неизменным по величине и направлению до тех пор, пока на материальную точку не подействует какая-**

либо сила и не выведет её из этого состояния. Такие системы отсчета называются инерциальными (ИСО).

Сила здесь определяется как причина, изменяющая равномерное и прямолинейное движение материальной точки. За меру силы Ньютон принял то ускорение, которое эта сила вызывает. Первый закон Ньютона еще называется законом инерции. Под инерцией понимают способность тела сохранять свое движение или состояние покоя при отсутствии сил или изменять это состояние под действием силы.

**Второй закон Ньютона:**

В форме Ньютона:

**Изменение количества движения пропорционально приложенной силе, направление вектора изменения количества движения совпадает с линией действия этой силы.**

Количеством движения материальной точки называется векторная величина  $\vec{q}$ , равная произведению массы точки на вектор ее скорости:

$$\vec{q} = m \cdot \vec{v} \quad (1)$$

Математически этот закон записывается в виде уравнения:

$$\frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \vec{F} \quad (2)$$

где:  $m$  – масса движущейся точки;

$\vec{v}$  – вектор скорости движущейся точки;

$\vec{F}$  – сила.

Считая массу материальной точки величиной постоянной, второй закон Ньютона можно представить в форме Л.Эйлера:

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad (3)$$

**В инерциальных системах отсчета произведение массы материальной точки на её ускорение, полученное под действием приложенной силы равно этой силе по величине и направлению.**



Масса  $m$  (лат. *massa* – ком, глыба, кусок), одна из основных характеристик материала, входит в это уравнение как коэффициент пропорциональности между силой и ускорением. Масса является характеристикой инертного свойства материальной точки, т.е. способности ее под действием заданной силы получать определенное ускорение.

Второй закон Ньютона позволяет установить связь между **массой**  $m$  тела, находящегося вблизи земной поверхности, и его **весом**  $G=mg$ ,

где  $g$  – ускорение свободного падения.

### Третий закон Ньютона:

**В инерциальных системах отсчета силы взаимодействия между двумя материальными точками равны по модулю, направлены в противоположную сторону вдоль прямой, соединяющей эти точки и приложены к различным материальным точкам.**

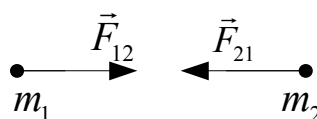


Рис. 1

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (4)$$

**Четвертый закон Ньютона** в настоящее время считают не законом, а аксиомой независимости действия сил.

**Действие силы на тело не зависит от того, находится тело в покое или в движении и не зависит от числа действующих сил.**

Другая формулировка:

**При одновременном действии на материальную точку нескольких сил ускорение точки, относительно инерциальной системы отсчета, от действия каждой отдельной силы, не зависит от наличия других приложенных к точке сил и равно векторной сумме ускорений от действия отдельных сил.**

**Инерциальными системами отсчета** называются такие системы отсчета, в которых выполняются законы Ньютона и все те системы отсчета, которые движутся равномерно, прямолинейно или находятся в покое относительно ка-

кой-либо системы отсчета. Инерциальных систем отсчета – бесчисленное множество, но если говорить точно, то ни одной нет, это просто теоретическая идеализация, т.к. не взаимодействующих тел в природе нет. Наилучшим приближением к инерциальным системам отсчета является гелиоцентрическая система координат.

**Неинерциальными системами отсчета** называются такие системы отсчета, в которых не выполняются законы Ньютона, это все те системы отсчета, которые движутся с ускорением или вращаются относительно какой-либо инерциальной системы отсчета.

### **Принцип относительности Галилея.**

Имеет несколько эквивалентных формулировок:

а) Все механические явления протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета при одинаковых начальных условиях.

б) Все инерциальные системы отсчета равноправны по отношению к механическим явлениям.

в) Никакими опытами внутри инерциальных систем отсчета нельзя определить находится эта система в покое или движется равномерно и прямолинейно.

### **1.2 Дифференциальные уравнения движения материальной точки.**

Дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, в которых неизвестная функция находится под знаком производной.

Дифференциальные уравнения точечной массы должны охватывать различные способы задания ее движения: векторный, координатный и естественный.

По второму закону Ньютона для материальной точки, на которую действуют одновременно несколько сил:

$$m\vec{a} = \sum_{\nu=1}^n \vec{F} \quad (5)$$

а) дифференциальное уравнение в векторном виде:

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum \vec{F} \quad (6)$$

б) в проекциях на оси декартовой системы координат получаем три скалярных дифференциальных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum F_{vx} \\ m\ddot{y} &= \sum F_{vy} \\ m\ddot{z} &= \sum F_{vz} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

в) в проекциях на оси координат естественного трехгранника касательную  $\vec{\tau}$ , нормаль  $\vec{n}$  и бинормаль  $\vec{b}$  получим три скалярных дифференциальных уравнения движения точки:

$$\left. \begin{aligned} ma_{\tau} &= \sum F_{\tau} \\ ma_n &= \sum F_n \\ ma_b &= \sum F_b \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Подставив значения ускорений:

$$\left. \begin{aligned} a_{\tau} &= \dot{v} = \ddot{s} \\ a_n &= \frac{v^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \\ a_b &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Получим:

$$\left. \begin{aligned} m\dot{v} &= \sum F_{\tau} \\ m \frac{v^2}{\rho} &= \sum F_n \\ 0 &= \sum F_b \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Таким образом, дифференциальные уравнения в естественной системе координат (для свободной материальной точки) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{s} &= \sum F_{\tau} \\ m \frac{\dot{s}^2}{\rho} &= \sum F_n \\ 0 &= \sum F_b \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Последнее уравнение никак не связано с движением точечной массы и по существу носит статический характер, оно чаще всего служит для определения реакции связей.

### 1.3 Дифференциальные уравнения несвободной материальной точки при движении по гладкой кривой или поверхности.

Наряду с механическими взаимодействиями между точкой и окружающими ее телами могут существовать и такие, которые на интервале времени  $(t_1, t_2)$  ограничивают ее положения и скорости. Эти взаимодействия называются наложением связей или действием связей. Материальные объекты называются **связями**. Мера таких взаимодействий также выражается с помощью сил, их направление и величина не могут быть установлены заранее (без решения основных задач динамики движущейся точки). Следовательно, связи вынуждают материальную точку совершать движение по некоторой поверхности или кривой (не покидая их); возможно движение точки в ограниченной области трехмерного пространства.

**Материальная точка** называется **несвободной**, если вследствие наложенных на нее связей она под действием заданных сил (и начальных условий) совершает движение по заданным линиям поверхностям или находится все время в ограниченной области пространства. **Движение такой точки** называется **несвободным**.

Основной закон динамики точки справедлив и для случая, когда на движущуюся точку наложены связи.

Если движение точки происходит по гладкой кривой, то сил трения нет, т.е. нет реакций по линии движения, и значит, нет касательной составляющей реакции, но есть остальные составляющие.

$$\vec{N} = N_n \vec{n} + N_b \vec{b} = \vec{N}_n + \vec{N}_b \quad (12)$$

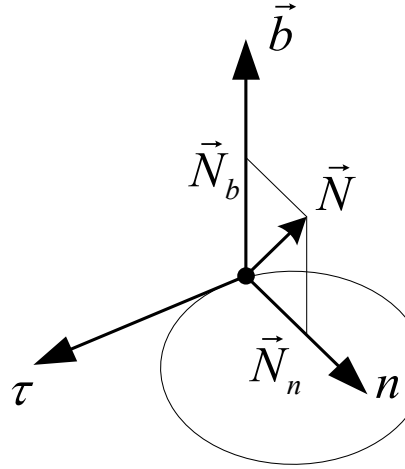


Рис. 2

Тогда проекции уравнения на оси естественного трехгранника будут:

$$\begin{cases} ma_\tau = \sum F_\tau^{акт} \\ ma_n = \sum F_n^{акт} + N_n \\ ma_b = \sum F_b^{акт} + N_b \end{cases} \quad (13)$$

Только когда будут записаны в явном виде проекции, тогда могут появиться знаки минус.

$$\left. \begin{aligned} m\dot{v} &= \sum F_\tau^{акт} \\ m \frac{v^2}{\rho} &= \sum F_n^{акт} + N_n \\ 0 &= \sum F_b^{акт} + N_b \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Таким образом, дифференциальные уравнения описывающие движение несвободной материальной точки по гладкой кривой имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{s} &= \sum F_\tau^{акт} \\ m \frac{\dot{s}^2}{\rho} &= \sum F_n^{акт} + N_n \\ 0 &= \sum F_b^{акт} + N_b \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

#### 1.4 Задачи динамики.

##### а) Первая задача динамики (прямая):

**Первая задача динамики заключается в определении сил по заданному закону движения.**

Если движение задано в виде уравнений движения в координатной форме:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

тогда можно найти равнодействующую силу, соответствующую этому закону движения по формуле:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \quad (17)$$

где:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= ma_x = m\ddot{x} \\ F_y &= ma_y = m\ddot{y} \\ F_z &= ma_z = m\ddot{z} \end{aligned} \right\} |F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (18)$$

Направление силы определяется направляющими косинусами:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\vec{F}, \wedge Ox) &= \frac{F_x}{|F|} \\ \cos(\vec{F}, \wedge Oy) &= \frac{F_y}{|F|} \\ \cos(\vec{F}, \wedge Oz) &= \frac{F_z}{|F|} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

**Вывод:** первая задача динамики решается путем двукратного дифференцирования уравнений движения по времени.

##### б) Вторая (основная) задача динамики:

**Вторая задача динамики заключается в определении закона движения по заданным силам и начальным условиям.**

**Определение:** начальными условиями называются значения координат и проекций скоростей в тот момент времени, который принимают за начало отсчета:

Начальные условия для материальной точки:

$$\begin{aligned}x|_{t=0} &= x_0; \quad y|_{t=0} = y_0; \quad z|_{t=0} = z_0; \\ \dot{x}|_{t=0} &= \dot{x}_0 = v_{ox}; \quad \dot{y}|_{t=0} = \dot{y}_0 = v_{oy}; \quad \dot{z}|_{t=0} = \dot{z}_0 = v_{oz};\end{aligned}$$

Вторая задача является обратной по отношению к первой задачи динамики, поэтому решается двукратным интегрированием дифференциальных уравнений движения. Сложность заключается в том, что не каждую задачу можно свести к квадратурам, не говоря уже о вычислении соответствующих интегралов. В этом случае часто прибегают к методу численного интегрирования с помощью ЭВМ.

При каждом интегрировании добавляются постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий, поэтому полученный закон движения выражается через начальные условия:

$$\left. \begin{aligned}x &= x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \\ y &= y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \\ z &= z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)\end{aligned} \right| \quad (20)$$

### 1.5 Основные виды прямолинейного движения точки

При прямолинейном движении скорость и ускорение точки все время направлены вдоль траектории точки. Вводим координатные оси. В динамике одну из осей координат направляют вдоль траектории движения точки, а вторую перпендикулярно движению, таким образом, чтобы поворот от одной оси к другой был виден против часовой стрелки. Дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки имеет вид:

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, v) \quad (21)$$

Начальные условия задачи задаются в виде:

При  $t = 0, x = x_0, v_x = v_0$ .

Наиболее простыми примерами прямолинейного движения материальной точки являются примеры, когда сила зависит от одного параметра, (например, постоянная сила; сила, зависящая от координаты (сила упругости); сила, зависящая от времени или скорости).

### 1.6 Криволинейное движение материальной точки

Одним из наиболее важных приложений законов движения свободной материальной точки является задача о движении точки под действием силы тяжести в плоскости с учетом и без учета сопротивления среды.

Примеры прямолинейного и криволинейного движения материальной точки (пункты 1.5 и 1.6) рассматриваются на практических занятиях.

### 1.7 Относительное движение материальной точки

Основное уравнение динамики справедливо только в инерциальной системе отсчета.

Рассмотрим движение точки массой  $m$  в двух системах отсчета: инерциальной  $O_1x_1y_1z_1$  и неинерциальной  $Oxyz$ , считая первую из них неподвижной, а вторую подвижной системой отсчета. Движение точки по отношению к инерциальной системе отсчета абсолютное, по отношению к неинерциальной системе отсчета относительное, а движение неинерциальной системы отсчета по отношению к инерциальной системе отсчета переносное. В соответствии с теоремой Кориолиса абсолютное ускорение складывается из векторной суммы относительного, переносного и кориолисова ускорений

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_{cor} . \quad (22)$$

Основное уравнение динамики  $m\vec{a} = \vec{F}$  будет справедливым, если под абсолютным ускорением  $\vec{a}$  в нем понимается ускорение по отношению к инерциальной системе отсчета. Подставив в основное уравнение динамики выражение для абсолютного ускорения, получим:

$$m\vec{a}_r + m\vec{a}_e + m\vec{a}_{cor} = \vec{F} , \quad (23)$$



Или

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_{cor}. \quad (24)$$

Стоящие в правой части два последних слагаемых называются силами инерции: переносная сила инерции

$$\vec{O}_e = -m\vec{a}_e \quad (25)$$

и кориолисова сила инерции

$$\vec{O}_{cor} = -m\vec{a}_{cor}. \quad (26)$$

При введении таких обозначений уравнение движения примет вид:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{O}_e + \vec{O}_{cor}. \quad (27)$$

и оно будет описывать движение по отношению к неинерциальной системе отсчета.

Таким образом, при описании движения материальной точки по отношению к неинерциальной системе отсчета, к числу действующим на точку активным силам следует добавить две силы инерции - переносную и кориолисову.

Проявление переносной силы инерции ощущает каждый человек, находящийся в движущемся автомобиле, в случае, если автомобиль разгоняется или тормозится, а также на повороте.

Наличие кориолисовой силы инерции из-за вращения Земли проявляется в том, что все движущиеся горизонтально тела в северном полушарии стремятся отклониться вправо по ходу движения, а реки подмывают правый берег, а в южном полушарии наоборот. Поскольку Земля вращается очень медленно, то соответствующие проявления сил инерции следует учитывать лишь при весьма больших скоростях движения точек (скорости снарядов и ракет). При решении обычных технических задач систему отсчета, связанную с Землей, с большой точностью можно считать инерциальной. Для того чтобы система отсчета, движущаяся относительно инерциальной, также была инерциальной, необходимо, чтобы обе силы инерции были равны нулю, следовательно, и оба ускорения (переносное и кориолисово) должны быть нулевыми. Из кинематики известно, что это может быть только тогда, когда подвижная система отсчета движется

относительно неподвижной (инерциальной) поступательно, равномерно и прямолинейно.

В случае, когда материальная точка неподвижна в инерциальной системе отсчета, уравнение ее равновесия ( $a_r = 0; v_r = 0$ ) будет иметь вид:

$$\vec{F} + \vec{O}_e = 0. \quad (28)$$

Это уравнение есть условие относительного покоя материальной точки.

## **2 ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

Рассматриваемые вопросы:

*Геометрия масс. Центр масс механической системы. Моменты инерции материальной точки относительно полюса, оси, плоскости. Моменты инерции системы материальных точек относительно полюса, оси, плоскости. Моменты инерции абсолютно твердого тела. Моменты инерции однородных тел. Радиус инерции. Физический смысл моментов инерции. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса-Штейнера). Полярный и осевые моменты инерции в декартовых координатах, связь между ними. Центробежные моменты инерции. Главные оси инерции и их свойства. Момент инерции относительно оси любого направления. Тензор инерции. Эллипсоид инерции и его физический смысл.*

### **2.1 Механическая система.**

Механическая система – это совокупность материальных точек, в которой состояние равновесия или движения отдельных точек зависит от состояния остальных точек.

### **2.2 Центр масс механической системы.**

При рассмотрении движения твердых тел и механических систем, важное значение имеет точка, называемая **центром масс**.

а) *Определение:*

Если механическая система состоит из конечного числа материальных точек с массами  $m_1, m_2, m_n$ , радиус – векторы которых проведены из одной и той же точки, то **центром масс** (центром инерции) движущейся механической сис-

темы называется геометрическая точка пространства (может быть и вне системы), радиус – вектор которой определяется выражением:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_v m_v \vec{r}_v}{\sum_v m_v} = \frac{\sum m_v \vec{r}_v}{M} \quad (29)$$

где:  $M = \sum_v m_v$  - масса механической системы.

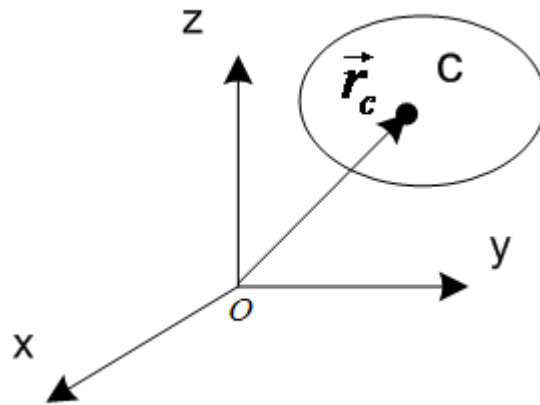


Рис. 3

Обозначая декартовы координаты материальных точек  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$ , ...,  $(x_n, y_n, z_n)$ , из (29) проецированием на декартовы оси координат получим следующие формулы для координат центра масс:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_v m_v x_v}{M} \\ y_c &= \frac{\sum_v m_v y_v}{M} \\ z_c &= \frac{\sum_v m_v z_v}{M} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

## 2.3 Моменты инерции материальной точки, механической системы и твёрдого тела

Было установлено, что масса тела является мерой его инертности. Однако это справедливо только по отношению к поступательному движению, а для вращательного движения мерой инертности будет другая величина. Движение тел существенным образом зависит от характера распределения масс. Например, балерина, группируясь в танце, увеличивает или уменьшает угловую скорость своего вращения. Положение центра масс не характеризует распределения масс. Поэтому при изучении динамики механических систем точек и при изучении динамики твёрдого тела, вводится еще одна характеристика – **момент инерции**.

### 2.3.1 Момент инерции материальной точки.

а) Относительно полюса (точки):

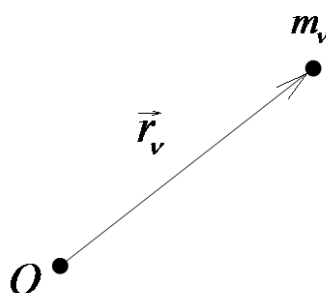


Рис. 4

**Моментом инерции материальной точки относительно полюса называется произведение массы этой точки на квадрат расстояния её до полюса.**

$$I_0 = m_v r_v^2 \quad (31)$$

б) Относительно оси:

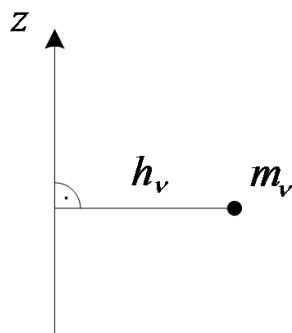


Рис. 5

$$I_{vz} = m_v h_v^2 \quad (32)$$

**Моментом инерции материальной точки относительно оси называется произведение массы точки на квадрат её расстояния до этой оси.**

в) Относительно плоскости:

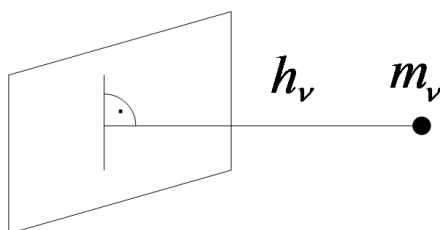


Рис. 6

$$I_{vnl} = m_v h_v^2 \quad (33)$$

**Моментом инерции точки относительно плоскости называется произведение массы этой точки на квадрат расстояния до плоскости.**

### 2.3.2 Моменты инерции системы материальных точек.

а) Относительно полюса (центра, точки) или **полярный момент инерции**:

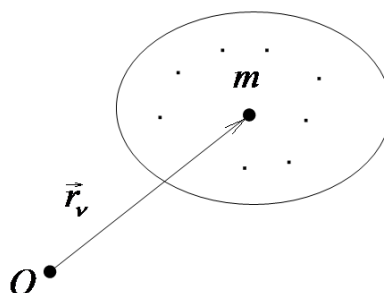


Рис. 7

$$I_0 = \sum_v m_v r_v^2 \quad (34)$$

**Моментом инерции системы материальных точек относительно полюса называется сумма моментов инерции всех материальных точек входящих в механическую систему.**

б) Относительно оси:

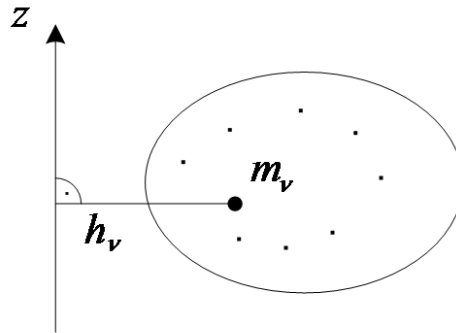


Рис. 8

$$I_{vz} = \sum_v m_v h_v^2 \quad (35)$$

в) Относительно плоскости:

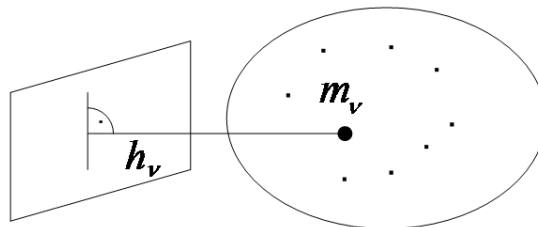


Рис. 9

$$I_{vnl} = \sum_v m_v h_v^2 \quad (36)$$

### 2.3.3 Моменты инерции абсолютно твердого тела.

Для сплошных тел роль материальной точки имеет элементарный объем  $d\vec{V}$  массы  $d\vec{m}$ .

а) Относительно полюса:

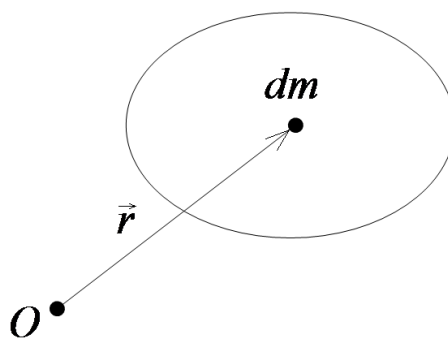


Рис. 10

Моментом инерции твердого тела относительно полюса называется интеграл вида:

$$I = \int r^2 dm \quad (37)$$

б) Относительно оси:

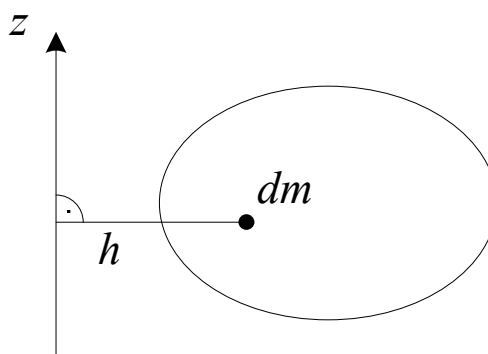


Рис. 11

$$I_z = \int h^2 dm \quad (38)$$

в) Относительно плоскости:

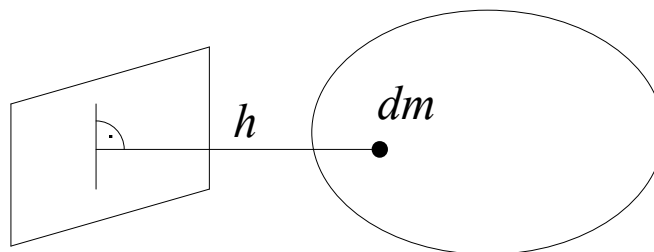


Рис. 12

$$I_{i\bar{e}} = \int h^2 dm \quad (39)$$

Здесь  $dm = \rho dV$ , где  $\rho$  – плотность тела,  $V$  - объем тела. Моменты инерции одинаковых по форме тел, изготовленных из различных материалов, отличаются друг от друга.

### 2.3.4 Моменты инерции однородных тел.

**Однородным** называется тело, если плотность тела во всех его точках одинакова.

#### а) Момент инерции однородного стержня

Имеем однородный стержень длиной « $l$ » и массой « $m$ ». Центр масс стержня точка « $c$ ».

Вычислим момент инерции стержня относительно оси  $C_z$ , проходящей через центр масс стержня и перпендикулярной к нему (рис.13)

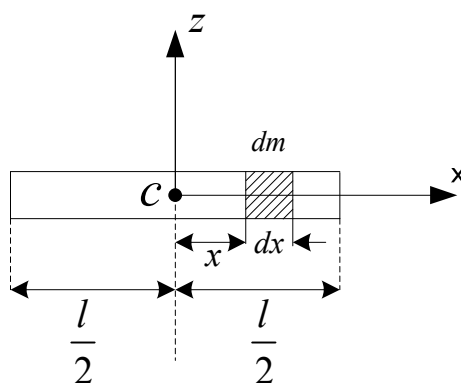


Рис. 13

Согласно формуле (38), момент инерции тела относительно оси вычисляется по формуле:  $I_z = \int h^2 dm$ .

Если разделить стержень на отрезки длиной  $dx$ , то соответствующий элемент массы будет пропорционален  $dx$ , а если бы  $dx$  составляло длину всего стержня, то его масса была бы равна  $m$ . Поэтому

$$dm = \frac{m}{l} dx \quad (40)$$

тогда



$$I_{cz} = \frac{m}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{ml^2}{12} \quad (41)$$

Таким образом, момент инерции однородного стержня относительно центра масс вычисляется по формуле:

$$I_{cz} = \frac{ml^2}{12} \quad (42)$$

**б) Момент инерции цилиндра, масса которого распределена по ободу (т.е. полый цилиндр) или кольца**

Имеем цилиндр, масса которого распределена по ободу, его радиус « $R$ » и масса « $m$ ». Центр масс расположен на оси вращения.

Вычислим момент инерции стержня относительно оси  $C_z$ , проходящей через центр масс стержня (рис.14)

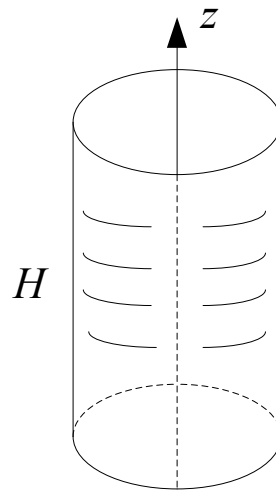


Рис. 14

$$I_{cz} = \int h^2 dm = R^2 \int dm = mR^2 \quad (43)$$

**в) Сплошной однородный цилиндр**

Пусть радиус цилиндра равен  $R$ , его масса  $m$ , высота  $H$ . Построим цилиндрическую трубку радиуса  $r$  толщина  $dr$  ( $r < R$ ) высотой  $H$  толщиной  $dr$  и длина  $2\pi r$  (Рис.15). За элемент массы  $dm$  возьмем массу этой трубки. Объем равен

$dV=2\pi rHdr$ , а ее масса  $dm=\rho dV=\rho 2\pi rHdr$ , где  $\rho=m/V$  – плотность. Объем всего цилиндра  $V=\pi R^2H$ . Следовательно,

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 H}, dm = \frac{2mRdr}{R^2} \quad (44)$$

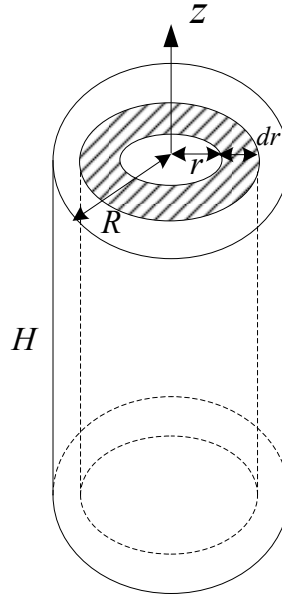


Рис. 15

По определению:

$$I_{cz} = \int r^2 dm = \int = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{mR^2}{2} \quad (45)$$

Получили для сплошного однородного цилиндра (диска или шкива):

$$I_{cz} = \frac{mR^2}{2} \quad (46)$$

### 2.3.5 Радиус инерции.

Характеристикой, не зависящей от массы тела, является радиус инерции. Радиус инерции измеряется в метрах и имеет простой физический смысл. Если данное тело превратить в материальную точку той же массы, то для того чтобы момент инерции оставался таким же как у исходного тела, эту точку следует поместить на расстояние от оси, равное радиусу инерции.

Зная радиус инерции тела можно определить момент инерции тела по формуле для материальной точки.

$$I_x = m\rho_{\dot{e}}^2 = mi_x^2 \quad (47)$$

где  $\rho_{\dot{e}} = i_x$  - радиус инерции.

Пример:

Определить радиус инерции для полого цилиндра:

$$I = m\rho_{\dot{e}}^2 \quad (48)$$

$$\frac{mR^2}{2} = m\rho_{\dot{e}}^2 \quad (49)$$

$$\rho_{\dot{e}} \neq R ;$$

$$\rho_{\dot{e}} = \frac{R}{\sqrt{2}} \quad (50)$$

Радиус инерции используется обычно в задачах для неоднородных тел. Определяются радиусы инерции неоднородных тел экспериментальным путем.

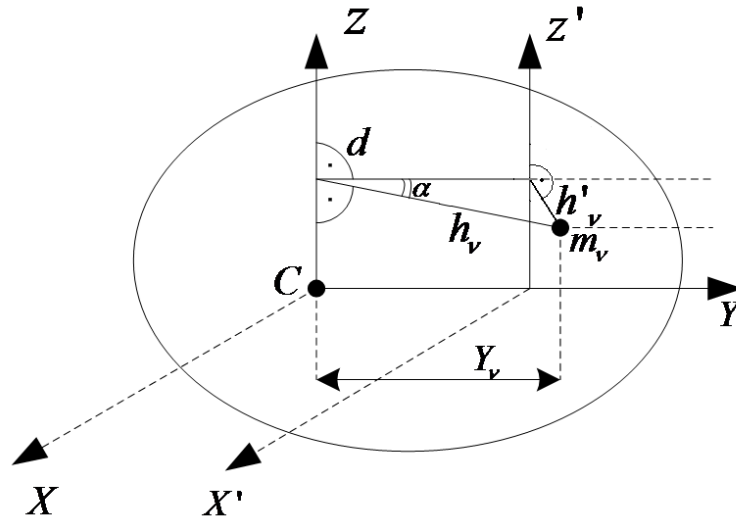
### 2.3.6 Физический смысл моментов инерции.

Ввёл понятие момента инерции Гюйгенс при изучении математического маятника. Термин «момент инерции» ввел Леонард Эйлер. Физический смысл момента инерции аналогичен физическому смыслу массы, т.к. выражаются через массу. Масса – это мера инертности тела по отношению к поступательному движению. Масса характеризует способность тела препятствовать изменению скорости, т.е. способность тела сохранять свою скорость неизменной.

Аналогично момент инерции характеризует меру инертности тела по отношению к вращательному движению. Момент инерции характеризует способность тела сохранять угловую скорость неизменной, т.е. препятствует появлению углового ускорения тела. Таким образом, инерция вращающейся системы зависит не только от масс ее точек, но и от того, как они расположены по отношению к оси вращения.

**2.3.7 Теорема Гюйгенса – Штейнера (теорема о моментах инерции относительно параллельных осей).**

В справочниках приводят моменты инерции тел относительно осей координат, проходящих через центр масс. Если же ось вращения смещена из центра масс, то вопрос о величине момента инерции позволяет решить специальная теорема – теорема Гюйгенса-Штейнера или теорема о моментах инерции относительно параллельных осей.



$d$  – перпендикулярно осям.

$h$  – перпендикулярны осям.

Рис. 16

**Формулировка:** Момент инерции механической системы (тела) относительно произвольной оси  $z'$  равен моменту инерции этого тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, и величины, равной произведению массы этой системы (тела) на квадрат расстояния ( $d$ ) между осями.

Таким образом, теорема Гюйгенса – Штейнера имеет вид:

$$I'_{z'} = I_{cz} + Md^2 \quad (51)$$

Доказательство:

По определению момента инерции:

$$I'_{z'} = \sum_{v=1}^n m_v h_v^2 + \sum_{v=1}^n m_v d^2 + \sum_{v=1}^n m_v 2dh_v \cos \alpha \quad (52)$$

$h_v^2$  находим по теореме косинусов:

$$h_v^2 + d^2 \pm 2dh_v \cos \alpha \quad (53)$$

Где «+» – для тупого угла;

«-» – для острого угла.

По определению центра масс:

$$Y_C = \frac{\sum_{v=1}^n m_v Y_v}{M} \quad (54)$$

Следовательно,  $MY_C = \sum_{v=1}^n m_v Y_v$ ,

но,  $Y_C = 0$  так как точка  $C$  это начало координат, то  $\sum_{v=1}^n m_v Y_v = 0$ , а это значит,

что:

$$I'_z = I_{cz} + Md^2 \quad (55)$$

Пример:

Определить момент инерции стержня относительно оси  $z'$ , проходящей через конец стержня.

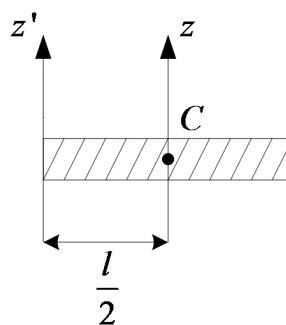


Рис. 17

По теореме Гюйгенса – Штейнера:

$$I'_z = I_{cz} + md^2 = I_{cz} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2 + 3ml^2}{12} = \frac{ml^2}{3} \quad (56)$$

Значит,  $I'_z = \frac{ml^2}{3}$  - момент инерции стержня относительно конца.

Таким образом, момент инерции относительно оси, проходящей через конец стержня в четыре раза больше, чем момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс.

Момент инерции в любой задаче надо вычислять относительно оси вращения и, если ось вращения не проходит через центр масс надо использовать теорему Гюйгенса – Штейнера. Из всех моментов инерции механической системы относительно параллельных осей самый маленький момент инерции у системы будет относительно оси, проходящей через центр масс.

### 2.3.8 Осевые моменты инерции в декартовых координатах.

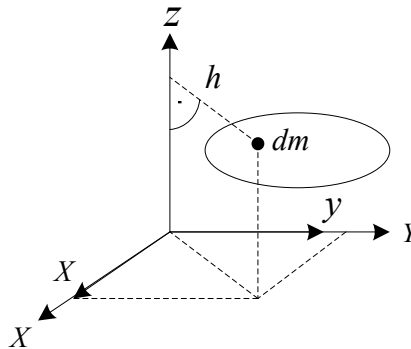


Рис. 18

$$I_z = \int h^2 dm \quad (57)$$

Где  $h^2 = x^2 + y^2$  - по теореме Пифагора.

**Определение:** осевыми моментами инерции тела в декартовых координатах называются интегралы вида:

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2) dm \\ I_y &= \int (x^2 + z^2) dm \\ I_z &= \int (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

### 2.3.9 Полярный момент инерции тела в декартовых координатах.

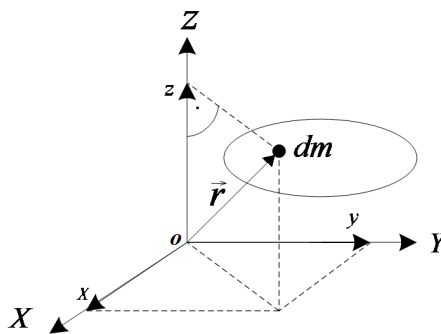


Рис. 19

**Определение:** полярным моментом инерции тела в декартовых координатах называется интеграл вида:

$$I_0 = \int r^2 dm \quad (59)$$

Где  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

Таким образом, полярный момент инерции в декартовых координатах имеет вид:

$$I_0 = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm \quad (60)$$

Сложив почленно осевые моменты инерции, получим:

$$\begin{aligned} I_x + I_y + I_z &= \int (z^2 + y^2) dm + \int (x^2 + z^2) dm + \int (x^2 + y^2) dm = \\ &= 2 \int (x^2 + y^2 + z^2) dm \end{aligned} \quad (61)$$

Учитывая, что полярный момент инерции определяется по формуле:

$$I_0 = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm \quad (62)$$

Получим формулу взаимосвязи между моментами инерции:

$$I_0 = \frac{I_x + I_y + I_z}{2} \quad (63)$$

### 2.3.10 Центробежные моменты инерции.

Осевые моменты инерции не полностью характеризуют поведение тела при его вращении. В механике в качестве характеристик, учитывающих несимметричность в распределении масс, вводят центробежные моменты инерции.

**Определение:** Центробежными моментами инерции тела называются моменты инерции, вычисляемые по формулам:

$$\left. \begin{aligned} I_{xy} &= \int xydm \\ I_{yz} &= \int yzdm \\ I_{xz} &= \int xzdm \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Центробежные моменты инерции могут иметь не только положительные и нулевые значения, но и отрицательные. В этом их отличие от осевых моментов инерции.

### 2.3.11 Главные оси инерции.

**Определение:** Главными осями инерции называются такие оси, для которых все центробежные моменты инерции равны нулю.

Симметрия в расположении масс относительно оси (например,  $X$ ) характеризуется обращением в нуль двух центробежных моментов инерции.

Если  $I_{xy} = I_{xz} = 0$ , значит ось « $X$ » есть главная ось инерции.

Если  $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ , то все оси « $X, Y, Z$ » являются главными осями инерции.

### 2.3.12 Главные центральные оси инерции.

**Определение:** Главными центральными осями инерции называются такие главные оси инерции, которые проходят через центр масс.

Если в теле есть ось симметрии, то эта ось всегда является одной из главных центральных осей инерции, так как центр масс лежит на этой оси, но не все главные оси инерции являются осями симметрии.

Если тело имеет плоскость симметрии, то любая прямая перпендикулярная этой плоскости и проходящая через центр масс является одной из главных осей симметрии для точки пересечения этой оси с плоскостью.

Через любую точку тела можно провести, по крайней мере, три взаимно перпендикулярных главных осей инерции.



Понятие о главных осях инерции играет важную роль в динамике твердого тела. Если главные оси инерции выбрать в качестве декартовых осей координат, то все центробежные моменты инерции обращаются в нули и соответствующие уравнения или формулы оказываются значительно проще, чем в других системах координат.

### 2.3.13 Моменты инерции относительно оси любого направления.

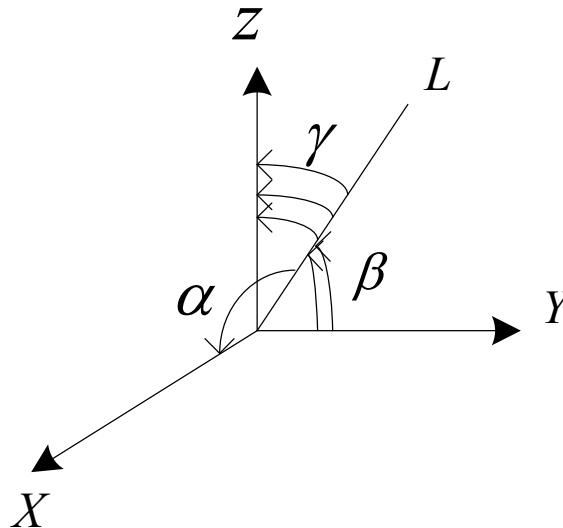


Рис. 20

Пусть:  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  - направляющие косинусы оси  $L$ .

**Определение:** Моментом инерции тела относительно произвольной оси « $L$ » называется момент инерции, вычисляемый по формуле:

$$I_L = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2I_{xz} \cos \alpha \cos \gamma \quad (65)$$

Если оси « $X, Y, Z$ » являются главными осями инерции, то  $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$  и формула (56) будет иметь вид:

$$I_L = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma \quad (66)$$

### 2.3.14 Тензор инерции.

**Определение:** Тензором инерции называется такой тензор, элементами которого являются моменты инерции (осевые и центробежные).

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix} \quad (67)$$

Это симметричный тензор, т.к. тензор называется симметричным, если он не изменяется при перестановке индексов  $I_{ik} = I_{ki}$ .

Тензор называется антисимметричным, если при перестановке индексов он меняет знак  $I_{ik} = -I_{ki}$ .

Тензор инерции симметричный тензор, т.к.  $I_{ik} = I_{ki}$ .

Тензор инерции позволяет компактно записывать моменты инерции и легко производить математические операции с ними.

### 2.3.15 Эллипсоид инерции.

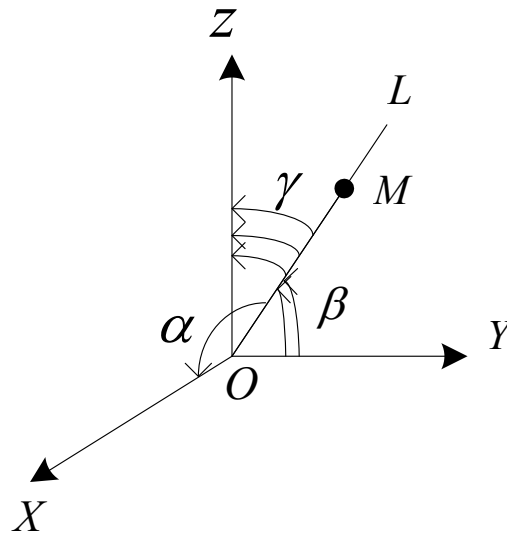


Рис. 21

Знаем, что:

$$I_L = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2I_{xz} \cos \alpha \cos \gamma \quad (68)$$

Выберем на оси «L» точку «M» такую чтобы  $OM = \frac{1}{\sqrt{I_L}}$ , тогда направ-

ляющие косинусы оси «L» имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{OM} = x\sqrt{I_L} \\ \cos \beta &= \frac{y}{OM} = y\sqrt{I_L} \\ \cos \gamma &= \frac{z}{OM} = z\sqrt{I_L} \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Подставим (60) в формулу (59):

$$I_L = I_L I_x x^2 + I_L I_y y^2 + I_L I_z z^2 - 2I_L I_{xy} xy - 2I_L I_{yz} yz - 2I_L I_{xz} xz \quad (70)$$

Разделив на  $I_L$ , получим эллипсоид инерции в произвольной системе координат:

$$1 = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy - 2I_{yz} yz - 2I_{xz} xz \quad (71)$$

Если оси « $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ » являются главными осями инерции, то  $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$  и эллипсоид имеет вид:

$$1 = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 \quad (72)$$

Канонический (простейший) вид эллипсоида инерции.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \quad (73)$$

где полуоси эллипсоида инерции:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{I_x}} \\ b &= \frac{1}{\sqrt{I_y}} \\ c &= \frac{1}{\sqrt{I_z}} \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Смысл эллипсоида инерции в том, что он характеризует распределение масс в теле.

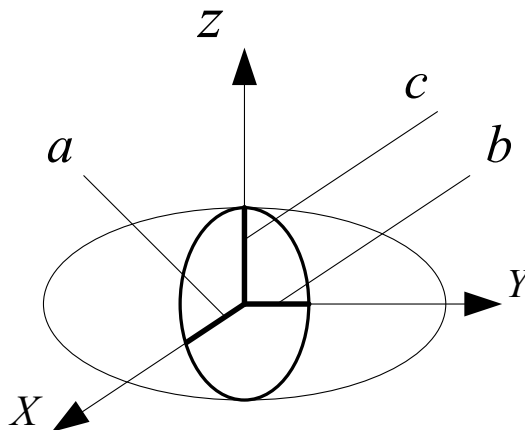


Рис. 22

### 3. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС, ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Рассматриваемые вопросы:

*Общие теоремы динамики материальной точки и механической системы. Силы внешние и внутренние. Свойство внутренних сил. Центр масс однородных тел. Теорема о движении центра масс. Закон сохранения движения центра масс. Количество движения материальной точки и механической системы. Количество движения абсолютно твердого тела. Теорема об изменении количества движения (дифференциальный вид). Понятие элементарного импульса и импульса силы за какой-либо промежуток времени. Теорема импульсов (интегральный вид теоремы об изменении количества движения). Закон сохранения количества движения. Закон сохранения импульса.*

#### 3.1 Силы внешние и внутренние

Все силы, действующие на точки механической системы, можно разделить на внешние силы и внутренние.

**Внешние силы** возникают в процессе взаимодействия точек системы с другими телами. Внутренние силы обозначают индексом «e».

**Внутренние силы** возникают благодаря взаимодействиям материальных точек, входящих в состав данной системы. Внутренние силы попарно равны и

противоположно направлены, например силы взаимодействия механической системы Земля – Луна. Внутренние силы обозначают индексом « $i$ ».

Основные свойства внутренних сил произвольно движущейся системы:

1. **Главный вектор внутренних сил, действующих на точки механической системы равен нулю.**
2. **Главный момент системы внутренних сил относительно произвольного полюса равен нулю.**

### 3.2 Теорема о движении центра масс

а) **Определение положения центра масс однородных тел:**

Параллелограмм (квадрат и т.п.) - на пересечении диагоналей:

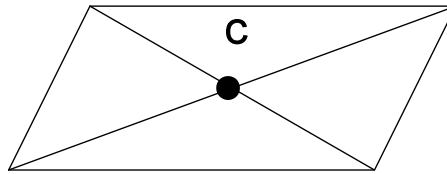


Рис. 23

Треугольник - на пересечении медиан:

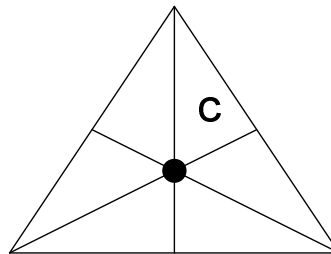


Рис. 24

Дуга:

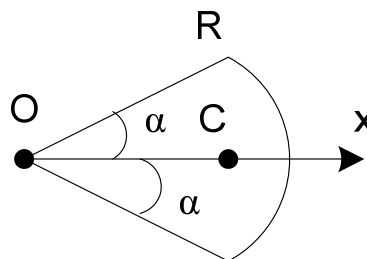


Рис 25

Центр масс дуги:

$$x_c = x = R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (75)$$

$\alpha$  – в радианах

Для сектора:

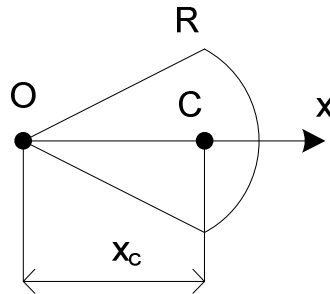


Рис. 26

$$x_c = OC = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (76)$$

#### б) Вывод теоремы о движении центра масс

Рассмотрим движущуюся механическую систему. В составе движущейся системы выделим точечную массу и запишем для нее второй закон Ньютона:

$$m_v \ddot{\vec{r}}_v = \vec{F}_v^e + \vec{F}_v^i \quad (77)$$

Просуммировав по  $v$ , т.е. по всем материальным точкам системы получим:

$$\sum_{v=1}^n m_v \ddot{\vec{r}}_v = \sum_{v=1}^n \vec{F}_v^e + \sum_{v=1}^n \vec{F}_v^i \quad (78)$$

По третьему закону Ньютона: внутренние силы равны и противоположны,

т.е.  $\sum_{v=1}^n \vec{F}_v^i = 0$ . Получим:

$$\sum_{v=1}^n m_v \ddot{\vec{r}}_v = \sum_{v=1}^n \vec{F}_v^e \quad (79)$$

По определению центра масс:

$$\vec{r}_c = \frac{m_v \vec{r}_v}{M} \quad (80)$$

Продифференцировав дважды по времени и приведя к общему знаменателю, получим теорему о движении центра масс:

$$M\ddot{\vec{r}}_c = \sum_{v=1}^n \vec{F}_v^e \quad (81)$$

**Формулировка:** произведение массы механической системы на ускорение её центра масс равно векторной сумме всех внешних сил, действующих на систему, т.е. равно главному вектору внешних сил системы. Полученное выражение это второй закон Ньютона для центра масс.

**Вторая формулировка:** центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы под действием всех внешних сил механической системы.

Из теоремы следует, что внутренние силы непосредственно не влияют на движение центра масс. Однако в ряде случаев являются причиной появления внешних сил, приложенных к механической системе. Так, внутренние силы, приводящие во вращение ведущие колеса автомобиля, вызывают действие на него внешней силы сцепления, приложенной к ободу колеса.

#### г) Закон сохранения движения центра масс:

Имеет две части (общая часть):

1) если,  $\sum \vec{F}_v^i = 0$ , то  $M\ddot{\vec{r}}_c = 0$ , т.к.  $M \neq 0$ ; то  $\ddot{\vec{r}}_c = 0$  т.е.  $\vec{v}_c = const$

**Формулировка:** если векторная сумма всех внешних сил системы равна нулю, то скорость центра масс остается постоянной по величине и направлению. Если, в частности, в начальный момент центр масс находится в покое, то он покоится в течение всего времени, пока главный вектор внешних сил равен нулю.

В проекциях на оси декартовой системы координат:

2) если,  $\sum F_{kx}^e = 0$ , то  $M\ddot{x}_c = 0$ , т.к.  $M \neq 0$ ; то  $\ddot{x}_c = 0$ ; т.е.  $v_{cx} = const$

**Формулировка:** если алгебраическая сумма проекций всех внешних сил системы на какую-нибудь ось равно нулю, то соответствующая проекция скорости центра масс остается постоянной.

Из этой теоремы вытекает несколько следствий.

1. Одними внутренними силами нельзя изменить характер движения центра масс.

2. Если главный вектор внешних сил, действующих на систему, равен нулю, то центр масс находится в покое или движется равномерно и прямолинейно.

3. Если проекция главного вектора внешних сил системы на неподвижную ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось не изменяется.

4. Пара сил, приложенная к твердому телу, не может изменить движение его центра масс (она может вызвать только вращение тела вокруг центра масс).

### 3.3 Теорема об изменении количества движения материальной точки и механической системы

а) *Определение количества движения:*

**Количеством движения  $Q$  материальной точки называется произведение массы точки на вектор её скорости.**

$$\vec{Q}_v = m_v \vec{v}_v \quad (82)$$

**Количеством движения системы материальных точек называется векторная сумма количества движения всех материальных точек, входящих в механическую систему.**

$$\vec{Q} = \sum_{v=1}^n m_v \vec{v}_v \quad (83)$$

Количество движения механической системы можно выразить через скорость центра масс:

По определению центра масс:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{v=1}^n m_v \vec{r}_v}{M} \quad (84)$$

Продифференцируем это выражение по времени, и преобразовав получим:



$$M\dot{\vec{r}}_c = \sum_{v=1}^n m_v \dot{\vec{r}}_v \quad (85)$$

Подставив (85) в (83) и учитывая, что  $\dot{\vec{r}}_c = \vec{v}_c$  получим:

$$\vec{Q} = M\vec{v}_c \quad (86)$$

**Количество движения механической системы равно произведению массы системы на вектор скорости ее центра масс.**

Например:

1. Определить количество движения механической системы:

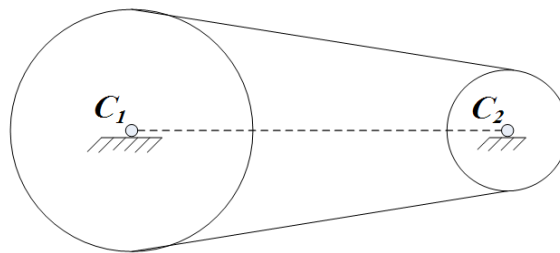


Рис. 27

$\vec{Q} = 0$ , т.к.  $\vec{v}_c = 0$  (центр масс не движется).

**б) Теорема об изменении количества движения (дифференциальный вид).**

Выведем ее из теоремы о движении центра масс.

Для  $v$ -той материальной точки по второму закону Ньютона:

$$m_v \frac{d\vec{v}_v}{dt} = \vec{F}_v^e + \vec{F}_v^i \quad (87)$$

Так как масса постоянна, то ее можно внести под знак производной. Получим:

$$\frac{d(m_v \vec{v}_v)}{dt} = \vec{F}_v^e + \vec{F}_v^i \quad (88)$$

Просуммировав по всем материальным точкам, получим:

$$\frac{d}{dt} \sum_v m_v \vec{v}_v = \sum \vec{F}_v^e + \sum \vec{F}_v^i \quad (89)$$

Учтем, что сумма всех внутренних сил механической системы  $\sum \vec{F}_v^i = 0$  - по третьему закону Ньютона.

Получим теорему об изменении количества движения механической системы в дифференциальном виде:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_v \vec{F}_v^e \quad (90)$$

**Формулировка:** первая производная по времени от количества движения механической системы равна векторной сумме всех внешних сил, действующих на систему, т.е. равна главному вектору всех внешних сил механической системы.

Эти формулы математически показывают, что только внешние силы влияют на движение центра масс и изменение количества движения механической системы, внутренние силы изменить количество движения или движение центра масс не могут.

**в) Теорема импульсов (интегральный вид) теоремы об изменении количества движения.**

*Определение:*

1) элементарным импульсом силы называется произведение этой силы на дифференциал времени:

$$d\vec{S} = \vec{F}dt \quad (91)$$

2) импульсом силы за какой-либо промежуток времени называется интеграл вида:

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \quad (92)$$

*Теорема импульсов:* выводится из теоремы об изменении количества движения.

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}^e \quad (93)$$

Разделяя переменные, получим:

$$d\vec{Q} = \sum \vec{F}^e dt \quad (94)$$

Интегрируем:

$$\int_{Q_1}^{Q_2} dQ = \sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^e dt \quad (95)$$

Учитывая, что правая часть уравнения представляет собой сумму импульсов всех внешних сил, получим:

$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \sum \vec{S}^e \quad (96)$$

**Формулировка:** Изменение количества движения за какой – либо промежуток времени равно векторной сумме импульсов всех внешних сил, приложенных к системе в этот промежуток времени.

Эта формула означает, что импульс силы и количество движения измеряется в одних и тех же размерностях единиц.

$$\frac{кг \cdot м}{с} = н \cdot с; \quad \frac{кг \cdot м}{с} = \frac{кг \cdot м}{с^2} \cdot с, \text{ поэтому количество движения в на-}$$

стоящее время называют импульсом.

г) **Закон сохранения количества движения:**

$$1) \text{ Если, } \sum \vec{F}^e = 0, \text{ то из теоремы следует, что: } \frac{d\vec{Q}}{dt} = 0, \vec{Q} = const.$$

**Формулировка:** если векторная сумма всех внешних сил системы равна нулю, то количество движения системы остается постоянным по величине и направлению.

$$2) \text{ Если, } \sum F_{kx}^e = 0, \text{ то } \frac{dQ_x}{dt} = 0, Q_x = const.$$

**Формулировка:** если алгебраическая сумма проекций всех внешних сил системы, на какую – либо ось равна нулю, то проекция количества движения на эту ось остается постоянной.

#### 4. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Рассматриваемые вопросы:

*Общие теоремы динамики механической системы. Теорема об изменении кинетического момента. Момент количества движения материальной точки относительно полюса: алгебраическое значение, направление вектора. Момент количества движения материальной точки относительно оси. Момент количества движения относительно начала координат. Кинетический момент механической системы относительно точки и оси. Кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения. Теорема об изменении кинетического момента. Закон сохранения кинетического момента.*

**4.1 Момент количества движения материальной точки относительно центра (точки, полюса).**

а) *Определение:* моментом количества движения материальной точки относительно какого-либо центра называется векторное произведение радиус – вектора этой точки на её количества движения.

$$\vec{M}_0(m_v \vec{v}_v) = [\vec{r}_v m_v \vec{v}_v] \quad (97)$$

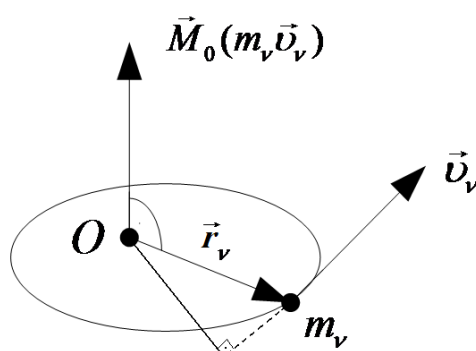


Рис. 28

б) *Направление:* момент количества движения материальной точки направлен перпендикулярно плоскости траектории движения точки таким образом, чтобы с конца векторного момента можно было видеть направление скорости по отношению к моментной точке против часовой стрелки.

в) *Алгебраическое значение момента количества движения точки.*

Модуль момента количества движения материальной точки:

$$|\vec{M}_0(m_v \vec{v}_v)| = |\vec{r}_v| m_v |\vec{v}_v| \sin(\vec{r}_v \wedge \vec{v}_v) = m_v v_v h_v \quad (98)$$

Алгебраическое значение – это произведение количества движения материальной точки на плечо, взятое со знаком плюс или минус.

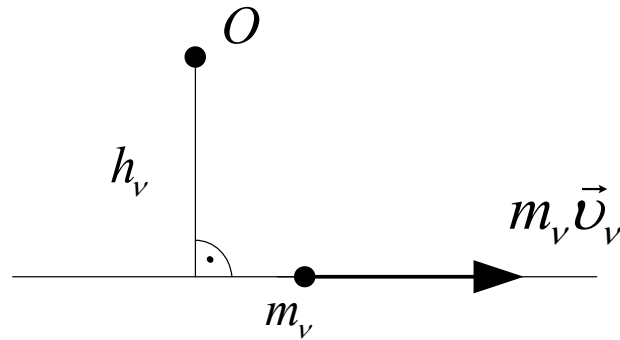


Рис. 29

$$|\vec{M}_0(m_v v_v)| = \pm m v h \quad (99)$$

Значение момента положительное, если он направлен относительно моментной точки против часовой стрелки.

Значение момента отрицательное, если он направлен относительно моментной точки по часовой стрелке.

Значение момента равно нулю, если моментная точка лежит на линии скорости.

#### 4.2 Момент количества движения относительно оси.

а) *Определение:* **моментом количества движения точки относительно оси называется проекция на эту ось векторного момента количества движения, вычисленного относительно какой – либо точки, лежащей на этой оси.**

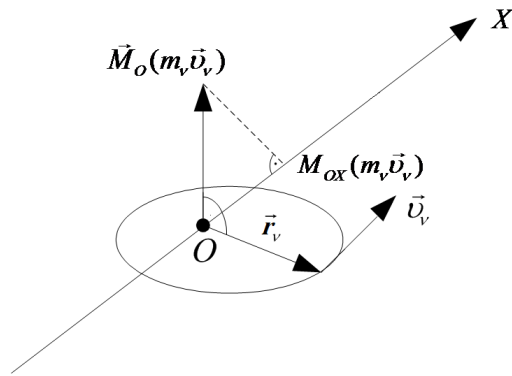


Рис. 30

Алгебраическое значение аналогично:

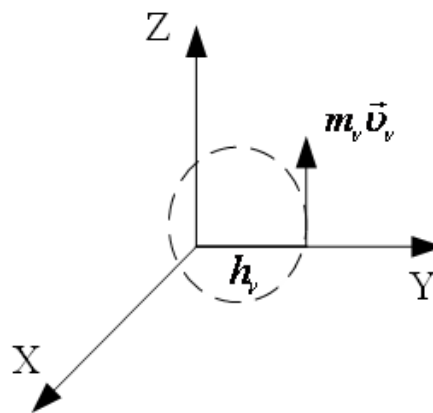


Рис. 31

$$M_{OX} (m_v \vec{v}_v) = \pm m_v v_v h_v \quad (100)$$

Значение момента количества движения положительное, если он направлен против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси.

Значение момента количества движения отрицательное, если он направлен по часовой стрелке, если смотреть с положительного направления оси.

Значение момента количества движения равно нулю, если скорость направлена параллельно оси или пересекает эту ось.

Проекция  $\vec{M}_0(Q)$  на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} M_{OX}(Q) &= m(y_m v_z - z_m v_y) \\ M_{OY}(Q) &= m(z_m v_x - x_m v_z) \\ M_{OZ}(Q) &= m(x_m v_y - y_m v_x) \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

**4.3 Кинетический момент механической системы относительно полюса и оси.**

а) Кинетический момент механической системы относительно полюса.

**Кинетическим моментом механической системы относительно центра (полюса, точки) называется векторная сумма моментов количества движения всех точек системы относительно этого же центра:**

$$\vec{K}_0 = \sum_v [\vec{r}_v m_v \vec{v}_v] \quad (102)$$

б) Кинетический момент механической системы относительно оси:

**Кинетическим моментом механической системы относительно оси называется алгебраическая сумма моментов количества движения всех его точек относительно этой же оси:**

Кинетический момент механической системы относительно оси Z:

$$K_{0Z} = \sum_v [\vec{r}_v m_v \vec{v}_v]_Z \quad (103)$$

Таким образом - кинетический момент механической системы это главный момент количества движения системы.

**4.4 Кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения.**

Рассмотрим тело вращения. Рассмотрим движение материальной точки, масса которой  $m_v$ , а линейная скорость  $\vec{v}_v$ .

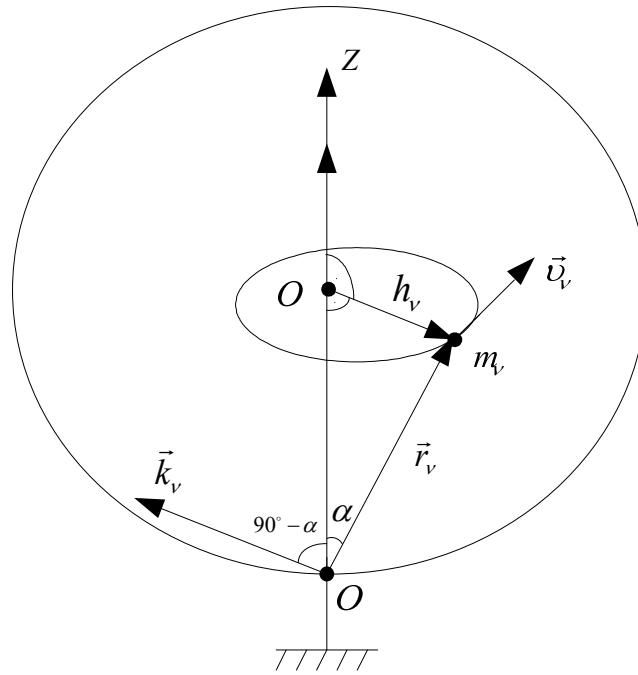


Рис. 32

По определению кинетического момента относительно полюса:

$$\vec{K}_0 = \sum_v [\vec{r}_v m_v \vec{v}_v] \quad (104)$$

Кинетический момент направлен перпендикулярно радиус-вектору  $\vec{r}_v$  ( $\vec{K}_0 \perp \vec{r}_v$ ).

Спроектировав кинетический момент  $\vec{K}_0$  на ось  $z$ , получим:

$$K_z = \sum_v [|\vec{r}_v m_v \vec{v}_v| \cos(90^\circ - \alpha)] \quad (105)$$

Учитывая, что при вращательном движении линейная скорость определяется по формуле Эйлера, получим:

$$\vec{v}_v = [\vec{\omega} \vec{r}_v] \quad (106)$$

Модуль скорости точки при вращательном движении:

$$v_v = \omega h_v \quad (107)$$

где  $h_v = r_v \sin(\alpha)$ ,  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

Подставив (98) в формулу (96), получим:

$$K_z = \sum_{v=1}^n m_v r_v^2 \sin^2 \alpha \omega = \omega \sum_{v=1}^n m_v h_v^2 = I_z \omega \quad (108)$$



Кинетический момент относительно оси вращения определяется по формуле:

$$K_z = I_z \omega \quad (109)$$

#### 4.5 Вывод теоремы об изменении кинетического момента.

По второму закону Ньютона для  $\nu$ -той точки:

$$m_\nu \vec{a}_\nu = \vec{F}_\nu^e + \vec{F}_\nu^i \quad (110)$$

Умножив обе части равенства почленно, векторно на  $\vec{r}_\nu$ , получим:

$$\left[ \vec{r}_\nu m_\nu \frac{d\vec{v}_\nu}{dt} \right] = \left[ \vec{r}_\nu \vec{F}_\nu^e \right] + \left[ \vec{r}_\nu \vec{F}_\nu^i \right] \quad (111)$$

Преобразуем:

$$\frac{d}{dt} \left[ \vec{r}_\nu m_\nu \vec{v}_\nu \right] = \left[ \vec{r}_\nu \vec{F}_\nu^e \right] + \left[ \vec{r}_\nu \vec{F}_\nu^i \right] \quad (112)$$

Суммируя по  $\nu$  т.е. по всем материальным точкам механической системы получим:

$$\frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^n \left[ \vec{r}_\nu m_\nu \vec{v}_\nu \right] = \sum_{\nu=1}^n \left[ \vec{r}_\nu \vec{F}_\nu^e \right] + \sum_{\nu=1}^n \left[ \vec{r}_\nu \vec{F}_\nu^i \right] \quad (113)$$

Слева под знаком суммы получаем кинетический момент механической системы относительно полюса O:

$$\frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^n \left[ \vec{r}_\nu m_\nu \vec{v}_\nu \right] = \frac{d\vec{K}_o}{dt} \quad (114)$$

Справа под знаком суммы получаем сумму моментов всех внешних и внутренних сил механической системы относительно полюса O:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n \left[ \vec{r}_\nu \vec{F}_\nu^e \right] &= \sum_{\nu=1}^n \vec{M}_0^e \\ \sum_{\nu=1}^n \left[ \vec{r}_\nu \vec{F}_\nu^i \right] &= \sum_{\nu=1}^n \vec{M}_0^i \end{aligned} \quad (115)$$

По третьему закону Ньютона сумма моментов всех внутренних сил относительно полюса  $O$  равна нулю,

$$\sum_{\nu=1}^n \vec{M}_0^i = 0 \quad (116)$$

Тогда получим теорему в виде:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum_{\nu=1}^n \vec{M}_0^e \quad (117)$$

**Формулировка:** первая производная от кинетического момента по времени, относительно какого – либо центра равна векторной сумме моментов всех внешних сил, действующих на систему относительно этого же центра.

Теорема об изменении кинетического момента относительно оси вращения:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{\nu=1}^n M_z^e \quad (118)$$

**Формулировка:** первая производная по времени от кинетического момента, относительно какой – либо оси равна алгебраической сумме моментов всех внешних сил системы относительно этой же оси.

Кинетический момент для твердого тела относительно оси вращения:

$$K_z = I_z \omega \quad (119)$$

Тогда:

$$\frac{dI_z \omega}{dt} = \sum M_z^e \quad (120)$$

Или:

$$I_z \varepsilon = \sum M_z^e \quad (121)$$

Учитывая, что  $\varepsilon = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$  получим дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{\nu=1}^n M_z^e \quad (122)$$

#### 4.6 Закон сохранения кинетического момента.

Следует из теоремы о кинетическом моменте:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum_{\nu=1}^n M_0(\vec{F}^e) \quad (123)$$

1) Если  $\sum_{\nu=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}^e) = 0$ , то:  $\frac{d\vec{K}_0}{dt} = 0$ , а, следовательно

$$\vec{K}_0 = const.$$

**Формулировка:** если векторная сумма моментов всех внешних сил системы, относительно какого – либо центра равна нулю, то кинетический момент относительно этого центра остается постоянным по величине и направлению.

2) Если  $\sum_{\nu=1}^n M_z(F^e) = 0$ , то  $K_z = const$ .

**Формулировка:** если алгебраическая сумма моментов всех внешних сил системы, относительно какой – либо оси равна нулю, то кинетический момент относительно этой оси остается постоянным.

Например:

При вращении фигуриста на льду все действующие силы параллельны оси  $Z$ , а это значит, что кинетический момент относительно оси  $Z$  равен нулю.

$$K_{z|t} = K_{z|t_0} = 0 \quad (124)$$

То есть:

$$I_{z_0} \omega_0 = I_1 \omega_1 \quad (125)$$

Для увеличения угловой скорости фигурист прижимает руки к туловищу, тем самым уменьшая момент инерции тела относительно оси вращения.

Для уменьшения угловой скорости фигурист расставляет руки в стороны, тем самым увеличивая момент инерции тела относительно оси вращения.

## 5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Рассматриваемые вопросы:

*Общие теоремы динамики механической системы. Кинетическая энергия: материальной точки, системы материальных точек, абсолютно твердого тела (при поступательном, вращательном и плоском движении). Теорема Кенига. Работа силы: элементарная работа сил, приложенных к твердому телу; на конечном перемещении, силы тяжести, силы трения скольжения, силы упругости. Элементарная работа момента силы. Мощность силы и пары сил. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки. Теорема об изменении кинетической энергии изменяемых и неизменяемых механических систем (дифференциальный и интегральный вид). Потенциальное силовое поле и его свойства. Эквипотенциальные поверхности. Потенциальная функция. Потенциальная энергия. Закон сохранения полной механической энергии.*

### 5.1 Кинетическая энергия

а) материальной точки:

**Определение: кинетической энергией материальной точки называется половина произведения массы этой точки на квадрат её скорости:**

$$T_v = \frac{m_v v_v^2}{2} \quad (126)$$

Кинетическая энергия является скалярной положительной величиной.

В системе СИ, единицей измерения энергии является джоуль:

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

б) системы материальных точек:

**Кинетическая энергия системы материальных точек это сумма кинетических энергий всех точек системы:**

$$T = \sum_v \frac{m_v v_v^2}{2} \quad (127)$$

в) абсолютно твердого тела:

1) при поступательном движении.

Скорости всех точек одинаковы и равны скорости центра масс, т.е.  $\vec{v}_v = \vec{v}_c$ , тогда:

$$T = \sum_v \frac{m_v v_v^2}{2} = \sum_v \frac{m_v v_c^2}{2} = \frac{v_c^2}{2} \sum_v m_v = M \frac{v_c^2}{2} \quad (128)$$

где  $M$  – масса тела.

$$T = \frac{M v_c^2}{2} \quad (129)$$

**Кинетическая энергия твердого тела, движущегося поступательно, равна половине произведения массы тела  $M$  на квадрат его скорости.**

2) при вращательном движении.

Скорости точек определяются по формуле Эйлера:

$$\vec{v}_v = [\vec{r}_v \vec{\omega}] \quad (130)$$

Модуль скорости:

$$v_v = |\vec{\omega}| |\vec{r}_v| \sin \alpha = |\vec{\omega}| h_v \quad (131)$$

Тогда:

$$T = \sum_v \frac{m_v v_v^2}{2} = \sum_v \frac{m_v}{2} \omega^2 h_v^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_v m_v h_v^2 = I_z \frac{\omega^2}{2} \quad (132)$$

Кинетическая энергия тела при вращательном движении:

$$T = I_z \frac{\omega^2}{2} \quad (133)$$

где:  $z$  – ось вращения.

**Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения момента инерции этого тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости тела.**

3) при плоском движении.

Скорость любой точки определяются через полюс:

$$\vec{v}_v = \vec{v}_A^{пост} + \vec{v}_{v/A}^{вращ} \quad (134)$$

Плоское движение состоит из поступательного движения со скоростью полюса и вращательного движения вокруг этого полюса, тогда кинетическая энергия складывается из энергии поступательного движения и энергии вращательного движения.

Кинетическая энергия через полюс «А» при плоском движении:

$$T = \frac{Mv_A^2}{2} + \frac{I_A\omega^2}{2} \quad (135)$$

Лучше всего за полюс брать центр масс, тогда:

$$T = \frac{Mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2} \quad (136)$$

Это удобно потому, что моменты инерции относительно центра масс всегда известны.

**Кинетическая энергия твердого тела при плоско-параллельном движении складывается из кинетической энергии поступательного движения вместе с центром масс и кинетической энергии от вращения вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения.**

Часто бывает удобным брать за полюс мгновенный центр скоростей. Тогда:

$$T = \frac{1}{2}I_p\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_p^2 \quad (137)$$

Учитывая, что по определению мгновенного центра скоростей его скорость равна нулю, то  $v_p = 0$ .

Кинетическая энергия относительно мгновенного центра скоростей:

$$T = \frac{1}{2} I_P \omega^2 \quad (138)$$

Необходимо помнить, что для определения момента инерции относительно мгновенного центра скоростей необходимо применять формулу Гюйгенса – Штейнера:

$$I_P = I_c + Md^2 \quad (139)$$

Эта формула бывает предпочтительнее в тех случаях, когда мгновенный центр скоростей находится на конце стержня.

#### 4) Теорема Кенига.

Предположим, что механическая система вместе с системой координат, проходящей через центр масс системы, движется поступательно относительно неподвижной системы координат. Тогда, на основании теоремы о сложении скоростей при сложном движении точки, абсолютная скорость произвольной точки системы запишется как векторная сумма переносной и относительной скоростей:

$$\vec{v}_v = \vec{v}_e + \vec{v}_r \quad (140)$$

где:  $\vec{v}_e$  - скорость начала подвижной системы координат (переносная скорость, т.е. скорость центра масс системы);

$\vec{v}_r$  - скорость точки относительно подвижной системы координат (относительная скорость). Опуская промежуточные выкладки, получим:

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} m_v v_r^2 \quad (141)$$

Это равенство определяет теорему Кенига.

**Формулировка:** Кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии, которую имела бы материальная точка, расположенная в центре масс системы и имеющая массу, равную массе системы, и кинетической энергии движения системы относительно центра масс.

## 5.2 Работа силы.

а) *Определение:*

**Элементарная работа силы – это скалярное произведение силы на элементарное перемещение, т.е. произведение модуля силы на элементарное перемещение и на косинус угла между ними.**

$$dA(\vec{F}) = |\vec{F}| \underbrace{|d\vec{r}| \cos(\vec{F} \wedge d\vec{r})}_{\substack{\text{проекция перемещения} \\ \text{на направ. силы}}} = |d\vec{r}| \underbrace{|\vec{F}| \cos(\vec{F} \wedge d\vec{r})}_{\substack{\text{проекция силы на} \\ \text{направл. перемещения}}} \quad (142)$$

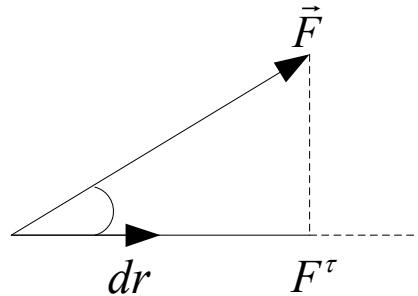


Рис. 34

Т.е. элементарная работа может быть вычислена умножением проекции силы на перемещение.

Работа положительная, если сила помогает перемещению, т.е. угол между направлением силы и перемещением равен нулю или острый.

Работа отрицательная, если сила мешает перемещению, т.е. угол между направлением силы и перемещением тупой или равен  $180^\circ$ .

Работа равна нулю, если угол между направлением силы и перемещением равен  $90^\circ$ , или нет перемещения у точки приложения силы.

б) **Работа силы на конечном перемещении:**

Работа силы на конечном перемещении определяется интегрированием по траектории:

$$A(\vec{F}) = \int \vec{F} d\vec{r} = \int_{\substack{\text{по} \\ \text{траектории}}} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (143)$$

в) **Работа силы упругости:**

Сила упругости определяется формулой:



$$F_{\text{упр}} = -c\lambda \quad (144)$$

где  $c$  – коэффициент жесткости пружины.

$\lambda$  – деформация пружины.

Знак минус означает, что сила упругости всегда противоположна деформации.

Сила упругости равна нулю, когда нет деформации, т.е. пружина не нагружена.

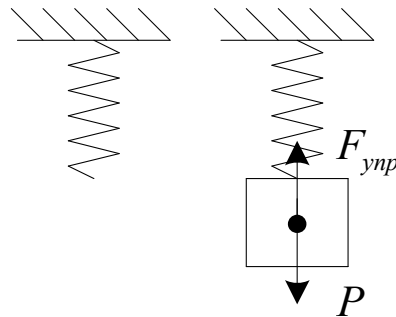


Рис. 35

б) Работа силы упругости:

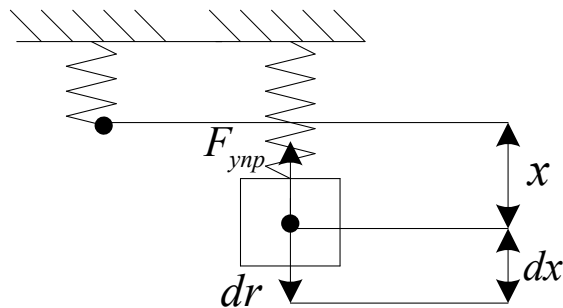


Рис. 36

$$A(F_{\text{упр}}) = \int F_{\text{упр}} dr = - \int_{\lambda_0}^{\lambda} cxdx = \frac{cx^2}{2} \Big|_{\lambda}^{\lambda_0} = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda^2) \quad (145)$$

Работа силы упругости:

$$A(F_{\text{упр}}) = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda^2) \quad (146)$$

Работа положительная – если  $|\lambda_0| > |\lambda|$

Работа отрицательная – если  $|\lambda_0| < |\lambda|$

Работа равна нулю – если  $|\lambda_0| = |\lambda|$

**Работа силы упругости равна половине произведения коэффициента жесткости на разность квадратов начального и конечного удлинения (или сжатия) пружины.**

Работа не зависит от вида деформации (сжатие или растяжение).

г) **Работа силы тяжести:**

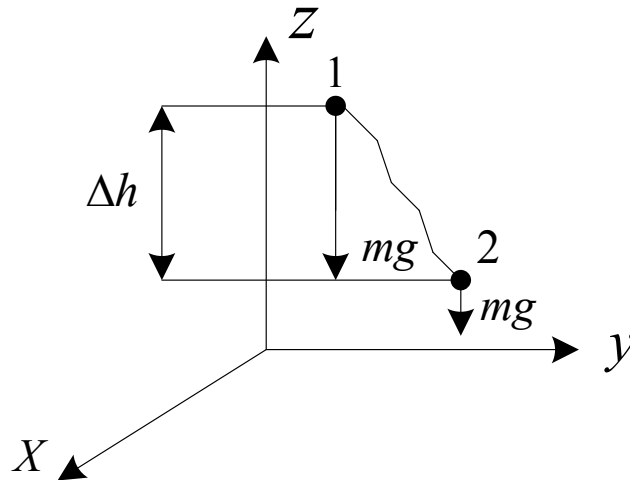


Рис. 37

Пусть точка перемещается из положения 1 в положение 2.

По определению работы:

$$\begin{aligned}
 A(mg) &= A(G) = \int \vec{G} d\vec{r} = \int (P_x dx + P_y dy + P_z dz) = \\
 &= - \int_{z_1}^{z_2} G dz = G(z_1 - z_2)
 \end{aligned} \tag{147}$$

Работа силы тяжести:

$$A(G) = \pm G(z_1 - z_2) \tag{148}$$

$$A(G) = \pm mg \Delta h \tag{149}$$

Работа положительная, если  $z_1 > z_2$ , т.е. начальная высота точки приложения силы выше, чем в конечный момент, т.е. происходит движение в сторону силы.

Работа отрицательная, если  $Z_1 < Z_2$ , т.е. начальное положение точки приложения силы тяжести ниже конечного, т.е. происходит движение противоположно направлению действия силы.

Работа равна нулю, если в начальный момент и в конечный момент времени точка приложения силы тяжести находится на одинаковой высоте.

**д) Работа силы трения скольжения:**

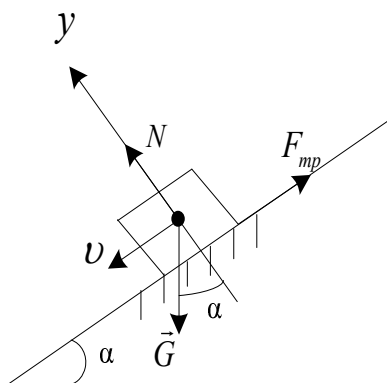


Рис. 38

Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось  $Y$ :

$$ma_y = -G \cos \alpha + N \quad (150)$$

Движение вдоль оси  $Y$  отсутствует, поэтому  $a_y = 0$ , т.е.

$$N = G \cos \alpha \quad (151)$$

$$F_{mp.ск.} = fN = fmg \cos \alpha \quad (152)$$

$$dA(\vec{F}_{mp.ск.}) = \vec{F}_{mp.ск.} d\vec{r} = -|\vec{F}_{mp.}| |d\vec{r}| = -fmg \cos \alpha dr \quad (153)$$

**е) Мощность силы.**

**Средней мощностью силы называется отношение работы этой силы к тому промежутку времени, за которое она совершена:**

$$N_{cp} = \frac{A}{t} \quad (154)$$

**Мгновенной мощностью силы называется первая производная по времени от работы этой силы:**

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (155)$$

То есть, мощность определяется скалярным произведением силы на скорость точки приложения этой силы.

**ж) Элементарная работа момента силы.**

Пусть движение по траектории происходит под действием силы  $\vec{F}$ , причем  $\rho$  - радиус кривизны траектории в точке приложения силы.

$O$  - центр кривизны траектории.

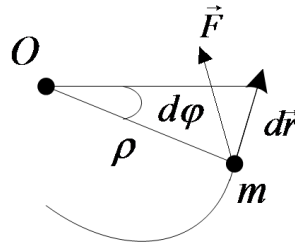


Рис. 39

$$dA(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (156)$$

Подставим  $dr = \rho \cdot d\varphi$  в (147), получим элементарную работу момента силы:

$$dA(M) = \pm M d\varphi \quad (157)$$

Работа момента силы положительная, если момент направлен в сторону угла поворота.

Работа момента силы отрицательная, если момент направлен против угла поворота.

Работа момента силы равна нулю, если нет угла поворота.

**5.3 Теорема об изменении кинетической энергии изменяемых и неизменяемых систем.**

**а) Дифференциальный вид теоремы:**

Запишем второй закон Ньютона для произвольной материальной точки:

$$m_v \vec{a}_v = \vec{F}_v^e + \vec{F}_v^i \quad (158)$$

где:  $\vec{F}_v^e$  - равнодействующая внешних сил приложенных к  $V$  - й точке.

$\vec{F}_v^i$  - равнодействующая внутренних сил приложенных к  $V$  - й точке.

Умножим почленно скалярно это уравнение на  $d\vec{r}_v$ , получим:

$$m_v \frac{d\vec{v}_v}{dt} d\vec{r}_v = \vec{F}_v^e \cdot d\vec{r}_v + \vec{F}_v^i \cdot d\vec{r}_v \quad (159)$$

Учтем, что скорость это первая производная от радиус-вектора по времени:

$$\vec{v}_v = \frac{d\vec{r}_v}{dt} \quad (160)$$

Подставив это выражение (160) в предыдущее равенство (159), получим:

$$m_v \vec{v}_v d\vec{v}_v = \vec{F}_v^e \cdot d\vec{r}_v + \vec{F}_v^i \cdot d\vec{r}_v \quad (161)$$

Внесем выражение ( $m_v \vec{v}_v$ ) под знак дифференциала, получим:

$$d\left(\frac{m_v v_v^2}{2}\right) = \vec{F}_v^e \cdot d\vec{r}_v + \vec{F}_v^i \cdot d\vec{r}_v \quad (162)$$

Суммируем по  $V$ , т.е. по всем материальным точкам системы:

$$d \sum_{v=1}^n \frac{m_v v_v^2}{2} = \sum_{v=1}^n \vec{F}_v^e \cdot d\vec{r}_v + \sum_{v=1}^n \vec{F}_v^i \cdot d\vec{r}_v \quad (163)$$

Учтем, что:

$$d \sum \frac{m_v v_v^2}{2} = dT \quad (164)$$

Правая часть выражения (154):

$$\vec{F}_v^e \cdot d\vec{r}_v = dA(\vec{F}_v^e) \quad (165)$$

$$\vec{F}_v^i \cdot d\vec{r}_v = dA(\vec{F}_v^i) \quad (166)$$

Окончательный вид теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальном виде:

$$dT = \sum_{\nu=1}^n dA(\vec{F}^e) + \sum_{\nu=1}^n dA(\vec{F}^i) \quad (167)$$

*Формулировка:* полный дифференциал кинетической энергии механической системы равен алгебраической сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил действующих на систему.

**б) Интегральный вид теоремы:**

Проинтегрируем выражение, записанное для теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальном виде:

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = \sum_{\nu=1}^n \int_{S_1}^{S_2} dA(\vec{F}^e) + \sum_{\nu=1}^n \int_{S_1}^{S_2} dA(\vec{F}^i) \quad (168)$$

Получим интегральный вид теоремы об изменении кинетической энергии:

$$T_2 - T_1 = \sum_{\nu=1}^n A(\vec{F}^e) + \sum_{\nu=1}^n A(\vec{F}^i) \quad (169)$$

*Формулировка:* изменение кинетической энергии при перемещении механической системы из одного положения в другое равно алгебраической сумме работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему на этом перемещении.

Это единственная из общих теорем динамики, в которую входят внутренние силы (и то не всегда). Это зависит от того является система изменяемой или неизменяемой.

**с) Изменяемые и неизменяемые механические системы.**

*Определение:* изменяемой механической системой называется такая система, у которой расстояние между материальными точками при движении изменяются.

Система называется неизменяемой, если расстояния между материальными точками при движении остаются неизменными.

Например:

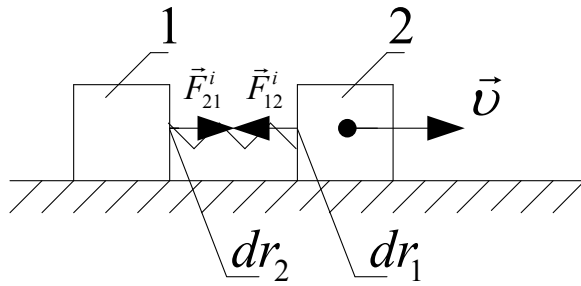


Рис. 40

По третьему закону Ньютона  $F_{12}^i = -F_{21}^i$

Изменяемая система:

$$\sum dA(\vec{F}^i) = -|F_{12}^i||dr_1| + |F_{21}^i||dr_2| \neq 0, \text{ т.к. } dr_1 \neq dr_2 \quad (170)$$

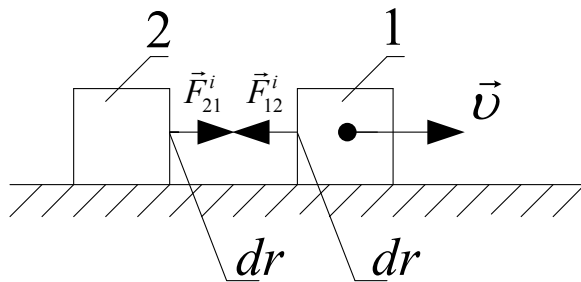


Рис. 41

$$\sum dA(\vec{F}^i) = 0, \text{ т.к. } dr_1 = dr_2 = dr; F_{12}^i = -F_{21}^i \quad (171)$$

Неизменяемая система.

Для неизменяемых систем сумма работ внутренних сил равна нулю и внутренние силы в теорему не входят.

Для неизменяемых механических систем:

$$dT = \sum_{v=1}^n dA(\vec{F}_v^e) \quad (172)$$

$$T_2 - T_1 = \sum_{v=1}^n A(\vec{F}_v^e) \quad (173)$$

#### 5.4 Потенциальное силовое поле.

а) *Определение 1:* силовым полем называется область пространства, в каждой точке которой действует сила.

**Определение 2:** потенциальным силовым полем называется область пространства, в каждой точке которой задана потенциальная функция от координат  $U(x, y, z)$ , полный дифференциал которой равен элементарной работе силы.

$du = dA$  - определение потенциального поля.

**б) Основные свойства потенциального поля.**

1) Элементарная работа в потенциальном поле является полным дифференциалом.

2) Работа в потенциальном поле на конечном перемещении не зависит от траектории, от пути, а зависит только от координат начальной и конечной точек движения:

По определению:

$$A = \int dA = \int_{u_1}^{u_2} du = u_2 - u_1 = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1) \quad (174)$$

3) Работа в потенциальном поле по замкнутой траектории равна нулю.

$$\oint dA = \oint du = 0, \text{ т.к. } u_1 = u_2$$

4) Сила, в потенциальном поле является градиентом потенциальной функции. По определению потенциального поля:  $du = dA$ .

По определению полного дифференциала:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad (175)$$

По определению элементарной работы:

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (176)$$

Сравнивая, (175) и (176) получим:



$$\left. \begin{aligned} F_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ F_y &= \frac{\partial u}{\partial y} \\ F_z &= \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (177)$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = \nabla u = \text{grad}(u) \quad (178)$$

Градиент – вектор, показывающий направление наискорейшего изменения данного скалярного поля в окрестностях данной точки.

$$\vec{F} = \text{grad}U \quad (179)$$

### 5.5 Потенциальная энергия.

а) *Определение:* эквипотенциальной поверхностью или поверхностью уровня называется такая поверхность, в каждой точке которой значение потенциальной функции одно и то же.

б) *Определение:* потенциальной энергией механической системы называется тот запас работы, которую совершают силы потенциального поля при переходе механической системы с заданного потенциального уровня на уровень, условно принятый за нулевой.

Вывод формулы:

$$\Pi = A = \int dA = \int_u^0 du = 0 - u = -u \quad (180)$$

$$\Pi = -u(x, y, z) \quad (181)$$

Потенциальная энергия равна потенциальной функции с обратным знаком, значит, является функцией только координат и не зависит от скоростей и ускорений.

Отсюда следует, что  $\vec{F} = \text{grad}U = -\text{grad}\Pi$ , т.е. сила как градиент направлена в сторону возрастания потенциальной функции  $u$ , но в сторону убывания потенциальной энергии, т.е. в сторону убывания потенциала.

с) **Закон сохранения механической энергии.**

Пусть внешние и внутренние силы потенциальны, тогда по теореме о кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$dT = dA(\vec{F}^e) + dA(\vec{F}^i) \quad (182)$$

$$dA(\vec{F}^e) = du^e \quad (183)$$

$$dA(\vec{F}^i) = du^i \quad (184)$$

По определению потенциального поля:

$$dU = -d\Pi^e - d\Pi^i \quad (185)$$

Отсюда:

$$dT = -d\Pi^e - d\Pi^i \quad (186)$$

Или:

$$dT + d\Pi^e + d\Pi^i = 0 \quad (187)$$

Внесем под знак дифференциала:

$$d(T + \Pi^e + \Pi^i) = 0 \quad (188)$$

Отсюда:

$$T + \Pi^e + \Pi^i = const \quad (189)$$

Закон сохранения механической энергии. Это равенство называется интегралом движения:

$$E = T + \Pi = const \quad (190)$$

*Формулировка:*

**Если все силы системы потенциальны и потенциал не зависит от времени, то при движении механической системы ее полная механическая энергия остается величиной постоянной.** Полная механическая энергия это сумма кинетической и потенциальной энергий. Это означает, что механическая энергия сохраняется не только в замкнутых системах, но и при воздействии

внешних сил, если они потенциальны. Силы и системы сил, для которых выполняется закон сохранения энергии, называются консервативными.

## 6 ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассматриваемые вопросы:

*Динамика простейших движений твердого тела: дифференциальные уравнения поступательного, вращательного и плоскопараллельного движения твердого тела. Дифференциальные уравнения движения системы материальных точек.*

### 6.1 Основные задачи динамики твердого тела

Решение задач динамики твердого тела встречаются две основные группы задач. К первой группе относятся задачи, в которых по заданным уравнениям движения твердого тела требуется определить систему сил, под действием которых происходит это движение. Ко второй относятся задачи, в которых по заданным силам, действующим на тело, требуется при определенных начальных условиях определить уравнение движения центра масс, а для несвободного тела найти также реакции связей.

Рассмотрим движение твердого тела в плоскости. Для определения его положения требуется задать три независимых между собой параметра, обычно это координаты центра масс  $x_c$ ,  $y_c$  и угол поворота  $\varphi$ , которые полностью определяют положение твердого тела в плоскости.

Движение тела в плоскости обычно раскладываются на простейшие: поступательное движение тела, задаваемое уравнениями движения центра масс  $x_c = x_c(t)$ ,  $y_c = y_c(t)$  и вращение тела вокруг оси, проходящей через центр масс тела, задаваемое уравнением  $\varphi = \varphi(t)$ .

Для получения законов движения можно воспользоваться теоремой о движении центра масс и теоремой об изменении кинетического момента.

Согласно теореме о движении центра масс получим:

$$M\ddot{\vec{r}}_c = \sum_v \vec{F}_v^e, \text{ т.е. в проекциях } m\ddot{x}_c = \sum F_{vx}; m\ddot{y}_c = \sum F_{vy};$$

Согласно теореме об изменении кинетического момента относительно оси вращения получим:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum M_z^e \quad (191)$$

Законы движения тела в плоскости имеют вид:

$$m\ddot{x}_c = \sum F_{vx} ; m\ddot{y}_c = \sum F_{vy} ; I_z \ddot{\varphi} = \sum M_z^e \quad (192)$$

## 6.2 Дифференциальные уравнения движения твёрдого тела

а) Дифференциальные уравнения поступательного движения твёрдого тела

*Для того, чтобы твёрдое тело двигалось поступательно, линия действия главного вектора внешних сил механической системы должна проходить через центр масс тела.*

Так как, по определению, при поступательном движении все точки тела движутся одинаково (т.е. имеют равные скорости, ускорения и совпадающие при наложении траектории), то для изучения поступательного движения твёрдого тела достаточно знать движение какой-либо одной точки тела. Это может быть и центр масс.

Спроецировав теорему о движении центра масс на координатные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  получим три скалярных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_c &= \sum F_{vx} \\ m\ddot{y}_c &= \sum F_{vy} \\ m\ddot{z}_c &= \sum F_{vz} \end{aligned} \right\} \quad (193)$$

Дифференциальный закон движения точки в пространстве (или в плоскости) в общем случае позволяет решить две основные задачи динамики.

б) Дифференциальные уравнения вращательного движения твёрдого тела

Твёрдое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, является примером несвободного твёрдого тела. Следовательно, при изучении его движения необходимо отбросить связи, заменив его реакциями связей, рассматривать твёрдое тело как свободное.

Дифференциальное уравнение вращательного движения твёрдого тела

имеет вид:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum M_z^e \quad (194)$$

где  $I_z$  – момент инерции тела относительно оси вращения  $z$ ;

$\ddot{\varphi}$  – угловое ускорение тела;

$\sum M_z^e$  – сумма моментов внешних сил относительно оси вращения.

Реакции подшипников считаем внешними силами, которые не создают моменты относительно оси вращения, т.к. линии их действия пересекают эту ось.

Дифференциальное уравнение вращательного движения тела при известном моменте инерции относительно оси вращения  $I_z$  позволяет решать следующие задачи:

1. Зная закон движения тела  $\varphi = \varphi(t)$ , можно определить момент внешней силы, действующей на тело, или силу, создающую этот момент.

2. Зная момент внешних сил, приложенных к телу, и начальные условия  $\varphi(0) = \varphi_0$ ,  $\omega(0) = \omega_0$ , определить закон вращательного движения тела.

в) Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твёрдого тела

При плоском движении все точки твёрдого тела движутся в параллельных плоскостях. Поэтому достаточно рассмотреть движение какого-либо сечения тела в одной плоскости.

Дифференциальные уравнения плоского движения твёрдого тела имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_C &= \sum F_{kx}^e \\ m\ddot{y}_C &= \sum F_{ky}^e \\ I_z \ddot{\varphi} &= \sum M_z^e \end{aligned} \right\} \quad (195)$$

Где:  $m$  – масса тела;

$\ddot{x}_C, \ddot{y}_C$  – проекции ускорения центра масс на оси координат;

$\ddot{\varphi}$  – угловое ускорение тела;

$\sum F_{kx}^e, \sum F_{ky}^e$  – сумма проекций внешних сил на соответствующие оси координат;

$I_z$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения тела;

$\sum M_z^e$  – сумма моментов внешних сил относительно той же оси.

Интегрируя эти уравнения, можно определить  $X_C, Y_C$  и  $\varphi$  как функции времени. Для определения постоянных интегрирования используются начальные условия движения: координаты центра масс и угол поворота тела в начальный момент времени, а также проекции начальной скорости центра масс на оси координат и начальная угловая скорость тела.

Если тело совершает несвободное движение, то в число внешних сил следует включить реакции связей.

## 7 Основы аналитической механики

Рассматриваемые вопросы:

*Виды аналитических связей: односторонние и двухсторонние, кинематические и геометрические, стационарные и нестационарные, голономные и неголономные, идеальные и неидеальные. Уравнения аналитических связей. Вариация и дифференциал. Перемещения возможные и действительные. Виртуальная работа силы и момента силы. Постулат идеальных связей. Принцип возможных перемещений, принцип возможных скоростей (принцип Лагранжа).*

### 7.1 Аналитические связи.

**Связями называют любого вида ограничения, налагаемые на положения (координаты) и скорости точек механической системы.**

Обычно это – поверхность, стержень, шарнир и т.п.

Ограничение свободы перемещения точек системы можно выразить аналитически в виде уравнения, устанавливающего зависимость между координата-

ми  $(x, y, z)$ , проекциями скоростей  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ , и временем  $t$ . Такое уравнение называется уравнением связи. Общий вид уравнения связи:

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0 \quad (196)$$

Ограничения, накладываемые связями, не зависят от начальных условий и сил, действующих на систему.

И. Ньютон заложил динамику свободных систем (без связей). Это вполне устраивало требованиям астрономии, но последующее развитие техники привело к необходимости расчетов с наличием опор. Несвободные системы впервые рассмотрели Яков и Иоганн Бернулли. В 1743г. Даламбер Жан Лерон опубликовал работу «Трактат о динамике», в которой дан принцип механики, который существенно упростил изучение движения несвободных механических систем. Даламбер сформулировал принцип в наиболее общем виде и применил его для исследования движения любых несвободных механических систем. Аналитическую механику как науку основал Жозеф Лангранж, выпустив в 1788 году книгу «Аналитическая механика», тогда и были подведены предварительные итоги развития аналитической механики.

Связи классифицируют по разным признакам. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся признаки классификации.

## 7.2 Классификация связей.

а) **Связи удерживающие (двухсторонние) и неудерживающие (односторонние).**

**Определение:** Удерживающие это связи, которые запрещают движение в некотором направлении и в направлении обратном этому, они сохраняют свое действие во все время движения точек системы.

Примером является маятник, подвешенный на жестком стержне.



Рис. 45

Уравнение связи:

$$f(x, y, z) = 0 \quad (197)$$

**Связи называются неудерживающими или односторонними, если они ограничивают движение в некотором направлении, но разрешают движение в обратном направлении, они могут в некоторые промежутки времени меняться.**

Стержень заменим нерастяжимой нитью, ограничивающей движение от точки подвеса, но позволяющей движение к точке подвеса.

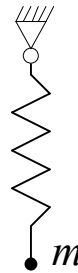


Рис. 46

Уравнение односторонней связи описывается неравенствами:

$$f(x, y, z) \leq 0 \quad (198)$$

**б) Связи кинематические и геометрические.**

**Определение:** Геометрическими (или конечными) связями называются связи, зависящие только от положения механической системы и не зависящие от её движения, т.е. от скоростей и ускорений.

Если в системе «n» материальных точек, то уравнение связи имеет вид:

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (199)$$

**Определение:** Кинематическими (или дифференциальными) называются связи, зависящие не только от координат, но и от их производных.

Уравнение:  $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0 \quad (200)$

**в) Связи стационарные и нестационарные.**

**Определение:** Стационарными называются связи явно не зависящие от времени, т.е. это постоянные связи, не изменяющиеся с течением времени.

Все до сих пор рассмотренные связи являются стационарными.



**Нестационарными называются связи в уравнения, которых входит время в явном виде, она меняется с течением времени.**

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0 \quad (201)$$

Примером стационарной связи может служить нить математического маятника. (Длина нити не меняется).

Примером нестационарной связи является маятник, длина которого меняется с течением времени.

Система называется **склерономной**, если на нее наложены только стационарные связи. В противном случае система называется **реономной**.

**г) Связи голономные (интегрируемые) или неголономные (неинтегрируемые).**

Термин «голономная связь» введен Герцем, означает «интегрируемая связь».

Кинематические связи выражаются дифференциальными уравнениями, в ряде случаев можно найти интегрирующий множитель, позволяющий левую часть дифференциальных уравнений представить в виде полной производной по времени, т.е. при этом уравнение можно проинтегрировать.

*Определение:* Голономными или интегрируемыми связями называются такие связи, для которых существует интегрирующий множитель, позволяющий интегрировать уравнения кинематической связи, поэтому голономные связи часто называют геометрическими.

Неголономными связями называются связи для уравнений, которых не существует интегрирующего множителя, позволяющего интегрировать эту связь, и они остаются кинематическими.

**д) Идеальные и неидеальные связи.**

**Идеальная связь – это такая связь, сумма работ реакций которой на любом возможном перемещении системы равна нулю.**

Примеры идеальных связей: абсолютно гладкая поверхность, абсолютно не растяжимая нить, абсолютно твердое тело и т.п.

Примеры неидеальных связей: шероховатая поверхность, упругая нить, упругий стержень, упругое тело и т.д.

### 7.3 Вариация и дифференциал.

**Дифференциалом является главная часть приращения функции за счет бесконечно малого изменения аргумента.**

$$df = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] \quad (202)$$

Т.е. изменяется аргумент и из-за этого изменяется функция.

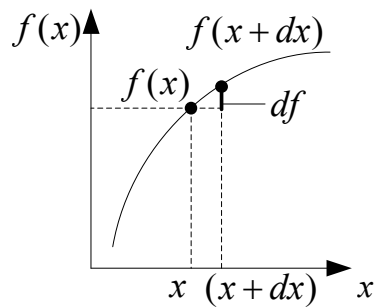


Рис.42

**Вариацией является бесконечно малое изменение функции за счет изменения вида самой функции при неизменном, фиксированном значении аргумента.**

Правило варьирования не отличаются от правил дифференцирования

$$\delta(cx) = c\delta x$$

$$\delta(\cos x) = -\sin x \delta x$$

$$\delta(f_1 + f_2) = \delta f_1 + \delta f_2 \text{ и т.д.}$$

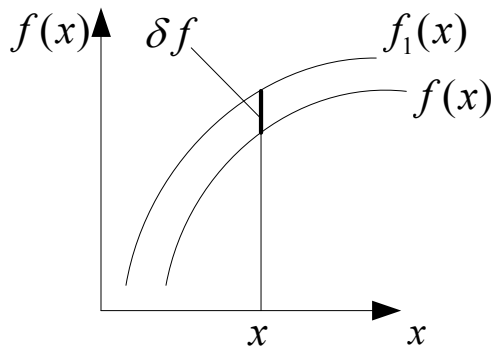


Рис.43

#### 7.4 Перемещения возможные и действительные.

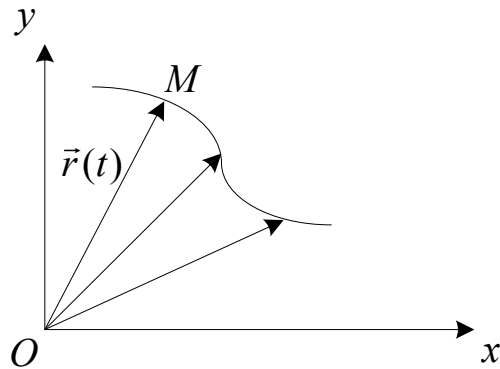


Рис.44

**Действительные перемещения** это перемещения, происходящие в пространстве и во времени, т.е. **действительным перемещением точки называется бесконечно малое перемещение под действием внешних сил в соответствии с законом движения и уравнением связи, происходящие по траекториям при постоянном изменении времени.**

Если рассматриваем действительные перемещения бесконечно малые, то они являются дифференциалом, т.к. меняется аргумент время и за счет этого меняется функция  $\vec{r}(t)$ .

Возможные перемещения не происходят на самом деле, но они могут происходить, так как допускаются связями.

**Определение:** **возможным перемещением называется любое бесконечно малое, воображаемое перемещение, допускаемое в данный момент связями.**

Время (аргумент) фиксированное (остановленное) поэтому возможное перемещение является вариацией  $\delta\vec{r}$ .

$\delta\vec{r}$  - изменение вида функции при постоянном аргументе.

Классический пример: кривошипно-ползунный механизм:

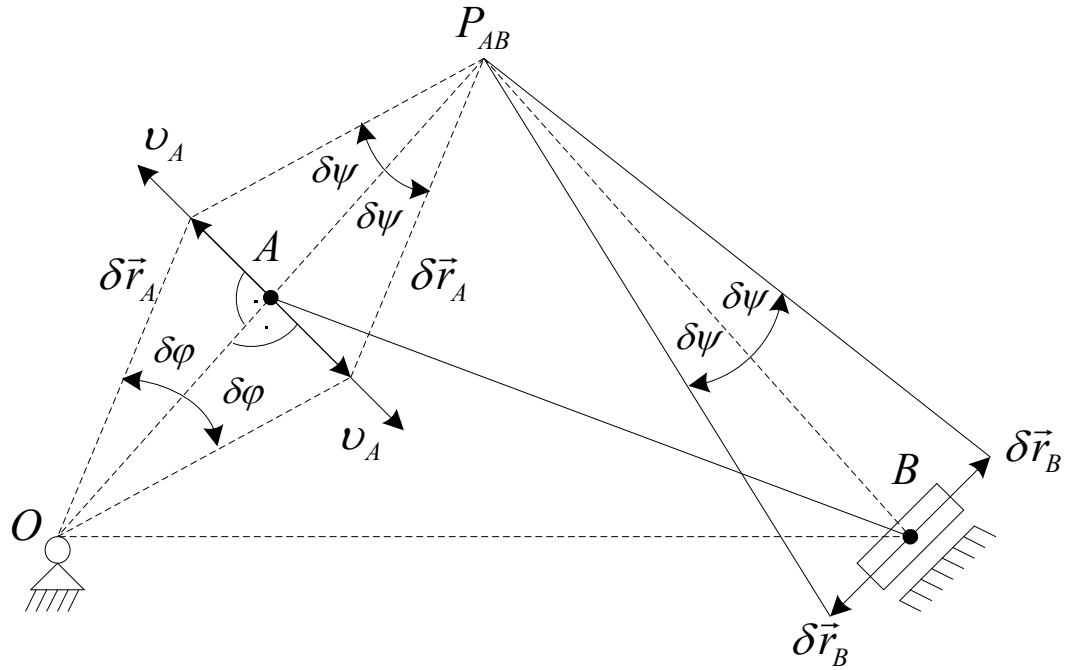


Рис. 45

точка  $O$  - нет возможных перемещений;

точка  $A$  - возможно движение по окружности в обе стороны;

$$\delta \vec{r}_A \perp OA$$

Перемещения в одну и в другую сторону считаются как одно.

Перемещение  $\delta \vec{r}_B$  - возможное перемещение точки  $B$ .

Перемещение  $\delta \varphi$  - возможен поворот стержня  $OA$  вокруг точки  $O$ .

Перемещение  $\delta \psi$  - возможен поворот шатуна  $AB$  вокруг мгновенного центра скоростей стержня  $AB$ .

### 7.5 Виртуальная работа.

#### а) Виртуальная работа силы.

**Определение:** Виртуальной работой силы, приложенной к какой-либо точке тела, движущегося поступательно, называется скалярное произведение вектора силы на вектор возможного перемещения точки, в которой приложена эта сила:

$$\delta A(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = |\vec{F}| |\delta \vec{r}| \cos(\angle \vec{F}, \delta \vec{r}) = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z \quad (203)$$

Как уже говорилось работа это число положительное, отрицательное или ноль.

Знак зависит от знака косинуса угла между силой и возможным перемещением.

Положительное значение:

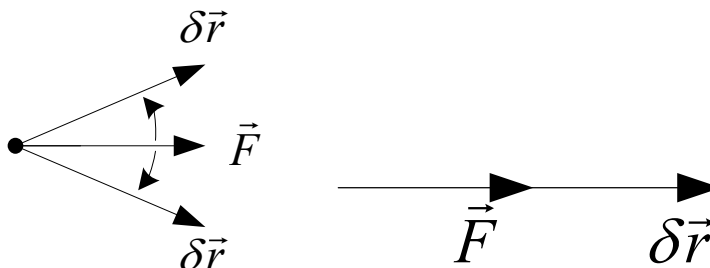


Рис.46

Отрицательное значение:



Рис.47

Работа равна нулю, если между направлением силы и возможным перемещением угол прямой.

**Виртуальная работа силы, приложенной к какой-либо точке тела, вращающегося вокруг неподвижного центра в плоскости, равна произведению момента силы относительно оси вращения на виртуальный угол поворота тела.**

### 7.6 Принцип Лагранжа (Принцип возможных перемещений)

Принцип Лагранжа имеет несколько формулировок и относится к механическим системам, находящимся в равновесии.

Из статики известно, что для равновесия механической системы необходимо и достаточно, чтобы система сил, действующих на каждую точку механической системы, была уравновешена и, чтобы в начальный момент времени ме-

ханическая система находилась в покое, т.е. чтобы *начальные скорости всех точек были нулевыми*.

$$\vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu = 0, \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (204)$$

Будем предполагать, что последнее условие выполнено.

**Формулировка ПВП:** для равновесия механической системы, на которую наложены стационарные, голономные, идеальные связи необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма виртуальных работ всех активных сил и моментов активных сил на любом возможном перемещении была равна нулю.

$$\sum \delta A^{акт.} = \sum \vec{F}_\nu^{акт.} \cdot \delta \vec{r}_\nu = 0 \quad (205)$$

**Принцип Лагранжа (Принцип возможных скоростей).**

**Формулировка ПВС:** для равновесия механической системы, на которую наложены стационарные, голономные, идеальные связи необходимо и достаточно, чтобы возможная мощность всех активных сил и моментов активных сил на любом возможном перемещении была равна нулю.

$$\sum_{\nu=1}^n \vec{F}_\nu^{акт.} \cdot \vec{q}_\nu = 0 \quad (206)$$

Доказательство:

*1.Необходимость.* Докажем ее для ПВП.

Если система находится в равновесии, то

$$\vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu = 0, \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (207)$$

Домножим каждое из этих уравнений на соответствующее возможное перемещение и все уравнения просуммируем:

$$\sum_{\nu=1}^n \vec{F}_\nu \cdot \delta \vec{r}_\nu + \sum_{\nu=1}^n \vec{R}_\nu \cdot \delta \vec{r}_\nu = 0. \quad (208)$$

Поскольку по условию идеальности связей вторая сумма равна нулю, то и первая сумма равна нулю:

$$\sum_{\nu=1}^n \vec{F}_{\nu} \cdot \delta \vec{r}_{\nu} = 0 \quad (209)$$

Необходимость доказана.

2. Достаточность. (Обратная теорема)

Дано:  $\sum \delta A^{akt} = 0$ . Доказать, что система находится в равновесии.

Теорема доказывается методом от противного.

Предположим, что  $\sum \delta A^{akt} = 0$ , но система не находится в равновесии.

Тогда есть сила, нарушающая это равновесие, т.е.  $\sum_{\nu=1}^n \vec{F}_{\nu} \neq 0$ .

При нулевых начальных условиях перемещение под действием этой силы будет направлено в сторону силы, то есть  $\sum \delta A^{akt} > 0$ , что противоречит условию, т.к. нам дано, что  $\sum \delta A^{akt} = 0$ . Значит, предположение было неверным, и, система находится в равновесии.

Отметим, что уравнение ПВП часто называют *общим уравнением статики*, поскольку из него могут быть получены все уравнения статики.

Этот принцип позволяет решать задачи на равновесие методами динамики. Этот принцип был известен со времен Архимеда под названием «**золотого правила механики**» - выигрыш в силе компенсируется проигрышем в перемещении и наоборот.

## 8. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Рассматриваемые вопросы:

*Принцип Даламбера для материальной точки. Силы инерции. Принцип Даламбера для механической системы. Главный вектор сил инерции. Главный момент сил инерции. Частные случаи приведения сил инерции: при поступательном движении, при вращательном движении вокруг центра масс, при вращении вокруг произвольной оси, при плоском движении, при равномерном вращении однородного стержня. Динамические реакции подшипников при вращении*

тела около неподвижной оси. Метод кинестатики. Принцип Даламбера – Лагранжа. Общее уравнение динамики.

### 8.1 Принцип Даламбера для материальной точки

Рассмотрим движущуюся механическую систему. В составе движущейся системы выделим точечную массу и запишем для нее второй закон Ньютона в виде:

$$m_v \ddot{\vec{r}}_v = \vec{F}_v^e + \vec{N}_v^i \quad (210)$$

Преобразуем к виду:

$$\vec{F}_v^e + \vec{N}_v^i + (-m_v \ddot{\vec{r}}_v) = 0 \quad (211)$$

Обозначим:

$$\vec{\Phi}_v^{un.} = (-m_v \ddot{\vec{r}}_v); \quad (212)$$

**Силой инерции** материальной точки называется векторная величина, равная по модулю произведению массы точки на её ускорение, и направленная противоположно вектору ускорения,  $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$ .

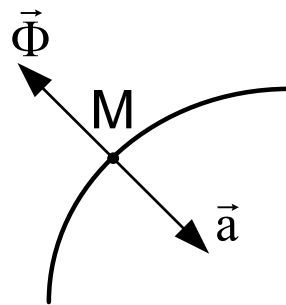


Рис.48

Принцип Даламбера для материальной точки формулируется так: **если к фактически действующим на материальную точку активным силам  $\vec{F}$  и силам реакции связей  $\vec{N}$  добавить фиктивную силу инерции  $\vec{\Phi}$ , то полученная система сил будет уравновешенной и к ней можно применить уравнения статики:**

$$\vec{F}_v^e + \vec{N}_v^i + \vec{\Phi}_v^{un.} = 0. \quad (213)$$



## 8.2 Принцип Даламбера для механической системы

По принципу Даламбера для материальной точки:

$$\vec{F}_\nu^e + \vec{N}_\nu^i + \vec{\Phi}_\nu^{ин.} = 0$$

Умножим почленно, векторно это уравнение на  $\vec{r}_\nu$ , получим векторное произведение:

$$\left[ \vec{r}_\nu \cdot \vec{F}_\nu^e \right] + \left[ \vec{r}_\nu \cdot \vec{N}_\nu^i \right] + \left[ \vec{r}_\nu \cdot \vec{\Phi}_\nu^{ин.} \right] = 0 \quad (214)$$

Просуммировав по всем материальным точкам механической системы, уравнения (203) и (204) получим:

$$\sum_{\nu=1}^n \vec{F}_\nu^e + \sum_{\nu=1}^n \vec{N}_\nu^i + \sum_{\nu=1}^n \vec{\Phi}_\nu^{ин.} = 0 \quad (215)$$

$$\sum_{\nu=1}^n \left[ \vec{r}_\nu \cdot \vec{F}_\nu^e \right] + \sum_{\nu=1}^n \left[ \vec{r}_\nu \cdot \vec{N}_\nu^i \right] + \sum_{\nu=1}^n \left[ \vec{r}_\nu \cdot \vec{\Phi}_\nu^{ин.} \right] = 0 \quad (216)$$

Уравнение (206) представляет собой сумму моментов всех внешних сил, сил реакции (внутренних сил) и моментов сил инерции.

Учитывая, что сумма всех внутренних сил и сумма моментов внутренних сил равна нулю, получим принцип Даламбера для механической системы в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n \vec{F}_\nu^e + \sum_{\nu=1}^n \vec{\Phi}_\nu^{ин.} = 0 \\ \sum_{\nu=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}_\nu^e) + \sum_{\nu=1}^n \vec{M}_0(\vec{\Phi}_\nu^e) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (217)$$

**Формулировка:** Если в любой момент времени к действующим на механическую систему внешним силам и моментам внешних сил добавить фиктивные силы инерции и моменты сил инерции, получим формально уравновешенную систему сил, для которой можно записать условия и уравнения равновесия.

## 8.3 Главный вектор сил инерции.

Главный вектор сил инерции – это векторная сумма всех сил инерции,

приложенных к телу.

$$\vec{R}^{\dot{e}i.} = \sum_{v=1}^n \vec{O}_v^{\dot{e}i.} \quad (218)$$

По определению центра масс:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{v=1}^n m_v \vec{r}_v}{\sum_{v=1}^n m_v} = \frac{\sum_{v=1}^n m_v \vec{r}_v}{M} \quad (219)$$

Дважды продифференцируем и преобразовав, получим:

$$M \ddot{\vec{r}}_c = \sum_{v=1}^n m_v \cdot \ddot{\vec{r}}_v \quad (220)$$

Подставив (220) в (218), получим выражение для главного вектора сил инерции механической системы:

$$\vec{R}^{\dot{e}i.} = \sum_{v=1}^n \vec{O}_v^{\dot{e}i.} = -\sum_{v=1}^n m_v \cdot \vec{a}_v = -M \cdot \vec{a}_c; \quad (221)$$

**Определение:** Главный вектор сил инерции равен произведению массы механической системы на ускорение ее центра масс и направлен в сторону противоположную ускорению центра масс.

#### 8.4. Главный момент сил инерции

Главный момент сил инерции - это векторная сумма моментов всех сил инерции, приложенных к некоторой точке, которую называют центром приведения.

$$\vec{M}_0^{\dot{e}i.} = \sum_{v=1}^n \vec{M}_0(\vec{O}_v^{\dot{e}i.}); \quad (222)$$

Главный момент сил инерции обычно вычисляют при вращательном движении, поэтому его вычисляют относительно оси вращения.

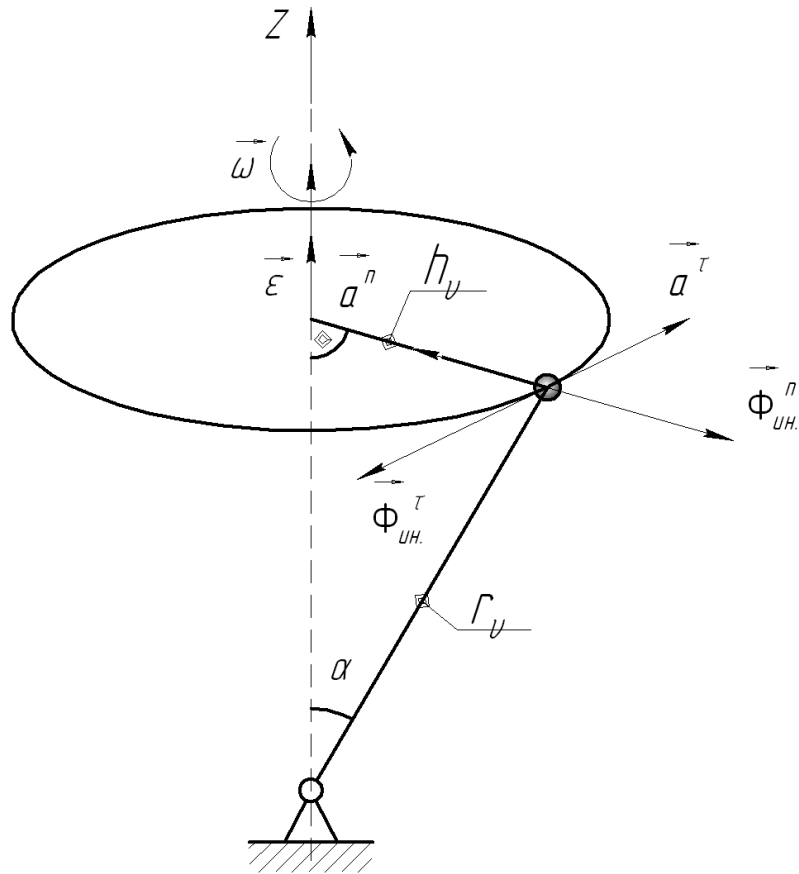


Рис.49

По определению главный момент сил инерции равен:

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_z^{\dot{e}i} &= \sum_{\nu=1}^n M_z(\vec{O}_{\nu}^{\dot{e}i}) = \sum_{\nu=1}^n M_z(\vec{O}_{\nu_n}^{\dot{e}i}) + \sum_{\nu=1}^n M_z(\vec{O}_{\nu_\tau}^{\dot{e}i}) = \\
 &= \sum_{\nu=1}^n M_z(\vec{O}_{\nu_\tau}^{\dot{e}i}) = \sum_{\nu=1}^n [\vec{r}_\nu \cdot \vec{O}_{\nu_\tau}^{\dot{e}i}] = \sum_{\nu=1}^n [\vec{r}_\nu \cdot m_\nu \cdot \vec{a}_\nu^\tau] = \\
 &= - \sum_{\nu=1}^n [\vec{r}_\nu \cdot m_\nu \cdot [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}_\nu]] = - \sum_{\nu=1}^n m_\nu \cdot r_\nu^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \varepsilon = \quad (223) \\
 &= - \sum_{\nu=1}^n m_\nu \cdot h_\nu^2 \cdot \varepsilon = -Y_z \cdot \varepsilon;
 \end{aligned}$$

$$\sum_{\nu=1}^n M_z(\vec{O}_{\nu_n}^{\dot{e}i}) = 0, \text{ так как нормальное ускорение пересекает ось вращения,}$$

а это значит, что момент от нормальной силы инерции относительно оси будет равен нулю.

**Главный момент сил инерции равен произведению момента инерции тела относительно оси вращения проходящей через центр масс механиче-**

ской системы, на угловое ускорение. Знак минус говорит о том, что главный момент сил инерции направлен противоположно угловому ускорению.

### 8.5 Силы инерции в частных случаях движения твёрдого тела:

1. Поступательное движение.

$$\vec{R}^{ин.} = -M \cdot \vec{a}_c, \quad M_z^{эи.} = 0 \quad (224)$$

2. Вращательное движение вокруг оси z, проходящей через центр масс.

$$\vec{R}^{ин.} = 0, \quad M_z^{эи.} = -I_{zc} \cdot \varepsilon. \quad (225)$$

3. При вращении вокруг произвольной оси.

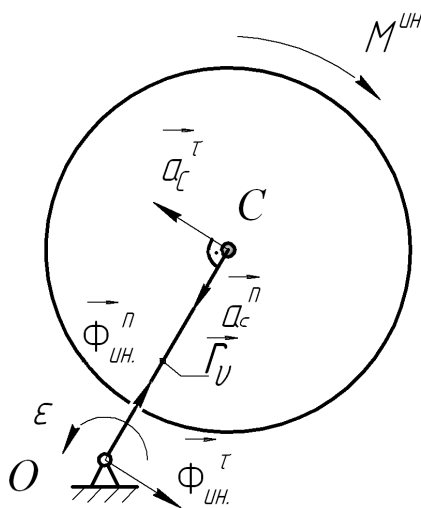


Рис. 50

$$M_z^{эи.} = -I_{zc} \cdot \varepsilon \neq 0; \quad (226)$$

$$\vec{R}^{эи.} = -M \cdot \vec{a}_c = -M(\vec{a}_c^\tau + \vec{a}_c^n) = -M\vec{a}_c^\tau - M\vec{a}_c^n = \vec{O}_\tau^{эи.} + \vec{O}_n^{эи.} \quad (227)$$

4. Плоскопараллельное движение.

В соответствии с теоремой о разложении плоское движение можно представить как поступательное со скоростью полюса и вращательное вокруг этого полюса. За полюс удобно брать центр масс и прикладывать его в центре масс.

$$\vec{R}^{ин.} = -M \cdot \vec{a}_c \neq 0, \quad M_z^{эи.} = -I_{zc} \cdot \varepsilon \neq 0 \quad (228)$$

5. Равномерное вращение однородного стержня вокруг неподвижной оси.

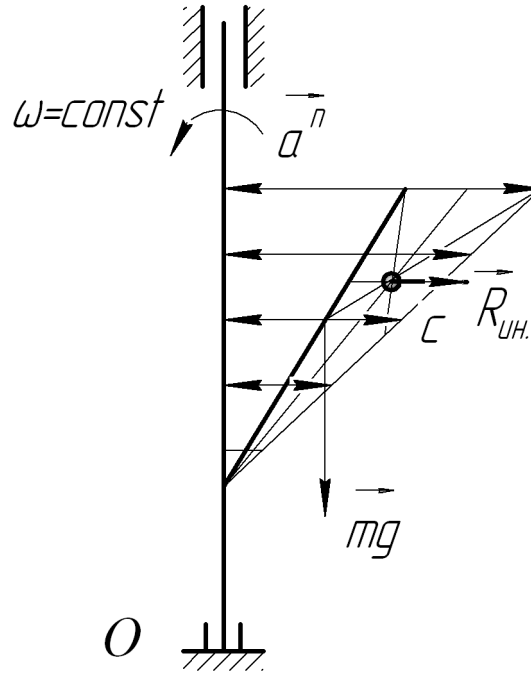


Рис. 51

Сила инерции касательная будет равна нулю, т.к. стержень вращается с постоянной угловой скоростью. Нормальное ускорение тем больше, чем дальше стержень от оси вращения, а поэтому силы инерции нормальные будут также не одинаковыми.

$$M_z^{\dot{e}i.} = -I_{zc} \cdot \varepsilon. = 0 \quad (229)$$

$$\vec{R}^{ин.} = -M \cdot \vec{a}_c = -M(\vec{a}_c^{\tau} + \vec{a}_c^n) = -M\vec{a}_c^n \quad (230)$$

Очевидно, что вектор суммарной силы инерции, оказывающей такое же действие как вся система сил в целом, не будет приложен в центре масс. Суммарный вектор сил инерции будет иметь равнодействующую, которая будет проходить через центр масс эпюры сил инерции, а поэтому  $\vec{R}^{ин.}$  отсекает на стержне  $\frac{1}{3}$  длины от удаленного от оси вращения конца стержня.

### 8.6 Общее уравнение динамики.

Данный принцип является объединением принципов Лагранжа и Даламбера.

Принцип Лагранжа применяется в случае, когда механическая система находится в равновесии, т.е. является необходимым и достаточным условием равновесия

Принцип Даламбера применяется, когда механическая система движется с ускорением, в этом случае добавляя к действующим силам фиктивные силы инерции и их моменты, получают формальное равновесие системы. При равновесии можно использовать не только условия равновесия, но и использовать принцип возможных перемещений. В этом и заключается принцип Лагранжа - Даламбера.

**Формулировка:** если механическая система, на которую наложены голономные, стационарные, идеальные связи, движется с ускорением, то добавляя к действующим на нее активным силам и их моментам фиктивные силы и моменты сил инерции, получим формально уравновешенную систему сил, для которой можно применить принцип возможных перемещений.

Применяя к механической системе одновременно принцип Даламбера и принцип возможных перемещений, придём к зависимости:  $\beta = 45^0$

$$\Sigma \delta A_v^a + \Sigma \delta A_v^\Phi + \Sigma \delta A_v^r = 0 \quad (231)$$

Но так как для идеальных связей сумма виртуальных работ всех сил реакции равна нулю ( $\Sigma \delta A_v^r = 0$ ) то получим общее уравнение динамики в виде:

$$\Sigma \delta A_v^a + \Sigma \delta A_v^\Phi = 0. \quad (232)$$

**При движении системы, подчинённой удерживающим идеальным связям, сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю.**

В аналитической форме общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum_{v=1}^n \left( \vec{F}_{vx}^a - m_v \cdot \ddot{\vec{r}}_v \right) \cdot \delta \vec{r}_v = 0 \quad (233)$$

## 9 УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Рассматриваемые вопросы:

*Обобщенные координаты скорости, ускорения и возможные перемещения. Представление кинетической и потенциальной энергии в квадратичной форме. Обобщенные силы и методы их вычисления. Вывод уравнений Лагранжа второго рода из общего уравнения динамики. Физический смысл уравнений Лагранжа второго рода. Функция Лагранжа. Принцип возможных перемещений в обобщенных координатах. Уравнения Лагранжа второго рода для консервативных механических систем.*

### 9.1 Обобщенные координаты, скорости, ускорения, возможные перемещения.

а) **Определение:** Обобщенными координатами называются любые независимые параметры, однозначно определяющие положение механической системы в пространстве:

$q_1, q_2, \dots, q_s$  - их число « $S$ » равно числу степеней свободы (ЧСС).

Обобщенными скоростями называются первые производные по времени от обобщенных координат:

$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$  (их число равно ЧСС).

Обобщенными ускорениями называются вторые производные по времени от обобщенных координат или первые производные по времени от обобщенной скорости:

$\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_s$  ( $S = \text{ЧСС}$ )

Обобщенными возможными перемещениями называются первые вариации от обобщенных координат:

$\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$  ( $S = \text{ЧСС}$ )

Обобщенные координаты, скорости, ускорения и возможные перемещения связаны с обобщенными координатами, скоростями, возможными перемещениями через радиус вектор:

$$\vec{r}_v = \vec{r}_v(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \quad (234)$$

Дифференцируя по времени, получим:

$$\vec{v}_v = \frac{d\vec{r}_v}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} \quad (235)$$

Или:

$$\vec{v}_v = \dot{\vec{r}}_v = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} \quad (236)$$

Для обобщённых возможных перемещений, варьируя по времени, получим:

$$\delta \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} \delta t \quad (237)$$

Так как время фиксировано, то  $\delta t = 0$

Таким образом, формула взаимосвязи имеет вид:

$$\delta \vec{r}_v = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \quad (238)$$

Пример:

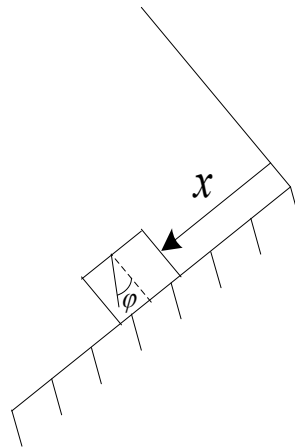


Рис. 52

Число степеней свободы этой механической системы равно двум. Введем обобщенные координаты:



$$\left. \begin{aligned} q_1 &= x \\ q_2 &= \varphi \end{aligned} \right\}$$

## 9.2 Обобщенные силы.

а) *Определение:* обобщенными силами называются коэффициенты при обобщенных возможных перемещениях в формуле виртуальной работы, т.е. по аналогии с обычными силами:

$$\sum_{v=1}^n \delta A = \sum_{v=1}^n \vec{F}_v \delta \vec{r}_v \quad (239)$$

Получим:

$$\sum_{\alpha=1}^s \delta A = \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha} \delta q_{\alpha} = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s \quad (240)$$

$Q_1, Q_2, \dots, Q_s$  - обобщенные силы.

Число обобщенных сил равно  $S$ . Обобщённые силы векторами не являются, это проекции сил, проекции моментов сил и другие силовые характеристики.

б) Общая формула для вычисления обобщенных сил:

По определению виртуальных работ:

$$\sum_{v=1}^n \delta A = \sum_{v=1}^n \vec{F}_v \delta \vec{r}_v \quad (241)$$

Подставим в эту формулу, формулу взаимосвязи (228) и меняем порядок суммирования:

$$\sum_{v=1}^n \delta A = \sum_{\alpha=1}^s \sum_{v=1}^n \vec{F}_v \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha} \delta q_{\alpha} \quad (242)$$

$$\text{Т.е. } Q_{\alpha} = \sum_{v=1}^n \vec{F}_v \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_{\alpha}} \text{ - обобщенные силы } (\alpha = 1, \dots, s) \quad (243)$$

Эта формула позволяет вычислять обобщенные силы во всех случаях, но она неудобна для использования.

в) Практическая формула для определения обобщенных сил.

По определению:

$$\sum_{\alpha=1}^s \delta A = \sum_{\alpha=1}^s Q_{\alpha} \delta q_{\alpha} = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s \quad (244)$$

Пусть необходимо определить  $Q_2$ , для этого дают соответствующей обобщенной координате  $q_2$  положительное приращение, т.е. дают возможное перемещение  $\delta q_2 > 0$  (т.е. направленное в сторону увеличения  $q_2$ ), считая все остальные обобщенные координаты в данный момент времени фиксированными, неизменными: т.е.  $\delta q_1 = \delta q_2 = \dots = \delta q_s = 0$ , тогда:

$$\sum \delta A \Big|_{\substack{\delta q_2 > 0 \\ \delta q_{\alpha} = 0}} = Q_2 \delta q_2 \text{ - практическая формула для вычисления } Q.$$

Пример:

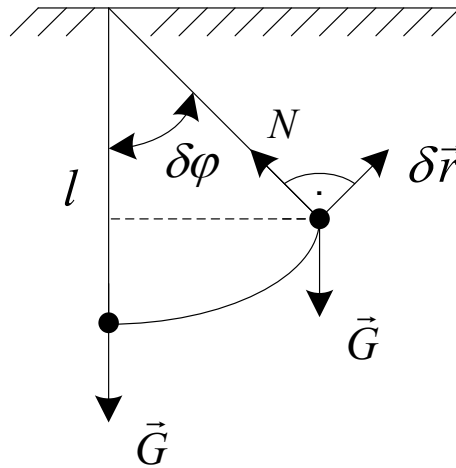


Рис. 53

Даём координате  $\varphi$  приращение  $\delta\varphi > 0$ .

$$Q_{\varphi} = \frac{\sum \delta A}{\delta\varphi} = \frac{\delta A(\vec{G}) + \delta A(N)}{\delta\varphi} = -\frac{mgl \sin \varphi \delta\varphi}{\delta\varphi} = -mgl \sin \varphi$$

-это момент относительно точки подвеса.

$$(\delta A(N) = 0, \text{ т.к. } N \perp \delta \vec{r})$$

г) Обобщенные силы в потенциальном поле.

По определению потенциального поля:

$$du = dA$$

По определению потенциальной энергии  $du = -d\Pi$ , откуда:

$$\sum \delta A = -\sum \delta \dot{I}, \text{ но потенциальная энергия это функция от координат,}$$

т.е.  $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_s)$  и тогда:

$$\sum \delta A = -\sum \delta \dot{I} = -\frac{\partial \dot{I}}{\partial q_1} \delta q_1 - \frac{\partial \dot{I}}{\partial q_2} \delta q_2 - \dots - \frac{\partial \dot{I}}{\partial q_s} \delta q_s \quad (245)$$

Отсюда:  $Q_\alpha = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha}$  - обобщенные силы в потенциальном поле.

$$(\alpha = 1, \dots, s)$$

### 9.3 Принцип обобщенных возможных перемещений.

По определению принципа:

«Для равновесия механической системы с наложенными идеальными, голономными, стационарными связями необходимо и достаточно, чтобы:

$$\sum_{v=1}^n \delta A^{\dot{a}\dot{e}\dot{o}} = \sum_{v=1}^n \vec{F}_v^{\dot{a}\dot{e}\dot{o}} \delta \vec{r}_v = 0, \text{ но:}$$

$$\sum_{\alpha=1}^s A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s = 0 \quad (246)$$

Это равенство нулю возможно при любых « $\delta q_\alpha$ » только в этом случае, если одновременно все коэффициенты при  $\delta q_\alpha$  равны нулю.

Т.е.  $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_s = 0$  - принцип обобщенных возможных перемещений.

**Формулировка:** Для равновесия механической системы с наложенными на неё идеальными, голономными, стационарными связями необходимо и достаточно, чтобы одновременно все обобщенные силы были равны нулю.

#### 9.4 Уравнение Лагранжа второго рода.

Выведем из общего уравнения динамики:

$$\sum_{v=1}^n (\vec{F}_v - m_v \ddot{\vec{r}}_v) \delta \vec{r}_v = 0 \quad (247)$$

Подставим в эту формулу, формулу взаимосвязи:

$$\delta \vec{r}_v = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \quad (248)$$

Меняя порядок суммирования, получим:

$$\sum_{\alpha=1}^s \left( \sum_{v=1}^n \vec{F}_v \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} - \sum_{v=1}^n m_v \ddot{\vec{r}}_v \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha = 0 \quad (249)$$

Обозначим:

$$Q_\alpha = \sum_{v=1}^n \vec{F}_v \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}, \quad (250)$$

Учитывая, что

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} \quad (251)$$

и подставив в формулу (250) и (251) в (249) получим:

$$\sum_{\alpha=1}^s \left( Q_\alpha - \sum_{v=1}^n m_v \frac{d\dot{\vec{r}}_v}{dt} \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha = 0 \quad (252)$$

Преобразуем:  $\frac{d\dot{\vec{r}}_v}{dt} \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}$  Вынесем  $\frac{d}{dt}$ , получим:

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}}_v \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{d\dot{\vec{r}}_v}{dt} \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} + \dot{\vec{r}}_v \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \quad (253)$$

или:

$$\frac{d\dot{\vec{r}}_v}{dt} \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}}_v \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \right) - \dot{\vec{r}}_v \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \quad (254)$$

Подставим (254) в (252):

$$\sum_{\alpha=1}^s \left\{ Q_\alpha - \sum_{v=1}^n m_v \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}}_v \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \right) + \sum_{v=1}^n m_v \dot{\vec{r}}_v \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \right\} \delta q_\alpha = 0 \quad (255)$$

Используем формулы, известные из курса математического анализа:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{d}{dt} \\ \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_v}{\partial \dot{q}_\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (256)$$

Подставим (256) в (255):

$$\sum_{\alpha=1}^s \left\{ Q_\alpha - \sum_{v=1}^n m_v \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}}_v \frac{\partial \dot{\vec{r}}_v}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) + \sum_{v=1}^n m_v \dot{\vec{r}}_v \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{d\vec{r}_v}{dt} \right\} \delta q_\alpha = 0 \quad (257)$$

Преобразуем, внесем  $\vec{r}_v$  под знак частной производной:

$$\sum_{\alpha=1}^s \left\{ Q_\alpha - \sum_{v=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left( \frac{m_v \dot{\vec{r}}_v^2}{2} \right) \right) + \sum_{v=1}^n \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left( \frac{m_v \dot{\vec{r}}_v^2}{2} \right) \right\} \delta q_\alpha = 0 \quad (258)$$

Заменяем  $\dot{\vec{r}}_v = \vec{v}_v$ , получим:

$$\sum_{\alpha=1}^s \left\{ Q_\alpha - \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left( \sum_{v=1}^n \left( \frac{m_v v_v^2}{2} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left( \sum_{v=1}^n \left( \frac{m_v v_v^2}{2} \right) \right) \right] \right\} \delta q_\alpha = 0 \quad (259)$$

Заменяем:

$$\sum_{v=1}^n \frac{m_v v_v^2}{2} = T_{\text{сист}} \quad (260)$$

Получим:

$$\sum_{\alpha=1}^s \left\{ Q_{\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} + \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} \right\} \delta q_{\alpha} = 0 \quad (261)$$

При произвольных бесконечно малых  $\delta q_{\alpha}$  это равенство нулю возможно только в этом случае, когда все коэффициенты при бесконечно малом возможном перемещении  $\delta q_{\alpha}$  одновременно будут равны нулю. Отсюда:

$$Q_{\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} + \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} = 0 \quad (262)$$

Уравнение Лагранжа второго рода имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} = Q_{\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, s) \quad (263)$$

Разность полной производной по времени от частной производной от кинетической энергии механической системы по обобщенной скорости и частной производной от кинетической энергии механической системы по обобщенной координате равна обобщенной силе.

Выводы:

1. Уравнение Лагранжа второго рода это дифференциальные уравнения второго порядка в обобщенных координатах.
2. Число уравнений Лагранжа второго рода равно числу степеней свободы.
3. Уравнения Лагранжа второго рода носят интегральный характер, т.к. эти уравнения содержат только характеристики всей системы и не содержат характеристик отдельных материальных точек.
4. В эти уравнения не входят силы реакции, которые всегда неизвестны, их можно не обозначать на чертеже.
5. Физический смысл уравнений Лагранжа второго рода.

Пример:

Точка движется по горизонтальной плоскости по закону  $x=x(t)$ :

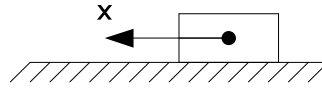


Рис. 54

Число степеней свободы механической системы равно единице. Введем обобщенную координату  $q=x$ . Тогда:  $\dot{q} = \dot{x}$ .

Кинетическая энергия механической системы: 
$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2}.$$

Уравнение Лагранжа второго рода имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \text{так как кинетическая энергия является функцией скорости, то получим:}$$

$m\ddot{x} = Q$  - это второй закон Ньютона. Таким образом, уравнения Лагранжа второго рода это обобщенный вид второго закона Ньютона.

### 9.5 Уравнения Лагранжа второго рода в потенциальном поле.

Общая формула уравнений:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \tag{264}$$

Обобщенная сила в потенциальном поле:

$$Q_\alpha = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha} \tag{265}$$

Подставим:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{266}$$

Вынесем  $\frac{\partial}{\partial q_\alpha}$ , получим:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial(T - \Pi)}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (267)$$

$$\frac{\partial \ddot{I}}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0, \text{ так как потенциальная энергия является функцией координат}$$

$\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_s)$  и  $\dot{q}$  в потенциальную энергию не входит, тогда можно записать:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T - \Pi)}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial(T - \Pi)}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 \quad (268)$$

Введем обозначения:

$$L = T - \Pi \quad (269)$$

Уравнение Лагранжа второго рода в потенциальном поле имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (270)$$

## 9.6 Функция Лагранжа.

**Функция Лагранжа** называется разность между кинетической и потенциальной энергией:

$$L = T - \Pi$$

**Физический смысл** функции Лагранжа в том, что она выражает физическое состояние механической системы в данный момент времени и поэтому её называют функцией состояния механической системы или кинетическим потенциалом.

**Математический смысл:** Функция Лагранжа это функция от обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени.

$L = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$ , т.е. в общем случае это функция  $(2S + 1)$  переменных.



## **ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ**

Цель практических занятий – научить динамическому и математическому моделированию динамических процессов, происходящих в механических системах на примере решения типовых задач. Научит объединять знания по статике, кинематике, необходимым разделам математики с достаточно сложными понятиями динамики для анализа изученных и новых моделей механических систем.

### **Практическое занятие 1**

*Тема: Первая и вторая задачи динамики материальной точки.*

#### ***Дифференциальные уравнения движения материальной точки***

##### **Цель занятия:**

- отработка практических навыков составления и интегрирования дифференциальных уравнений движений материальной точки.

##### **Вопросы для подготовки:**

1. Основные понятия динамики.
2. Инерциальные и неинерциальные системы отсчета.
3. Основные законы динамики точки.
4. Дифференциальные уравнения движения материальной точки.
5. Две основные задачи динамики и алгоритм их решения.
6. Начальные условия и их использование для определения постоянных интегрирования.

**Методические рекомендации к решению задач по теме динамика материальной точки.**

Задачи динамики делятся на две большие группы.

- 1) задачи, в которых по заданному закону движения точки находятся действующие на нее силы (первая задача динамики);
- 2) задачи, в которых по заданным силам, действующим на точку, определяется закон ее движения (вторая задача динамики).

##### **Первая задача динамики.**

1) используя заданные уравнения движения, найти путем двойного дифференцирования проекции ускорения на координатные оси;

2) записать дифференциальные уравнения движения точки в скалярном виде и определить из них проекции на координатные оси равнодействующей всех сил, приложенных к точке, как функции времени;

3) определить модуль равнодействующей и ее направляющие косинусы.

### **Вторая задача динамики.**

1) выбрать и изобразить на чертеже систему координат;

2) изобразить на рисунке точку в текущем положении и действующие на точку силы;

3) написать дифференциальные уравнения движения точки в векторном виде;

4) спроектировать эти векторные равенства на координатные оси;

5) в зависимости от условий задачи найти первые и вторые интегралы дифференциальных уравнений;

6) определить начальные условия движения точки;

7) определить постоянные интегрирования исходя из начальных условий;

8) определить требуемые по условиям задачи величины.

### **Пример выполнения задания Д 1.**

Тема: Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки».

Исходные данные:

Тело движется из точки А по участку АВ (длиной  $l$ ) наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом, в течение  $\tau$  сек. Его начальная скорость  $v_A$ . Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен  $f$ .

В точке В тело покидает плоскость и попадает в точку С плоскости наклонной под углом  $\beta$  к горизонту, находясь в воздухе  $T$  сек.

При решении задачи тело принять за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Исходные данные:

$$A=15^{\circ}, v_A=2\text{ м/с}; f=0,2; h=4\text{ м}; B=45^{\circ}$$

Схема показана на рисунке 1.

Определить параметры движения точки на участках АВ и ВС (скорость в точке В -  $v_B$ , время движения на участке ВС -  $T$ , длину участка АВ -  $l$ , скорость в точке С -  $v_C$ , расстояние, пройденное телом по оси  $Ox$  на участке ВС -  $d$ , время в течении которого точка движется на участке АВ -  $\tau$ ) и уравнение траектории точки на участке ВС.

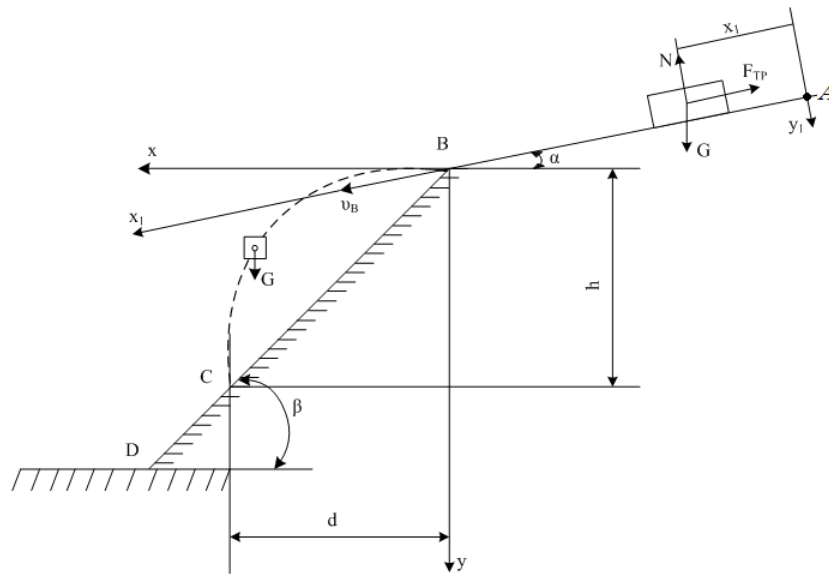


Рис. 1

Рассмотрим движение тела на участке АВ. Принимая тело за материальную точку, покажем действующие на него силы: вес  $\vec{G}$ , нормальную реакцию  $\vec{N}$  и силу трения скольжения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ .

Составим дифференциальное уравнение движения тела на участке АВ в проекции на ось  $x_1$ :

$$m \cdot \ddot{x}_1 = G \cdot \sin \alpha - F_{\text{тр}},$$

$$m \ddot{y}_1 = -N + G \cos \alpha, \text{ т.к. движение вдоль оси } y_1 \text{ отсутствует, то } \ddot{y}_1 = 0;$$

$$\text{Отсюда: } N = G \cos \alpha.$$

$$m \cdot \ddot{x}_1 = mg \cdot \sin \alpha - f \cdot mg \cdot \cos \alpha$$

Разделив на  $m$ , получим:

$$\ddot{x}_1 = g \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha);$$

Дважды интегрируя дифференциальное уравнение, получаем:

$$\dot{x}_1 = g \cdot (\sin\alpha - f \cos\alpha) \cdot t + C_1$$

$$x_1 = \frac{g \cdot (\sin\alpha - f \cos\alpha) \cdot t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2$$

Для определения постоянных интегрирования, воспользуемся начальными условиями задачи: при  $t = 0, x_{10} = 0$  и  $\dot{x}_{01} = 2 \text{ м/с}$ . Подставив начальные условия в уравнения получим:

$$x_{10} = C_2; \quad \dot{x}_{01} = C_1$$

Найдем постоянные:

$$C_2 = 0; \quad C_1 = 2 \text{ м/с}$$

Тогда:

$$\dot{x}_1 = g \cdot (\sin\alpha - f \cos\alpha) \cdot t + 2$$

$$x_1 = \frac{g \cdot (\sin\alpha - f \cos\alpha) \cdot t^2}{2} + 2 \cdot t$$

Подставим конечные условия:  $\dot{x}_{|t=\tau} = u_B; x_{|t=\tau} = l$ .

Получим уравнения:

$$u_B = g \cdot (\sin\alpha - f \cos\alpha) \cdot \tau + 2$$

$$l = \frac{g \cdot (\sin\alpha - f \cos\alpha) \cdot \tau^2}{2} + 2 \cdot \tau$$

Рассмотрим движение тела на участке ВС.

Показав силу тяжести  $\vec{G}$ , действующую на камень, составим дифференциальные уравнения его движения в проекциях на координатные оси  $x$  и  $y$ :

$$m \cdot \ddot{x} = 0;$$

$$m \cdot \ddot{y} = G = mg;$$

Разделив на  $m$ , получим:

$$\ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = g;$$

Интегрируем дифференциальное уравнение дважды:

$$\dot{x} = C_3;$$

$$\dot{y} = g \cdot t + C_4;$$

$$x = C_3 \cdot t + C_5;$$

$$y = \frac{g \cdot t^2}{2} + C_4 \cdot t + C_6;$$

Начальные условия при  $t = 0$ :

$$\dot{x}_0 = C_3 = v_B \cdot \cos\alpha;$$

$$\dot{y}_0 = C_4 = v_B \cdot \sin\alpha;$$

$$x_0 = C_5 = 0;$$

$$y_0 = C_6 = 0;$$

Получим следующие уравнения проекций скорости тела:

$$\dot{x} = v_B \cdot \cos\alpha;$$

$$\dot{y} = g \cdot t + v_B \cdot \sin\alpha$$

и уравнения его движения

$$x = v_B \cdot \cos\alpha \cdot t;$$

$$y = \frac{g \cdot t^2}{2} + v_B \cdot \sin\alpha \cdot t$$

Подставим конечные условия. В момент падения, **при  $t = T$** :

$$\dot{x} = v_{cx}; \dot{y} = v_{cy};$$

$$x = d; y = h.$$

Получим систему уравнений:

$$v_B = g \cdot (\sin\alpha - f \cos\alpha) \cdot \tau + 2 \tag{1}$$

$$l = \frac{g \cdot (\sin\alpha - f \cos\alpha) \cdot \tau^2}{2} + 2 \cdot \tau \tag{2}$$

$$v_{cx} = v_B \cdot \cos\alpha; \tag{3}$$

$$v_{cy} = g \cdot T + v_B \cdot \sin\alpha \tag{4}$$

$$d = v_B \cdot \cos\alpha \cdot T \tag{5}$$

$$h = \frac{g \cdot T^2}{2} + v_B \cdot \sin\alpha \cdot T \tag{6}$$

Определим  $d$ :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{d}; \text{ т.к. } \beta = 45^\circ, \text{ то } h=d$$

Используя уравнения движения камня, найдем время  $T$  движения тела от точки В до точки С и скорость  $v_B$  в точке В. Из уравнения (5):

$$T = \frac{d}{v_B \cdot \cos \alpha}; \quad \text{Подставив в уравнение (6), получим:}$$

$$h = \frac{g \cdot d^2}{2 \cdot v_B^2 \cdot \cos^2 \alpha} + d \cdot \operatorname{tg} \alpha; \text{ Решим совместно уравнения (5) и (6):}$$

$$\frac{g \cdot d^2}{2 \cdot v_B^2 \cdot \cos^2 \alpha} = h - d \cdot \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \frac{g \cdot d^2}{2 \cdot \cos^2 \alpha} = (h - d \cdot \operatorname{tg} \alpha) \cdot v_B^2 \Rightarrow \text{Отсюда:}$$

$$v_B^2 = \frac{g \cdot d^2}{2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot (h - d \cdot \operatorname{tg} \alpha)} \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{g \cdot d^2}{2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot (h - d \cdot \operatorname{tg} \alpha)}}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{9,8 \cdot 4^2}{2 \cdot 0,933 \cdot (4 - 4 \cdot 0,268)}} = \sqrt{\frac{156,8}{5,464}} = \sqrt{28,697} = 5,357 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \text{ Определив ско-}$$

рость  $v_B$  найдем время падения  $T$  на участке ВС:

$$T = \frac{4}{5,357 \cdot 0,967} = \frac{4}{5,174} = 0,773 \text{ с}$$

Определив  $v_B$ , найдем из уравнений (1) и (2) время  $\tau$  движения тела от точки А до точки В на участке АВ и длину  $l$  участка АВ:

$$\tau = \frac{v_B - 2}{g \cdot (\sin \alpha - f \cos \alpha)} = \frac{5,357 - 2}{9,8 \cdot (0,259 - 0,2 \cdot 0,966)} = \frac{3,357}{0,645} = 5,205 \text{ с}$$

$$l = \frac{9,8 \cdot (0,259 - 0,2 \cdot 0,966) \cdot 5,205^2}{2} + 2 \cdot 5,205 = 8,737 + 10,41 = 19,147 \text{ м}$$

Скорость камня при падении найдем через проекции скорости на оси координат:

$$v_C = \sqrt{v_{cx}^2 + v_{cy}^2}$$

Для момента  $t = T = 0,773$  сек.

$$v_c = \sqrt{(v_B \cdot \cos \alpha)^2 + (g \cdot T + v_B \cdot \sin \alpha)^2}$$

$$v_c = \sqrt{(5,357 \cdot 0,966)^2 + (9,8 \cdot 0,773 + 5,357 \cdot 0,259)^2} = \sqrt{26,779 + 80,332} = 10,349 \text{ м/с}$$

Уравнение траектории движения тела на участке ВС найдем, исключив параметр  $t$  из уравнений движения, получим уравнение параболы:

$$y = \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_B^2 \cdot \cos \alpha} + x \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Подставив значения, получим:

$$y = 0,1831x^2 + 0,2682x$$

Таблица ответов:

d, м	$v_B$ , м/с	T, с	$\tau$ , с	l, м	$v_C$ , м/с	y=y(t)
4	5,357	0,733	5,205	19,147	10,349	$Y=0,18x^2+0.2682x$

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сформулируйте законы (аксиомы) динамики.
2. Какое уравнение называется основным уравнением динамики?
3. Написать дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на оси координат (декартовы, естественные).
4. Каковы две основные задачи динамики точки, которые решаются при помощи дифференциальных уравнений движения точки?
5. Сформулируйте первую (прямую) задачу динамики точки.
6. Как определяются произвольные постоянные при интегрировании дифференциальных уравнений движения материальной точки?
7. Сформулируйте вторую (обратную) задачу динамики точки.
8. Приведите формулировку закона независимости действия сил.
9. Дайте определение инерциальной системы отсчета.

### САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач: [9]

№№ 26.1; 26.5; 26.9; 26.10; 26.11; 26.15; 26.16; 27.1; 27.2; 27.7; 27.15; 27.19; 27.30; 27.31; 27.32; 27.46;

### РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

Выдача расчетно-графической работы Д 1 на тему: «Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки» [4].

## **Практическое занятие 2**

*Тема: Общие теоремы динамики: теорема о движении центра масс*

### **Цель занятия:**

-отработка практических навыков решения задач на применение общих теорем динамики материальной точки и механической системы, в которых используются теоремы о движении центра масс.

### **Вопросы для подготовки:**

1. Механическая система. Силы внешние и внутренние.
2. Масса системы. Центр масс.
3. Теорема о движении центра масс. Закон сохранения движения центра масс.

**Методические рекомендации к решению задач по теме «Теорема о движении центра масс».**

Задачи, решаемые с использованием теоремы о движении центра масс, можно разделить на следующие типы:

- 1) определение действующих на систему внешних сил по заданному закону движения ее точек (тел);
- 2) нахождение закона движения центра масс системы по заданным внешним силам;
- 3) определение закона движения одной из точек (тел) системы по заданным внешним силам и законам движения остальных точек системы;
- 4) использование для решения задачи законов сохранения движения центра масс системы.

Задачи необходимо решать в следующем порядке:

- 1) изобразить на схеме все внешние силы, действующие на систему;
- 2) выбрать систему координат;
- 3) записать теорему о движении центра масс в векторном виде, а затем в проекциях на координатные оси;
- 4) найти проекции известных из условий задачи внешних сил на оси координат и подставить их в уравнения;



5) по известным законам движения всех точек системы и их массам определить проекции ускорения центра масс;

6) по дифференциальным уравнениям найти искомую силу.

**Примеры решения задач по теме:**

**Задача №1**

Электромотор  $Д$  массой  $m_1$  может двигаться по горизонтальной поверхности. К валу электромотора одним концом под прямым углом прикреплен однородный стержень  $ОВ$  длиной  $2l$  массой  $m_2$ . На другом конце стержня в точке  $В$  насажен точечный груз массой  $m_3$ . Вал электромотора вращается равномерно с угловой скоростью  $\omega$ . Определить давление электромотора на горизонтальную поверхность (рис.2). Вал электромотора расположен на высоте  $h$  от поверхности.

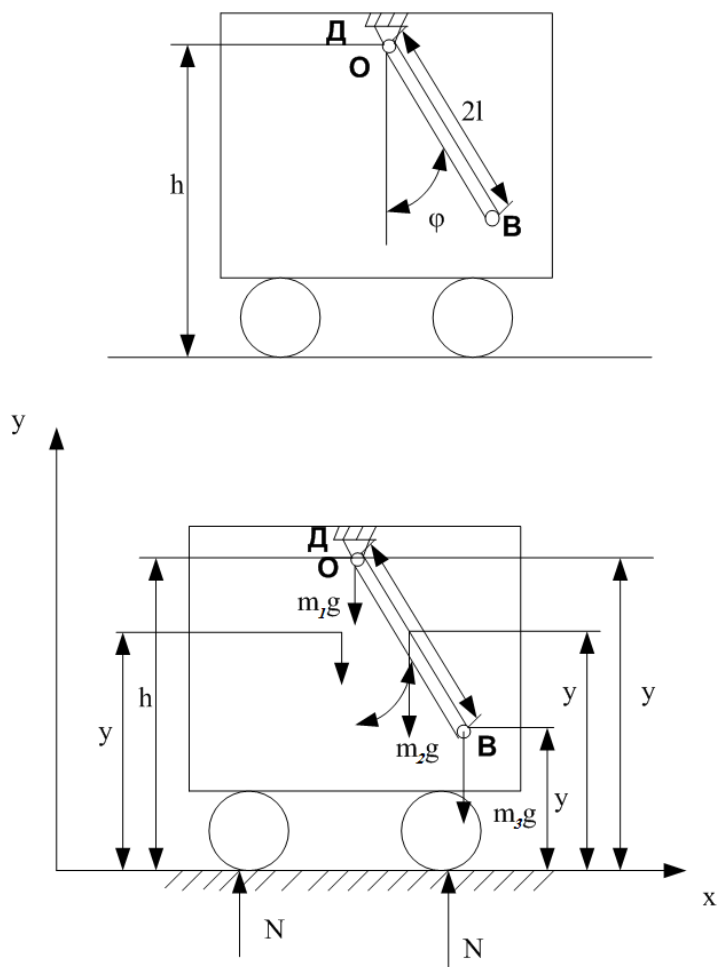


Рис. 2

Дано:  $m_1; m_2; m_3; l; h; \varphi = \omega t$

Определить :  $N_B$

Решение:

Запишем условия в краткой математической форме:

К системе, состоящей из электромотора Д , стержня ОВ и точечной массы В, показанной в произвольный момент времени (рис 2), приложены внешние силы:

Активные:

$m_1 \vec{g}$  – силы тяжести электромотора Д

$m_2 \vec{g}$  – силы тяжести стержня ОВ

$m_3 \vec{g}$  – силы тяжести точечной массы В

Реакции связей (гладкая поверхность:

$\vec{N}_B = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$  - равнодействующая реакции гладкой поверхности, равная давлению электромотора на горизонтальную поверхность, то есть:

$\vec{N}_B^* = -\vec{N}_B = -(\vec{N}_1 + \vec{N}_2)$ , или по модулю  $N_B^* = N_B = N_1 + N_2$ .

Проведем оси координат (рис.2).

Составим дифференциальное уравнение движения центра масс в проекциях на ось у:

$$M \ddot{y}_c = \sum F_{ky}^e, \quad (1)$$

где:  $M = m_1 + m_2 + m_3$  - масса системы;

$\ddot{y}_c$  - проекция ускорения центра масс системы на ось у;

$F_{ky}^e$  - сумма проекций внешних сил на ось у, равная:

$$\begin{aligned} \sum F_{ky}^e &= N_1 + N_2 - m_1 g - m_2 g - m_3 g, \\ \sum F_{ky}^e &= N_B - m_1 g - m_2 g - m_3 g. \end{aligned} \quad (2)$$

Определим  $M \ddot{y}_c$ . Для этого необходимо найти положение центра масс  $y_c$  системы в проекции на ось у. Положение центра масс определяется по формуле:

$$y_c = \frac{\sum(m_k y_k)}{M}, \quad (3)$$

В данной задаче:

$$M y_c = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3, \quad (4)$$

где  $y_c, y_1, y_2, y_3$  - координаты центра масс системы и координаты центра масс

тел, входящих в систему (рис.2), соответственно.

Дважды продифференцировав, получим:

$$M \ddot{y}_c = m_1 \ddot{y}_1 + m_2 \ddot{y}_2 + m_3 \ddot{y}_3 \quad (5)$$

Определим координаты  $y_1, y_2, y_3$  тел, входящих в систему:

$$\begin{aligned} y_1 &= h = \text{const} \\ y_2 &= h - l \cos \varphi = h - l \cos \omega t \\ y_3 &= h - 2l \cos \varphi = h - 2l \cos \omega t \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 0, & \ddot{y}_1 &= 0; \\ \dot{y}_2 &= l\omega \sin \omega t, & \ddot{y}_2 &= l\omega^2 \cos \omega t; \\ \dot{y}_3 &= 2l\omega \sin \omega t, & \ddot{y}_3 &= 2l\omega^2 \cos \omega t; \end{aligned}$$

Таким образом:

$$(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{y}_c = m_1 \cdot 0 + m_2 l \omega^2 \cos \omega t + m_3 2l \omega^2 \cos \omega t \quad (7)$$

Или

$$(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{y}_c = l \omega^2 \cos \omega t (m_2 + 2m_3) \quad (8)$$

Получаем:

$$(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{y}_c = N_B - m_1 g - m_2 g - m_3 g$$

Или

$$l \omega^2 \cos \omega t (m_2 + 2m_3) = N_B - m_1 g - m_2 g - m_3 g \quad (9)$$

Откуда:

$$N_B = m_1 g + m_2 g + m_3 g + l \omega^2 \cos \omega t (m_2 + 2m_3). \quad (10)$$

Таким образом, зная закон движения центра масс  $u_C$ , определив проекцию ускорения центра масс на ось  $y$ , нашли вертикальную составляющую реакции гладкой поверхности  $N_B$ .

Но так как давление электромотора:  $N_B^* = N_B$ , то:

$$N_B^* = g(m_1 + m_2 + m_3) + l\omega^2 \cos \omega t (m_2 + 2m_3). \quad (11)$$

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называют материальной системой, неизменяемой материальной системой?
2. Какие силы называют внешними силами, внутренними силами?
3. Чему равны главный вектор, главный момент, работа внутренних сил?
4. Что называют центром масс механической системы?
5. Как определяются координаты центра масс системы?
6. Может ли центр масс твердого тела находиться вне этого тела?
7. Запишите формулу для определения координат центра масс в трехмерном пространстве.
8. Из какого физического закона вытекает, что равнодействующая внутренних сил системы равна нулю?
9. Сформулируйте теорему о движении центра масс системы.
10. Сформулируйте закон сохранения движения центра масс системы.
11. В каких случаях центр масс системы движется равномерно и прямолинейно?

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач: [9]

№№ 28.2; 28.3; 28.4; 28.9; 35.4; 35.5; 35.10; 35.11; 35.17; 35.18; 35.19; 35.20; 35.21.

### Практическое занятие 3

*Тема: Общие теоремы динамики: теорема об изменении количества движения и кинетического момента.*

### **Цель занятия:**

-отработка практических навыков решения задач на применение общих теорем динамики материальной точки и механической системы, в которых используются теорема об изменении количества движения механической системы и теорема об изменении кинетического момента.

### **Вопросы для подготовки:**

1. Количество движения точки и механической системы. Импульс силы.
2. Выражение количества движения системы через скорость центра масс.
3. Теорема об изменении количества движения системы в дифференциальной и интегральной форме.
4. Закон сохранения количества движения.
5. Момент количества движения материальной точки и механической системы.
6. Кинетический момент механической системы относительно полюса.
7. Кинетический момент механической системы относительно неподвижной оси. Кинетический момент абсолютно твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.
8. Теорема об изменении кинетического момента механической системы.
9. Закон сохранения кинетического момента системы.

### **Методические рекомендации к решению задач по теме «Теорема об изменении количества движения».**

- 1) выявить совокупность тел, входящих в систему;
- 2) выбрать систему координат;
- 3) определить координаты центров масс системы;
- 4) определить проекции на координатные оси и, если требуется по условиям задачи, модуль скорости центра масс;
- 5) вычислить проекции на координатные оси, а также модуль и направляющие косинусы вектора количества движения системы;

### **Примеры решения задач по теме:**

### Задача № 1

Брус весом  $P_1$  перекачивается без скольжения на двух катках весом  $P_2$  каждый. Определить количество движения системы, если брус движется со скоростью  $\zeta_1$  (рис. 3).

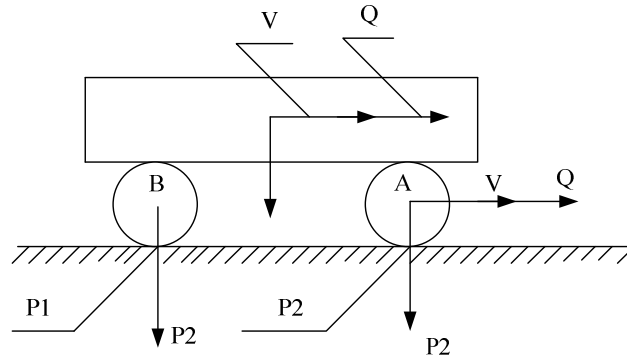


Рис.3

Решение:

Для определения количества движения воспользуемся формулой:

$$\bar{Q} = \sum (m_k \vec{v}_k) = M \vec{v}_C. \quad (1)$$

В нашем примере:

$$\bar{Q} = \bar{Q}_1 + 2\bar{Q}_2 \quad (2)$$

где:

количество движения бруса:

$$\bar{Q}_1 = M_1 \vec{v}_1 = \frac{P_1 \vec{v}_1}{g} \quad (3)$$

количество движения катка:

$$\bar{Q}_2 = M_2 \vec{v}_2 = \frac{P_2 \vec{v}_2}{g} \quad (4)$$

Так как векторы  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  параллельны, то и векторы  $Q_1$  и  $Q_2$  тоже будут параллельны.

Поэтому модуль количества движения:

$$Q = Q_1 + 2Q_2 = \frac{P_1 \vec{v}_1}{g} + 2 \frac{P_2 \vec{v}_2}{g} \quad (5)$$

Определим  $\zeta_2$ . Так как брус катиться без скольжения то скорости в точках А и В катков будут равны скорости бруса, то есть:

$$\zeta_A = \zeta_B = \zeta_1.$$

Так как, катки совершают плоскопараллельное движение, то скорости точек колеса пропорциональны расстояниям до мгновенного центра скоростей, то есть:

$$v_2 = \frac{v_A}{2} = \frac{v_1}{2}.$$

Тогда

$$Q = \frac{P_1 v_1}{g} + 2 \frac{P_2}{g} \cdot \frac{v_1}{2} = \frac{P_1 + P_2}{g} v_1. \quad (6)$$

### Задача 2

Человек массой  $m_1$  начинает двигаться по платформе вагонетки с постоянной относительной скоростью  $\bar{v}$ . В начальный момент вагонетка массой  $m_2$ , находится в покое. Найти скорость движения вагонетки, если её движение происходит в горизонтальной плоскости. Трением скольжения между рельсами и колесами пренебречь (рис.4).

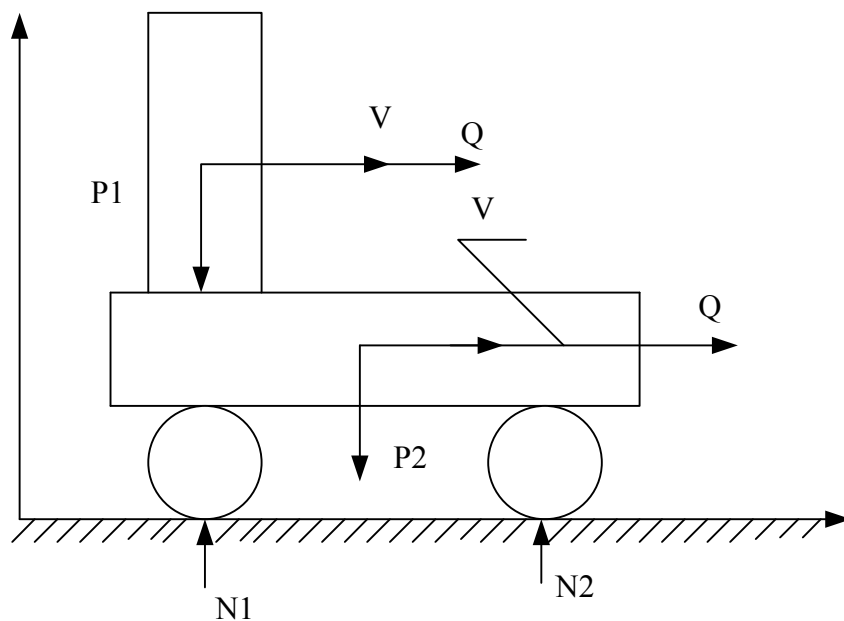


Рис.4

Решение:

Запишем условия в краткой математической форме:

Дано:  $m_1, m_2, \vec{g}, \vec{g}_0 = 0$

Определить:  $v_{i\bar{e}}$

Рассмотрим движение системы, состоящей из человека и платформы (см.рис.4).

Внешние силы: вес платформы  $\vec{P}_2$ , вес человека  $\vec{P}_1$ , вертикальные реакции  $\vec{N}_1$  и  $\vec{N}_2$ .

Проведем оси координат, направив ось x в сторону движения человека.

Так как  $\sum_{v=1}^n F_{kv}^e = 0$  (все внешние силы перпендикулярны оси x), то

$Q_x = const$ , то есть  $Q_{0x} = Q_{1x}$

Так как в начальный момент система находилась в покое, то  $Q_0 = Q_{0x} = 0$

Таким образом,  $Q_{1x} = 0$

Количество движения системы:  $\vec{Q} = \vec{Q}_{чел} + \vec{Q}_{пл}$

где  $\vec{Q}_{\dot{\alpha}\bar{e}} = m_1 \vec{v}_{\dot{\alpha}\bar{e}}$  - количество движения человека,

$\vec{Q}_{i\bar{e}} = m_2 \vec{v}_{i\bar{e}}$  - количество движения платформы.

Абсолютная скорость человека (см.рис.4) определяется сложением скорости человека  $\vec{v}_{i\delta i} = \vec{v}$  и переносной скорости человека, равной скорости платформы,  $\vec{v}_{i\dot{\alpha}\delta} = \vec{v}_{i\bar{e}}$

$\vec{v}_{\dot{\alpha}\bar{e}} = \vec{v} + \vec{v}_{i\bar{e}}$ , или  $v_{\dot{\alpha}\bar{e}} = v + v_{i\bar{e}}$ , так как векторы скоростей параллельны.

$$Q_x = Q_{чел x} + Q_{пл x}; \quad (1)$$

$$Q_{чел x} = m_1 v_{\dot{\alpha}\bar{e}} = m_1 (v + v_{i\bar{e}}) \quad (2)$$

$$Q_{i\bar{e}\delta} = m_2 v_{i\bar{e}} \quad (3)$$

Проекция количества движения на ось x:

$$Q_x = m_1 (v + v_{i\bar{e}}) + m_2 v_{i\bar{e}} \quad (4)$$

Так как  $Q_{1x} = 0$

получаем:



$$m_1(v + v_{i\bar{e}}) + m_2 v_{i\bar{e}} = 0 \quad (5)$$

Откуда находим скорость платформы:

$$v_{i\bar{e}} = -\frac{m_1 v}{m_1 + m_2} \quad (6)$$

Знак «минус» показывает, что платформа будет двигаться влево.

**Методические рекомендации к решению задач по теме «Теорема об изменении кинетического момента».**

- 1) выбрать систему координат;
- 2) изобразить на чертеже все действующие внешние силы;
- 3) написать выражения для главных моментов всех внешних сил системы относительно осей выбранной системы координат;
- 4) составить выражения для кинетического момента механической системы относительно неподвижной оси;
- 5) записать теорему об изменении кинетического момента механической системы.

**Пример решения задач по теме:**

### **Задача 1**

На горизонтальный вал насажен однородный диск А радиусом R и массой  $m_1$ . На диск намотана нить, к концу которой подвешен груз В с массой  $m_2$ . Пренебрегая трением в подшипнике вала, определить угловую скорость диска А в момент  $t_1$  после начала движения, если груз В движется из состояния покоя.

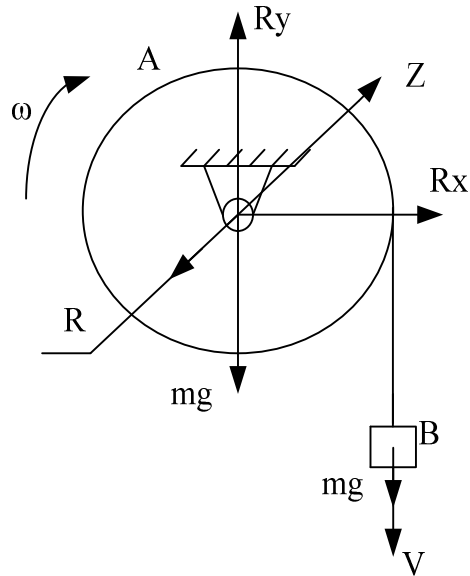


Рис.5

Решение:

Запишем условия в краткой математической форме:

Дано:  $m_1, m_2, R, t_1, v_0 = 0$

Определить:  $\omega_1$

Рассмотрим движение системы: диск А и груз В.

К системе приложены внешние силы: вес диска  $\vec{P}_1 = m_1 \vec{g}$ , вес груза  $\vec{P}_2 = m_2 \vec{g}$ , составляющие реакции в подшипнике  $\vec{R}_x$  и  $\vec{R}_y$ .

Воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента относительно оси вращения:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_k (\bar{F}_k^e) \quad (1)$$

Кинетический момент системы относительно оси вращения z:

$$K_z = K_{ZA} + K_{ZB} \quad (2)$$

Кинетический момент диска:

$$K_{ZA} = I_z \omega = \frac{m_1 R^2 \omega}{2} \quad (3)$$

Кинетический момент груза:

$$K_{ZB} = m_2 V R = m_2 \omega R^2 \quad (4)$$

Таким образом:

$$K_z = \frac{m_1 R^2 \omega}{2} + m_2 \omega R^2 = R^2 \omega \left( \frac{m_1}{2} + m_2 \right) \quad (5)$$

Далее определим сумму моментов всех внешних сил относительно оси z:

$$\sum M_z(\vec{F}_k^e) = m_2 g R \quad (6)$$

Подставляя в исходное уравнение найденные значения кинетического момента  $K_z = \sum_{\nu=1}^{\dot{\omega}} M_z(\vec{F}_\nu^e)$ , получим:

$$\frac{d(R^2 \omega (\frac{m_1}{2} + m_2))}{dt} = m_2 g R \quad (7)$$

Выражение (7) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$R^2 (\frac{m_1}{2} + m_2) \int_0^{\omega_1} d\omega = m_2 g R \int_0^{t_1} dt \quad (8)$$

$$\omega_1 = \frac{2m_2 g t_1}{(m_1 + 2m_2)R} \quad (9)$$

Таким образом, диск вращается равноускоренно.

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называется количеством движения точки?
2. Что называется элементарным импульсом силы?
3. Как определяется импульс силы за конечный промежуток времени?
4. Как формулируется теорема об изменении количества движения точки в дифференциальной форме?
5. Как формулируется теорема об изменении количества движения в конечной форме?
6. Как определить количество движения системы?
7. Сформулируйте теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме.
8. Как формулируется теорема об изменении количества движения системы в конечной форме?
9. Сформулируйте закон сохранения количества движения системы.
10. В каком случае количество движения механической системы не изменяется?

11. Что называется моментом количества движения точки?
12. Что называется главным моментом количества движения системы (кинетическим моментом системы)?
13. Как определяется кинетический момент системы относительно неподвижной оси?
14. Чему равен кинетический момент твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
15. Сформулируйте и запишите теорему об изменении кинетического момента относительно полюса.
16. Сформулируйте и запишите теорему об изменении кинетического момента относительно оси.
17. Сформулируйте закон сохранения кинетического момента системы.
18. В каких случаях кинетический момент системы относительно точки и относительно оси остается постоянным?

### **САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА**

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач: [9]

№№ 36.3; 36.4; 36.5;36.8; 36.9; 36.11; 28.4; 28.8; 37.4; 37.5; 37.12; 37.26; 37.28; 37.43;37.50; 37.52; 37.57; 37.58;

#### **Практическое занятие 4**

*Тема: Общие теоремы динамики: теорема об изменении кинетической энергии.*

#### **Цель занятия:**

- отработка практических навыков решения задач динамики механической системы, в которых используются теоремы об изменении кинетической энергии системы.

#### **Вопросы для подготовки:**

1. Момент инерции относительно полюса, оси и плоскости.
2. Осевые и центробежные моменты инерции, их математические выражения.

3. Радиус инерции и его физический смысл.
4. Моменты инерции относительно параллельных осей.
5. Эллипсоид инерции.
6. Главные оси инерции и их свойства.
7. Частные случаи определения кинетической энергии твердого тела.
8. Работа постоянной силы на прямолинейном пути.
9. Работа силы, зависящей от координат точки.
10. Работа сил тяжести, действующих на систему.
11. Работа и мощность сил, приложенных к вращающемуся телу.
12. Работа и мощность сил, приложенных к телу при плоском движении.
13. Понятие о мощности и формулы для ее определения.
14. Теорема об изменении кинетической энергии изменяемых и неизменяемых систем.
15. Потенциальное силовое поле. Работа сил потенциального поля.
16. Понятие о потенциальной энергии.
17. Закон сохранения механической энергии.

**Методические рекомендации к решению задач по теме «Теорема об изменении кинетической энергии».**

Для определения кинетической энергии системы необходимо:

- 1) установить характер движения всех тел системы;
- 2) записать выражения для кинетической энергии каждого из тел в соответствии с совершаемым им движением (поступательное, вращательное или плоское);
- 3) выразить все линейные и угловые скорости тел через скорость того тела, движение которого задаем;
- 4) определить кинетическую энергию механической системы, просуммировав кинетические энергии отдельных тел;
- 5) изобразить на чертеже все внешние силы;
- 6) найти перемещения точек приложения тех сил, которые совершают работу при движении системы;

- 7) найти углы поворота тел, к которым приложены моменты;
- 8) выразить все линейные и угловые перемещения тел через перемещение того тела, движение которого задаем;
- 9) составить выражения для работ, совершаемых внешними силами, и найти их сумму;
- 10) записать теорему об изменении кинетической энергии и определить искомую величину.

### Пример выполнения задания Д 10.

Тема: Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения механической системы».

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя. Учитывая трение скольжения груза 1, пренебрегая другими силами сопротивления и массами нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить скорости движения всех тел, входящих в механическую систему в тот момент времени, когда пройденный грузом путь станет равным  $S$ . Начальное положение системы показано на рисунке 6.

Дано:

$$G_1 = m_1 g = 3mg; \quad G_2 = m_2 g = mg; \quad G_3 = m_3 g = mg; \quad \frac{R}{r} = 2; \quad i_{2x} = r\sqrt{2}; \quad S = S_1 = 1\text{ м}; \quad f = 0,1$$

Покажем на механической системе веса тел  $G_1, G_2, G_3$ ; линейные скорости  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ ; угловые скорости  $\omega_2, \omega_3$ ; силу трения груза 1  $F_{mp1}$ . Расчетная схема данной механической системы изображена на рисунке 6.

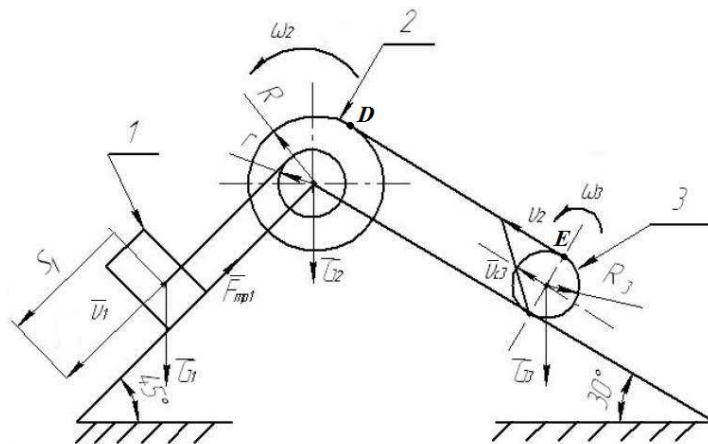


Рис. 6

Для решения применим теорему об изменении кинетической энергии системы в интегральном виде:

$$T - T_0 = \sum_{v=1}^n A(\vec{F}_v^e) + \sum_{v=1}^n A(\vec{F}_v^i),$$

где  $T_0$  и  $T$  - кинетическая энергия системы в ее начальном и конечном положениях;

$\sum_{v=1}^n A(\vec{F}_v^e)$  - сумма работ внешних сил, приложенных к системе;

$\sum_{v=1}^n A(\vec{F}_v^i)$  - сумма работ внутренних сил системы.

Для рассматриваемой системы, состоящей из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями:

$$\sum_{v=1}^n A(\vec{F}_v^i) = 0.$$

Так как в начальном положении система находится в покое, то  $T_0 = 0$ . Из этого следует, что уравнение примет вид:

$$T = \sum_{v=1}^n A(\vec{F}_v^e). \quad (1)$$

Кинетическая энергия рассматриваемой системы  $T$  в конечном ее положении равна сумме кинетических энергий тел 1, 2, 3:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (2)$$

Кинетическая энергия груза 1, который движется поступательно:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{3m v_1^2}{2}. \quad (3)$$

Кинетическая энергия блока 2, с заданным радиусом инерции, совершающего вращательное движение:

$$T_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2}; \quad (4)$$

$$I_2 = m_2 i_{2x}^2. \quad (5)$$

Запишем соотношения между скоростями и перемещениями для механической системы:

$$\left. \begin{aligned} \omega_2 &= \frac{v_1}{r}; \\ v_2 &= \omega_2 R = v_1 \frac{R}{r} = 2v_1; \\ v_{\tilde{N}_3} &= \frac{v_2}{2} = v_1; \\ \omega_3 &= \frac{v_{\tilde{N}_3}}{R_3} = \frac{v_1}{R_3}; \\ \varphi_2 &= \frac{S_1}{r}; \\ S_3 &= S_1; \\ \varphi_3 &= \frac{S_1}{R_3}; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где:  $\omega_2, \omega_3$  - угловые скорости тел;

$v_1, v_2$  - линейные скорости точек тел ( $v_2$  - скорость точки Д барабана равна скорости точки Е катка);

$v_{\tilde{N}_3}$  - скорость центра масс однородного катка 3;

$R, r, R_3$  - радиусы тел 2 и 3.

Используя уравнение взаимосвязи между параметрами (6), получаем:

$$T_2 = \frac{m_2 i_{2x}^2}{2} \cdot \frac{v_1^2}{r^2} = \frac{2mr^2 v_1^2}{2r^2} = mv_1^2. \quad (7)$$

Кинетическая энергия сплошного однородного цилиндра 3, совершающего плоское движение, складывается из энергии поступательного движения  $T_3^n$  центра тяжести катка и энергии его вращательного движения  $T_3^e$ :

$$T_3 = T_3^n + T_3^e. \quad (8)$$

Определим энергию поступательного движения цилиндра 3, используя уравнения (6):

$$T_3^n = \frac{m_3 v_{\tilde{N}_3}^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2}. \quad (9)$$

Определим энергию вращательного движения цилиндра 3, используя уравнения (6):

$$T_3^e = \frac{I_3 \omega_3^2}{2}. \quad (10)$$



Момент инерции для сплошного однородного цилиндра 3 равен:

$$I_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2} = \frac{m R_3^2}{2}; \quad (11)$$

Тогда:

$$T_3^a = \frac{I_3 \omega_3^2}{2} = \frac{m R_3^2 v_1^2}{2 \cdot 2 R_3^2} = \frac{m v_1^2}{4}. \quad (12)$$

Кинетическая энергия механической системы будет равна сумме кинетических энергий всех материальных точек, входящих в систему:

$$T = \frac{3m v_1^2}{2} + m v_1^2 + \frac{m v_1^2}{2} + \frac{m v_1^2}{4} = 3,25 m v_1^2 \quad (13)$$

Далее запишем сумму работ всех внешних сил, действующих на механическую систему. Ее составляет работа сил тяжести каждого тела  $A(\vec{G}_1)$ ,  $A(\vec{G}_2)$ ,  $A(\vec{G}_3)$  и работа силы трения груза 1  $A(\vec{F}_{\text{тр}1})$ .

$$\sum_{v=1}^n A(\vec{F}_v^e) = A(\vec{G}_1) + A(\vec{G}_2) + A(\vec{G}_3) + A(\vec{F}_{\text{тр}1}). \quad (14)$$

Работа груза 1 равна:

$$A(G_1) = G_1 S_1 = 3mgS_1 \sin 45^\circ. \quad (15)$$

Работа силы веса блока 2 будет равна нулю, так как блок 2 не совершает никаких перемещений:

$$A(G_2) = 0.$$

Учитывая уравнение связи, получаем, что работа силы веса однородного цилиндра 3 равна:

$$A(G_3) = G_3 S_3 \sin 30^\circ = -mgS_1 \sin 30^\circ. \quad (16)$$

Работа силы трения груза 1 равна:

$$A(\vec{F}_{\text{тр}1}) = -fG_1 S_1 = -3fmS_1 \cos 45^\circ. \quad (17)$$

Сумма работ всех внешних сил механической системы равна:

$$\sum_{v=1}^n A(\vec{F}_v^e) = 3mgS_1 \sin 45^\circ - mgS_1 \sin 30^\circ - 3fmS_1 \cos 45^\circ = 13,822mS_1. \quad (18)$$

Так как:

$$S_1 = 1m, \text{ то:}$$

$$\sum_{v=1}^n A(\vec{F}_v^e) = 13,822m.$$

Подставим результаты уравнений в уравнение и получим:

$$3,25v_1^2 = 13,822.$$

Выразим скорость груза 1  $v_1$  :

$$v_1 = \sqrt{\frac{13,822}{3,25}} = 2,06 \frac{i}{\ddot{n}}.$$

### **ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ**

1. По каким формулам определяются полярный, осевые и центробежные моменты инерции?
2. Что называется радиусом инерции?
3. Как формулируется теорема о моментах инерции относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса-Штейнера)?
4. Чему равен момент инерции твердого тела относительно произвольной оси, проходящей через данную точку?
5. Как записывается тензор моментов инерции?
6. Что собой представляет эллипсоид инерции?
7. Какие оси называются главными осями инерции?
8. Какие оси называются центральными осями инерции?
9. Запишите формулы для моментов инерции однородных тел.
10. Моменты инерции некоторых однородных тел (кольцо (обод), диск (цилиндр), стержень) относительно оси.
11. Как определить кинетическую энергию абсолютно твердого тела при поступательном движении, вращении вокруг неподвижной оси, плоском движении тела и сферическом движении?
12. Сформулируйте и запишите теорему об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме.
13. Сформулируйте и запишите теорему об изменении кинетической энергии точки в конечной форме.
14. Для какой системы изменения кинетической энергии не зависят от внутренних сил?
15. Понятие работы силы. Как определяется работа силы тяжести, силы упругости, силы трения скольжения, момента трения качения.

16. Что называется силовым полем?

17. Какое силовое поле называется потенциальным?

18. Чему равна работа сил, действующих на точки системы в потенциальном поле, на замкнутом перемещении?

19. Сформулируйте и запишите закон сохранения полной механической энергии.

### **САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА**

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач: [9]

№№ 38.2; 38.4; 38.12; 38.15; 38.20; 38.24; 38.27; 38.30; 38.39; 38.45; 38.51; 37.4; 37.12; 37.43; 37.52; 47.3; 47.7; 47.9; 47.11; 47.12.

### **РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА**

Выдача расчетно-графической работы Д10 на тему «Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы». [4]

### **Практическое занятие 5**

*Тема: Принцип возможных перемещений.*

#### **Цель занятия:**

- отработка практических навыков решения задач на равновесие несвободной механической системы при помощи принципа возможных перемещений.

#### **Вопросы для подготовки:**

1. Классификация аналитических связей .
2. Виртуальное перемещение материальной точки.
3. Дифференциал и вариация функции.
4. Условие идеальности связей.
5. Виртуальное перемещение системы материальных точек.
6. Принцип возможных перемещений.

**Методические рекомендации к решению задач по теме «Принцип возможных перемещений».**

1) изобразить схематически механическую систему, равновесие которой рассматривается, и все активные силы. включая силу трения, показать на чертеже;

2) согласно принципу освобожденности от связей, отбросить связи и заменить их реакциями связей;

3) выбрать обобщенную координату, сообщить системе виртуальное перемещение, написать выражение для виртуальной работы (или обобщенной силы) и , приравняв ее нулю, определить искомые величины.

### Пример решения задач по теме:

Задача.

Составная балка AD, лежащая на четырех опорах A, B, C, D, состоит из трех балок AM, MN, ND, шарнирно соединенных в точках M и N. К балке приложены сосредоточенные нагрузки  $P_1=250$  Н,  $P_2=300$  Н,  $P_3=500$  Н. Размеры балки показаны на рисунке 7. Определить реакцию опоры в точке C.

Запишем условия в краткой материальной форме:

Дано:  $P_1=250$ Н,  $P_2=300$ Н,  $P_3=500$ Н

Определить:  $R_C$

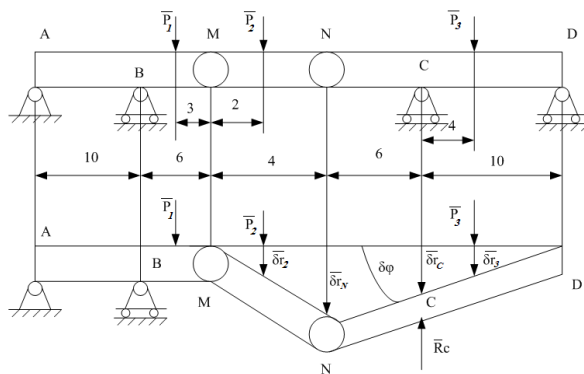


Рис.7

Решение:

Мысленно отбросим опору в точке C и заменим ее реакцией  $\vec{R}_C$  (рис. 7). Система приобретает одну степень свободы. Даем системе возможное переме-

щение в точке С в направлении  $\delta \vec{r}_c$ . Обозначим через  $\delta \vec{r}_2$  и  $\delta \vec{r}_3$  перемещение точек приложения сил  $\vec{P}_2$  и  $\vec{P}_3$  и через  $\delta \vec{r}_N$  - перемещение точки N.

Так как система находится в равновесии, то  $\sum \delta A_k^a = 0$ , то есть:

$$\delta A_{P_1} + \delta A_{P_2} + \delta A_{P_3} + \delta A_{R_C} = 0,$$

где  $\delta A_{P_1} = 0$  - так как нет перемещения точки приложения силы  $\vec{P}_1$ ,

$$\delta A_{P_2} = P_2 \cdot \delta r_2$$

$$\delta A_{P_3} = P_3 \cdot \delta r_3$$

$$\delta A_{R_C} = -R_C \cdot \delta r_C$$

Определим зависимости между перемещениями:

$$\frac{\delta r_2}{\delta r_N} = \frac{2}{4}, \text{ то есть } \delta r_2 = \frac{2}{4} \delta r_N = \frac{1}{2} \delta r_N;$$

$$\frac{\delta r_3}{\delta r_N} = \frac{6}{16}, \text{ то есть } \delta r_3 = \frac{6}{16} \delta r_N = \frac{3}{8} \delta r_N;$$

$$\frac{\delta r_C}{\delta r_N} = \frac{10}{16}, \text{ то есть } \delta r_C = \frac{10}{16} \delta r_N = \frac{5}{8} \delta r_N;$$

Таким образом, получаем:

$$P_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta r_N + P_3 \cdot \frac{3}{8} \cdot \delta r_N - R_C \cdot \frac{5}{8} \cdot \delta r_N = 0.$$

Так как  $\delta r_N \neq 0$ , то:

$$\frac{P_2}{2} + \frac{3P_3}{8} - \frac{5R_C}{8} = 0.$$

Откуда:

$$R_C = \frac{4P_2 + 3P_3}{5} = \frac{4 \cdot 300 + 3 \cdot 500}{5} = 540 \text{ Н.}$$

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какие материальные системы называют свободными и несвободными?
2. Что называют аналитическими связями?
3. Какие связи называют геометрическими и кинематическими?
4. Какие связи называют стационарными и нестационарными?
5. Какие связи называют удерживающими и недерживающими?
6. Какие связи называют голономными и неголономными?

7. Что называется возможным (виртуальным) перемещением?
8. Зависят ли виртуальные перемещения от действующих на материальную систему сил?
9. При каких связях одно из виртуальных перемещений материальной точки совпадает с ее действительным перемещением?
10. Как взаимосвязаны возможные и действительные перемещения системы?
11. Какие связи называют идеальными?
12. Сформулируйте принцип возможных перемещений.
13. Возможно ли применение принципа возможных перемещений к системам с неидеальными связями?

### **САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА**

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач: [9]

№№ 41.3; 41.10; 41.17; 42.8; 46.1; 46.3; 46.8;46.9; 46.10; 46.18; 46.19; 46.21; 46.22; 46.24; 46.25; 46.27. Литература:

#### **Практическое занятие 6**

*Тема 15: Метод кинетостатики. Принцип Даламбера*

#### **Цель занятия:**

- отработка практических навыков решения задач на равновесие материальной системы при помощи принципа Даламбера.

#### **Вопросы для подготовки:**

1. Силы инерции и моменты сил инерции, частные случаи приведения сил инерции. Метод кинетостатики.
2. Принцип Даламбера для точки
3. Принцип Даламбера для механической системы.
4. Определение работы, совершаемой силами инерции, при различных видах движения твердого тела.

**Методические рекомендации к решению задач по теме «Принцип Даламбера».**

- 1) выделить механическую систему, движение которой рассматривается;
- 2) выявить все активные силы изобразить их приложенными к механической системе на чертеже;
- 3) освободить систему от связей и заменить их реакциями связей;
- 4) добавить к полученной системе сил силы инерции и моменты сил инерции;
- 5) записать уравнения равновесия полученной системы сил и определить искомые величины.

Пример решения задач по теме:

С вертикальным валом АВ, вращающимся с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , жестко скреплен стержень OD длиной  $l$  и массой  $m_1$ , имеющий на конце груз массой  $m_2$  (Рис. 8)

Дано:

$$b_1=0,6\text{м}, b_2=0,2\text{м}, l=0,5\text{м}, \alpha=30^\circ, m_1=3\text{кг}, m_2=2\text{кг}, \omega=6\text{с}^{-1}.$$

Определить реакции подшипника В и подпятника А.

Расчетная схема имеет вид:

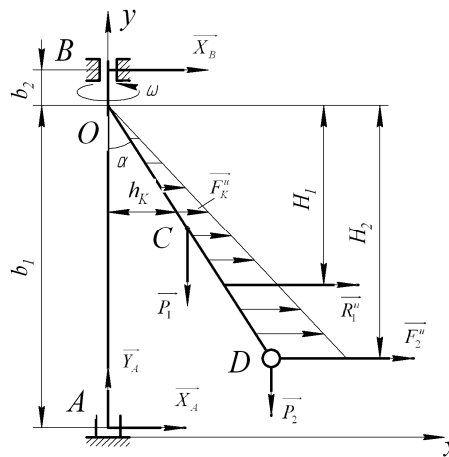


Рис.8

Решение:

Для определения искомых реакций рассмотрим движение механической системы, состоящей из вала АВ, стержня OD и груза, применим принцип Даламбера. Проведем вращающиеся вместе с валом оси Аху так, чтобы стержень

лежал в плоскости  $xu$ , и изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести  $P_1$  и  $P_2$ , составляющие  $X_A, Y_A$ , реакции подпятника и реакцию  $X_B$  подшипника.

Согласно принципу Даламбера присоединим к этим силам силы инерции элементов стержня и груза, считая груз материальной точкой. Так как вал вращается равномерно, то элементы стержня имеют только нормальные ускорения, направленные к оси вращения, а по модулю они равны

$a_{nk} = \omega^2 \cdot h_k$ , где  $h_k$  - расстояние элемента от оси. Тогда силы инерции будут направлены от оси вращения и по модулю будут равны:

$$F_k^u = \Delta m \cdot a_{nk} = \Delta m \cdot \omega^2 \cdot h_k, \text{ где } \Delta m - \text{масса элемента.}$$

Поскольку все  $F_k^u$  пропорциональны  $h_k$ , то эпюра этих параллельных сил образует треугольник и их можно заменить равнодействующей  $R_1^u$ , линия действия которой проходит через центр тяжести этого треугольника, т.е. на расстоянии  $H_1$  от вершины  $O$ , где  $H_1 = \frac{2}{3} H_2$ , ( $H_2 = l \cos \alpha$ ).

Как известно равнодействующая любой системы сил равна ее главному вектору, а по модулю главный вектор сил инерции стержня  $R_1^u = m_1 a_c$  где  $a_c$  - ускорение центра масс стержня; при этом, как и для любого элемента стержня,  $a_c = \omega^2 \cdot h_c = \omega^2 \cdot OC \cdot \sin \alpha = \omega^2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin \alpha$ . В результате получим :

$$R_1^u = m_1 \cdot \omega^2 \cdot \frac{l}{2} = 3 \cdot 36 \cdot 0,25 \cdot 0,5 = 13,5 \text{ Н.}$$

Аналогично для силы инерции  $F_2^u$  груза найдем, что она тоже направлена от оси вращения, а по модулю:  $F_2^u = m_2 \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin \alpha = 2 \cdot 36 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 18 \text{ Н.}$

Так как все действующие силы и силы инерции лежат в плоскости  $xu$ , то и реакция подпятника  $A$  и подшипника  $B$  тоже лежат в этой плоскости, что было учтено при их изображении.

По принципу Даламбера, приложенные внешние силы и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составляя для этой плоской системы сил три уравнения равновесия, получим:



$$\sum_{K=1}^n F_{Kx} = 0; X_A + X_B + R_1^e + F_2^e = 0; (1)$$

$$\sum_{K=1}^n F_{Ky} = 0; Y_A + P_1 + P_2 = 0; (2)$$

$$\sum_{K=1}^n M_B(F_K) = 0; X_A \cdot (b_1 + b_2) - P_1 \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin \alpha - P_2 \cdot l \cdot \sin \alpha + R_1^e \cdot (H + b_2) + F_2^e (H_2 + b_2) = 0 (3)$$

Подставив числовые значения всех заданных и вычисленных величин и решив эту систему уравнений, найдем искомые реакции.

Ответ:  $X_A = -11,8$  Н;  $Y_A = 49,1$  Н;  $X_B = -19,7$  Н/

Знаки указывают, что силы  $X_A$  и  $X_B$  направлены противоположно показанным на рисунке 8.

### **ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ**

1. В чём заключается принцип Даламбера для точки?
2. Каковы модуль и направление вектора силы инерции точки?
3. В чём заключается принцип Даламбера для системы?
4. Чему равен главный вектор сил инерции?
5. Чему равен главный момент сил инерции?
6. Силы инерции в частных случаях движения твёрдого тела: поступательного, вращательного вокруг оси, проходящей через центр масс, вокруг оси, не проходящей через центр масс, плоскопараллельного движения твёрдого тела.
7. Какая механическая система называется динамически уравновешенной?
8. В каком случае динамические составляющие подшипника и подпятника обращаются в нуль?

### **САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА**

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач: [9]

№№ 41.3; 41.10; 41.16; 41.17; 42.8; 46.10; 46.21; 46.22; 46.27; 47.1; 47.9; 47.11; 47.15.

### **Практическое занятие 7**

*Тема 16: Общее уравнение динамики*

**Цель занятия:**

- отработка практических навыков решения задач на общее уравнение динамики материальных систем.

**Вопросы для подготовки:**

1. Принципы механики, используемые при выводе общего уравнения механики.
2. Принцип Даламбера – Лагранжа.
3. Общее уравнение динамики.

**Методические рекомендации к решению задач по теме «Общее уравнение динамики».**

- 1) изобразить на чертеже все активные силы и силы трения, если они действуют;
- 2) к активным силам добавить силы инерции и моменты сил инерции, направив их противоположно линейным или угловым ускорениям;
- 3). сообщить системе столько независимых между собой возможных перемещений, сколько степеней свободы имеет система;
- 4) выразить все линейные и угловые ускорения через ускорение того тела, движение которому мы задаем;
- 5) выразить все линейные и угловые возможные перемещения через возможные перемещения того тела, движение которому мы задаем;
- 6) записать общее уравнение динамики и определить искомые величины.

**Пример выполнения задания Д 19.**

Тема: Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы».

Механическая система под действием силы тяжести приходит в движение из состояния покоя, необходимо определить ускорения всех тел, входящих в систему. Массами нитей пренебречь. Трение качения и силы сопротивления в подшипниках не учитывать. Каток 3 – однородный цилиндр. Схема механической системы показана на рисунке 9.

Дано:

$$G_1 = m_1 g = 3mg; \quad G_2 = m_2 g = mg; \quad G_3 = m_3 g = mg; \quad \frac{R}{r} = 2; \quad i_{2x} = r\sqrt{2}; \quad f=0,1.$$

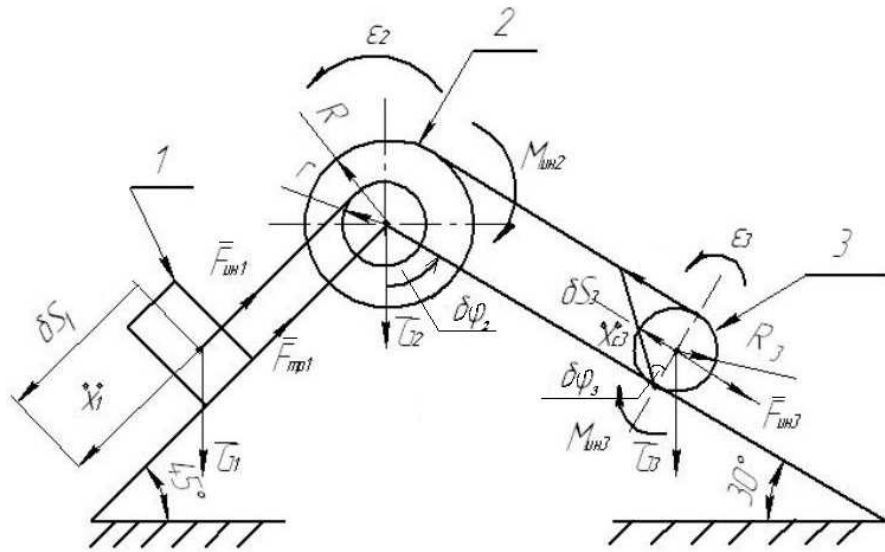


Рис.9

Решение:

Покажем на механической системе веса тел  $G_1, G_2, G_3$ ; ускорения груза 1  $\ddot{x}_1$  и центра цилиндра 3  $\ddot{x}_3$ ; углы поворотов тел, совершающих вращательное движение  $\delta\varphi_2, \delta\varphi_3$ ; угловые ускорения  $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ ; силу трения груза 1  $F_{mp1}$ ; силы инерции  $F_{ин1}, F_{ин3}$ ; моменты сил инерции  $M_{ин2}, M_{ин3}$ , как указано на рисунке 9.

Используем общее уравнение динамики:

Если механическая система, на которую наложены голономные, стационарные, идеальные связи, движется с ускорением, то, добавляя к действующей на неё активным силам и моментам этих сил, фиктивные силы инерции и моменты сил инерции, получим формально уравновешенную систему сил, к которой можно применить принцип возможных перемещений.

$$\sum_{v=1}^n (\vec{F}_v^e - m_v \vec{r}_v) \cdot \delta \vec{r}_v = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{v=1}^n \vec{F}_v^e \delta \vec{r}_v + \sum_{v=1}^n \vec{F}_v^{ei} \delta \vec{r}_v = 0, \quad (2)$$

где  $F_i^e$  - внешние силы, действующие на систему;

$F_i^{ин}$  - силы инерции, действующие на систему;

$\delta r_i$  - возможное перемещение.

Запишем все уравнения связей для механической системы:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{a_1}{r}; \\ a_{\tilde{N}_3} &= a_1; \\ \varepsilon_3 &= \frac{a_1}{R_3}; \\ \varphi_2 &= \frac{S_1}{r}; \\ S_3 &= S_1; \\ \varphi_3 &= \frac{S_1}{R_3}; \end{aligned} \right\}; \quad (3)$$

где:

$\varepsilon_2, \varepsilon_3$  - угловое ускорение катка 3;

$a_1, a_{c3}$  - линейные ускорения груза 1 и центра однородного катка 3.

Так как система приходит в движение из состояния покоя, направления ускорения тел соответствуют направлениям движения тел.

Покажем все заданные силы и приложим силы и моменты инерции. Сила инерции груза 1, движущегося поступательно равна:

$$F_{ин1} = m_1 a_1 = 3m a_1. \quad (4)$$

Сила инерции центра однородного цилиндра, центр которого движется поступательно, равна:

$$F_{ин3} = m_3 a_{c3} = m a_1; \quad (5)$$

Используя уравнение связи, определим момент сил инерции блока 2, совершающего вращательное движение:

$$M_{ин2} = I_2 \varepsilon_2 = m_2 i_{2x}^2 \varepsilon_2 = 2m r a_1. \quad (6)$$

Используя (3) и (6), определим момент сил инерции однородного цилиндра 3, совершающего вращательное движение:

$$M_{ин3} = I_3 \varepsilon_3 = \frac{m a_1 R_3}{2}. \quad (7)$$

Сообщив механической системе возможное перемещение  $\delta S$  и возможный угол поворота  $\delta \varphi$ , составим общее уравнение динамики.

Так как

$$A = F \delta S; \quad (8)$$

$$A = M\delta\varphi, \quad (9)$$

то общее уравнение динамики примет вид:

$$\delta A(G_1) + \delta A(F_{ei1}) + \delta A(F_{o\delta1}) + \delta A(G_2) + \delta A(\dot{I}_{ei2}) + \delta A(G_3) + \delta A(F_{ei3}) + \delta A(\dot{I}_{ei3}) = 0$$

$$G_1 \sin 45^\circ \cdot \delta S_1 - F_{ei1} \delta S_1 - F_{o\delta1} \delta S_1 - \dot{I}_{ei2} \delta\varphi_2 - F_{ei3} \delta S_3 - \dot{I}_{ei3} \delta\varphi_3 - G_3 \sin 30^\circ \cdot \delta S_3 = 0 \quad (11)$$

Учитывая уравнения (3) и исходные данные, полученные из условия задачи, получим:

$$3mg \sin 45^\circ \cdot \delta S_1 - 3ma_1 \delta S_1 - 3fmg \cos 45^\circ \cdot \delta S_1 - 2ma_1 \delta S_1 - ma_1 \delta S_1 - \frac{ma_1 \delta S_1}{2} - \frac{mg \delta S_1}{2} = 0; \quad (12)$$

Разделим каждое составляющее выражения на  $m$ ,  $\delta S_1$  и выразим ускорение груза 1  $a_1$ :

$$a_1 = 2,127 \frac{M}{c^2}.$$

Для нахождения ускорений остальных тел воспользуемся уравнениями связи:

$$\varepsilon_2 = \frac{2,127}{r} c^{-2};$$

$$a_{c_3} = 2,127 \frac{M}{c^2};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{2,127}{R_3} c^{-2}.$$

Результаты расчётов по данному методу представим в виде таблицы.

$a_1, \frac{M}{c^2}$	$\varepsilon_2, c^{-2}$	$a_{c_3}, \frac{M}{c^2}$	$\varepsilon_3, c^{-2}$
2,127	$\frac{2,127}{r}$	2,127	$\frac{2,127}{R_3}$

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое число степеней свободы?
2. Какие принципы используются при получении общего уравнения динамики?
3. Как записывается общее уравнение динамики для системы, подчиненной голономным, стационарным, удерживающим и идеальным связям?
4. Как определить работу, совершаемую силами инерции при различных видах движения твердого тела?

### САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач: [9]

№№ 47.1; 47.3; 47.4;47.5; 47.6; 47.9; 47.11; 47.12; 47.15 47.21; 47.24.

Выдача расчетно-графической работы Д19 на тему «Применение общего уравнения динамики к механической системе с одной степенью свободы».[4]

### **Практическое занятие 8**

*Тема: Уравнения Лагранжа II рода*

#### **Цель занятия:**

- отработка практических навыков составления дифференциальных уравнений движения механической системы в обобщенных координатах с помощью уравнений Лагранжа второго рода.

#### **Вопросы для подготовки:**

1. Обобщенные координаты.
2. Методы определения обобщенных сил.
3. Уравнения Лагранжа II рода.
4. Функция Лагранжа.
5. Достоинства уравнений Лагранжа II рода.

**Методические рекомендации к решению задач по теме «Уравнения Лагранжа второго рода ».**

Уравнения Лагранжа второго рода представляют собой дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах. Для составления уравнений необходимо:

- 1) проанализировать состав рассматриваемой механической системы, в которую могут входить материальные точки и тела;
- 2) определить силы, приложенные к точкам и телам механической системы; выявить среди них консервативные силы;
- 3) определить число степеней свободы механической системы;
- 4) выбрать обобщенные координаты, зная координаты материальных точек и точек приложения сил к телам, входящих в систему;

- 5) выразить координаты точек приложения сил к телам и координаты материальных точек системы через координаты обобщенные;
- 6) определить обобщенные скорости;
- 7) определить кинетическую энергию механической системы с учетом выбранных обобщенных координат и скоростей;
- 8) определить частные производные от кинетической энергии по обобщенным координатам;
- 9) определить частные производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям;
- 10) определить производные по времени от частных производных от кинетической энергии по обобщенным скоростям;
- 11) определить обобщенные силы как коэффициенты перед вариациями обобщенных координат в выражении для виртуальной работы;
- 12) составить уравнения Лагранжа второго рода и определить искомые величины.

**Пример решения задач по теме:**

**«ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА К ИССЛЕДОВАНИЮ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ»**

Уравнения Лагранжа второго рода – дифференциальные уравнения второго порядка в обобщенных координатах. Они дают единый и достаточно простой метод решения задач динамики для любых как угодно движущихся голономных и стационарных систем. Число уравнений не зависит от числа входящих в механическую систему точек или тел, а зависит от числа степеней свободы.

Силы, действующие на систему, представлены в виде обобщенных сил, куда входят только внешние силы, а все реакции идеальных связей автоматически исключаются и их можно не показывать на чертеже. Также, если на систему действуют силы трения, то их включают в число внешних сил.

Механическая система под действием силы тяжести приходит в движение из состояния покоя, необходимо определить ускорения всех тел, входящих в систему.

В данном методе решения задачи воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \quad (1)$$

где :  $Q$  - обобщенные силы;

$T$  - кинетическая энергия механической системы;

$q$  - обобщенная координата;

$\dot{q}$  - обобщенная скорость.

Покажем на механической системе веса тел  $G_1, G_2, G_3$ ; обобщённую скорость  $\dot{q}_1$  обобщённую координату  $\delta q_1$ . Схема механической системы указана на рисунке 10.

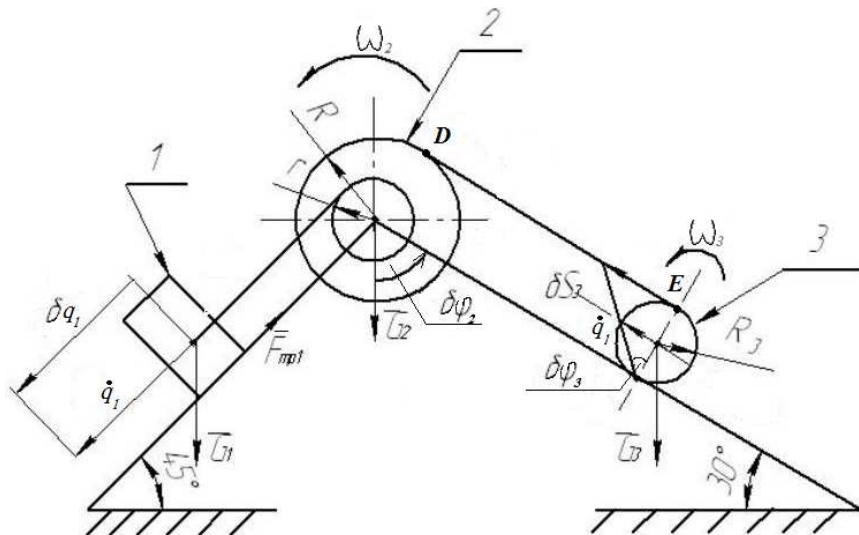


Рис.10

Запишем уравнения взаимосвязи между параметрами:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_1 &= a_1; \\ \dot{q}_1 &= v_1; \\ \omega_2 &= \frac{\delta \dot{q}_1}{r_2}; \\ v_2 &= \omega_2 R_2 = \frac{v_1 R_2}{r_2} = 2v_1; \\ \omega_3 &= \frac{v_2}{2R_3} = \frac{v_1}{R_3}; \\ v_{N3} &= \omega_3 r_3 = v_1 = \dot{q}_1; \\ \delta \varphi_2 &= \frac{\delta S_1}{r_2}; \\ \delta q_1 &= \delta S_1; \\ \delta S_{C3} &= \delta q_1 = \delta S_1; \\ \delta \varphi_3 &= \frac{\delta S_1}{R_3}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где:  $\omega_2, \omega_3$  - угловые скорости тел;



$v_1, v_2$  - линейные скорости точек тел;

$v_{N_3}$  - скорость центра масс однородного катка 3;

$R, r, R_3$  - радиусы тел 2 и 3.

Кинетическая энергия рассматриваемой системы  $T$  в конечном ее положении равна сумме кинетических энергий тел 1, 2, 3:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (3)$$

Кинетическая энергия груза 1, который движется поступательно:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{3m v_1^2}{2}. \quad (5)$$

Кинетическая энергия блока 2, с заданным радиусом инерции, совершающего вращательное движение:

$$T_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2}; \quad (6)$$

$$I_2 = m_2 i_{2x}^2. \quad (7)$$

Используя уравнение (2), получаем:

$$T_2 = \frac{m_2 i_{2x}^2}{2} \cdot \frac{v_1^2}{r^2} = \frac{2mr^2 v_1^2}{2r^2} = m v_1^2. \quad (8)$$

Кинетическая энергия сплошного однородного цилиндра 3, совершающего плоское движение, складывается из кинетической энергии поступательного движения  $T_3^n$  центра тяжести катка и кинетической энергии его вращательного движения  $T_3^e$ :

$$T_3 = T_3^n + T_3^e. \quad (9)$$

Определим кинетическую энергию поступательного движения цилиндра 3, используя уравнение связи:

$$T_3^n = \frac{m_3 v_{N_3}^2}{2} = \frac{m v_1^2}{2}. \quad (10)$$

Определим энергию вращательного движения цилиндра 3, используя уравнение связи:

$$T_3^e = \frac{I_3 \omega_3^2}{2}. \quad (11)$$

Момент инерции для сплошного однородного цилиндра 3 равен:

$$I_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2} = \frac{m R_3^2}{2}; \quad (12)$$

$$T_3^a = \frac{I_3 \omega_3^2}{2} = \frac{mR_3^2 v_1^2}{2 \cdot 2R_3^2} = \frac{mv_1^2}{4}. \quad (13)$$

Тогда кинетическая энергия механической системы будет равна:

$$T = \frac{3mv_1^2}{2} + mv_1^2 + \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_1^2}{4} = 3,25mv_1^2 \quad (14)$$

Или кинетическая энергия механической системы в обобщенных координатах:

$$T = 3.25mv_1^2 = 3.25m\dot{q}_1^2, \quad (15)$$

Дифференцируя выражение (15) по обобщенной координате  $q_1$ ,  $\dot{q}_1$  и времени  $t$  получим:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = 6.5m\dot{q}_1;$$

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = 6.5m\ddot{q}_1.$$

Обобщенная сила  $Q$  равна отношению алгебраической сумме элементарных работ всех внешних сил, действующих на систему  $\sum_{v=1}^n \delta A(\vec{F}_v^e)$  к обобщенной координате  $\delta q_1$ :

$$Q = \frac{\sum_{v=1}^n \delta A(\vec{F}_v^e)}{\delta q_v}; \quad (17)$$

$$\sum_{v=1}^n \delta A(\vec{F}_v^e) = \delta A(\vec{G}_1) + \delta A(\vec{G}_2) + \delta A(\vec{G}_3) + \delta A(\vec{F}_{\delta \delta 1}); \quad (18)$$

Работа груза 1 равна:

$$\delta A(G_1) = G_1 \delta q_1 = 3mg \delta q_1 \sin 45^\circ. \quad (19)$$

Работа веса блока 2 будет равна нулю, так как блок 2 не совершает никаких перемещений:

$$\delta A(G_2) = 0.$$

Учитывая уравнения связи, получаем, что работа веса однородного цилиндра 3 равна:

$$\delta A(G_3) = -mg\delta q_1 \sin 30^\circ \quad (20)$$

Работа силы трения груза 1 равна: (21)

$$\delta A(F_{\text{тр}1}) = -fG_1\delta q_1 \cos 45^\circ = -3fm\delta q_1 \cos 45^\circ. \quad (22)$$

Сумма элементарных работ механической системы равна:

$$\sum_{v=1}^n \delta A(\vec{F}_v^e) = 3mg\delta q_1 \sin 45^\circ - mg\delta q_1 \sin 30^\circ - 3fm\delta q_1 \cos 45^\circ = 13.822m\delta q_1. \quad (23)$$

Подставив (23) в (17), получим значение обобщенной силы  $Q$ :

$$Q = \frac{13.822m\delta q_1}{\delta q_1} = 13.822m. \quad (24)$$

Подставим (16) и (24) в (1) получим уравнения Лагранжа второго рода в виде:

$$6.5m\ddot{q}_1 = 13.822m.$$

Из уравнения выразим обобщенное ускорение груза 1:

$$\ddot{q}_1 = a_1 = 2.126 \frac{m}{c^2};$$

Для нахождения ускорений остальных тел подставим значение  $\ddot{q}_1$  в уравнения взаимосвязи между параметрами:

$$\ddot{q}_2 = \frac{2.126}{r} c^{-2};$$

$$\ddot{q}_3 = 2.126 \frac{m}{c^2}; \quad \ddot{q}_4 = \frac{2.126}{R_3} c^{-2}.$$

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называется обобщенными координатами?
2. Что называется обобщенными силами?
3. Запишите уравнения Лагранжа II рода.
4. Какой физический смысл имеют уравнения Лагранжа II рода.
5. Что называется функцией Лагранжа.
6. Какой физический смысл имеет функция Лагранжа?
7. Запишите уравнения Лагранжа II рода для потенциальных систем.

8. Порядок составления уравнений Лагранжа II рода.

9. Достоинства уравнений Лагранжа II рода.

### **САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА**

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач: [9]

№№ 48.2; 48.3; 48.4; 48.6; 48.7; 48.11; 48.21; 48.26; 48.27; 48.28; 48.35; 48.36; 48.37; 48.39; 48.48 .

### Библиографический список

1. Бутенин Н.В. и др. Курс теоретической механики: учеб. пособие: В 2 т.: Рек. Мин. обр. РФ - СПб.: Лань, 2004. - 730 с.: (и предыдущие издания).
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник. Рек. Мин. обр. РФ - М.: Высшая школа, 2003, 2006 – 416с. (и предыдущие издания).
3. Яблонский А.А. и др. Курс теоретической механики. учеб. пособие: Рек. Мин. обр. РФ - СПб.: Лань, 2004, -765 с.: (и предыдущие издания).
4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие: Доп. Мин.обр. СССР / Ред. А.А. Яблонский/. - М.: Интеграл-Пресс, 2004. - 382 с. (и предыдущие издания).
5. Диевский В.А. Теоретическая механика: сб.заданий: Рек. УМО/ - СПб.: Лань, 2007. -192 с.
6. Диевский В.А. Теоретическая механика: учеб. пособие: Рек. УМО/ - СПб.: Лань, 2005. -320 с.
7. Аркуша А.И. Руководство к решению задач по теоретической механике: Учеб. пособие: рек.. Мин.обр.РФ/ М.: Высш. шк. 2002. – 336 с.
8. Цывильский В.Л. Теоретическая механика: Учеб. Рек. Мин. обр. РФ - М.: Высшая школа, 2001, 2008. – 319с.
9. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие. – М.: Наука, 2003 (и предыдущие издания).

**Луганцева Татьяна Анатольевна,**  
доцент кафедры АППиЭ (механика) АмГУ, канд. техн. наук

**Труфанова Т.В.,**  
доцент кафедры МПиА АмГУ, канд. техн. наук

**Динамика.** Учебное пособие

---

Изд-во АмГУ. Подписано к печати \_\_\_\_\_ . Формат 60x84/16. Усл. печ. л.5,3

Тираж \_\_\_\_\_. Заказ \_\_\_\_\_ .

Отпечатано в типографии АмГУ.